Universitetet i Sørøst-Norge

Fakultet for humaniora, idretts- og utdanningsvitenskap

Mastergradsavhandling

Begynneropplæring | MG1BO3

Vår 2024

Fam Alexandra Gogstad-Andersen og Mathilde Forren-Vik

«Sånn her lager jeg en liten rar høne ... Jeg bare tegner et nebb, et nebb med bein»

En kvalitativ studie om hvordan elever på 2. trinn anvender representasjoner i arbeidet med problemløsning

Universitetet i Sørøst-Norge
Fakultet for humaniora, idretts- og utdanningsvitenskap
Institutt for pedagogikk
Postboks 4
3199 Borre
http://www.usn.no

Denne avhandlingen representerer 45 studiepoeng

Sammendrag

Dette kvalitative prosjektet undersøker hvordan elever på 2. trinn anvender representasjoner i arbeidet med problemløsningsoppgaver. Hensikten med prosjektet er å få mer inngående kunnskap om elever i begynneropplæringen, og hvordan de anvender representasjoner, og overgangene mellom dem. Samtidig finne ut hvor hensiktsmessig denne bruken er i forhold til gitte problemløsningsoppgaver. Vår forskning utvider forskningsfeltet ved å ta for seg en mer detaljert beskrivelse av elvenes bruk av representasjoner. For å finne ut dette har vi undersøkt problemstillingen; *Hvordan anvender elever i begynneropplæringen ulike representasjoner i arbeidet med problemløsningsoppgaver?*

Datamaterialet er innhentet gjennom deltakende observasjon, med lydopptak og billedtakning. Utvalget består av tolv elever på 2. trinn, fordelt på fire grupper. Elevene er observert samtidig som de samarbeidet om å løse to problemløsningsoppgaver. Empirien er analysert ved bruk av tematisk analyse. Richard Lesh (1981) sin modell for kategorisering av representasjoner ble benyttet som utgangspunkt for kategorier til analysen.

Resultatene viser at elevene anvender og oversetter mellom flere representasjoner i oppgaveløsningen. Elevene tolket ofte oppgavetekstene basert på egne premisser, og brukte det muntlige språket til å forhandle om mening med hverandre innad i gruppen. Gruppene anvendte konkreter og tegning i løsningsprosessen, både tilfeldig og systematisk. Symboler ble mindre brukt enn andre representasjoner. Resultatene viser også at noen av de mest brukte overgangene var mellom oppgaveteksten og konkretene, og bruk av muntlig språk som mellomledd. En vurdering av representasjonenes hensiktsmessighet viser at konkretenes synlighet varierte ut fra deres abstraksjonsnivå, noen konkreter hadde en tydeligere mening enn andre. Effektiviteten varierte i stor grad, noen var mer tidskrevende enn andre. Representasjonenes generalitet varierte også, basert på om de kunne benyttes i flere sammenhenger eller ikke.

Innholdsfortegnelse

Forord

Masteroppgaven markerer slutten på fem innholdsrike år. Gjennom studiet har vi erfart at vi trives spesielt godt sammen med de yngste elevene i skolen. Vi har også fått innsikt i viktigheten av læreryrket. Vi har opplevd glede, samhold, mestring og utvikling, men vi har også kjent på utfordringer. Særlig det siste året med masteroppgaven har vært krevende, men også lærerikt og spennende. Det har vært utfordrende å ikke ha oversikt over neste steg i prosessen, fordi veien ble til mens vi gikk. I avslutningsfasen ser vi heller på det med stolte øyne, vi er stolte over å ha kommet oss gjennom dette året. Vi er takknemlige for at vi har hatt hverandre å støtte oss på gjennom det siste året. Det har hjulpet å være to om å skrive en så stor oppgave, og kunne diskutere og ta valg sammen. Vi har motivert, beroliget og støttet hverandre.

Vi vil takke alle som har bidratt i prosessen med denne oppgaven. Først og fremst vil vi rette en takk til andreklassingene som stilte opp som informanter, de var modige som turte å bli med «studentene» ut av det ordinære klasserommet. Vi vil også takke kontaktlæreren deres for godt samarbeid, og god hjelp under innhenting av datamateriale. Deretter vil vi takke vår veileder Bente Helgeland Sannæs for god hjelp, trygghet og konstruktive tilbakemeldinger gjennom hele prosessen. Vi takker medstudenter og veiledergruppen for å ha vist forståelse når ting har vært vanskelig, og at vi har fått lov til å dele frustrasjon. Sist, men ikke minst vil vi takke familie og venner som har stått sammen med oss, og vært emosjonell støtte i en lang prosess.

Horten, juni 2024

Fam Alexandra Gogstad-Andersen og Mathilde Forren-Vik

1 Innledning

«Skal jeg bygge en ku?». Utsagnet kom fra en elev som liknet et stort spørsmålstegn med konkreter mellom fingrene. I en tidligere praksisperiode ga vi elever på småtrinnet en problemløsningsoppgave. Den spurte etter hvor mange kuer og høner som befant seg på en gård med et gitt antall bein. Vi observerte at elevene syntes det var utfordrende å anvende abstrakte konkreter, og forstå at de kunne brukes til å representere dyrebein. Oppgaven ble gitt både skriftlig og muntlig. Vi observerte at overgangen fra den skriftlige/muntlige oppgaven, til å representere svaret ved hjelp av konkreter viste seg å være utfordrende. Dette kan skyldes at elevene hadde lite erfaring med konkreter fra tidligere. Denne situasjonen var begynnelsen på vår interesse for bruk av konkreter i undervisningen, og gjennom masteroppgaven utviklet interessen seg videre til å innebære andre representasjoner.

1.1 Aktualisering

Ludvigsen-utvalget understreker i utredningen *Fremtidens skole*, at samfunnet er i endring og utvikling, som krever en fornyelse av skolens innhold (NOU 2015:8, s. 7). Skolen må legge til rette for utvikling av kompetanser som er til nytte i et utviklende samfunn. «Elevenes kunnskap om og forståelse av det de har lært, hvordan de kan bruke det de har lært, og når de kan bruke det, er viktig for å oppnå kompetanse» (NOU 2015:8, s. 10). Å lære ulike algoritmer i matematikkundervisningen, er lite hensiktsmessig dersom elevene ikke mestrer å anvende dem i situasjoner de møter utenfor skolen. *Fagfornyelsen* (LK20) ble utarbeidet med grunnlag i utredningen fra Ludvigsen-utvalget (Ogden, 2020, s. 210). Fagfornyelsen inneholder en definisjon av kompetansebegrepet, som ligger til grunn i utviklingen av kompetansemål i fagplanene (Kunnskapsdepartementet, 2017).

> Kompetanse er å kunne tilegne seg og anvende kunnskaper og ferdigheter til å mestre utfordringer og løse oppgaver i kjente og ukjente sammenhenger og situasjoner. Kompetanse innebærer forståelse og evne til refleksjon og kritisk tenkning. (Kunnskapsdepartementet, 2017)

Definisjonen legger vekt på at kompetanse både innebærer å lære, men også kunne bruke de kunnskaper og ferdigheter elevene tilegner seg. Vi kan se at forslaget fra Ludvigsen-utvalget og den endelige definisjonen, inneholder flere likhetstrekk.

Med Fagfornyelsen kom også et nytt begrep, *dybdelæring* (Utdanningsdirektoratet, 2019b). Ludvigsen-utvalget trekker frem at «utvikling av kompetanse og dybdelæring [er] tett forbundet med hverandre. Kompetanseoppnåelse forutsetter dybdelæring» (NOU 2015:8, s. 10). Dybdelæring definert av Utdanningsdirektoratet:

> Vi definerer dybdelæring som det å gradvis utvikle kunnskap og varig forståelse av begreper, metoder og sammenhenger i fag og mellom fagområder. Det innebærer at vi reflekterer over egen læring og bruker det vi har lært på ulike måter i kjente og ukjente situasjoner, alene eller sammen med andre. (Utdanningsdirektoratet, 2019a)

Skaalvik og Skaalvik (2018, s. 198), og Sønstabø (2014, s. 21) beskriver at dybdelæring handler om å gi elevene verktøy slik at de mestrer å se sammenhenger. Videre legger de vekt på at undervisningen må tilpasses til elevene, for at de skal kunne ha utbytte av den. Sønstabø (2014, s. 21) legger til viktigheten av å møte elevene «der de er», og bruke kompetansen de allerede innehar. Hun presiserer at «[d]et er med respekt for denne kompetansen vi skal bygge broen som går fra barndommen til skolealder» (Sønstabø, 2014, s. 21). Det vil si at læreren bør legge opp undervisningen tilpasset barnas nivå, og den kompetansen, og de erfaringene elevene har med seg inn i skolen. Dermed kan det være hensiktsmessig å bygge broen mellom deres tidligere erfaringer og matematikken, på en måte de har evne til å forstå. For eksempel gjennom å vise elevene uttrykksformer de kjenner til, og har forutsetninger for å mestre (Alseth & Røsseland, 2014, s. 120). Det vil si at når barna møter matematiske emner gjennom ulike representasjoner, kan det sees på som dybdelæring.

Et av de seks kjerneelementene i læreplanen for matematikk handler om representasjon og kommunikasjon, og der presiseres det at «elevene må kunne oversette mellom matematiske representasjoner og dagligspråket og veksle mellom ulike representasjoner» (Kunnskapsdepartementet, 2019). Sammenhengen mellom kunnskaper og hverdagslivet kan skapes gjennom å la elevene arbeide med problemløsningsoppgaver som utfordrer dem til å veksle mellom ulike representasjoner (Behr et al., 1983, s. 103). Elever som kun er vant til å løse oppstilte matematikkoppgaver vil mest sannsynlig komme til kort, fordi hverdagen byr på andre representasjoner enn de møter i skolen. I hverdagen vil ikke situasjonene komme som oppstilte matematikkstykker, men heller i andre typer skriftlige eller muntlige representasjoner. Elevene går på skolen blant annet for å lære å mestre livet, derfor er det viktig at undervisningen på skolen samsvarer med det de møter i hverdagen utenfor (Kunnskapsdepartementet, 2019).

1.2 Valg av tema og problemstilling

Gjennom praksis i utdanningen har vi utviklet en interesse for opplæring av de minste elevene. Vi har oppdaget begynneropplæringens særegenhet, med tanke på undervisning og tilpasning av aktiviteter. Matematikkundervisningen og praksis i utdanningen, har gjort oss nysgjerrige på å finne ut mer om bruk av representasjoner. Eleven fra praksis som ble nevnt innledningsvis, var begynnelsen på vår interesse. Vi ønsket bredere og mer inngående kunnskap om hvordan vi som lærere kan legge til rette for bedre bruk av konkreter hos elevene. Hensikten med vårt prosjekt er å undersøke hvordan elever anvender ulike representasjoner. Dette vil vi gjøre gjennom å tilegne oss kunnskap om tidligere forskning og teori på feltet, og erfaringer gjennom å observere barna når de løser oppgaver. Tidligere studier som Monoyiuo med kolleger (2007), og Palmér og van Bommel (2017) har undersøkt elevenes valg av representasjoner, og hvordan valg av representasjon henger sammen med løsningene elevene kommer frem til. Studien av Carpenter med kolleger (1993), som Alseth og Røsseland (2014, s. 120) har trukket frem, undersøkte sammenhengen mellom hvordan små barn anvendte konkreter, og hvordan det påvirket hvor mye de fikk til i diverse problemløsningsoppgaver. Resultatene fra de nevnte studiene er presentert kvantitativt, i form av tall, brøker og prosenter. Vi kommer til å anvende en kvalitativ analyse, og presentere dataene kvalitativt. I likhet med de nevnte studiene skal vi undersøke hvilke representasjoner elevene tar i bruk og hvordan de anvendes, men vi vil gå mer i dybden på *hvordan*. I motsetning til deres fokus på elevenes svar, skal vi undersøke om bruken er hensiktsmessig i forhold til de gitte oppgavene. Vi vil hente inspirasjon fra tidligere forskning til å kategorisere ulike representasjoner. Tidligere forskning utdypes mer i kapittel 1.4.

For å undersøke dette ønsker vi å besvare følgende problemstilling:

> *Hvordan anvender elever i begynneropplæringen ulike representasjoner i arbeidet med problemløsning?*

For å avgrense og spesifisere hva vi ønsker å svare på i problemstillingen, har vi utformet følgende forskningsspørsmål:

1. Hvordan anvender elevene representasjonene erfaringsbaserte situasjoner, manipulerbare modeller, ikoniske fremstillinger, muntlig språk og skriftlig språk?
2. I hvilken grad er elevenes bruk av representasjoner hensiktsmessig, i arbeidet med to problemløsningsoppgaver?

1.3 Begrepsavklaring

1.3.1 Anvende

Å anvende innebærer i vår oppgave at elevene tar i bruk ulike representasjoner. Bruken innebærer både når elevene berører, omtaler og viser til diverse representasjoner. Det er utelukkende det vi kan observere at elevene gjør, og inkluderer dermed ikke tankene deres.

1.3.2 Begynneropplæring

Vi baserer vår forståelse av begrepet begynneropplæring på Palm med kolleger (2018, s. 13) sin beskrivelse. Deres beskrivelse inkluderer både overgangen mellom barnehage og skole, og deretter opplæringen fra første til fjerde trinn. Videre innebærer deres beskrivelse blant annet valg av arbeidsmetoder og undervisning. Det handler blant annet om å møte elevene «der de er» (Sønstabø, 2014, s. 21). Begynneropplæring kommer frem i vår oppgave gjennom bruk av elever på 2. trinn, samt tilpasning av representasjoner og oppgaver.

1.3.3 Ulike representasjoner

«En representasjon er noe som står for noe annet» (Hana, 2014, s. 131). I matematikken handler det om ulike måter å vise matematiske idéer og sammenhenger på (Kunnskapsdepartementet, 2019). Eksempelvis gjennom bruk av konkreter, tegning, matematiske symboler eller muntlig språk.

1.3.4 Problemløsningsoppgaver

Klaveness med kolleger (2019) henviser til Pólya (1971) når de presiserer at et problem vil forutsette at personen som skal løse det, ikke direkte ser en mulig fremgangsmåte. Ifølge Niss og Jensen (2002, s. 201) karakteriseres en problemløsningsoppgave av et spørsmål, som krever en matematisk operasjon for å finne løsningen.

1.3.5 Hensiktsmessig

I problemstillingen henviser begrepet hensiktsmessig til en vurdering av en representasjons egenskaper, og hvorvidt representasjonen er formålstjenlig til oppgaven som skal løses. Vi har valgt å bruke Kilpatrick med kolleger (2001) sine fem egenskaper til å vurdere hvor formålstjenlig representasjonene er, disse forklares og utdypes i kapittel 2.2.3, *Representasjonenes egenskaper*.

1.4 Tidligere forskning

Richard Lesh har vært fremtredende innen forskning på representasjoner og overgangene mellom dem, både alene og sammen med kolleger (Behr et al., 1983; Lesh, 1981; Lesh et al., 1987). Flere artikler har presentert fem distinkte representasjonssystemer, som oversatt til norsk av Gert Hana (2014, s. 144), er *erfaringsbaserte situasjoner*, *muntlig språk*, *manipulerbare modeller*, *ikoniske fremstillinger* og *skriftlig språk* (Lesh, 1981; Lesh et al., 1987). Representasjonssystemene anvendes til å kategorisere representasjoner i vårt prosjekt, de forklares og utdypes i kapittel 2.2.1, *Kategorisering av representasjoner*. En kartlegging som ble gjennomført av Bjørnar Alseth i 1998, kom frem til fem representasjonsformer, *en direkte modell*, *en konkret modell*, *en billedlig representant*, *ikoner* og *symboler*. Det er en kartlegging av matematikkforståelse hos elever på småskoletrinnet. Kartleggingen legger vekt på matematiske emner som var viktige i læreplanen L97. Grunnlaget for kartleggingen er «utprøving av læringsaktiviteter knyttet til prosjektet og [...] erfaringer fra klasseromsforskning i mange land knyttet til den første matematikkopplæringen» (Alseth, 1998, s. 7).

Monoyiou med kolleger (2007) har presentert et utdrag fra en større studie. De har gjennomført en studie hvor de har sett nærmere på elever og læreres bruk av representasjoner når de arbeider med problemløsningsoppgaver. Studiens deltakere besto av 107 elever på 5. og 6. trinn, samt 20 lærere. Utdraget trekker frem tre av oppgavene som elevene gjennomførte, hvor to av disse inneholdt deloppgaver. Deloppgavene la opp til ulik bruk av representasjoner. Den første deloppgaven inneholdt gjerne mindre tall som ga elevene mulighet til å anvende tegning for å finne løsningen. Den andre deloppgaven inneholdt større tall, som i utgangspunktet krevde at elevene utformet en generell formel med matematiske symboler til utregning. En eksempel-oppgave fra studien handlet om figurtall, hvor oppgaven presenterte de fire første løsningene. I første deloppgave ble elevene bedt om å finne den femte løsningen, som enkelt kunne gjøres ved tegning. Andre deloppgave spurte etter hvordan figur 20 ville se ut, og denne ville enklere kunne besvares ved hjelp av en formel. I elevbesvarelsene fant de fire ulike representasjons-former, «symbolic», «pictoral», «diagramic» og «verbal» (Monoyiou et al., 2007, s. 144). Funnene deres viste at elevene heller valgte mer konkrete representasjonsformer (tegning), fremfor de abstrakte. Deres bruk av tegning førte ikke nødvendigvis alltid til riktig svar, fordi de var lite hensiktsmessig for å løse den andre deloppgaven. Monoyiou med kolleger (2007) konkluderte med at elevene ville hatt behov for å anvende ikoniske representasjoner før de mestret å anvende de symbolske. De uttrykker videre at læreren bør gi støtte for å hjelpe elevene til å mestre overgangen fra de mer konkrete ikonene, til de mer abstrakte matematiske symbolene. Videre trekker de også frem viktigheten av at elevene lærer å anvende mange forskjellige representasjoner, samt refleksjon rundt når de vil være hensiktsmessige (Monoyiou et al., 2007, s. 149).

En annen studie som har undersøkt hvilke representasjoner elevene tar i bruk, og hvordan det henger sammen med løsningene de kommer frem til, er Palmér og van Bommel (2017). De har gjennomført en større studie med 87 svenske 5-6 åringer som løste seks ulike problemløsnings-oppgaver. I artikkelen har de presentert et utdrag som viser til én av oppgavene elevene utførte, som var en kombinatorikkoppgave. Barna i utdraget har arbeidet med å plassere tre ulike bamser på hver sin plass i en treseters sofa. Palmér og van Bommel (2017) anvender Hughes (1986) sine begreper «pictographic» og «iconic» om elevenes representasjoner. De har plassert barnas tegninger av bamsekonkretene under kategorien *piktografiske* representasjoner, og sirkler, linjer og hjerter hører til kategorien *ikoniske* representasjoner. Det fremkommer at uttrykksformene piktografisk og/eller ikonisk ble benyttet av alle elevene som deltok i studien (Palmér & van Bommel, 2017, s. 52). I tidligere studier på barns representasjoner av mengde, har piktografiske og ikoniske representasjoner blitt forbundet med et lavere utviklingsnivå, fordi det viser at barna forholder seg til hvert enkelt objekt i stedet for den totale mengden (Sinclair, Siegrist & Sinclair, 1983, referert i Palmér & van Bommel, 2017, s. 53). Derfor mener Palmér og van Bommel (2017, s. 54) at deres resultater skiller seg fra tidligere forskning på oppgaver om mengde. De konkluderer med at det er en viss sammenheng mellom hvilke representasjoner elevene benytter, og hvilke svar de kommer frem til.

Den samme studien blir også presentert i Palmér og van Bommels (2019) bok *Problemlösning som utgångspunkt*. Palmér og van Bommel (2019, s. 67) anvender English (1996) sine begreper *slumpvis*, *viss systematik* og *systematisk*, når de kategoriserer elevenes systematikk i oppgave-løsningen. Vi velger å anvende de norske oversettelsene; *tilfeldig*, e*n viss systematikk* og *systematisk* videre i oppgaven. Tilfeldig utprøving innebar i Palmér og van Bommels (2019, s. 67) studie at elevene ikke anvendte tidligere kombinasjoner i arbeidet med å finne flere. Et av funnene deres var dermed at den samme kombinasjonen kunne forekomme flere ganger når elevene prøvde tilfeldige kombinasjoner. Når de beskriver begrepet en viss systematikk, anvender de eksempler fra egen studie som innebærer at elevene lar en av bamsene sitte på den samme plassen, og bytter plass på de to andre. Innenfor denne kategoriseringen er det viktig å presisere at elevene ikke vil arbeide på denne måten gjennom hele oppgaveløsningen. Elever som arbeider på en slik måte gjennom hele prosessen, vil arbeide systematisk (Palmér & van

Bommel (2019, s. 67-68). For de yngste elevene vil arbeidet med kombinasjonsoppgaver gjerne bestå av tilfeldige utprøvinger, men vil gradvis bli mer systematisk (Palmér & van Bommel, 2019, s. 61). De fant ut at elevene som anvendte prikker og streker til å dokumentere de ulike kombinasjonene, dokumenterte den samme kombinasjonen flere ganger (Palmér & van Bommel, 2019, s 68). Ifølge dem kan dette skyldes at elever som anvendte piktografiske representasjoner brukte lengre tid på å tegne, og dermed hadde mer oversikt over hvilke kombinasjoner de allerede hadde tegnet.

Alseth og Røsseland (2014, s. 120) trekker frem en studie gjort av Carpenter med flere (1993). Carpenter og hans kolleger gjennomførte et forskningsprosjekt som undersøkte hvordan 70 femåringer klarte å benytte modellering i problemløsning, med tall opp til 30 (Alseth & Røsseland, 2014, s. 120). Barna i studien fikk opplæring i å bruke brikker til å telle, samtidig som de lærte å koble brikkene sammen med informasjon i tekstoppgaver. Et par måneder senere ble alle barna utfordret til å løse ulike tekstoppgaver, gjennom en muntlig prøve. Det var korte oppgaver som inneholdt alle de fire regneartene. Eksempelvis «Lise har 20 perler. Hun legger perlene i esker med fire perler i hver eske. Hvor mange esker trenger hun?» (Alseth og Røsseland, 2014, s. 120). Studien kommer frem til at barn har evne til å løse problemer med større mengder, og i yngre alder enn tidligere studier har funnet (Carpenter et al., 1993, s. 439). Gjennom at elevene fikk anvende representasjoner som var naturlige og forståelige for dem, som i denne sammenhengen var konkreter, fikk de også til å løse oppgaver på et høyere nivå (Alseth & Røsseland, 2014, s. 120).

1.5 Oppgavens struktur

Videre er oppgaven delt inn i seks hovedkapitler, og tilhørende underkapitler. Dette avsnittet presenterer en oversikt over de kommende kapitlene.

Kapittel 1 presenterer oppgavens aktualitet, valg av tema og problemstilling, begrepsavklaring, og viser til tidligere forskning.
Kapittel 2 belyser relevant teori, som videre brukes til å besvare problemstillingen i drøftingen.
Kapittel 3 redegjør for metodiske og analytiske valg. I dette kapittelet presenteres utvalg, innsamlingsmetode og analysemetode. Avslutningsvis belyses forskningsetiske refleksjoner og forskningens kvalitet (reliabilitet og validitet).
Kapittel 4 presenterer resultatene fra innsamling og analysearbeid. Funnene er strukturert etter gruppene vi hadde under innsamlingen. Funnene er trukket ut for å kunne svare på problemstillingen.
Kapittel 5 drøfter resultatene fra analysen opp mot relevant teori, og tidligere forskning. Dette gjøres for å svare på problemstillingen og tilhørende forskningsspørsmål.
Kapittel 6 sammenfatter sentrale funn og refleksjoner rundt disse, og avslutter med en selvrefleksjon.

2 Teoretisk rammeverk

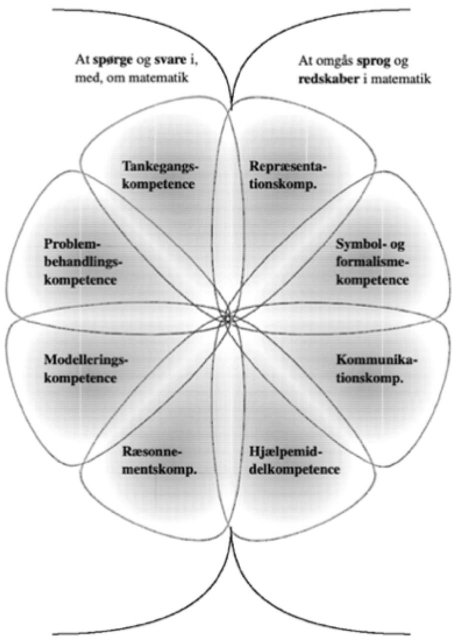
I denne delen av oppgaven vil vi presentere relevant teori, som funnene fra analysen skal diskuteres opp mot i drøftingskapittelet. Vi har valgt å presentere teori som er relevant for å svare på *hvordan elever i begynneropplæringen anvender ulike representasjoner i problemløsning*, og følgende forskningsspørsmål:

1. Hvordan anvender elevene representasjonene erfaringsbaserte situasjoner, manipulerbare modeller, ikoniske fremstillinger, muntlig språk og skriftlig språk?
2. I hvilken grad er elevenes bruk av representasjoner hensiktsmessig, i arbeidet med to problemløsningsoppgaver?

Innledningsvis presenteres matematisk kompetanse, gjennom Niss og Jensens (2002) modell, og dens viktighet for en fullverdig læring i matematikkfaget. Videre presenteres ulike modeller og teorier for å kategorisere representasjoner, hovedsakelig Lesh med kolleger (1987), Hughes (1986) og Alseth (1998), overgangen mellom representasjonene, og hvorfor representasjoner har en vesentlig plass i matematikkundervisningen. Deretter presenteres Kilpatrick med kolleger (2001) sine fem egenskaper for representasjoner, før vi skriver kort om bruk av konkretiseringsmateriell. Til slutt kobles språk og begrepslæring opp mot Vygotskijs (1978/2001, 1986/2001) teori om den nærmeste utviklingssone.

2.1 Matematisk kompetanse

Det finnes flere modeller for matematisk kompetanse, og vi har valgt å bruke Niss og Jensen (2002). De har beskrevet åtte ulike sider ved matematisk kompetanse, som det er viktig at elevene får mulighet til å utvikle gjennom matematikkfaget. Vi har valgt å trekke frem kompetansene for problemløsning og representasjon. De to kompetansene er mest relevante, fordi vårt prosjekt utforsker *hvordan elevene anvender representasjoner i arbeidet med problemløsning*. Innenfor representasjonskompetansen har vi valgt å trekke frem abstraksjonsprosessen som en del av denne kompetansen.



Figur 1: Åtte matematiske kompetanser (Niss & Jensen, 2002, s. 45)

2.1.1 Problemløsningskompetansen

Elevenes problemløsningskompetanse utvikles gjennom hele skolegangen (Niss & Jensen, 2002, s. 200), men de har også mange erfaringer med matematikk og problemløsning lenge før de begynner på skolen (Alseth & Røsseland, 2014, s. 119; Høines 1998, s. 36). Problemløsning er sentralt i læreplanen for matematikk, og kommer frem i det første kjerneelementet; *Utforsking og problemløsing* (Kunnskapsdepartementet, 2019). Det handler for det første om å legge vekt på prosessen fremfor resultatet, og å se etter mønstre og finne sammenhenger. Karlsen (2014, s. 17-18) uttrykker at elevene bør få muligheten til å arbeide utforskende på egenhånd først, før de matematiske reglene blir introdusert. Karlsen (2014, s. 27-28) trekker frem materiell som betydningsfullt i utforskende oppgaveløsning. Hun presiserer også at læreren bør veilede elevene, slik at de selv finner løsningsstrategier og kan reflektere over hvilken matematikk som er relevant i oppgavene. Oppgavene som inngår i en utforskende undervisning, bør inneholde problemløsning (Karlsen, 2014, s. 27; Klaveness et al., 2019, s. 160). Kjerneelementet innebærer også å utvikle nye strategier for å løse ukjente problemer, og kunne vurdere om løsningen er sannsynlig. Vi kan se flere likheter mellom læreplanens beskrivelse av kjerneelementet, og Niss og Jensens (2002, s. 200-201) beskrivelse av problemløsningskompetansens utvikling. De beskriver at utviklingen foregår gjennom å utforme egne problemer, samt løse allerede gitte problemer. Videre trekker de frem at elevene skal lære seg å gjenkjenne hvilke opplysninger som er viktige, og hva som kan kategoriseres som irrelevant i forhold til det oppgaven spør etter. Formålet med utviklingen av problemløsningskompetansen, er å kunne løse gitte problemer på ulike måter, både åpne og lukkede (Niss & Jensen, 2002, s. 200). Oppgaver som kan gi flere forskjellige svar eller løses på ulike måter, kategoriseres som åpne (Karlsen, 2023, s. 39-40). Lukkede oppgaver legger gjerne opp til én løsning eller ett spesifikt svar (Niss & Jensen, 2002, s. 201).

En problemløsningsoppgave karakteriseres, ifølge Niss og Jensen (2002, s. 201), av et spørsmål som krever en matematisk operasjon for å finne løsningen. For at en oppgave skal kunne omtales som et problem, er det nødvendig at oppgaven er krevende nok for vedkommende som skal utføre den, og ikke er preget av rutinemessige operasjoner (Niss & Jensen, 2002, s. 201). Dermed vil individets kompetanse og kunnskap være avgjørende for om oppgaven kan sees på som et problem, eller ikke (Klaveness, et. al, 2019, s. 178). Eksempelvis en oppgave som spør etter hvor mange biler en klasse med 12 elever trenger for å dra til svømmehallen. Dette vil sannsynligvis være en problemløsningsoppgave for elever som enda ikke har lært gangetabellen eller delingsalgoritmen, men derimot enkel å løse dersom eleven har lært minimum én av disse.

2.1.2 Representasjonskompetansen

Opplæringen i grunnskolen skal gi elevene mulighet til å lære seg både å forstå, og anvende ulike representasjoner i matematikk (Kunnskapsdepartementet, 2019). Representasjoner har også fått plass i læreplanen, som et av kjerneelementene i matematikkfaget, *Representasjon og kommunikasjon* (Kunnskapsdepartementet, 2019). Det innebærer å lære hvordan ulike varianter innenfor en gruppering av representasjoner kan være uttrykk for den samme matematiske idéen. For eksempel kan mengden tre representeres på mange ulike måter, blant annet med kuler, fingre eller skrives med bokstaver. I tillegg skal elevene lære seg å ta i bruk og oversette mellom hensiktsmessige representasjoner i forhold til den matematiske idéen i en gitt oppgave (Niss & Jensen, 2002, s. 213). Et eksempel kan være antall dyrebein på gården som blir representert med både tellestreker og tallsymboler. Det forventes ikke at elevene i begynneropplæringen skal mestre det vi har nevnt om representasjonskompetansen, men at man skal arbeide mot dette som et mål (Niss & Jensen, 2002, s. 213). Symbolske representasjoner har en vesentlig rolle i matematikken. Det kan eksempelvis være tallsymboler, regnestykker eller tall representert med bokstaver. På småtrinnet handler det først og frem om muntlig bruk og forståelse (Niss & Jensen, 2002, s. 213). Niss og Jensen (2002) har laget et skille mellom de ulike kompetansene for å vise ulike aspekter ved dem, men de går også ofte inn i hverandre. De beskriver videre at representasjonskompetansen på småtrinnet i hovedsak omhandler å kunne snakke om tall og symboler, derfor henger den tett sammen med både kompetansen for kommunikasjon, og kompetansen for symbol og formalisering.

2.1.2.1 Fra konkret til abstrakt

Alle barn har i større eller mindre grad erfaring med matematikk fra før de begynner på skolen (Alseth & Røsseland, 2014, s. 119; Høines 1998, s. 36), eksempelvis telling. For eksempel ved at to søsken skal fordele godteri likt mellom seg, eller at barnet blir bedt om å sette ut fem glass til middagen. Alseth og Røsseland (2014, s. 120) trekker frem viktigheten av at elevene får møte og uttrykke seg gjennom uttrykksformer som de vil ha forutsetninger for å mestre. Dette støttes også av Høines (1998, s. 36) og Sønstabø (2014, s. 21) som mener at skolen bør ta i bruk, og bygge videre på den kompetansen elevene tar med seg inn i skolen. De yngste elevene vil som regel være fortrolige med å uttrykke seg ved bruk av konkreter, tegninger eller gjennom det muntlige språket (Alseth & Røsseland, 2014, s. 119-120).

Det skriftlige matematiske språket, er derimot en uttrykksform som de yngste elevene vil ha mindre kjennskap til (Alseth & Røsseland, 2014, s. 119). Ifølge Margaret Donaldson (1978/1984, s. 68-69) vil mennesket ofte oppleve at tenkningen blir mer utfordrende, dersom den foregår uten en meningsfull kontekst. Hun uttrykker at dersom man fjerner meningen i en oppgave, og erstatter den utelukkende med symboler, vil de fleste synes det er vanskelig å forstå sammenhengen. Videre eksemplifiserer hun det ved å erstatte betydningsfulle utsagn med symboler som p og q, som gjør oppgaven mye mer krevende å forstå. Førsteklassingens tenkemåte er ofte nært knyttet til den virkelige verden gjennom dens erfaringer, og en slik tenkemåte kan være utfordrende i skolen, fordi matematikken i mindre grad gir elevene mulighet til det (Donaldson, 1978/1984). Donaldson (1978/1984, s. 68) trekker frem at elevene må gradvis lære å «løsrive» seg fra denne tankegangen, for å kunne forstå den mer kompliserte matematikken de møter i skolen. Hun foretok en undersøkelse, der det kom frem at barna ofte svarte feil fordi de ikke forstod hva oppgaven egentlig spurte etter. Hun hevder at barna «brakte inn egne premisser – ofte basert på det umiddelbart meningsfulle – eller de overså deler av dem som var gitt» (Donaldson, 1978/1984, s. 70). Barna tolker oppgavetekster gjennom tidligere erfaringer og legger særlig merke til informasjon som gir mening for dem.

Marit Holm (2012) presenterer matematikkopplæringen som en prosess med seks punkter, og bør følges kronologisk for å oppnå best mulig læring. Det andre punktet i prosessen omhandler «opplæring i kompetanse og grunnleggende ferdigheter i matematikkfaget» (Holm, 2012, s. 88). Opplæringen kan foregå gjennom fire nivåer med økende grad av abstraksjon. «Det innebærer at undervisningen beveger seg langs en linje som starter med helkonkreter i den ene enden og avslutter med abstrakte symboler i den andre» (Holm, 2012, s. 90). Nivåene på linjen har ikke et tydelig svart-hvitt skille mellom seg, men de utvikles i en glidende overgang med flere gråsoner. Dermed kan det være vanskelig å definere om en representasjon hører til i et spesifikt nivå, fordi det kan være en blanding av to eller flere (Holm, 2012, s. 90). Når nye tema blir presentert i undervisningen er det, ifølge Holm (2012), hensiktsmessig å begynne på et *konkret nivå*. Det innebærer å bruke konkretiseringsmateriell, som tellebrikker, base ti-materiell eller melkekorker. Når elevene er klare for å gå videre i abstraksjonsprosessen vil de ifølge Holm (2012, s. 90) være på et *semi-konkret nivå*, hvor det benyttes tegninger og bilder som erstatning for konkretene. Videre betegner hun tredje nivå som *semiabstrakt nivå*, hvor elevene kan gjøre nytte av prikker, streker eller tabeller, i løsning av matematikkoppgaver. Elevene vil gradvis mestre å bruke hjelpemidlene i de nevnte nivåene. Etter hvert som de får bedre forståelse, vil de i økende grad kunne dra nytte av tall, tegn og symboler som tilhører *abstrakt nivå*. Alle nivåene krever at læreren er til stede for å instruere og veilede elevene i prosessen (Holm, 2012, s. 90).

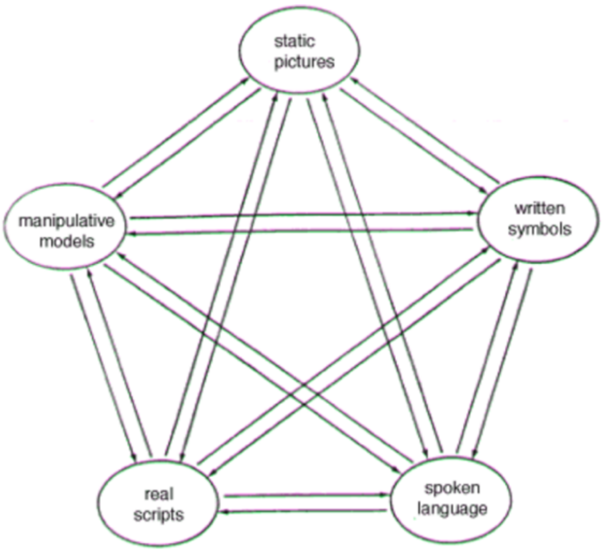
2.2 Representasjoner

Som nevnt tidligere har representasjoner fått plass i læreplanen gjennom kjerneelementet; *Representasjon og kommunikasjon* (Kunnskapsdepartementet, 2019). Det handler om ulike «måter å uttrykke matematiske begreper, sammenhenger og problemer på. [...] Elevene må kunne oversette mellom matematiske representasjoner og dagligspråket og veksle mellom ulike representasjoner» (Kunnskapsdepartementet, 2019). Representasjoner er også et av punktene i modellen for matematisk kompetanse (Niss & Jensen, 2002). Vi har valgt å gi representasjoner stor plass i teoridelen, fordi vi ser på dette som relevant til drøftingen. Forskningen vår skal undersøke hvordan elevene bruker representasjoner, og derfor er det vesentlig å kunne kategorisere representasjonene som anvendes. Videre presenteres overgangen mellom representasjoner, og egenskaper som kan beskrive ulike sider ved representasjoner.

2.2.1 Kategorisering av representasjoner

Bruner (1964, s. 2) delte representasjoner inn i tre ulike grupper. Thiel og Nakken (u.å.) har oversatt begrepene til norsk, og vi vil videre bruke; *enaktiv*, *ikonisk* og *symbolsk*. Bruner (1964, s. 2) formidler at alle tre representasjonene vil følge et menneske gjennom hele livet, men utviklingen av hver enkelt vil være avhengig av de andre. Han uttrykker at enaktive uttrykksformer ligger nært den virkelige verden, som gjerne uttrykkes automatisk, uten nødvendigvis å tenke gjennom, eller kunne forklare hvordan man uttrykker dette. Thiel og Nakken (u.å.) trekker frem å holde opp seks fingre som et eksempel på en enaktiv uttrykksform. Den andre uttrykksformen er ikonisk, og denne omhandler for eksempel bruk av bilder til å representere noe annet (Bruner, 1964, s. 2). Thiel og Nakken (u.å.) bruker et eksempel hvor et antall er uttrykt i en bok ved hjelp av seks nisser. Den tredje og siste uttrykksformen er symbolsk, og innebærer bruk av for eksempel tall og andre symboler (Bruner, 1964, s. 2). Thiel og Nakken (u.å.) sitt eksempel på dette er at barnet ser på en bursdagskrone med tallet 5.

Ifølge Behr med kolleger (1983, s. 101) har Lesh laget en videreutvikling av Bruners tre uttrykksformer. I den videreutviklede modellen har *enaktiv* blitt omgjort til «real scripts». Videre delte han opp *ikonisk* til «manipulative models» og «static pictures». Avslutningsvis delte han også opp *symbolsk* til «spoken language» og «written symbols» (Behr, et al., 1983, s. 101). Videre i oppgaven vil vi bruke Hana (2014, s. 145) sine oversettelser av de fem begrepene. Vi har valgt å supplere modellen fra Lesh, med Alseth (1998) sine fem representasjonsformer, og to av Hughes (1986) sine kategoriseringer innenfor ikoniske fremstillinger.



Figur 2: Fem representasjonssystemer (Lesh et al., 1987, s. 34).

2.2.1.1 Erfaringsbaserte situasjoner

Erfaringsbaserte situasjoner («real scripts») er virkelighetsbaserte situasjoner man bruker som hjelpemiddel for å forstå en matematisk sammenheng (Hana, 2014, s. 144; Lesh et al., 1987, s. 33). Dette kan være virkelige problemer som må løses, eller oppdiktede matematiske oppgaver som inneholder elementer fra hverdagen.

2.2.1.2 Manipulerbare modeller

Manipulerbare modeller («manipulative models») er «konkretiseringsmateriell og andre visuelle hjelpemiddel som kan manipuleres» (Hana, 2014, s. 144). Det vil si at man fysisk kan flytte på gjenstandene og tillegge konkretene en spesifikk mening, gjerne koblet til en gitt oppgave eller situasjon. Konkretene har ikke nødvendigvis en betydning i seg selv, men må sees sammen med den matematiske oppgaven eller situasjoner fra hverdagen (Lesh et al., 1987, s. 33). Alseth (1998, s. 29) deler konkreter inn i to kategorier; *direkte modell* og *konkret modell*. En *direkte modell* vil være å anvende den faktiske gjenstanden fra oppgaven som uttrykksform. Dersom en oppgavetekst for eksempel sier at du skal dele 20 klinkekuler likt mellom fire barn, så vil bruk av klinkekuler være en direkte modell. Ifølge Alseth (1998, s. 29) vil en svakhet være at bruken av en direkte modell er spesifikk for en gitt oppgave, og elevene ikke nødvendigvis kan dra nytte av den når de løser andre oppgaver, eller i andre sammenhenger.

Dersom man anvender en *konkret modell*, vil matematikken uttrykkes ved å benytte noe annet enn den faktiske gjenstanden fra oppgaven (Alseth, 1998, s. 29). Dette vil eksempelvis være å anvende melkekorker eller brikker i stedet for klinkekuler til å løse en oppgave. Både direkte og konkrete modeller, vil Ifølge Alseth (1998, s. 29) være representasjoner som gjør at yngre barn kan mestre oppgaver i matematikken, men han presiserer at de kan være tidskrevende. Videre i oppgaven vil manipulerbare modeller også bli omtalt som konkretiseringsmateriell eller konkreter. Vi kommer tilbake til *Konkretiseringsmateriell* i delkapittel 2.3.

2.2.1.3 Ikoniske fremstillinger

Ikoniske fremstillinger («static pictures») er statiske diagrammer eller bilder som kan tilpasses ut fra en gitt matematisk informasjon (Hana, 2014, s. 144; Lesh et al., 1987, s. 33). Et bilde eller diagram er statisk, i form av at det ikke kan endres. Ikoniske fremstillinger kan være tegninger av løsninger, eller en tabelloversikt over løsningsforslag. Hovedforskjellen mellom konkreter og bilder, er handlingen man gjør ved å flytte konkretene, som ikke er en del av et bilde (Lesh, 1981, s. 247). En tegning kan ikke endres når den først er tegnet, fordi det har blitt et statisk bilde.

Martin Hughes (1986) forsket på ulike typer representasjoner, og kom frem til fire kategorier. De to kategoriene som omhandler *piktografiske representasjoner* («pictographic responses») og *ikoniske representasjoner* («iconic responses») er mest relevante for vår oppgave, fordi de skal brukes til å skille mellom tegninger i elevbesvarelsene. Vi fikk kjennskap til disse kategoriene gjennom Palmér og van Bommels (2017) forskning, og har valgt å bruke de fordi det gir oss mulighet for en mer nyansert kategorisering av elevbesvarelser. *Piktografiske representasjoner* brukes om uttrykksformer hvor elevene gjenskaper noe av det de har foran seg (Hughes, 1986, s. 57). Kriteriene hans for at en representasjon kategoriseres som piktografisk, kan være at den gjenspeiler et objekts form, plassering, farge eller organisering. I hans studie ble piktografiske representasjoner sett på som tegninger av brikkene. Kriteriene for å inngå i denne kategorien virket å være at tegningen symboliserte antall brikker, at brikkene hadde en firkantet form og ble tegnet i samme formasjon som det oppgaven spurte etter (Hughes, 1986, s. 57). Alseth (1998, s. 29) definerer prosessen med å anvende en tegning av den faktiske gjenstanden som en *billedlig representant*.

Ikoniske representasjoner er tegninger som representerer gjenstander fra oppgaven i et 1 til 1 forhold, men er ikke en fullstendig gjenskapning (Hughes, 1986, s. 58). For eksempel når et barn representerer fem brikker med fem tellestreker eller sirkler. Alseth (1998, s. 29) definerer et *ikon* som bruken av en mindre detaljert uttrykksform enn den billedlige representanten. Paier vil eksempelvis kunne erstattes med små sirkler. Han trekker frem tegning som en uttrykksmåte som de yngre barna er godt kjent med. I likhet med direkte og konkrete modeller, vil billedlig og ikonisk representasjon også være mer tidskrevende å anvende enn andre uttrykksformer (Alseth, 1998, s. 30).

2.2.1.4 Muntlig språk

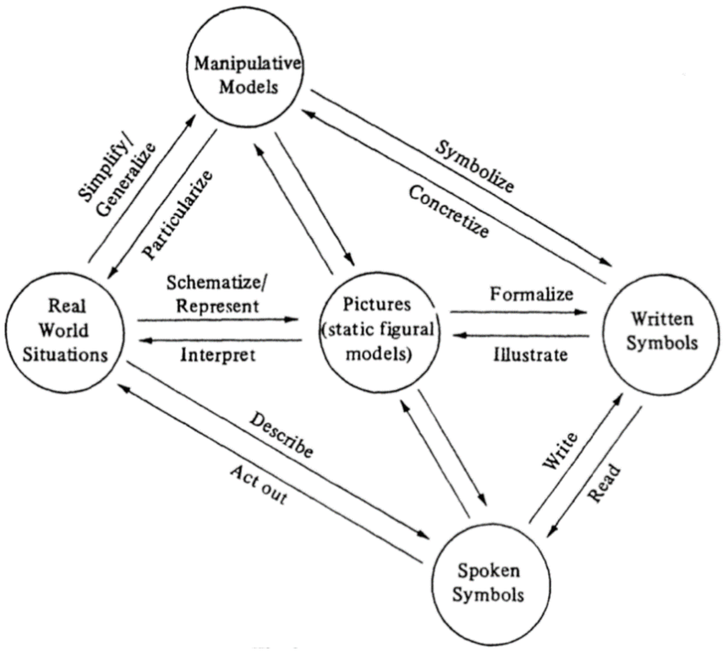
Muntlig språk («spoken language») består av all matematikk som blir kommunisert muntlig, inkludert spesialisert matematisk språk koblet til spesifikke temaer (Hana, 2014, s. 144; Lesh et al., 1987, s. 33). Det kan være samtaler mellom elever som samarbeider om å løse en matematisk oppgave.

2.2.1.5 Skriftlig språk

Skriftlig språk («written symbols») «inkluderer alt fra uttrykk skrevet utelukkende med matematiske symboler til setninger uten matematiske symbol i det hele tatt» (Hana, 2014, s. 144). Det kan være enkle regnestykker som 2 + 3 = 5, eller setninger skrevet med ord (Lesh, 1987, s. 33). Eksempler på dette er elever som uttrykker løsninger med tallsymboler eller ord. Det vil være utfordrende for flere av elevene å møte, og uttrykke seg ved å anvende *symboler* i matematikken, fordi: «symbolene (som oftest) ikke har noen mening i seg selv» (Alseth, 1998, s. 30). Tallet 6 kan eksempelvis representere seks drops, men gir ikke nødvendigvis denne meningen når det står alene. I motsetning til de tidligere nevnte uttrykksformene, vil symboler være en mer effektiv måte å uttrykke matematikken på (Alseth, 1998, s. 30).

2.2.2 Overgangen mellom representasjoner

I arbeidet med problemløsning vil elevene bevege seg mellom ulike representasjoner (Behr et al., 1983, s. 103). Lesh med flere (1987, s. 34-35) anvender «translations» og «transformations» om overganger mellom og innenfor systemer. Vi har valgt å benytte Olaug Svingen (2018) sine norske begreper videre i oppgaven. Hun har oversatt Duval sine engelske begreper, men innholdet er det samme som Lesh et al. (1987, s. 34-35). En *konvertering* («translation») er overgangen mellom to ulike systemer, mens en *bearbeiding* («transformation») er en oversettelse innenfor samme system (Svingen, 2018, s. 4). Når vi videre i oppgaven anvender begrepene representasjonssystemer eller systemer, omtaler vi de fem overordnede systemene til Lesh med kolleger (1987). Bruken av begrepet representasjoner henviser til representasjoner generelt, både de fem overordnede, men også representasjoner innenfor dem.



Figur 3: Prosessene mellom representasjonene (Lesh, 1981, s. 246).

Det er viktig å lære elevene å mestre overgangene mellom ulike representasjoner (Lesh, 1981, s. 246), fordi det kan gi en dypere matematikkforståelse (Svingen, 2018, s. 4). Dette er også et viktig punkt i et av kjerneelementene i læreplanen, *Representasjon og kommunikasjon* (Kunnskapsdepartementet, 2017). Dersom elevene ikke mestrer slike overganger, vil dette føre til at arbeidet med problemløsning blir mer utfordrende for elevene (Lesh, 1979b, referert i

Lesh, 1881, s. 247). En utfordring kan være at oppgaver fremstilt som virkelige problemer, som regel krever en konvertering mellom ulike representasjoner i oppgaveløsningen, for eksempel fra den reelle verden og til skriftlig språk (Behr et al., 1983, s. 103). Hvilke representasjoner som vil være mest nyttige, vil avhenge av målet ved en oppgave (Hana, 2014, s. 147). En annen grunn til at det vil være nødvendig å mestre overgangen mellom ulike representasjoner, er fordi «uttrykksmåtene har ulike styrker og svakheter» (Alseth & Røsseland, 2014, s. 119). Representasjonenes forskjellige egenskaper, kan gjøre det utfordrende å konvertere mellom dem (Lesh, 1981, s. 247). Lesh anvender eksempelet om forskjellen mellom den virkelige verden og konkretiseringsmateriell, hvor førstnevnte inneholder mer «støy» enn konkretene. Et annet eksempel han trekker frem, er forskjellen mellom konkretiseringsmateriell og de ikoniske fremstillingene. Elevene kan flytte konkretene rundt som de vil, noe de ikke vil ha muligheten til med de ikoniske fremstillingene (Lesh, 1981, s. 247). En problemløser kan ha nytte av å bruke et *mellomledd* hvis det er utfordrende å konvertere direkte til en representasjon (Lesh, 1981, s. 247; Behr et al., 1983, s. 103). Det muntlige språket kan være et mellomledd på veien mot skriftlige, matematiske symboler (Lesh, 1981, s. 248). Elever som synes det er vanskelig å konvertere mellom den virkelige verden og symboler, kan øve på å foreta en omvendt overgang (Lesh, 1981, s. 248). Det vil si at de konverterer motsatt vei, altså fra symboler til en virkelig situasjon.

Ifølge Lesh (1981, s. 236) har tidligere forskning resultert i tanken om at elevene bør lære den grunnleggende matematikken før de begynner å løse generelle problemer. Han uttrykker derimot at elevene bør arbeide med problemløsning samtidig som læreren underviser om emner som er relevante for disse problemene (Lesh, 1981, s. 238). Svingen (2018, s. 7) ser på det som nødvendig at elevene evner å assosiere det matematiske konseptet med det konkrete materialet, for at elevene skal oppleve bruken av materialet som meningsfullt. Gjennom å oversette mellom de ulike representasjonene i Figur 3, kan matematikken oppleves som mer meningsfull (Lesh, 1981, s. 245-246). Elevene kan se en større verdi når de mestrer å se sammenheng mellom forskjellige uttrykksmåter. Det kan virke meningsløst å lære å lese tabeller i skolesammenheng. Om man derimot ser på en kvittering, er det behov for å kunne forstå hvordan tallene henger sammen, for å forstå kvitteringens prinsipp. Elevene har behov for å se meningen med det vi gjør i skolen, og kunne knytte det opp mot sin egen hverdag (Kunnskapsdepartementet, 2019). Skal du hjelpe pappa med å lage middag, så er det en fordel å kunne måle opp ingredienser, samtidig som man kan ha behov for dobling eller halvering.

Ifølge Lesh (1981, s. 235) er det ikke nok at elevene kan utføre ulike regneoperasjoner, da dette ikke nødvendigvis vil føre til at de har en forståelse for hvilken eller hvilke av dem som kan benyttes for å løse et matematisk problem. Videre trekker han frem at målet er å oppnå en fullstendig forståelse av matematiske ideer, og for å oppnå dette målet er det vesentlig at elevene utvikler en forståelse for alle de forskjellige prosessene som inngår i modellen. Først da kan man si at elevene har forstått et matematisk konsept, og ser hvilken betydning det kan ha for egen hverdag (Lesh, 1981, s. 245-246).

2.2.3 Representasjonenes egenskaper

Når elevene arbeider og samtaler om matematikk, må de bestemme hvilke representasjoner de skal benytte seg av (Kilpatrick et al., 2001, s. 99). Kilpatrick med kolleger (2001) trekker frem de fem egenskapene «transparency», «efficiency», «generality», «clarity» og «precision» som kan påvirke valget av uttrykksform. Svingen (2018, s. 5) har oversatt disse begrepene til *synlighet*, *effektivitet*, *generalitet*, *klarhet* og *presisjon*. Vi velger heretter å bruke hennes norske begreper.

2.2.3.1 Synlighet

Synlighet («transparency») dreier seg om hvor synlig det matematiske konseptet er i den aktuelle representasjonen (Kilpatrick et al., 2001, s. 99). Svingen (2018, s. 5) trekker frem begrepet *proporsjonalitet* som viktig, for hvor synlig den matematiske idéen er. Er størrelsen på materialet riktig i forhold til mengden det representerer?

2.2.3.2 Effektivitet

Effektivitet («efficiency») omhandler hvor formålstjenlig representasjonen er i forhold til oppgaven, og personen som anvender den (Kilpatrick et al., 2001, s. 99). Selv om symbolske representasjoner er effektive, vil det ikke nødvendigvis være effektivt for en andreklassing (Svingen, 2018, s. 5). Den mest effektive representasjonen for noen, vil ikke være den samme for noen andre, derfor er det viktig å møte elevene «der de er» i sin utvikling.

2.2.3.3 Generalitet

Den tredje egenskapen er *generalitet* («generality»), som vektlegger hvorvidt en representasjon kan brukes til flere forskjellige matematiske ideer (Kilpatrick et al., 2001, s. 100). Kilpatrick med flere (2001, s. 100) trekker frem tallinjen som et eksempel på en generell representasjon, og det å telle på fingrene som et mindre generelt eksempel. Elevene bør få kjennskap til og forståelse for representasjoner som kan anvendes i ulike sammenhenger, men dette er ikke noe de nødvendigvis bør mestre tidlig i begynneropplæringen (Svingen, 2018, s. 6).

2.2.3.4 Klarhet

Klarhet («clarity») handler om hvor tydelig en representasjon er, fordi matematikken ofte inneholder implisitte normer som ikke vises direkte i en representasjon (Kilpatrick et al., 2001, s. 100). De eksemplifiserer ved bruk av regnestykket $3 + 4 \cdot 5$. Her kan man ikke se direkte på regnestykket hvilken matematisk operasjon som skal gjennomføres først og sist. Det er ikke uvanlig å tenke at man skal ta addisjon først, siden leseretningen går fra venstre til høyre, men en regel innenfor matematikken sier at multiplikasjon kommer før addisjon (Kilpatrick et al., 2001, s. 100).

2.2.3.5 Presisjon

Presisjon («precision») er den siste egenskapen, og her vil man se på representasjonenes grad av nøyaktighet for å uttrykke et matematisk fenomen (Kilpatrick et al., 2001, s. 100). Svingen (2018) viser til tallinjen som en representasjon med både høy og lav nøyaktighet, avhengig av om den er lukket eller åpen. Dersom tallinjen er lukket vil presisjonen være høy, fordi tallenes rekkefølge og avstanden mellom dem har betydning. På den andre siden kan en åpen tallinje ha lav presisjon, siden avstanden mellom punktene varierer, og ikke representerer avstanden mellom tallene (Svingen, 2018, s. 6).

2.3 Konkretiseringsmateriell

Bartolini og Martignone (2014, s. 365) deler konkreter inn i to hovedgrupper, *fysiske* («concrete») og *virtuelle* («virtual»). Videre uttrykker de at matematiske konkreter kan brukes i undervisningen som en støtte til utforsking og forståelse av matematiske oppgaver. Definisjonen av fysiske konkreter er mest relevant for våre funn, med tanke på konkretene som ble brukt i oppgaveløsningen. Bartolini og Martignone (2014, s. 365) definerer fysiske konkreter som gjenstander elevene kan ta og føle på, og de kan oppleves ved bruk av sansene.

Peggy Moch (2008, s. 84) har gjennomført en undersøkelse med 16 elever på 5. trinn. Hun har sett på nytten av å bruke konkreter i undervisningen. Elevene i undersøkelsen gjennomførte en test både før og etter en periode med tolv undervisningsøkter. Undervisningen besto av oppgaveløsning med konkreter som fokuserte på ulike matematiske konsepter. Resultatene viste at elevene presterte bedre på alle områdene som ble testet, etter de hadde benyttet konkreter i undervisningen under perioden. Derfor konkluderer hun med at bruk av konkreter i undervisningen kan ha en betydning for elevenes resultater (Moch, 2008, s. 86-87). Videre trekker hun frem at elevene vil kunne møte færre problemer i undervisningen, dersom de først arbeider med konkrete modeller, og deretter gradvis mer abstrakt. Ifølge Stein og Bovalino (2001, s. 356-357) vil ikke all bruk av konkreter nødvendigvis føre til god undervisning. Videre uttrykker de at bruk av konkreter uten å ha en plan eller reflektere over deres læringspotensial, kan føre til at konkretene heller blir leketøy, og uten en funksjon i læringsprosessen. For å mestre bruk av konkreter i undervisningen, kreves det tid og øving både for læreren og elevene (Moch, 2008, s. 81). Det er nødvendig at læreren veileder elevene for at de skal mestre å bruke konkretene på en hensiktsmessig måte (Stein & Bovalino, 2001, s. 356). For stor grad av veiledning og føring vil ikke være hensiktsmessig (Moch, 2008, s. 83). Moch eksemplifiserer dette videre med at læreren har en tydelig oppskrift på hvordan oppgaven skal løses, eller deler den opp i mindre problemer som skal løses steg for steg. Det kan også være at læreren presenterer løsningen for tidlig, slik at eleven ikke rekker å tenke seg til hvordan oppgaven kan løses (Moch, 2008, s. 83). Moch sin beskrivelse av for mye veiledning samsvarer med Hagenah med kolleger (2018, s. 262) sin forklaring av begrepet «funneling». Ifølge dem handler «funneling» om at læreren stiller spørsmål som legger opp til et spesifikt svar, eller gir oppgaver som forventer en spesifikk framgangsmåte.

2.4 Språkutvikling og samtale

Anne Høigård (2013, s. 158) har beskrevet ordene vi bruker, som symboler for det vi vil formidle, i tillegg til at alle ord har to sider. De har en uttrykkside, som er det vi kan høre eller lese, altså bokstavene eller lyden. Den andre siden er innholdssiden, som er ordets betydning. Det er gjerne en definisjon i en ordbok. Selv om de aller fleste ord kan defineres og finnes i en ordbok, vil ikke alltid denne definisjonen være tilstrekkelig (Høigård, 2013, s. 158-159). Videre trekker hun frem viktigheten av å skille mellom ord og begreper, når vi snakker om språkutvikling. Hun beskriver ordene som de man finner en definisjon på i ordboka, mens begrepet som den subjektive oppfatningen av ordet. Høigård (2013) uttrykker at barn som er i ferd med å utvikle språket, ikke alltid vil ha samme oppfatning av ord, som i en ordbok. Hun eksemplifiserer med ordet *ball*, hvor barnets begrep om det kan være enten for bredt eller for smalt. Hvis barnet har et for bredt begrep, vil det kunne brukes om alle runde eller kuleformede gjenstander barnet ser. Hvis barnet derimot har et smalt begrep, kan ordet *ball* kun være knyttet til barnets egen ball, og ingen andre baller er da inkludert. «Den semantiske utviklingen handler om at vi stadig utvikler og nyanserer begrepene våre. Vi sorterer og klassifiserer dem i overordnede [...] og i underordnede begreper» (Høigård, 2013, s. 159). Dette gjelder også i matematisk sammenheng. Barna vil stadig utvikle begreper om blant annet tall, størrelser, og matematiske prosesser.

2.4.1 Spontane og vitenskapelige begreper

Vygotskij (1986/2001, s. 136-146) deler tenkning inn i to utviklingsprosesser, én for tilegnelse av *spontane begreper* og en annen for tilegnelse av *vitenskapelige begreper*, og prosessene har en gjensidig innvirkning på hverandre. Han sammenlikner utviklingen av spontane begreper med å lære seg morsmål, fordi de utvikles som en naturlig del av hverdagsspråket, og utviklingen av vitenskapelige begreper, med å lære seg et fremmedspråk. Vygotskij (1986/2001) trekker frem at tilegnelsen av vitenskapelige begreper i en skolekontekst, foregår gjennom at læreren jobber systematisk sammen med eleven for å hjelpe ham eller henne med å utvikle forståelsen av disse. Videre beskriver han vitenskapelige begreper som mer utfordrende for elevene, fordi de er mer abstrakt og har en svakere tilknytning til den virkelige verden enn spontane begreper. Et eksempel på et vitenskapelig begrep kan være multiplikasjon. De yngste elevene kan ikke nødvendigvis gi en fullstendig beskrivelse av hva dette er, men har likevel flere erfaringer med bruk av multiplikasjon hjemme eller i oppgaveløsning på skolen.

2.4.2 Den proksimale utviklingssone og språk

Vygotskij (1978/2001, s. 158-159) trekker frem de to begrepene *eksisterende utviklingsnivå* og *den nærmeste utviklingssonen* som betydningsfulle for å få innsikt i barns utvikling. Han beskriver det eksisterende utviklingsnivået som hva barnet kan mestre alene eller uten støtte, og at det proksimale utviklingsnivået innebærer hva en person har forutsetninger for å lære sammen med en voksen, eller et annet barn som kan mer enn barnet selv. Videre trekker han frem at støtte fra en person som kan mer enn barnet, vil kunne føre til at barnet utvikler nivået for hva det mestrer på egenhånd. Traavik med flere (2014, s. 43) trekker frem Vygotskijs teorier om språk, og språkets essensielle påvirkning på læring. Videre presenterer de at barnets språk blant annet utvikles gjennom relasjoner som barnet har til menneskene rundt seg, gjerne de som kan mer enn barnet selv, og at språket er en vesentlig del av støtten i den proksimale utviklingssonen. Olga Dysthe (2012, s. 57-58) presenterer Bakhtins idéer om språk, og at han deler sitt grunnleggende syn på betydningen av sosial interaksjon med Vygotskij. Videre trekker hun frem Bakhtins synspunkter på at mening skapes gjennom å anvende språket sammen med andre.

Bakhtin så på samspillet mellom avsenderen og mottakeren som vesentlige for å oppnå forståelse, og at mottakerens reaksjon vil ha en vesentlig betydning (Dysthe, 2012, s. 58). I et slikt samspill ser han på deltakernes forhandling, og uenighet som viktig for deres læring og utvikling (Dysthe, 2012, s. 61).

3 Metode

Vi skal i denne oppgaven besvare *hvordan elever i begynneropplæringen anvender ulike representasjoner i arbeidet med problemløsning.* For å svare på problemstillingen har vi samlet inn empiri gjennom å observere tolv elever, som løser to matematikkoppgaver. Bakgrunn for valg av forsknings- og analysemetode vil bli presentert i denne delen av oppgaven. Vi har valgt en hermeneutisk tilnærming til prosjektet, og deltakende observasjon som forskningsmetode. Etter datainnsamlingen ble materialet analysert ved hjelp av tematisk analyse. For å vise transparens vil vi avslutningsvis i kapittelet belyse hvilke forskningsetiske valg vi har tatt underveis, samt studiens validitet og reliabilitet.

3.1 Hermeneutisk tilnærming

I begynnelsen ble begrepet *hermeneutikk* brukt om å fortolke tekster, men har i senere tid også omfattet forskning på mennesker (Anker, 2020, s. 50; Nyeng 2012, s. 49-50). Innenfor hermeneutikken fortolker vi når vi tilegner oss kunnskaper om verden vi lever i og menneskene vi omgås med, og det hjelper oss til å bedre forstå det vi ikke vet (Anker, 2020, s. 50). Både Nyeng (2012, s. 50) og Anker (2020, s. 50) beskriver konteksten som en vesentlig del av det å forske på mennesker, et individ og dets handlinger kan ikke fortolkes uavhengig av konteksten hvor handlingen skjer. Nyeng (2012, s. 49) beskriver Clifford Geertz' introduksjon av begrepet *tykk beskrivelse* som et krav i sosial forskning. Tykk beskrivelse handler om å gi tilstrekkelig informasjon om både individet som observeres, og konteksten til handlingen. Når vi skal presentere vårt datamateriale gir vi en grundig beskrivelse av observasjonene gjennom resultatkapittelet. Vi gjør rede for konteksten gjennom kapitler i metodedelen, for eksempel gruppesammensetning, hvilke oppgaver de fikk og hvilke konkreter de hadde tilgjengelig. Konteksten innebærer også vår tilstedeværelse under observasjonen og hvordan vi veiledet elevene underveis. Gjennom disse grundige beskrivelsene ønsker vi å gi leseren samme utgangspunkt som det vi hadde da empirien ble tolket og analysert, samt få innsikt i hvor reelle våre data er.

En forsker vil alltid bringe med seg en forståelse av det som skal forskes på, og den består av kunnskap og erfaringer som påvirker forskerens oppfatning (Brottveit, 2018, s. 35). Eksempler på vår forforståelse kan være erfaringer fra praksis og jobb i skole, i tillegg til kunnskaper vi har opparbeidet oss gjennom lærerstudiet. Vårt prosjekt vil bli påvirket av disse kunnskapene og erfaringene. Brottveit (2018, s. 35) bruker begrepet *forståelseshorisont* om kunnskaper og erfaringer vi bringer med oss inn i et forskningsprosjekt. Forståelseshorisonten er dynamisk, som vil si at den hele tiden utvikler vår forståelse, og hvordan vi ser på forskningsprosjektet vil hele tiden endres (Brottveit, 2018, s. 36). Gjennom prosessen med denne masteroppgaven har vi tilegnet oss ny kunnskap og nye erfaringer, som har ført til bredere forståelse innenfor temaet representasjoner. Dette gjør at vi i ettertid ser annerledes på datamaterialet enn vi gjorde første gangen det ble analysert. Vi har underveis sett verdien i empiri vi tidligere ikke så på som relevant, fordi vi har fått innsikt i ny teori. Innenfor hermeneutikken er også den hermeneutiske sirkel sentral, «der prinsippet er at man må forstå helheten ut fra delene og delene ut fra helten» (Brottveit, 2018, s. 36). For eksempel ved å se på et utsagn separat, og deretter se det i sammenheng med konteksten, som kan påvirke hvordan vi igjen ser på utsagnet.

3.2 Forskningsmetode og gjennomføring

3.2.1 Kvalitativ forskningsmetode

Om en studie er kvalitativ eller kvantitativ, vil avhenge av forskerens valg av metode (Nyeng, 2012, s. 71). Å velge en kvalitativ metode, vil være hensiktsmessig dersom målet er å oppnå innsikt eller å forstå et fenomen (Nyeng, 2012, s. 71; Tjora, 2021, s. 35). Dersom studiens mål er å få forklare et fenomen, vil det være mest hensiktsmessig å anvende en kvantitativ metode (Tjora, 2021, s. 35). Vi ønsket å få innsikt i *hvordan* en gruppe andreklassinger anvendte ulike representasjoner, og vurderte det som hensiktsmessig å anvende en kvalitativ metode. Intervju og observasjon er begge forskningsmetoder som anvendes mye innenfor det kvalitative forskningsfeltet (Nyeng, 2012, s. 74). Vi så på observasjon som en hensiktsmessig metode, for å innhente data til vår problemstilling, fordi det gir oss mulighet til å se hva elevene faktisk gjør. Samtidig har vi en større innvirkning på det strukturelle, altså hvor mye veiledning, hvilke konkreter og hvilke oppgaver elevene får. Mer om observasjon som metode og de ulike observasjonsrollene vil utdypes i et eget underkapittel (3.2.5).

Kvalitative innsamlingsmetoder vil gjerne gi mye data (Nyeng, 2012, s. 74). Vi valgte å skrive enkle notater, samtidig som vi tok lydopptak av elevene under arbeidet med matematikkoppgavene. Etter at vi hadde transkribert lydopptakene, satt vi igjen med mye data som skulle analyseres. Dataene som kommer frem gjennom bruk av kvalitative metoder, vil som regel bestå av tekst (Tjora, 2020, s. 27). Dermed vil kvalitativt datamateriale i større grad kunne bli tolket, enn materiale innhentet med kvantitative metoder (Nyeng, 2012, s. 71; Tjora, 2021, s. 27). Vi tolket underveis i observasjonen, og tok med oss denne tolkningen inn i møte med transkripsjonen. Funnene i forskningsprosjektet vil være et resultat av våre tolkninger av datamaterialet, inklusive observasjon, notater, elevarbeid og transkripsjon.

3.2.2 Problemstilling

En problemstilling kan være beskrivende eller forklarende (White, 2017, referert i Blikstad-Balas & Dalland, 2021, s. 30). Dersom man vil forstå fenomenet man forsker på, bør man velge en beskrivende problemstilling (Anker, 2020, s. 27). «En beskrivende problemstilling tar sikte på å svare på hva eller hvordan noe foregår» (Blikstad-Balas & Dalland, 2021, s. 30). Vi ønsker å få en forståelse av hvordan elevene anvender de ulike representasjonene, og har derfor valgt en beskrivende problemstilling. Dataene våre vil beskrive elevenes bruk av representasjoner. Vår problemstilling er: *hvordan anvender elever i begynneropplæringen ulike representasjoner i arbeidet med problemløsning?* Forskningsspørsmål lages for å presisere problemstillingen, og påvirker analysen av datamaterialet (Anker, 2020, s. 29). Vi har valgt å benytte to forskningsspørsmål, for å avgrense den mer generelle problemstillingen. Våre forsknings-spørsmål er:

1. Hvordan anvender elevene representasjonene erfaringsbaserte situasjoner, manipulerbare modeller, ikoniske fremstillinger, muntlig språk og skriftlig språk?
2. I hvilken grad er elevenes bruk av representasjoner hensiktsmessig, i arbeidet med to problemløsningsoppgaver?

Resultatene vi får i etterkant av analysen, skal svare på forskningsspørsmålene, som deretter skal besvare problemstillingen (Anker, 2020, s. 29). Vi bruker funnene fra resultatdelen, og deler de inn etter tre kategorier i drøftingskapittelet. Der de to første delkapitlene (5.1 og 5.2) svarer på første forskningsspørsmål, og tredje delkapittel (5.3) besvarer andre forsknings-spørsmål.

3.2.3 Valg av informanter

Et kjennetegn ved kvalitative forskningsprosjekter, er at de ofte får mye informasjon ut fra få informanter (Nyeng, 2012, s. 73; Tjora, 2021, s. 47). Blikstad-Balas og Dalland (2021, s. 39-41) beskriver flere forskjellige utvalg, og vi ser på *formålstjenlig utvalg* og *bekvemmelighets-utvalg* som mest relevant for vårt prosjekt. Deres definisjon av et formålstjenlig utvalg, legger vekt på at utvalget skal være basert på ulike kriterier som gjør deltakerne relevante for forskningen. Våre kriterier innebar at de tolv deltakerne måtte være andreklassinger, og en blanding av både gutter og jenter. Vi tok deretter kontakt med ledelsen på en skole vi hadde kjennskap til. Utvalget vårt vil være «en kombinasjon av [et] formålstjenlig utvalg og et sterkt element av bekvemmelighet» (Blikstad-Balas & Dalland, 2021, s. 41). Siden vi kun trengte tolv elever, og dette er en middels stor skole, ble vi enige med lærerne om å kun bruke elever fra én parallellklasse. Vi ønsket å få hjelp av klassens kontaktlærer til å sette sammen fire grupper blant de elevene med samtykke. For å gjøre gruppesammensetningen så tilfeldig som mulig, ble det foretatt en trekning.

3.2.4 Matematikkoppgaver og konkreter

Vi anvendte to problemløsningsoppgaver som vi har fått kjennskap til gjennom matematikk-emnene på studiet. Begge oppgavene har også blitt gjennomført i en tidligere praksisperiode. Vi valgte å bruke problemløsningsoppgaver, fordi de gir mulighet til å anvende flere ulike representasjoner (Karlsen, 2023, s. 39-40). Den første oppgaven, også kalt *bamseoppgaven*, har vi blitt kjent med gjennom Palmér og van Bommels (2019) bok, *Problemlösning som utgångspunkt.* Oppgaven spør etter hvor mange ulike måter en rød, blå og gul bamse kan sitte i en treseters sofa. Dette er en kombinatorikkoppgave, som kjennetegnes av at det spørres etter hvor mange ulike kombinasjoner vi kan ha (Palmér & van Bommel, 2019, s. 61). Med tre bjørner er det seks ulike kombinasjoner, men oppgaven kan lett utvides dersom elevene skulle mestre den med tre bjørner. Dersom man utvider oppgaven til å omhandle fire bjørner som skal plasseres i en fireseters sofa, vil antall kombinasjoner bli 24. Oppgaven ble presentert muntlig og elevene fikk se på et ark med bilde av en sofa med tre seter og tre bamser.

Til *bamseoppgaven* la vi frem seks fargeblyanter (rød, blå, gul, brun, oransje og grønn), tre gråblyanter, viskelær, hvite A4-ark, fire tellebrikker (rød, gul, blå og grønn), melkekorker, et bilde av en sofa og tre bamser (rød, gul og blå). Fargeblyanter, gråblyanter, viskelær og hvite A4-ark ble lagt frem med en tanke om at det skulle brukes til å tegne og/eller skrive. Med bakgrunn i tidligere erfaring med oppgaven, hadde vi sett for oss at de ville tegne bamser, en sofa, rundinger, streker eller symboler i form av bokstaver. Baktanken med å legge frem fargeblyanter med bamsenes farger, i tillegg til andre farger, var å se om de valgte samme farge som bamsene eller noen av de andre. Tanken bak å legge frem tellebrikker, melkekorker, en laminert sofa og tre bamsefigurer var at elevene skulle få mulighet til å velge mellom flere ulike konkreter med ulik abstraksjonsgrad. Vi så for oss at de fleste ville bruke bamsefigurene i større eller mindre grad, fordi dette vil være én av representasjonene som de yngre elevene vil være fortrolige med (Alseth & Røsseland, 2014, s. 119-120). Bamsefigurene vil også mest sannsynlig være et materiell som elevene ikke har anvendt tidligere, og kan derfor ses på som spennende. Tellebrikkene kunne bli brukt til å representere bamser, da de var av samme farge som dem. Melkekorkene var tenkt å være en mer abstrakt representasjon, for å se om noen av elevene valgt denne, som vi ser på som mindre hensiktsmessig en flere av de andre konkretene. Dette fordi de er vanskeligere å knytte direkte til bamsene, da alle korkene har hvit farge.

Bilde 1: Konkreter til bamseoppgaven

Den andre oppgaven i prosjektet har vi valgt å kalle *dyreoppgaven*, og her ble det spurt etter hvor mange høner og kuer et fjøs kunne inneholde, dersom det skulle være 20 dyrebein totalt. Denne oppgaven kan løses ved hjelp av diofantiske likninger, der man er ute etter å finne ut hvor mange heltallige løsninger det finnes på en likning med flere ukjente. Det vil være mer relevant for elevene på 2. trinn å oppdage at én ku kan veksles i to høner. Dette kan sees på som en enkel likning, siden 4-gangen er det dobbelte av 2-gangen. Dersom man tillater at bonden både kan ha en blanding av dyr, eller kun høner eller kuer, vil oppgaven ha seks mulige løsninger. Det kan bare være partall av høner, men det kan være enten partall eller oddetall av kuer.

Til *dyreoppgaven* la vi frem laminerte papirfigurer (8 kuer og 15 høner), 25 melkekorker, 25 små pinner, fargeblyanter (brun, blå, gul, oransje og rød), gråblyanter, viskelær og hvite ark. Ved å legge frem konkreter og fargeblyanter, vil det påvirke hvilke representasjoner elevene har mulighet til å ta i bruk. På likt grunnlag som bamsefigurene, så vi for oss at elevene ville ta i bruk de laminerte dyrene. Melkekorkene ble lagt frem fordi de var mer abstrakt enn de andre konkretene. Pinnene er også abstrakte, men kan minne mer om bein enn korkene. Tegnesaker ble også her lagt frem med samme baktanke som forrige oppgave. De skulle gi elevene mulighet til å tegne og skrive.

Bilde 2: Konkreter til dyreoppgaven

Vi har valgt å lese oppgavene muntlig, med en baktanke om å gi elevene en bedre forståelse av oppgaven. I *bamseoppgaven* spør vi etter ulike måter bamsene kan sitte i sofaen, og det er ikke nødvendigvis sikkert at elvene forstår hva vi er ute etter her. Vi har gjennomført denne oppgaven tidligere i praksis, hvor flere av elevene trodde da at «ulike måter» betydde at de kunne sitte, ligge, stå, osv. Dersom vi presenterer oppgavene muntlig, kan vi på en bedre måte sikre oss at de forstår. På den andre siden kan en muntlig fortelling bli presentert mer ulikt for de forskjellige gruppene. Derfor valgte vi å ha ansvar for hver vår oppgave, slik at alle gruppene fikk så likt utgangspunkt som mulig.

3.2.5 Deltakende observasjon

Observasjon som metode kan gi forskeren informasjon som ikke allerede er fortolket av deltakeren (Tjora, 2021, s. 62). Vi valgte å observere elevene, fordi det er en direkte kilde til informasjonen vi ønsket. Et alternativ ville vært å intervjue lærere, men da ville det allerede vært en tolkning av elevene. Observasjon vil gi forskeren et bilde på hva som skjer, men manglende innblikk i deltakernes tanker (Dalland et al, 2021, s. 126). Innsyn i deres tanker og valg krever at forskeren har mulighet til å spørre informantene om dette (Dalland et al., 2021, s. 126). Vi er i vår studie mest opptatt av hva elevene gjør, da vi ønsker å finne ut av hvordan elevene tar i bruk ulike representasjoner. Observasjon er en metode der forskeren vil påvirke innhentingen av datamaterialet, fordi forskerens forforståelse vil være avgjørende for hva han eller hun legger merke til, og oppfatter som viktig (Kvernbekk, 2002, referert i Dalland et al., 2021, s. 129). Vi har med oss ulik kunnskap og erfaring fra lærerstudiet og praksis, som vil ha en innvirkning på hvordan vi tolker det vi ser. Forskeren vil også kunne påvirke deltakerne med sin tilstedeværelse, noe som kan endre deres handlinger (Dalland et al., 2021, s. 130). Vi kjenner ikke elevene fra før, samtidig som de vet at de skal observeres, og det kan ha en innvirkning på hvordan elevene opptrer. Deltakende observasjon innebærer å delta i en bestemt gruppe med mennesker innenfor en viss tidsramme, og studere hva de gjør og hvordan de kommuniserer med hverandre (Fangen, 2010, s. 9). Fangen (2010, s. 74-79) presenterer flere observatørroller innenfor deltagende observasjon, blant annet *fullt deltakende observatør*, *delvis deltakende observatør* og *ikke-deltakende observatør*. Det er forskerens grad av deltakelse under observasjonen som avgjør deres rolle (Dalland et al., 2021, s. 136).

3.2.5.1 Fullt deltakende observatør

I noen forskningsprosjekter kreves det at forskeren er fullstendig deltakende, «for å utvikle en insiders perspektiv på det som skjer» (Fangen, 2010, s. 75). Da vil ikke forskeren bare observere, men også kjenne på følelsene det innebærer (Fangen, 2012, s. 75). Formålet med en slik deltakelse er å gi forskeren erfaringer nok til å kunne forstå hva som skjer, og ikke bare kunnskaper nok til å gjenfortelle det (Fangen, 2010, s. 76). Det ville vært vanskelig for oss å bli fullt deltakende, fordi det hadde påvirket forskningens resultater. Dersom studentene skulle løst oppgavene på lik linje med elevene, kunne det påvirket deres valg av representasjoner. Problem-stillingen fordrer at det er elever i begynneropplæringen, og vi som studenter har ikke det samme faglige nivået som elevene.

3.2.5.2 Delvis deltakende observatør

Som en delvis deltakende observatør vil forskeren være til stede og delta i de interaksjonene som forskeren er en del av (Fangen, 2010, s. 74). Forskeren vil derimot ikke delta i de aktivitetene som finner sted, på samme måte som deltakerne i studien (Fangen, 2010, s. 74). Vi inntok denne rollen, men med ulik grad av deltakelse. På forhånd hadde vi bestemt hvem av oss som skulle ha hovedansvaret for å presentere de ulike oppgavene, og veilede underveis i oppgaveløsningen. Forskeren med hovedansvaret var mest deltakende, men deltok fortsatt ikke på den samme måten som elevene, da hun ikke deltok i selve oppgaveløsningen. Samtidig skulle den andre forskeren fokusere på å observere, notere og ta bilder underveis av det deltakerne gjorde. Hun hadde dermed en mindre grad av deltakelse, men ble flere ganger deltakende i samtalen. Noen ganger ble den mer passive forskeren med i samtalen på eget initiativ, mens andre ganger var det elevene som henvendte seg til henne. Vi fikk mulighet til å prøve begge rollene, fordi vi hadde hovedansvaret for hver vår oppgave. Fangen (2010, s. 78) trekker frem kommunikasjon mellom deltakerne og forskeren/forskerne i observasjonen som vesentlig for å forstå elevenes handlinger. Vi stilte flere spørsmål til elevenes handlinger underveis. Spørsmålene skulle bidra til å få innsikt i elevenes tankegang, og valgene de tok, samtidig hjelpe elevene videre i tankeprosessen dersom de stod fast. Det kunne også være spørsmål for å bekrefte at vi hadde forstått elevenes tankegang. For eksempel da en elev telte korker, spurte vi hva korkene representerte.

3.2.5.3 Ikke-deltakende observatør

«En rolle som ikke-deltagende observatør innebærer at du kun observerer, uten at du involverer deg i samhandlingen selv» (Fangen, 2010, s. 77). Denne formen for observasjon gir informasjon om hva deltakerne gjør og sier, men mindre om deltakerens baktanke med handlingene (Fangen, 2010, s. 78). Om forskeren skal vite hvorfor deltakerne utøver diverse handlinger, krever det at han eller hun får mulighet til å samtale med dem, og la dem forklare seg (Fangen, 2010, s. 78). I en klasseromsobservasjon vil det være naturlig å småprate med elevene og læreren i pausene (Fangen, 2010, s. 79). Det ville vært kunstig for elevene dersom én av studentene skulle observert uten noen form for deltakelse, fordi våre deltakere er små elever og går på 2. trinn. Det ble naturlig for dem å stille oss begge spørsmål og prate med oss. Fangen (2010, s. 74) trekker frem viktigheten av at forskeren tilpasser seg det miljøet som forskningen gjennomføres i, slik at deltakerne føler seg mest mulig trygge. Samtalen sporet også flere ganger over på andre temaer enn matematikk, eksempelvis om hvordan elevene kom seg til skolen, eller spørsmål rundt når de skulle få friminutt. Noe vi ser på som helt naturlig når man forsker med barn.

3.2.6 Gjennomføring av observasjon

Datamaterialet til denne oppgaven ble samlet inn på en mellomstor skole på Østlandet. Data-innsamlingen foregikk i elevenes andre halvår på 2. trinn. Vårt første besøk på skolen gikk til å hilse på elevene, og fortelle om prosjektet vårt. Videre gjennomførte vi observasjonene over to dager. Vi observerte fire grupper med tre elever per gruppe. Gruppene ble tatt med ut på et eget rom, der de fikk lest opp en problemløsningsoppgave som de skulle samarbeide om å løse. Alle gruppene ble observert de to dagene og fikk arbeide med en problemløsningsoppgave hver av dagene. Øktene varte mellom 15-20 minutter. Vår observasjonsrolle ble mer deltakende enn vi hadde tenkt på forhånd, fordi vi erfarte at elevene hadde behov for det. Elevene ble nok litt mer styrt den andre dagen, på bakgrunn av de erfaringene vi hadde gjort oss den første dagen.

3.2.7 Lydopptak og transkripsjon

Vi brukte lydopptak som et hjelpemiddel i forskningsprosessen. Lydopptakene ble gjort gjennom mobilapplikasjonen til Nettskjema, og oppbevart inne i deres database. Vi hadde først tenkt å benytte oss av videoopptak, men fant ut at dette ble for omfattende. Lydopptak gir oss mulighet til å høre dem flere ganger, og konvertere til skrift gjennom transkripsjon. Dette førte til at vi kunne hente ut flere resultater enn om vi bare hadde observert. Transkripsjonen ble også utgangspunkt for analyse.

3.3 Tematisk analyse

Metoden tematisk analyse dreier seg om å finne ulike mønstre, altså temaer i de innsamlede dataene (Braun & Clarke, 2006, s. 79). Tematisk analyse kan gjøres induktivt ved at man finner temaer med utgangspunkt i empirien, eller ved at temaene baseres på teori, altså deduktivt (Braun & Clarke, 2006, s. 83). I utgangspunktet hadde vi en deduktiv tilnærming til analysen, fordi vi skulle bruke Lesh med flere (1987) sin modell for representasjonssystemer til å kategorisere funnene. Underveis i analysen hadde vi behov for flere kategorier, derfor arbeidet vi induktivt med å finne nye teorier som kunne brukes i kategoriseringen. Braun og Clarke (2006, s. 86) har delt inn den tematiske analyseprosessen i seks faser, eller steg. Disse stegene skal ikke gjennomføres trinnvis fra steg 1-6, men forskeren forflytter seg gjerne frem og tilbake mellom de ulike stegene. Johannessen med kolleger (2018) har oversatt og forenklet fra seks til fire faser, og vi har valgt å benytte deres norske begreper når vi omtaler fasene.

3.3.1 Forberedelse

I Braun og Clarkes (2006, s. 87) første fase skal forskeren bli kjent med datamaterialet før selve kodingen begynner. Å transkribere datamaterialet vil bidra til at forskeren får kjennskap til dataenes innhold (Riessman, 1993, s. 87, referert i Braun & Clarke, 2006, s. 87). Dersom man ikke har transkribert på egenhånd, bør man uansett undersøke om transkripsjonen og lyd-opptaket samsvarer (Braun & Clarke, 2006, s. 87-88). Vi brukte nettskjema sin transkripsjons-funksjon, men oppdaget tidlig at den ikke hadde klart å fange opp alt som ble sagt. Flere steder var det lite samsvar mellom lydopptaket og transkripsjonen, når det kom til enkelte ord og setninger. Vi lyttet derfor til opptakene samtidig som vi fulgte med i transkripsjonen, og rettet opp eventuelle feil eller mangler. Lydopptakene ble fordelt ut fra de to oppgavene, én av oss jobbet med *bamseoppgaven*, og den andre med *dyreoppgaven*. For å bli kjent med innholdet leste vi gjennom transkripsjonene individuelt, og noterte stikkord i margen.

3.3.2 Koding

Dataene skal i denne fasen systematiseres i ulike grupper, og tildeles en kode ut ifra gruppen de blir plassert i (Tuckett, 2005, referert i Braun & Clarke, 2006, s. 88-89). Det er imidlertid viktig å si at det er forskjell på en kode og et tema, da et tema ofte rommer mer enn en kode (Braun & Clarke, 2006, s. 88). Ifølge Braun og Clarke (2006, s. 88) vil et tema være mer overordnet enn en kode, slik at et tema kan inneholde flere ulike koder. Kodingsprosessen kan foregå manuelt, ved at å notere med forskjellige farger ved siden av transkripsjonen (Braun & Clarke, 2006, s. 89). Etter vi hadde blitt kjent med materialet hver for oss, valgte vi å lese gjennom transkripsjonene sammen. Vi sammenlignet de individuelle stikkordene, og utformet deretter felles koder som vi skrev i margen på en ny transkripsjon.

3.3.3 Kategorisering

I fase tre skal man forsøke å sammenfatte de mange kodene til færre, og mer overordnede temaer (Braun & Clarke, 2006, s. 89). Disse temaene vil da bli hovedtemaene, som igjen kan bestå av ulike undertemaer (Braun & Clarke, 2006, s. 89-90). «For å gjøre det litt mer konkret, kan vi tenke på kategoriene eller temaene som *bokser*. I hver boks skal vi samle data som har viktige ting til felles» (Johannessen et al., 2018, s. 295). Det vil si at vi deler dataene inn i kategorier, som består av flere koder med noen tydelige likhetstrekk. Et likhetstrekk i mange av kodene, var ulike typer representasjoner.

Underveis i prosessen lagde vi noen tiltenkte kategorier, som ble til ettersom vi fikk behov for nye. Kategoriene ble tildelt hver sin farge, og deretter markert med denne. Listen med kategorier som står nedenfor, er de vi markerte med ulike farger.

- Forslag til representasjon
- Muntlig språk
- Skriftlig språk/tegning
- Bruk av konkreter
- Detaljfokus
- Utenomsnakk
- Veiledning fra student
- Konkretene distraherer

Etter markeringen foretok vi en kondensering (Klette, 2009; Roultson, 2014, referert i Eriksen & Svanes, 2021, s. 287). Det vil si at man gjør et valg om hvilke data som er relevant, og irrelevante data utgår. De første dataene som utgikk, var det vi kategoriserte som «utenom-snakk». Disse kodene inneholdt alt som ikke hadde med oppgaveløsningen å gjøre. Når man forsker på barn vil det være naturlig at de begynner å snakke om andre ting, for eksempel hva de gjorde i friminuttet tidligere.

Det skal nå foretas en gjennomgang av de foreløpige temaene (Braun og Clarke, 2006, s. 91). Dette kan, ifølge Braun og Clarke (2006), føre til at et tema blir kuttet ut, et tema blir til flere temaer, eller at flere temaer blir samlet til ett nytt. Vi oppdaget etter hvert at de nåværende temaene var utfordrende, fordi flere av funnene kunne plasseres under flere temaer. For eksempel brukte elevene konkreter samtidig som de brukte tegningen, og de kommuniserte med hverandre. Vi endte dermed opp med en kategori som dreide seg om de mest fremtredende oversettelsene. Videre ble Lesh med kolleger (1987) sine ulike representasjonssystemer til hver sin kategori. For å vurdere hvor hensiktsmessig elevenes bruk av de ulike representasjonene var, handler den siste kategorien om Kilpatrick med kolleger (2001) sine egenskaper knyttet til representasjonene. Vi så det som hensiktsmessig å dele opp ikoniske fremstillinger til to under-kategorier, piktografisk og ikonisk (Hughes, 1986). Dermed ble de to siste kategoriene påvirket av empirien, og vi kan si at tilnærmingen også er induktiv. De syv kategoriene anvendes videre til å dele inn drøftingen.

- Erfaringsbaserte situasjoner
- Muntlig språk
- Manipulerbare modeller
- Ikoniske fremstillinger (piktografisk og ikonisk)
- Skriftlig språk
- Overganger mellom representasjonene
- Egenskaper (synlighet, effektivitet, generalitet, klarhet og presisjon)

3.3.4 Rapportering

Å skrive rapporten er det siste steget i analyseprosessen. I denne fasen skal man overbevise leseren om at den gjennomførte analyseprosessen er gyldig (Braun og Clarke, 2006, s. 93). Utdrag fra materialet må presenteres slik at leseren kan få en forståelse for hvorfor vi har kommet frem til våre funn (Braun og Clarke, 2006, s. 93). Resultatdelen består av to hoveddeler, én for hver oppgave. De to delene presenterer resultatene gruppevis. I denne delen presenteres utdrag vi ser på som relevante for å besvare vår problemstilling. Etter hver gruppe følger en punktvis oppsummering av funnene.

3.4 Forskningsetiske vurderinger

Steinar Kvale og Svend Brinkmann (2015, s. 102) identifiserer fire sentrale temaer som ofte diskuteres i sammenheng med forskningsetiske retningslinjer: *informert samtykke*, *konfidensialitet*, *konsekvenser* og *forskerens rolle*. Videre vil vi ta for oss hvert av de fire punktene, og koble det opp mot etiske vurderinger vi har gjort underveis i prosjektet.

3.4.1 Informert samtykke

Det første aspektet ved forskningens etiske hensyn handler om å gi deltakerne tilstrekkelig informasjon om hva deltakelsen innebærer. I tillegg skal det informeres om at deltakelsen er frivillig og muligheten for å alltid kunne trekke seg uten konsekvenser (Kvale & Brinkmann, 2015, s. 104-105). For at barn under 15 år skal kunne delta som informanter i en forsknings-undersøkelse, kreves det samtykke fra deres foresatte. Det er viktig at barna selvstendig uttrykker at de ønsker å være med, selv om de har fått samtykke fra foreldre (Dalland et al., 2021, s. 136). I forkant av datainnsamlingen laget vi et samtykkeskjema, som skulle sendes ut til barnas foresatte (Vedlegg 1). Skjemaet inneholdt informasjon om prosjektet, eksempelvis hva en eventuell deltakelse ville innebære, og hvordan vi skulle ivareta deltakernes anonymitet. Det inneholdt også kontaktinformasjon, slik at foresatte hadde mulighet til å stille spørsmål, både i forkant og underveis i prosjektet. Sikt godkjente skjemaet vårt samtidig som de ga tillatelse til gjennomføringen av forskningsprosjektet (Vedlegg 2). Klassens kontaktlærer kopierte opp samtykkeskjema og sendte det hjem med elevene, og vi samlet det inn da vi kom for å gjennomføre observasjonen. Før vi startet opptakene, informerte vi barna om prosessen, tydeliggjorde de ulike rollene vi studentene hadde, og hvilke forventninger vi hadde til barna. Vi forsikret oss om at de fortsatt ønsket å delta. Vi forklarte at vi ville ta opptak for å klare å huske det som ble sagt. I tillegg informerte vi om at én av oss ville ta bilder underveis, og presiserte at disse kun ville vise hendene deres. Til slutt fikk elevene mulighet til å stille noen siste spørsmål dersom de ønsket det.

3.4.2 Konfidensialitet

Konfidensialitet handler om at deltakerne blir innforstått med, og godtar hva resultatet av deltakelsen vil innebære (Kaiser, 2012, referert i Kvale og Brinkmann, 2015, s. 106). Det vil si at forskere og deltakere må bli enige om hva de har lov til å gjøre med dataene. Vi formidlet hva dataene skulle brukes til i samtykkeskjemaet, samtidig som vi snakket med elevene underveis i observasjonen. Konfidensialitet handler også om det å anonymisere informasjon som kan føre til at deltakerne gjenkjennes (Kvale & Brinkmann, 2015, s. 106). Et av tiltakene vi brukte for å ivareta elevenes anonymitet, var å oppbevare lydopptakene i nettskjema. Deretter anvendte vi koder da lydopptakene ble transkribert. Eksempelvis E1, E2 og E3 for elevene, og S1 og S2 for studentene. I resultatkapitlet har vi valgt å bruke fiktive navn, for å gjøre teksten lettere å lese. De fiktive navnene er organisert med lik forbokstav etter hvilken gruppe de tilhører. Første gruppe fikk navn med bokstaven A, andre gruppe fikk bokstaven B, tredje gruppe fikk bokstaven C, og fjerde gruppe fikk bokstaven D. De originale bildene ble også tatt og oppbevart i Nettskjema sine krypterte systemer. Den av studentene som tok bilder var påpasselig med å ikke få med noe som kunne identifisere barna. Noen av bildene som ble sendt inn, fikk vi ikke opp da de skulle brukes. Derfor er de fleste bildene i oppgaven blitt rekonstruert, og de andre bildene er kun tegninger.

3.4.3 Konsekvenser

Det etiske prinsippet konsekvenser omhandler forskerens vurdering av både positive og negative følger, som kan være et resultat av deltakelse i forskningen (Kvale & Brinkmann, 2015, s. 107). Vi som forskere bør tenke gjennom hva vi utsetter barna for, slik at de ikke tar skade av den forskningen vi har gjennomført. Et tiltak vi gjorde for å minske konsekvensene for elevene, var å gjennomføre minst én oppgave med alle elevene i klassen. Vi hadde behov for 12 elever, men var heldig og fikk flere samtykker enn vi trengte. For å gjøre det mest mulig rettferdig ble det gjort en tilfeldig trekning av hvilke elever som ble deltakere i prosjektet. Særlig elever som hadde samtykke, har sannsynligvis skapt en forventning om å få bli med, og det kan føre til en skuffelse dersom dette ikke skjer. Derfor valgte vi å gjennomføre tre ekstra grupper med de resterende elevene i klassen. Disse gruppene inneholdt både barn med og uten samtykke, og ble derfor ikke en del av datamaterialet, altså ikke tatt lydopptak eller bilder av.

3.4.4 Forskerens rolle

Forskerens rolle handler først og fremst om forskerens moral, og hvordan han eller hun forholder seg til menneskene som bli forsket på (Kvale & Brinkmann, 2015, s. 108). Barna kjente ikke oss fra før, og det kan gjøre dem usikre på hvordan de skal forholde seg til oss. Vi valgte bevisst å trygge barna underveis i prosessen. Blant annet brukte vi oss selv som eksempel ved å si at vi heller ikke hadde gjort dette før, og at det derfor kunne føles litt rart eller skummelt. Et annet aspekt ved forskerens rolle, er dens viktighet med tanke på innhenting av datamateriale (Kvale & Brinkmann, 2015, s. 108). De dataene vi innhenter danner grunnlaget for resultatene og konklusjonen til forskningen. Vi kom forberedt til observasjonen gjennom å ha laget spørsmål vi kunne stille, og avtalte hvem som skulle gjøre hva. Dette gjorde vi for at datamaterialet skulle bli best mulig, og relevant for problemstillingen. Forskerens rolle har en vesentlig innvirkning på forskningens kvalitet.

3.5 Forskningens kvalitet

Når man skal si noe om en studies kvalitet bruker man gjerne begrepene *reliabilitet* og *validitet* (Nyeng, 2012; Anker, 2020). Dersom en studie er reliabel, vil det si at forskningen er gjennomført på en god måte, og at datamaterialet er troverdig (Nyeng, 2012, s. 105). For at en studie skal være reliabel, må studiens utfall bli omtrent det samme dersom studien blir gjennomført på nytt (Nyeng, 2012, s. 107). Begrepet reliabilitet er ofte brukt om kvantitativ forskning, og det kan få en litt annen betydning når det er snakk om kvalitative forsknings-metoder (Nyeng, 2012, s. 114-115). Kvalitative studier har gjerne mindre utvalg (Nyeng, 2012, s. 73; Tjora, 2021, s. 47), og derfor kan det være vanskelig å få like resultater om man skulle gjennomført forskningen på nytt med andre deltakere. I tillegg vil funnene bære preg av forskerens forkunnskaper og tolkning, slik at det vil være vanskelig for en annen forsker å tolke observasjoner på samme måte (Nyeng, 2012, s. 71; Tjora, 2021, s. 27). Anker (2020, s. 108) benytter begrepet *pålitelighet*, i stedet for reliabilitet, og hun trekker frem det å være *transparent* som viktig for at leseren skal oppfatte studien som troverdig. Transparens handler om å gi leseren innsyn i den prosessen du har gjennomgått i arbeidet med forskningsprosjektet, blant annet hvilke valg du har tatt og de utfordringene du har vært gjennom (Anker, 2020, s. 108-109). Vi viser transparens gjennom særlig metodekapittelet, hvor vi legger frem alt vi har gjort. Det innebærer både forberedelser til og gjennomføring av observasjon, samt hvordan vi arbeidet med datamaterialet i etterkant. Videre vil det å være transparent innebære å la leseren bli kjent med utdrag fra datamaterialet, og dermed forstå hvordan forskeren har kommet frem til studiens resultater (Anker, 2020, s. 108-109). I kapittel 4, *Resultater*, har vi presentert resultatene fra analysen. Kapittelet inneholder beskrivelser av hvordan gruppene anvendte ulike representasjoner, både gjennom forklaringer og sitater hentet fra transkripsjonen.

Den andre faktoren som påvirker studiens kvalitet, er validitet. Det forutsetter at man gjennomfører en forskningsprosess som vil gi svar på det som i utgangspunktet skulle undersøkes (Nyeng, 2012, s. 109). Dersom resultatene i en studie ikke samsvarer med problemstillingen eller forskningsspørsmålene, vil det svekke studiens *gyldighet* (Anker, 2020, s. 109). Underveis i prosessen har vi flere ganger endret vår problemstilling, slik at den skal kunne besvares av våre funn. Vi har videre vært bevisste på å kun presentere funn som vil besvare problemstillingen, på tross av at det er mye annet interessant å trekke frem. Det er ifølge Anker (2020, s. 109) normalt å innhente andre data enn det man hadde sett for seg på forhånd. Underveis i analysen av datamaterialet oppdaget vi at de inneholdt andre funn som var mer interessant å se nærmere på, enn det vi først tenkte å undersøke. Vi syntes det var mer spennende å se på *hvordan* elevene tok i bruk ulike representasjoner, og vurdere hvorvidt bruken var *hensiktsmessig* eller ikke. Vår problemstilling ble dermed revidert med dataene som utgangs-punkt.

Generalisering trekkes ofte frem som et tredje perspektiv i vurderingen av en studies kvalitet. Halkier (2010, s. 131) uttrykker at generalisering, som regel snakkes om når det gjelder kvantitativt materiale. Videre trekker hun frem at generalisering kan knyttes til utvalget i studien, og det innebærer om utvalget er representativt for hele befolkningen som personene er hentet fra. Blikstad-Balas og Dalland (2021, s. 38) skiller mellom to typer utvalg; *representative* og *ikke-representative*. De beskriver at formålet med representative utvalg ofte er å kunne generalisere til hele den gruppen man forsker på. Et representativt utvalg kan gjøres ved tilfeldig utvelgelse, slik at det er like sannsynlig for alle personene i den gruppen man forsker på, å komme med i utvalget (Blikstad-Balas & Dalland, 2021, s. 38-39). Utvalget i vår studie består kun av 12 elever fra den samme klassen, på 2. trinn ved samme skole. Dermed vil ikke vårt utvalg kunne representere alle andreklassinger i landet. Selv om vi har en kvalitativ studie, uten resultater som kan generaliseres, kan resultatene likevel ha betydning for andre studier (Anker, 2020, s. 110). De kan likevel ha en overføringsverdi (Anker, 2020, s. 110). Våre resultater skal utvide forskningsfeltet med å gi mer detaljerte beskrivelser av *hvordan* elevene anvender representasjonene.

4 Resultater

I dette kapittelet presenteres resultater og funn fra *bamse-* og *dyreoppgaven*. Vi har valgt å beskrive hver oppgave i egne delkapittel, med en beskrivelse av hva de ulike gruppene gjorde på de aktuelle oppgavene. Etter hver gruppe er resultatene oppsummert i korte punkter, under den tilhørende gruppen. Disse skal brukes videre i drøftingskapitlet til å besvare problemstillingen; *hvordan anvender elever i begynneropplæringen ulike representasjoner i arbeidet med problemløsning?*

og forskningsspørsmålene;

1. Hvordan anvender elevene representasjonene erfaringsbaserte situasjoner, manipulerbare modeller, ikoniske fremstillinger, muntlig språk og skriftlig språk?
2. I hvilken grad er elevenes bruk av representasjoner hensiktsmessig, i arbeidet med to problemløsningsoppgaver?

4.1 Bamseoppgaven

Bamseoppgaven spurte etter hvor mange måter en rød, blå og gul bamse kunne sitte i en treseters sofa. Alle gruppene tok i bruk konkreter, og noen grupper tegnet, men det var forskjell på hvor mye elevene brukte bamsene og hvor mye de brukte tegningen.

4.1.1 Første gruppe

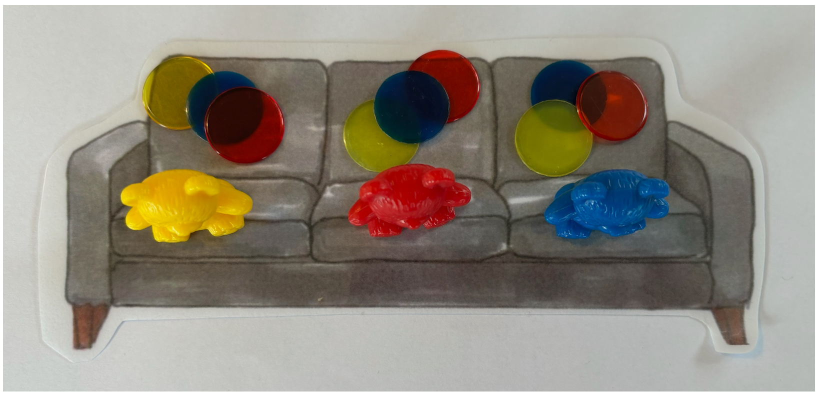
Elevene tok i bruk de fleste av konkretene med en gang. De plasserte bamsene på hver sin plass i sofaen, og brukte deretter melkekorkene som stoler, puter og hatter til bamsene. I tillegg ble tellebrikkene blant annet brukt inni melkekorkene for å markere fargen til bamsen, som den aktuelle hatten tilhørte.

> Albert: «Ja, men det går an å ta den puta der, og sitte på»
> Ali: «Ja, de kan jo skli ned, wooo»
> Anna: «Men først må vi ta en sånn inni der» *(tok en tellebrikke inni en melkekork)*

Utsagnene over er utdrag fra ulike deler i transkripsjonen til den første gruppen, hvor konkretene ble brukt til noe annet enn å løse oppgaven. Avslutningsvis på denne gruppen kom Albert med en ny idé, og uttrykte at de hadde brukt litt mange konkreter da han kom med utsagnet: «noen ganger tar vi litt for mye ting også». Deretter tok han vekk alle konkretene, utenom den laminerte sofaen og bamsene.

Bilde 3: Bamsenes plassering hos første gruppe

Elevene tok etter hvert i bruk en rød, en gul og en blå tellebrikke, som de plasserte i samme rekkefølge som bamsene satt i sofaen. Når de endret rekkefølgen på bamsene i sofaen, la elevene nye tellebrikker i en haug sammen med de tellebrikkene som lå der fra før. I hver haug lå det til slutt tre tellebrikker, en rød, en blå og en gul. En av studentene spurte elevene om brikkenes betydning, og en av elevene svarte da «at alle har vært på det stedet». De kunne altså fortelle oss at brikkene i haugen viste at alle de tre bamsene hadde sittet på den plassen. Elevene fant ut at alle bamsene hadde sittet på alle plassene, fordi alle de tre haugene inneholdt tre tellebrikker av ulik farge.



Bilde 4: Første gruppe som la tellebrikker i hauger bak bamsene (rekonstruksjon)

Gruppen fant frem til ulike kombinasjoner underveis, men de klarte ikke å huske dem eller finne ut hvor mange kombinasjoner de hadde vist i ettertid.

Student: For alle har sånne farger på de plassene. Så hvor mange forskjellige måter tror dere bamsene kan sitte på?
Anna: Mange
Student: Mange?
Albert: Fire eller fem?
Student: Tror dere dere klarer å finne ut av hvor mange det er?
Albert: Fire eller tre?
Anna: Nei, vet ikke

Utdraget over viser til at elevene ikke hadde fullstendig oversikt over antall kombinasjoner de hadde funnet, men heller gjettet når vi spurte dem om det. Elevene fikk ikke dokumentert kombinasjonene de fant underveis, det gjorde det sannsynligvis vanskeligere å huske hvilke de hadde.

4.1.1.1 Funn fra første gruppe

- Elevene hadde for mange konkreter tilgjengelig på samme tid, og konkretene ble i liten grad brukt til å løse oppgaven.
- Elevene la tellebrikker i hauger bak plassene i sofaen for hver gang en bamse satt på den plassen, hvor tellebrikken hadde samme farge som bamsen.
- Gruppen brukte kun konkreter, ingen skriftlig besvarelse.

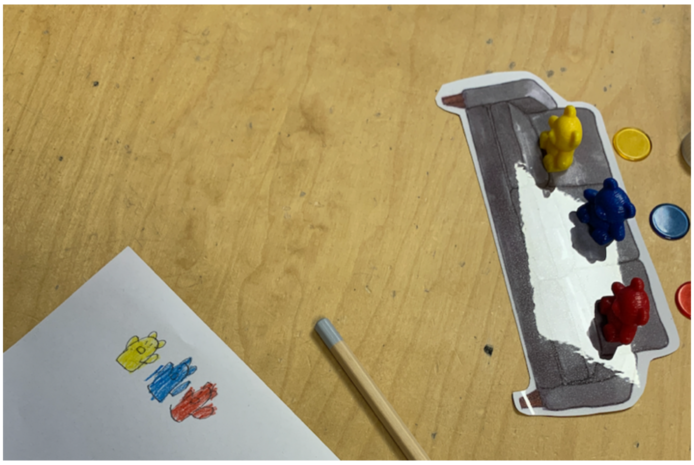
4.1.2 Andre gruppe

Bamsekonkretene ble tatt i bruk først, sammen med den laminerte sofaen. Elevene satte bamsene på hver sin plass i tilfeldig rekkefølge, og fant flere ulike kombinasjoner på denne måten. Etter en kort stund kom Brage med et forslag om at de kunne skrive det ned på en lapp, etter vi spurte hvordan de kunne huske hvilke måter de allerede hadde vist. Én av de andre elevene foreslo å ta med bamsene hjem for å huske, og vise frem rekkefølgen til foreldrene. Gjennom de to utsagnene nedenfor beskrev Brage hvordan han ville skrevet og tegnet ned bamsene for å huske hvilke kombinasjoner de allerede hadde funnet.

Brage: «Jeg kan liksom skrive at den er på en måte der, så jeg husker at de er i den rekkefølgen»
Brage: «Jeg skulle tegnet en bamse, og så skulle jeg tatt liksom ... tegnet alle bortover.

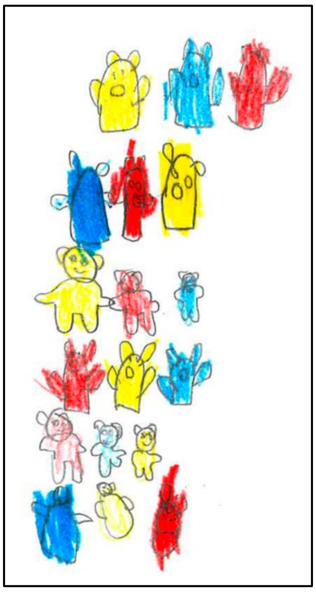
> Sånn at jeg liksom ... her er den første, og så kommer den andre etter. Så liksom den første tingen vi gjorde var den da. Og så tar vi den andre etter det»

Brage uttrykte at han ville tegnet de tre bamsene i den samme rekkefølgen som bamsene hadde i sofaen på det daværende tidspunktet. Det ble den første kombinasjonen de tegnet.



Bilde 5: Andre gruppe som anvendte konkretene som støtte til å tegne kombinasjoner

Brage tegnet tre bamser, gul til venstre, blå i midten og rød til høyre. Berit beskrev det Brage tegnet ved å si: «da tegner han den blå fargen i midten, på den i midten ... bamsen».



Bilde 6: Andre gruppe sin fullstendige tegning av alle kombinasjoner

Bildet ovenfor viser den fullstendige tegningen som gruppen produserte. Elevene byttet på å tegne de ulike kombinasjonene, som de kom frem til ved å bruke både bamsefigurene og tegningen. Hver rekkefølge representerte et løsningsforslag. Ved å se på tegningen oppdaget

Brage etter hvert at den røde bamsen aldri hadde sittet på den første plassen. Dette uttrykte han ved å si: «Vi har ikke begynt med den røde på noen». Den neste kombinasjonen fant gruppen ved å kun bytte plass på den gule og den blå bamsen. Elevene fant til slutt den sjette kombinasjonen ved å prøve seg frem flere ganger. De anvendte tegningen, og fant sammen ut at de allerede hadde flere av forslagene som kom frem. Vi studentene måtte kontinuerlig minne elevene på at de skulle tegne kombinasjonene de fant, det var ikke noe de kom på selv.

Elevene var tydelig opptatt av å tegne detaljerte bamser. Flere ganger under hele oppgave-løsningen kommenterte de både egne og andres tegninger. Bendik uttrykte at han ikke ønsket å tegne, fordi han mente han var dårlig til det. Under kommer noen eksempler hvor detaljer var sentralt.

> Berit: «Har du ikke øynene?»
> Bendik: «Jo, jeg skal tegne de til slutt»
> ...
> Bendik: «Jeg er dårlig til å tegne, jeg står over»
> ...
> Brage: «Har de munn?»
> Berit: «Eh ja...»
> Brage: «Hvorfor har de ikke ører?»

Vi prøvde kontinuerlig å veilede elevene mot at detaljer ikke var det viktigste, men at man kunne se hvilken rekkefølge bamsene hadde. Elevene sa seg alltid enig, men viste en tendens til å glemme seg da de skulle tegne.

4.1.1.2 Funn fra andre gruppe

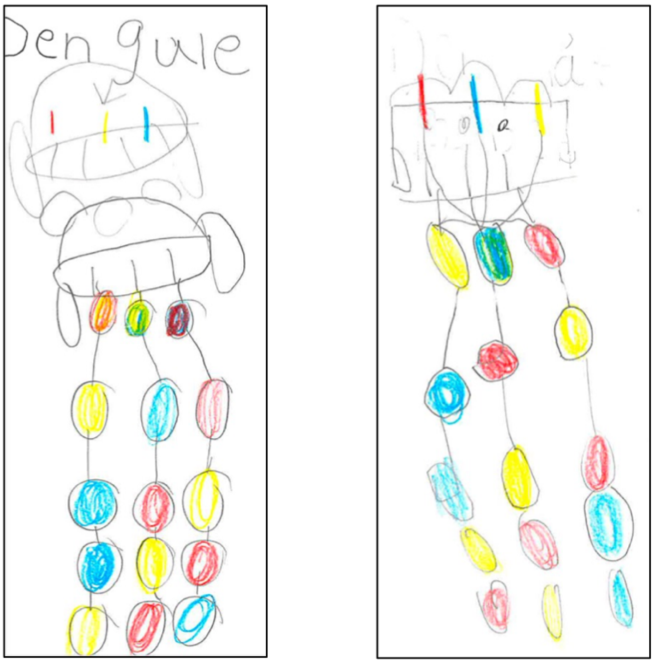
- Brage sitt forslag om å skrive kombinasjonene på en lapp, hvor han beskrev muntlig hvordan dette skulle utføres.
- I starten brukte gruppen konkretene som støtte, til å tegne ulike kombinasjoner.
- Oppdaget at man kunne finne en ny kombinasjon ved å kun flytte på to av bamsene.
- Etter hvert gikk gruppen over til å bruke tegningen for å finne nye kombinasjoner.
- Gruppen hadde gjennomgående et stort fokus på detaljer, og var blant annet opptatt av at alle bamsene skulle ha øyne, ører og munn.

4.1.3 Tredje gruppe

I likhet med alle andre, tok også denne gruppen i bruk bamsekonkretene og den laminerte sofaen først. De forflyttet bamsene ganske tilfeldig, og fant flere ulike kombinasjoner. Etter hvert uttrykte Claus: «Den gule sitter der igjen, og så bytter de sånn». Her har Claus oppdaget at den gule bamsen kan bli sittende på sin plass, samtidig som blå og rød bamsen flyttes. Etter utsagnet ble elevene veiledet til å dokumentere de ulike kombinasjonene. Claus foreslo at de kunne skrive ned de ulike kombinasjonene. Videre beskrev han hvordan han tenkte å gjøre dette: «så skriver man her sitter den røde bamsen på høyre side». I utraget under følger samtalen som forekom etter Claus' forslag

> Claus: «Da var det venstre, eller høyre? Høyre, venstre? Høyre, venstre. Ok, det var det»
> Student: «Og dere kan også få et ark hver om dere vil det»
> Claus: «Den blå sitter på høyre side»
> Carmen: «Å det er det jeg skulle skrive. Caia vil du også skrive?»
> *Caia svarer, men det er uforståelig å høre hva hun sier.*
> Carmen: «Skrives blå med to L-er?»
> Student: «Bare en L. Om dere skriver feil nå, så gjøre det ingen ting. Det viktigste er jo at dere klarer å huske hvem dere har tatt og ikke»

Vi merket på elevene at de synes dette var en vanskelig eller tungvint metode. De brukte lang tid på å finne ut hvilken retning som var høyre og venstre, samtidig som de var usikre på rettskrivingen. Vi spurte derfor elevene om de hadde et forslag om en lettere måte å skrive ned bamsenes rekkefølge. Claus kom da med idéen: «Eller så kan vi tegne en sofa her på en måte». Han utdypet dette ved å si: «Da kan vi tegne en rød strek fordi den har sittet på siden, en gul strek har sittet i midten og en blå strek har sitti ytterst». Claus og Carmen tegner hver sin sofa på samme ark, som kan sees på bildene nedenfor.



Bilde 7: Claus og Carmen sine tegninger av kombinasjoner

To av elevene begynte å tegne hver sin sofa med fargede streker som representerte bamsenes plassering. Videre abstraherte de ved å kun tegne sirkler, uten å tegne sofaen. Elevene flyttet bamsene for å finne nye kombinasjoner, men de tegnet ikke før vi spurte dem om dette var en kombinasjon de hadde fra før. Etter en stund brukte Claus tegningen som et hjelpemiddel til å finne en ny kombinasjon, da han sa «jeg ser ikke at vi har hatt den rød i midten».

På dette tidspunktet hadde elevene for det meste brukt konkretene til å finne nye rekkefølger, men gikk da over til å bruke tegningen mer aktivt. De tre elevene forsto ved hjelp av tegningen at en bamse kunne sitte på det samme setet to ganger. Vi hadde en samtale om kombinasjonene blå, rød, gul og blå, gul, rød, da Carmen sa at: «De var nesten helt like, bare de byttet plasser». Bamsene som byttet plasser i denne sammenhengen, var den røde og den gule bamsen. De fikk dermed en ny kombinasjon ved å kun bytte plass på den røde og den gule bamsen.

4.1.3.1 Funn fra tredje gruppe

- Claus oppdaget at den gule bamsen kan bli sittende, samtidig som den blå og den rød bytter plass (med konkretene).
- Claus forklarte hvordan han ville skrevet ned kombinasjonene de hadde funnet.
- Elevene begynte å skrive ned setninger som forklarte rekkefølgen på bamsene, og deres plassering i forhold til hverandre, hvor rettskrivingen ble begrensende.
- Elevene gikk over til tegning av streker og rundinger som symboliserte bamsene.

- Først brukte de konkretene som støtte til å tegne, og deretter klarte de å finne nye kombinasjoner kun ved å se på tegningen.
- Brukte tegningen til å se at man kunne beholde plassen til én av bamsene, og bytte de to andre.

4.1.4 Fjerde gruppe

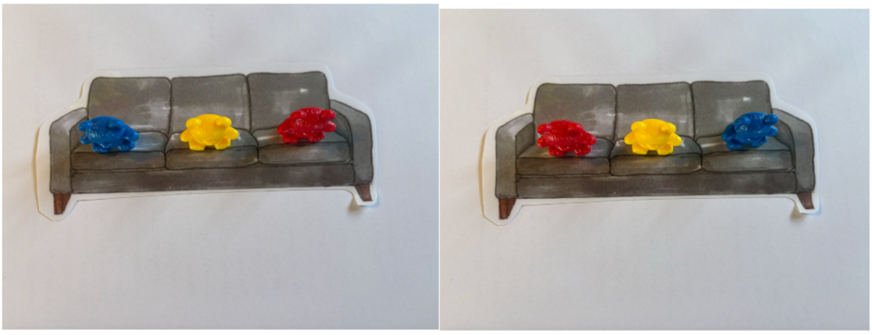
I begynnelsen hos den fjerde gruppen, synes de det var vanskelig å forstå hva oppgaven spurte etter. Det skjedde en misforståelse i hva «ulike måter» betydde. Elevene tenkte at én måte var å flytte på bamsene, og en annen var at de skulle sitte på en viss måte for å se på tv.

> Daria: «Vi har gjort sånn at de bytter plasser, og så har vi gjort sånn at de måtte sitte sånn hvis de skulle se på tv. Og den andre, vet jeg ikke helt om vi faktisk har gjort»

Vi prøvde å spørre elevene gjentatte ganger for å lede dem over på å finne ulike måter. Didrik tok tak i konkretene for å vise noe av det han tenkte. Han oppdaget at man systematisk kunne bytte plass på to og to bamser for å ende med nye kombinasjoner. Dette viste han ved å sette den gule i midten, og kun bytte plass på den rød og blå. Deretter satte Didrik den gule til høyre, og byttet kun den rød og den blå enda en gang. Plutselig hadde han fire kombinasjoner. Det kommer frem da Didrik uttrykte at det: «Går liksom an å ha det liksom sånn, og så går det an å bytte sånn. Og de to bytte. Og de to bytte. Er ikke det egentlig fire måter?». Når Didrik nevnte «de to bytte» siktet han til å kun bytte plass på to av bamsene. Den samme bamsen kunne altså sitte på den samme plassen to ganger, uten at kombinasjonen ble den samme. Vi bekreftet idéen hans, samtidig som vi prøvde å lede han inn på å dokumentere det han hadde funnet ut.

> Didrik: «Når vi har denne måten så har vi ... rød ... og så har vi gul ... også har vi blå»
> Student: «Ok, for det er den rekkefølgen som er nå det»
> ...
> Didrik: «Da er det lissom én måte»
> Student: «Ok, men hvilke andre måter hadde dere da? Husker du?»
> Didrik: «Så har vi blå, gul, rød ... da var det motsatt vei»
> Student: «Da er det motsatt vei da. Hvem er det som har byttet plass der da?»
> Didrik: «De to» *(rød og blå bamse)*

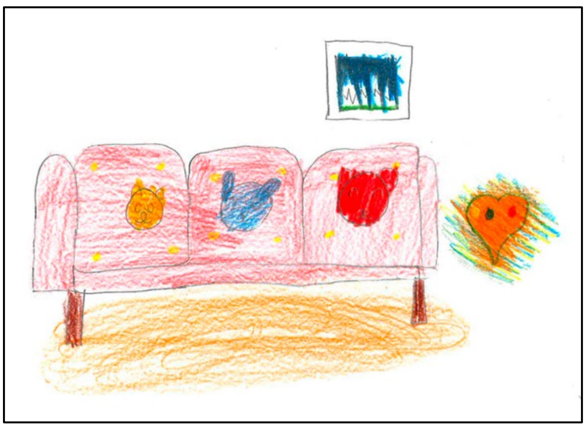
Bildene under viser en rekonstruksjon av det Didrik viste med bamsefigurene, da han beholdt plassen til én av bamsene, og byttet de to andre.



Bilde 8: Fjerde gruppe som fant ut at de kunne beholde plassen til én av bamsene, og kun bytte de to andre (rekonstruksjon)

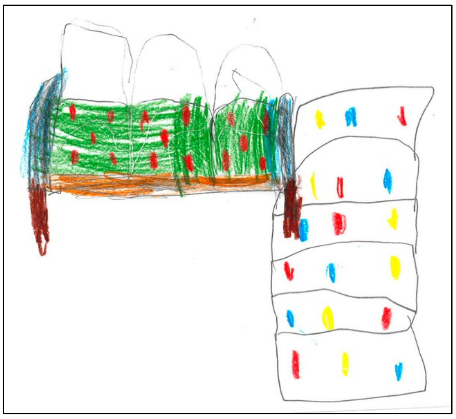
Vi spurte elevene hvordan de kunne huske hvilke kombinasjoner de allerede hadde funnet. Da sa Daria at hun skulle tegne en sofa. Alle de tre elevene tegnet hver sine detaljerte sofaer. Vi har valgt å legge inn bilder og skrive om to av tegningene, fordi den siste eleven begynte å tegne etter de andre, og hadde kun tegnet en sofa.

Daria sin tegning ble meget detaljert, og hun har til og med tegnet et bilde på veggen i bakgrunnen. Dette kommenterte hun avslutningsvis: «Nå tegner jeg en vegg som bakgrunn». Hun har dokumentert én kombinasjon, men på to ulike måter. Daria har både tegnet tre bamsehoder inn i sofaen, og et hjerte med prikker i de tre fargene ved siden av. Hun brukte mye tid på å tegne, på tross av at vi flere ganger forsøkte å rette fokuset fra detaljene til oppgaven. Da svarte hun: «Jeg tegner mitt dårligste sånn at jeg ikke trenger å bruke så lang tid». Én av grunnene til at hun brukte å mye tid på tegningen, kan være at hun er glad i å tegne. Dette kom frem ved at hun sa: «Jeg elsker å tegne».



Bilde 9: Daria sin detaljerte sofa, med én kombinasjon tegnet inn i sofaen

Didrik tegnet en sofa med detaljer som farger, mønster, bein, armlener og puter. Som et resultat av at vi gjentatte ganger forsøkte å veilede elevene vekk fra å tegne detaljert, og mot oppgavens formål, gikk Didrik over til å tegne de ulike kombinasjonene. Dette gjorde han ved å tegne røde, blå og gule streker som representerte bamsene. Han brukte de konkrete bamsene i samspill med tegningen for å komme frem til de ulike kombinasjonene. Tegningen hjalp Didrik til å huske hvilke kombinasjoner han hadde funnet, og ha kontroll over hvor mange kombinasjoner han hadde funnet til sammen. Konkretene hjalp han til å finne nye kombinasjoner.



Bilde 10: Didrik sin detaljerte tegning av sofa, med kombinasjoner ved siden av

4.1.4.1 Funn fra fjerde gruppe

- I begynnelsen misforsto elevene hva som var tenkt i oppgaven.
- Gruppen fant flere kombinasjoner ved å flytte bamsene rundt, men tegnet ikke på dette tidspunktet.
- Elevene tegnet veldig detaljerte sofaer, brukte lang tid på dette.
- Til slutt tegnet Didrik alle kombinasjonene på sin tegning, ved bruk av både bamsene og etter hvert tegningen.

4.2 Dyreoppgaven

Dyreoppgaven spurte etter hvor mange kuer og høner en bonde kunne ha på gården, dersom de skulle ha 20 bein til sammen. I likhet med *bamseoppgaven* tok alle gruppene også på denne oppgaven i bruk konkretene først, altså de laminerte dyrekonkretene. Elevene fikk arbeide med dyrene en stund, men ble deretter utfordret av studenten til å vise løsningsforslagene ved bruk av andre representasjoner. Dette gjorde vi for å få en større spredning i hvilke representasjoner de anvendte.

4.2.1 Første gruppe

Gruppen brukte først tid på å bli kjent med oppgaven gjennom å bruke de laminerte dyrene. Elevene anvendte de laminerte dyrene for å telle seg frem til 20 dyrebein. Deretter telte de opp hvor mange de hadde av hvert dyr. Elevene brukte også gjentatt addisjon for å komme frem til 20 dyrebein. Dette kan vi se eksempler på i utdraget nedenfor;

> Ali: «Så jeg må telle beina»
> Ali: «1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20»
> ...
> Albert: «Siden 8 pluss 8 er jo 16, pluss 4 er jo 20»
> Anna: «Ja det blir jo 20»

Da gruppen ble utfordret til å bruke andre representasjoner, valgte de å ta i bruk melkekorkene. Anna kom med utsagn som «dette er en ku» og «den har fire bein». Anna snakket da om en stor melkekork som hun hadde funnet frem. De store melkekorkene skulle representere kuer, og de små skulle representere høner. Vi delte ubevisst kun ut to store melkekorker og de resterende korkene var små. Albert oppdaget dette og sa:

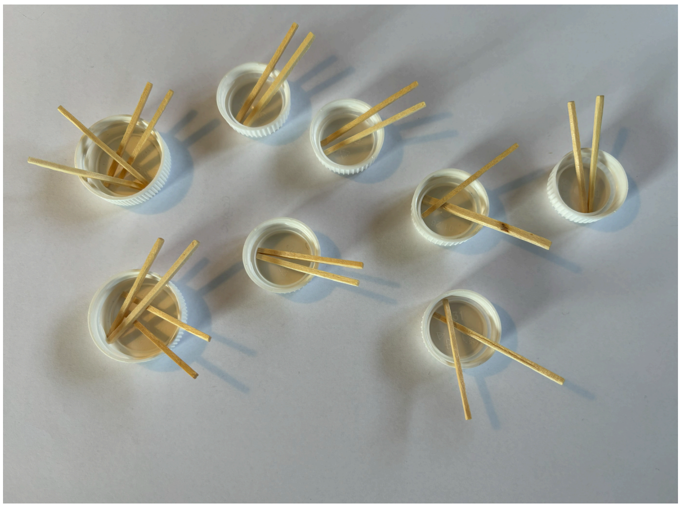
> «Men vi kan jo bare ha to kuer»

Siden de bare hadde to store melkekorker, kunne de bare finne løsninger med 0, 1 eller 2 kuer dersom de store melkekorkene skulle representere kuene.

Melkekorkene lå opp ned på bordet. Anna telte ved å peke med pekefingeren oppi korkene og telte antall bein det første dyret hadde, før hun fortsatte tallrekken videre på neste dyr. Anna telte: «1, 2, 3, 4, ... 19, 20» samtidig som hun ga dyrene like mange pek som de hadde antall bein. Studenten kommenterte da: «Så du bare telte oppi der?». Anna bekrefter dette ved å svare: «Ja». Da studenten sa «oppi der», mente hun oppi melkekorkene.

Etter hvert fant Anna frem noen pinner som hun la oppi melkekorkene. Pinnene representerte kuenes og hønenes bein. Hun la fire pinner oppi de melkekorkene som representerte kuer, og to pinner oppi melkekorkene som representerte høner. Dette kommer frem i utdraget under.

> Student: «Hva sa du for noe nå Anna?»
>
> Anna: «At dette to er bein»
>
> Student: «Ja, du legger beina oppå der ja»
>
> ...
>
> Student: «Ser dere hva Anna har gjort da?»
>
> Albert: «Hun lagde bein»
>
> Student: «Ja, hun har lagt beina oppå korkene»
>
> Albert: «Mange små pinner»



Bilde 11: Anna som la pinner oppi melkekorker for å representere dyr og bein (rekonstruksjon)

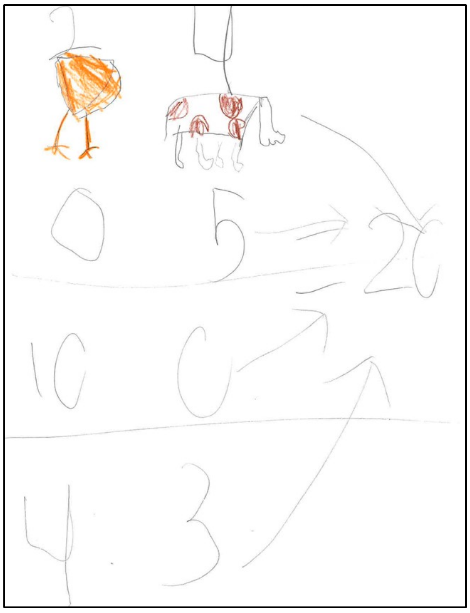
Ved å legge til pinnene, ble det tydeligere hvilket dyr hver av melkekorkene representerte, det ble også enklere å holde oversikt over hvor mange kuer og høner som var telt opp. Først la Anna pinnene på toppen av melkekorkene, men erfarte at de ofte falt ned. Derfor endret hun strategi til å legge pinnene oppi korkene. Bildet over er en rekonstruert versjon av hvordan Anna anvendte pinnene og melkekorkene.

I likhet med Anna representerte hver melkekork et dyr for Albert, og i dette tilfellet representerte de kuer. Men i motsetning til Anna hadde Albert gitt hver melkekork kun et pek, istedenfor to eller fire som Anna gjorde. Dermed satt Albert igjen med 20 melkekorker, som for han representerte kuer. Dersom hver av disse 20 melkekorkene hadde fire bein, ville man endt opp med 80 bein. Ut ifra utdraget kan det virke som at Albert har forvekslet kuer med antall bein.

> Albert: «Dette her er også 20»
> Student: «Er dette også 20?»
> Albert: «Kuer»
> Student: «Er alle disse kuer?»
> Albert: «Ja»

I forkant av utdraget nedenfor har Albert spurt om de kan tegne for å løse oppgaven. Albert og Anna tok hvert sitt ark, og begynte å tegne to ulike forslag. Albert tegnet først en høne ved å tegne et enkelt nebb med to bein, og deretter en enkel ku. I utdraget nedenfor beskrev Albert hvordan han tegnet en høne.

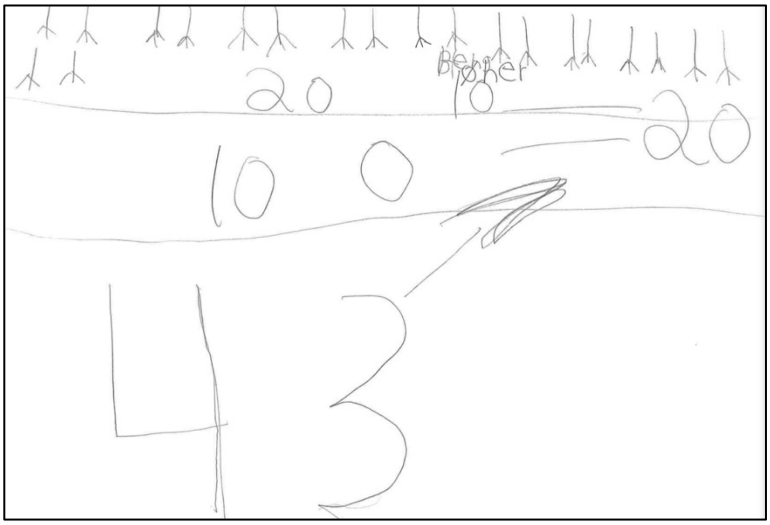
> Albert: «Jeg bare lager en høne sånn her»
> Albert: «Sånn her lager jeg en liten rar høne»
> Albert: «Det er nebbet, pluss beina»
> Student: «Men det viktigste er vel at man ser hvor mange bein den har? Ikke at den er kjempefint tegnet?»
> Albert: «Jeg bare tegner et nebb, et nebb med bein»



Bilde 12: Albert sin presentasjon av løsninger i dyreoppgaven

Albert tegnet en ku og en høne. Man kan tydelig se dette ved at han ga dyrene ulike kjennetegn som typiske farger. Han ga høna nebb og hønebein, og kua fikk brune prikker. Over høna skrev han et 2-tall, og over kua et 4-tall. Han lagde en tabell som viser en skjematisk oversikt over de ulike løsningene han kom frem til. Under høna og kua skrev han antall høner og kuer som bonden kunne ha med tallsymboler. Albert har nå abstrahert til tallsymboler. Dersom bonden har null høner, må han ha fem kuer. Fra alle løsningsforslagene har han tegnet en pil som peker mot tallet 20, som var det totale antallet bein dyrene skulle ha. Albert virket nå til å ha mer kontroll på hva som var antall bein og hva som var antall dyr, enn det han hadde da han arbeidet med melkekorkene.

Anna tegnet ti par med hønebein, men abstraherte deretter ved å skrive tallsymbolene. Under de tegnede dyrebeinene har hun skrevet tallene 20 og 10 med tallsymboler.



Bilde 13: Anna sin presentasjon av løsninger i dyreoppgaven

Over tallsymbolet for tallet 10, kan man se at det står «bein» skrevet med bokstaver, men at hun har forsøkt å skrive «høner» over. Tallsymbolet 10 representerer dermed antall høner, og tallsymbolet 20 på venstre side antall bein. Under tallsymbolet 20 har hun skrevet enda et 10-tall, og til høyre for dette har hun skrevet tallet null. Det kan nå virke som om null representerer antall kuer, og 10 representerer antall høner. Og at det samme gjelder for linja under, der hun har skrevet tallene fire og tre med tallsymboler. Den første linja med tall representerer kun antall høner og antall bein, linje nummer to og tre representerer antall høner og antall kuer. Helt til høyre har hun skrevet et 20-tall som representerer totalt antall bein. Hun har brukt både er lik-tegn og en pil for å koble antall dyr og antall bein (20-tallet) sammen. Anna har også laget en type skjematisk tabell.

4.2.1.1 Funn fra første gruppe

- Anna telte oppi melkekorkene, og ga hver melkekork to eller fire pek.
- Anna la to eller fire pinner oppi melkekorkene for å representere dyrenes bein.
- Albert teller 20 melkekorker, som representerer 20 kuer.
- Albert sin tegning inneholder både enkle tegninger av dyr, tallsymboler og andre symboler som er lik-tegn og piler.
- Anna sin tegning inneholder tegnede hønebein, skrift, tallsymboler og andre symboler som er lik-tegn og piler.

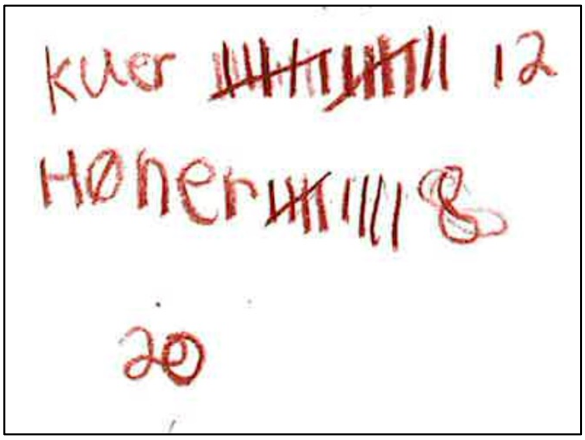
4.2.2 Andre gruppe

Funnene fra denne gruppen er et utdrag av de mest relevante funnene, og alt elevene gjorde er ikke presentert. Elevene på denne gruppen brukte de laminerte dyrene til støtte i regne-prosessen. Berit brukte ett eller flere dyr samtidig som hun og Brage sammen adderte antall bein.

> Berit: «Nei dere må ha disse to. Disse to blir 8. Pluss 2 blir 10.
> Brage: «Pluss 4 til, det blir 14, og 14 pluss 4 blir 18. Så da må vi ha ...»
> Berit: «Sånn, nå blir det 20»
> Student: «Hvor mange kuer og høner har dere nå?»
> Bendik: «Fire høner og tre kuer»

Utdraget viser til da Berit og Brage brukte dyrene til å addere i stedet for å telle. De adderte fire og to, avhengig av hvor mange bein dyrene hadde. De kom sammen frem til at bonden kunne ha fire høner og tre kuer, som de etter hvert dokumenterte med tellestreker og tallsymboler.

Berit foreslo ganske tidlig at de kunne tegne. Bendik kom etter hvert med et forslag om at de: «... kan skrive kuer, også kan vi skrive tellestreker». Brage skrev kuer med bokstaver og tegnet deretter opp tolv tellestreker. Gjennom samtalen kom det frem at hver tellestrek representerte ett bein. Brage kom deretter med et nytt forslag: «Kan man ikke bare skrive 12-tallet?». Han skrev videre ned tallsymbolene «8» og «12» ved siden av tellestrekene. Lengre ned på arket skrev han ned tallsymbolet «20», som sannsynligvis representerte det totale antallet bein dyrene på gården har.



Bilde 14: Andre gruppe sin presentasjon av antall dyrebein

4.2.2.1 Funn fra andre gruppe

- Brukte de laminerte dyrene til å addere antall bein.
- Skrev «kuer» og «høner», deretter tegnet tellestreker og skrev tallsymboler for antall bein.

4.2.3 Tredje gruppe

Elevene på den tredje gruppen begynte med å telle alle de laminerte dyrene, for å finne ut det totale antallet. De kom frem til at det var 8 kuer, som til sammen hadde 32 bein, og at de 13 hønene til sammen hadde 26 bein. Elevene og studenten kom sammen frem til at alle dyrene til sammen var for mange å ha på gården, da dyrene kun skulle ha 20 bein totalt. Claus anvendte de laminerte kuene, og telte antall bein til 20. Han uttrykte at fem kuer har 20 bein til sammen.

> *En annen elev teller*
> Student: «Ja dere skulle ha 20»
> Claus: «... 17, 18, 19, 20»
> Student: «Hvor mange kuer er det da?»
> Claus: «Fem»

Elevene og studenten gikk dermed videre til å snakke om hønebeina. Elevene hadde tidligere presentert at alle de laminerte hønene, totalt hadde 26 bein. Èn av elevene uttrykte at man da måtte ta bort seks bein, for å få 20. Elevene var enige om at ti høner, ville ha 20 bein totalt. Claus anvendte videre både laminerte kuer og høner, og telte seg frem til 20 bein totalt. Som vi kan se i eksempelet nedenfor, satt han dermed igjen med et nytt løsningsforslag; tre kuer og fire høner.

Claus: «... 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20»
Student: «Ja, hvor mange kuer og høner har du nå da?»
Claus: «20»
Student: «Hvor mange kuer og høner?»
Claus: «Tre ... Fire»

Samtalen nedenfor utspilte seg etter elevene ble minnet på hva oppgaven etterspurte. Carmen koblet informasjonen fra oppgaven til sine egne erfaringer med gård og gårdsbruk.

Carmen: «Onkelen min melker ikke kuene, han melker bare sauene og geit. Men han drepte noen sauer»
Student: «Ja, han slakta dem?»
Carmen: «De var ikke så gamle, fordi han hadde to, tre gamle geiter»

I likhet med de andre gruppene, ble også denne gruppen utfordret til å anvende andre representasjoner enn de laminerte dyrene. Elevene hadde ulik oppfatning om hva melkekorkene og pinnene representerte. I utdraget under uttrykte Claus at én ku ble representert med en stor melkekork, samtidig som Carmen uttrykte at én pinne representerte én ku.

Carmen: «Nei, hvorfor tok du den store korken?»
Claus: «Jeg vet ikke, det kan være en ku»
Student: «Hvordan vet du at det er 20 bein der da?»
Carmen og Claus: «En, to, tre, en, to, tre»
Claus: «Det her er jo høna da»
Student: «Så en kork er det samme som to bein?»
Claus: «Ja»
Elevene teller for seg selv.
Carmen: «10, nå har vi 10, nå har vi 20 høner»
Claus: «Nei 20 hønebein»
Student: «Hva er de pinnene da?»
Carmen: «Ku»

Utdraget viser at Carmen forvekslet bein og dyr, hun sa at de har 20 høner, men Claus retter det opp til at de har 20 hønebein.

Claus og Carmen anvender pinnene og melkekorkene for å finne nye løsninger, som inneholdt både kuer og høner. De anvendte 20 høner som utgangspunkt, før de deretter vekslet en høne mot en ku. Dermed satt de igjen med 22 dyrebein, som er to for mye. Etter de hadde plundret en god stund henvendte de seg til Caia, som førte til samtalen nedenfor.

> Claus: «Caia kan du hjelpe oss litt?»
> ...
> Caia: «Istad tok dere bare en tilbake, når dere tok en ku i stad»
> Student: «Hvor mange skulle de ta tilbake da?»
> Caia: «To»
> Student: «Hvorfor skulle de ta to tilbake da, Caia?»
> Caia: «På grunn av to pluss to, da er det fire. Men da må vi ta vekk to høner for å få en ku. På grunn av kuer har fire bein»

Caia hadde lagt merke til at Claus og Carmen hadde vekslet én høne mot én ku. Dermed hadde de endt opp med å ha to bein for mye. De skulle ha vekslet to høner mot en ku. I utdraget nedenfor spør studenten Claus og Carmen om de forsto hva Caia forklarte.

> Student: «Skjønte dere hva Caia sa for noe nå?»
> Claus: «Ja, jeg prøvde hele tiden .... med en firer»
> Carmen: «Det skal være en ku»
> Student: «Så nå har dere tatt bort to høner og byttet dem med en ku»
> Carmen: «Vi tok bort én»
> Claus: «Åja for vi tok jo bare bort halvparten»

Videre oppdaget gruppen en metode for å enklere finne frem til nye løsninger. Caia beskrev dette ved å si: «Vi kan også ta vekk to høner til, så kan vi ha to kuer». Carmen uttrykte at de kunne fortsette med denne vekslingen ved å ta vekk fire eller seks flere høner. De oppdaget at de gradvis kunne veksle inn en ny ku, i flere omganger. De utvidet antallet kuer med en for hver omgang, men satt dermed med to mindre høner for hver omgang.

4.2.3.1 Funn fra tredje gruppe

- Gruppen anvendte de laminerte dyrene til å telle bein, og anvender subtraksjon når de må ta bort bein.
- Carmen kobler oppgaveteksten til sine egne erfaringer med gård.

- Claus og Carmen hadde ulik oppfatning av hva pinnene og melkekorkene representerte.
- Forvekslet høner og hønebein.
- Caia oppdaget at de hadde vekslet én ku mot én høne.
- Elevene fant en systematisk måte å finne nye løsninger, ved å veksle inn én og én ku.

4.2.4 Fjerde gruppe

Den fjerde gruppen begynte med å anvende konkretene på den samme måten som den tredje gruppen. De telte hvor mange laminerte kuer og høner som var lagt frem, og telte hvor mange bein dyrene hadde. Didrik anvender de laminerte kuene på den samme måten som Claus. Han bruker dyrekonkretene til å telle seg frem til 20 kubein, og fant dermed ut at han satt med fem kuer. Dette kommer frem i utdraget nedenfor.

> Didrik: «Sånn nå er disse 20»
> Student: «Er det 20? Hvor mange kuer er det da?»
> Didrik: «Det er .... fem»
> Student: «Ja, så fem kuer har 20 bein. Så da kan han ha fem kuer på gården sin da?»
> Didrik: «Ja, siden fire ganger fem er lik 20»

I utdraget kommer det også frem at Didrik kobler konkretene til bruk av multiplikasjon, for å bekrefte at han har kommet frem til riktig svar. Han var derimot ikke helt fornøyd med å ha bare kuer. Gruppen telte seg deretter frem til 20 hønebein, og fant ut at det tilsvarte ti høner. Didrik foreslo at de kunne ta bort fem høner, slik at de satt igjen med ti hønebein. Han trakk deretter frem tre laminerte kuer, og telte seg oppover fra ti. Da endte han opp med at fem høner og tre kuer har totalt 22 bein. Gruppen fant sammen ut at de kunne trekke fra én høne. Da satt elevene igjen med tre kuer og fire høner som et løsningsforslag.

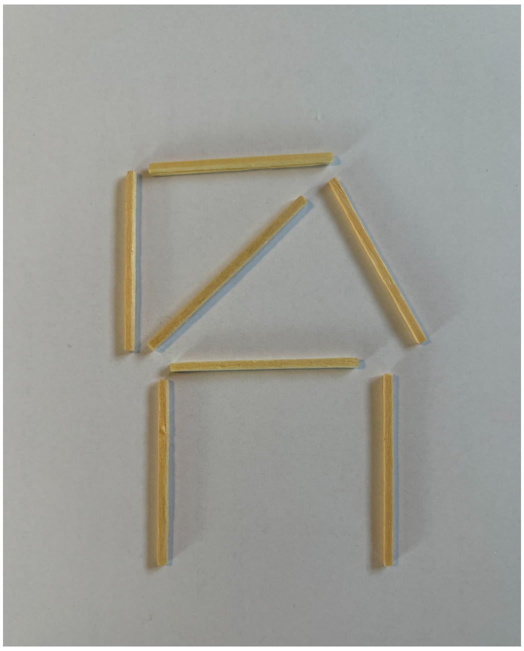
Gruppen ble flere ganger minnet på hva oppgaven etterspurte. Oppgaven var vinklet mot at det er onkelen til studenten som har en gård. Én av gangene stilte Daria spørsmål ved om onkelen til en av oss studentene bodde på en gård, og hun lurte også på om han var død.

> Daria: «Har du faktisk en onkel som bor på en gård?»
> Student: «Jaaaa»
> Daria: «Er han død?»
> *Studenten rister på hodet*

Da fjerde gruppe ble utfordret til å bruke andre representasjoner enn de laminerte dyrene, tok Daria pinnene og lagde en ku. Hun la syv pinner ned på bordet, for at de sammen skulle representere en ku. Utdraget nedenfor er hentet fra denne episoden.

Daria: «Jeg lager kuer»
Student: «Ja, hvor mange bein har de da?»
Daria: «... fire»
Didrik: «Hvorfor er det bare to da?»
Daria: «På grunn av det er liksom en til bak dem»

Daria var klar over at en ku har fire bein, men som man kan se på bildet under har hennes ku bare to bein. Hun forklarte dette med at vi ikke kunne se de to andre beina. For Didrik stemte det ikke at kua skulle ha to bein. Daria brukte aldri denne konstruerte kuen til å løse oppgaven, og hun lagde kun én av den. Dette skjedde helt mot slutten, og videre sier Daria at hun «... må gi litt mat til dem». På dette tidspunktet virket formålet med oppgaven glemt.



Bilde 15: Daria sin konstruksjon av en ku med pinner (rekonstruksjon)

4.2.4.1 Funn fra fjerde gruppe

- Didrik koblet multiplikasjon til de laminerte dyrene.
- Daria konstruerte en ku med syv pinner, hvor kun to bein var synlige.
- Daria stilte spørsmål ved om onkelen til studenten bodde på en gård.

5 Drøfting

Vi har i dette kvalitative forskningsprosjektet undersøkt *hvordan elever i begynneropplæringen anvender ulike representasjoner i arbeidet med problemløsning*. I drøftingen vil vi knytte relevant teori til resultatene vi innhentet gjennom deltakende observasjon.

For å belyse problemstillingen, og det første forskningsspørsmålet;

Hvordan anvender elevene representasjonene erfaringsbaserte situasjoner, manipulerbare modeller, ikoniske fremstillinger, muntlig språk og skriftlig språk?

anvendes Lesh med kolleger (1987), med Hana (2014) sine norske oversettelser, som hoved-ramme til å kategorisere elevenes bruk av ulike representasjoner. Kategorien for ikoniske frem-stillinger nyanseres ved hjelp av Hughes (1986) sine piktografiske og ikoniske representasjoner. I overgangen mellom representasjoner, både bearbeider og konverterer elevene (Lesh et al., 1987; Svingen, 2018).

For å svare på vårt andre forskningsspørsmål;

> *I hvilken grad er elevenes bruk av representasjoner hensiktsmessig, i arbeidet med to problemløsningsoppgaver?*

anvendes Kilpatrick med kolleger (2001) sine egenskaper knyttet til de ulike representasjonene. Som følge av valget vi tok med å la barna samarbeide om å løse oppgavene, blir resultatene i forskningen et funn av hva elevene mestrer sammen. Barna kan bruke hverandre til å oppnå et større læringsutbytte, og utvikle sitt eksisterende utviklingsnivå (Vygotskij, 1978/2001, s. 158). For å gjøre drøftingskapittelet oversiktlig har vi valgt å bruke samme hovedinndeling som i teorikapittelet. Først de fem representasjonssystemene, deretter overganger, og til slutt egenskaper. Teorien fra delkapittel 2.3, *Konkretiseringsmateriell* er skrevet sammen med 5.1.2, *Manipulerbare modeller*, og teorien fra delkapittel 2.4, *Språkutvikling og samtale*, er skrevet inn sammen med *Muntlig språk* i drøftingens delkapittel 5.1.2.

5.1 Fem representasjonssystemer

5.1.1 Erfaringsbaserte situasjoner

Erfaringsbaserte situasjoner («real scripts») kan være fiktive eksempler eller fortellinger fra virkeligheten (Hana, 2014, s. 144; Lesh et al., 1987, s. 33). *Bamseoppgaven* og *dyreoppgaven* er oppdiktede problemer, som kan være eksempler på erfaringsbaserte situasjoner. Donaldson (1978/1984, s. 68-69) uttrykker at mennesker gjerne opplever en enklere tankeprosess, dersom den kobles til en meningsfull kontekst. Carpenter med kolleger (1993) sine resultater samsvarer med Donaldsons teori. Våre problemløsningsoppgaver gjør at matematikken er satt inn i en meningsfull sammenheng. Eksempelvis *dyreoppgaven*, der kuer og høner blir brukt i stedet for tallsymboler i oppgaveteksten. Da har elevene noe konkret å koble tallene 2 og 4 til. Dermed kan erfaringsbaserte situasjoner brukes som hjelpemiddel til å forstå matematiske konsepter (Hana, 2014, s. 144; Lesh et al., 1987, s. 33). Problemløsningsoppgaver inneholder ofte et eller flere spørsmål som krever en matematisk operasjon, for å finne løsningen (Niss & Jensen, 2002, s. 201). Dermed kan en likhet mellom erfaringsbaserte situasjoner og problemløsnings-oppgaver, være at de begge kan benyttes som verktøy for å forstå matematiske idéer.

Den matematiske idéen i *bamseoppgaven* er kombinatorikk, som kjennetegnes av et spørsmål om hvor mange kombinasjoner det finnes (Palmér & van Bommel, 2019, s. 61). Vi kan se at denne kombinatorikkoppgaven legger til rette for å kjenne igjen mønster og sammenhenger, som vektlegges i et av kjerneelementene i læreplanen, *Utforsking og problemløsing* (Kunnskapsdepartementet, 2019). Et eksempel fra *bamseoppgaven* var da elevene brukte tegningen sin til å se mønster i kombinasjonene de hadde fra før, og deretter finne nye. Samtidig som de fikk mulighet til å systematisere kombinasjonene. Noen elever så en sammenheng i at de kunne få to forskjellige løsninger ved å beholde én av bamsene på sin plass, og deretter bytte de to andre. Dette utdypes i kapitelene 5.1.2 *Manipulerbare modeller*, og 5.1.3 *Ikoniske fremstillinger*.

Også *dyreoppgaven* inneholder implisitte matematiske idéer. Den legger eksempelvis opp til å kunne utvikle mengdeforståelse, og bruk av gjentatt addisjon eller multiplikasjon. Et kompetansemål i matematikk etter 2. trinn, handler om å «utforske tall, mengder og telling i lek, [...] representere tallene på ulike måter og oversette mellom de ulike representasjonene» (Kunnskapsdepartementet, 2019). For eksempel mengden 20 dyrebein, og da de brukte konkretene til å telle opp antall bein. Et annet kompetansemål handler om å utforske addisjon og subtraksjon i problemløsning (Kunnskapsdepartementet, 2019). Flere av gruppene brukte gjentatt addisjon da de adderte dyrenes bein. Eksempelvis da Brage uttrykte: «Pluss 4 til, det blir 14, og 14 pluss 4 blir 18. Så da må vi ha ...». Videre så Berit at de manglet to bein for å komme frem til 20. Didrik koblet dyrene direkte til multiplikasjon da han uttrykte: «siden fire ganger fem er lik 20», om de fem kuene han hadde foran seg. Et annet eksempel fra *dyreoppgaven* var én av elevene på den tredje gruppen som oppdaget at man kunne veksle én ku mot to høner, og fremdeles ha like mange bein totalt. Eleven uttrykte dette ved å si: «Men da må vi ta vekk to høner for å få en ku». Dette kan være et eksempel på en enkel likning, siden 4-gangen er det dobbelte av 2-gangen. Selv om oppgavene inneholder implisitte matematiske idéer, er det ikke gitt at elevene oppdager idéene. Svingen (2019, s. 7) trekker frem at elevene bør kunne se sammenhengen mellom den matematiske idéen i oppgaven, og konkretene de anvender. Dette vil ifølge henne være sentralt for at elevene skal oppleve bruken av konkretene som meningsfull. Brage og Berit som utførte gjentatt addisjon i eksempelet nevnt tidligere i avsnittet, mestrer å koble det matematiske konseptet til de laminerte dyrene de arbeider med.

Det å sette matematikken inn i en meningsfull kontekst skal forenkle oppgaveløsningen (Carpenter et al., 1993; Donaldson, 1978/1984), men på en annen side kan det være vanskelig for elevene å trekke ut riktig informasjon fra en oppgavetekst (Niss & Jensen, 2002). Problemløsningskompetansen handler om at elevene skal lære seg å trekke ut relevante opplysninger i problemene de står overfor (Niss & Jensen, 2002, s. 201). Erfaringsbaserte situasjoner kan inneholde «støy» (Lesh, 1981, s. 247). Presentasjonen av *dyreoppgaven* vil inneholde noe «støy», blant annet at gården eies av onkelen til en av studentene. Denne opplysningen er ikke nødvendig for oppgaveløsningen. Likevel kan det virke som Daria hadde fundert over dette, da hun etter hvert spurte om studenten sin onkel faktisk bodde på en gård. Et annet eksempel fra *dyreoppgaven*, handler om at elevene synes det var vanskelig å plassere opplysninger om hva de visste, og hva de skulle finne ut. Det kan skyldes at oppgaven er lagt opp til at de allerede har svaret. Oppgaven oppgir at på gården er det 20 bein til sammen, og ut fra dette skal elevene finne ut hvor mange dyr det kan være. Om dette hadde vært et regnestykke ville 20 vært løsningen, og elevene er kanskje ikke vant til å få «svaret» gitt. Flere ganger fant de forskjellige sammensetninger av dyr, som egentlig var det oppgaven spurte etter. Når de telte antall bein, presiserte de heller at de hadde 20 bein, enn hvor mange dyr de hadde funnet. Donaldson (1978/1984) fant i sin forskning ut at barna ofte brukte egne erfaringer når de tolker oppgaver. Det kom frem ved at barna tolket teksten på sin egen måte, og det innebar ofte at de oppfattet det som var mest tydelig for dem, og overså andre deler som kunne være relevant (Donaldson, 1978/1984). Vi kan kjenne igjen dette fra *bamseoppgaven*, hvor flere av gruppene tolket «hvor mange måter?» som at bamsene kunne sitte opp ned, på kanten eller ligge i sofaen. Det er ikke unaturlig å ligge i en sofa, og elevene tok sine egne erfaringer med inn i tolkningen, og tolket det i den mest naturlige retningen for dem.

5.1.2 Manipulerbare modeller

Bamsefigurer, laminerte dyr, melkekorker, tellebrikker og små pinner er konkreter vi ser på som *manipulerbare modeller* («manipulative models») i vårt prosjekt (Lesh, 1981, s. 247). Alle de nevnte konkretene kan fysisk flyttes på (Hana, 2014, s. 144), og ifølge Bartolini og Martigone (2014, s. 365), vil man oppleve fysiske konkreter gjennom sansene ved at man kan ta og føle på dem. I vårt prosjekt er bamsefigurer og laminerte dyr eksempler på konkreter som anvendes i en *direkte modell*, og melkekorker, tellebrikker og små pinner er eksempler på konkreter som anvendes i en *konkret modell* (Alseth, 1998, s. 29). Direkte modeller inneholder flere egenskaper som kan knyttes direkte til elementer fra oppgaveteksten, enn konkrete modeller (Alseth, 1998, s. 29). Vi utdyper mer om egenskaper ved representasjonene, inklusive konkretene, i delkapittel 5.3, *Egenskaper*.

Konkreter vil være et hjelpemiddel som elever på 2. trinn sannsynligvis har forutsetninger for å mestre (Alseth & Røsseland, 2014, s. 120). Ifølge Holm (2012, s. 90) bør elevene begynne med det konkrete, og deretter gradvis utfordres til det mer abstrakte. Hun forbinder konkretiseringsmateriell med det første og mest konkrete nivået. At alle gruppene begynte med å lete etter, og finne kombinasjoner ved hjelp av de konkrete bamsefigurene, samsvarer dermed både med Alseth og Røsseland (2014), og Holm (2012) sine teorier om bruk av konkreter. Også Moch (2008, s. 86-87) trekker frem konkreter som positivt for undervisningen i matematikk, og at elevene bør starte med det konkrete. Funnene fra *bamseoppgaven* viser at alle de fire gruppene brukte bamsefigurene, til å finne flere kombinasjoner for hvordan bamsene kunne sitte i sofaen. Alle gruppene begynte med å flytte bamsefigurene tilfeldig, som resulterte i at visse kombinasjoner forekom flere ganger. Den andre gruppen dro ikke nytte av de kombinasjonene de fant ved bruk av konkretene (før de dokumenterte). Dette er forenelig med det Palmér og van Bommel (2019, s. 67) i sin forskning kategoriserte som *tilfeldige* flytt. Den første gruppen anvendte derimot ikke konkretene helt tilfeldig, da de benyttet seg av tidligere kombinasjoner til en viss grad. Elevene la tellebrikker i hauger bak plassene i sofaen, for hver gang en bamse satt på den plassen, og tellebrikken hadde samme farge som bamsen. Elevene uttrykte at det var en tanke bak bruken av konkretene, da èn av elevene svarte; «at alle har vært på det stedet». Siden tellebrikkene lå i en haug, ble det vanskelig å gjengi hvilke kombinasjoner de hadde funnet.

Vi observerte at både den tredje og fjerde gruppen etter hvert anvendte bamsefigurene mer systematisk, ved å oppdage at én av bamsene kunne beholde sin plass. Ingen av gruppene anvendte derimot systematikk for å finne alle kombinasjonene. Beskrivelsen av elevenes bruk av konkretene er forenelig med Palmér og van Bommels (2019, s. 67) innhold i begrepet *viss systematikk*. Én av elevene på den tredje gruppen fant fire kombinasjoner ved å systematisk kun flytte på to av bamsene, men han ble avbrutt av oss. I ettertid ser vi at det hadde vært interessant å se om han hadde fortsatt å finne nye kombinasjoner ved å være systematisk. I *dyreoppgaven* observerte vi også systematikk i hvordan elevene anvendte de laminerte dyrekonkretene. Etter veiledning fra studenten, forsto Caia på den tredje gruppen at man ved hjelp av en viss systematikk kunne veksle inn én og én ku for å finne nye løsninger. Hun vekslet da to høner per ku. Eleven kom ikke fullstendig frem til å finne alle løsningene med denne metoden, men det kan virke som at hun forsto prinsippet med å veksle dem.

Stein og Bovalino (2001, s. 356) trekker frem viktigheten av konkreter for at de yngste elevene skal forstå matematikken, men at det foreligger noen forutsetninger for at bruken av konkretene skal bidra positivt inn i undervisningen. Et av funnene som kom frem hos den første gruppen i *bamseoppgaven*, viser til at konkretene ikke nødvendigvis bidro til å forenkle elevenes oppgaveløsning. Vi oppfattet at elevene ønsket å bruke alle konkretene de hadde tilgjengelig, uten at alle nødvendigvis hadde en hensikt med tanke på oppgaven. Det krever tid og øvelse for både læreren og elevene, dersom bruken av konkretene skal være hensiktsmessig i arbeidet med matematikk (Moch, 2008, s. 81). Gjennom våre observasjoner virket det ikke som at elevene hadde så mye erfaring med å bruke konkretene på en utforskende måte. Materialet ble heller brukt som leketøy, ved å forestille både hatter og puter. Det samsvarer med Stein og Bovalino (2001, s. 357) sin teori. De mener at dersom bruken av konkretene er lite gjennomtenkt, vil det kunne føre til at konkretene heller blir brukt som leketøy, uten en funksjon i læringsprosessen. Det kan være at elevene er vant til å leke med lignende figurer i andre sammenhenger. I ettertid ser vi at elevene trolig fikk for mange valgmuligheter, og at vi sannsynligvis burde gitt mer veiledning eller begrenset antall valgmuligheter. Vi la merke til viktigheten av å kjenne til elevenes forutsetninger, og hva de hadde erfaringer med fra før, fordi dette var noe vi ikke visste svært mye om. Moch (2008, s. 83) trekker frem veiledning fra læreren, som en forutsetning for at bruk av konkreter skal være hensiktsmessig for elevene. Dette støttes av Holm (2012, s. 90), som også legger til at elevene har behov for veiledning uavhengig av hvilket abstraksjonsnivå de befinner seg på. Da elevene benyttet konkretene som leketøy, forsøkte vi å veilede dem tilbake til hva oppgaven etterspurte. Dette gjorde vi ved å vise til kombinasjonene de hadde funnet fra før, og den de hadde på det gitte tidspunktet, samtidig som vi koblet oppgaveteksten til konkretene.

I bruken av manipulerbare modeller vil det være nødvendig at elevene ser en sammenheng mellom konkretene og det matematiske konseptet de representerer (Svingen, 2018, s. 7). Funn fra *dyreoppgaven* viser at noen elever mestrer å assosiere de laminerte dyrene med gjentatt addisjon, når de legger sammen antall bein. Konkretene vil kunne tillegges en spesifikk mening, som har sammenheng med en spesifikk oppgave eller situasjon (Hana, 2014, s. 144). Dermed vil man ikke nødvendigvis forstå konkretenes betydning uten å se de innenfor en kontekst (Lesh et al., 1987, s. 33). I *bamseoppgaven* valgte elevene på den første gruppen å representere bamsene med tellebrikker, og melkekorkene som hatter. Dagen etter, i arbeidet med *dyreoppgaven*, hadde elevene fra den samme gruppen bestemt at de samme melkekorkene skulle representere kuer og høner. Som nevnt tidligere var det ulik oppfatning blant elevene innad i den tredje gruppen, som handlet om noen av konkretenes betydning i *dyreoppgaven*. Funnene viser at uenigheten bare oppsto rundt abstrakte konkreter som tellebrikker, melkekorker og pinner. Alseth (1998, s. 29) definer bruken av disse konkretene som en *konkret modell*, som innebærer at matematikken representeres ved å anvende noe annet enn den faktiske gjenstanden fra oppgaven. Det kan være utfordrende fordi elevene er avhengig av å tillegge melkekorker og pinner en mening, da de ikke kan kobles direkte til oppgaven i seg selv. Det er mer begrenset hva en ku kan være enn en melkekork. For eksempel da Claus uttrykte at den store melkekorken representerte en ku, mens Carmen en kort stund etter uttrykte at det var pinnene som representerte kuer.

5.1.3 Ikoniske fremstillinger

En *ikonisk fremstilling* («static picture») er et statisk bilde eller diagram som ikke er mulig å endre (Hana, 2014, s. Lesh et al., 1987, s. 33). Tegninger vil ifølge Alseth og Røsseland (2014, s. 120), være en uttrykksform som de fleste elevene på 2. trinn har forutsetninger for å mestre. Alle de fire gruppene benyttet seg av ikoniske fremstillinger i minst én av oppgavene. Flere av gruppene benyttet seg av *piktografiske representasjoner*, som ifølge Hughes (1986, s. 57) vil være å gjenskape et objekt. Blant annet gjennom å benytte seg av den samme formen, fargen eller plasseringen (Hughes, 1986, s. 57). Elevene på den andre gruppen tegnet detaljerte bamser ved å gjenskape de konkrete bamsefigurenes form og farger. De tegnet detaljer som ører, øyne, munn og en kropp med bein og armer. Bamsenes plassering ble også gjenskapt, ved at de ble tegnet i den samme rekkefølgen som konkretene var plassert i. Den fjerde gruppen gjenskapte den laminerte sofaen, men deres sofaer ble mer detaljerte enn den de gjenskapte. Da elevene benyttet seg av tegninger for å representere det matematiske konseptet i oppgaven, befant de seg på et *semikonkret nivå* (Holm, 2012, s. 90).

Hughes (1986, s. 58) sine *ikoniske representasjoner* er mer abstrakte enn de piktografiske, og en slik tegning vil dermed ikke se ut som objektet den forestiller. Det er derimot en forutsetning at forholdet mellom det som gjenskapes og det som tegnes er 1 til 1 (Hughes, 1986, s. 58). Elevene på den tredje gruppen representerte bamsene ved å tegne streker og rundinger i de aktuelle fargene. Den fjerde gruppen anvendte også streker for å uttrykke bamsenes plassering. Tellestreker ble anvendt av elevene på den andre gruppen i *dyreoppgaven*. Selv om pikto-grafiske og ikoniske representasjoner tilhører det samme representasjonssystemet, befinner de seg på ulike abstraksjonsnivå. Prikker og streker er ifølge Holm (2012, s. 90), representasjoner som befinner seg på et *semiabstrakt nivå*. Resultatene fra *bamseoppgaven* er forenelig med resultatene som Palmér og van Bommel (2017) fant i sin forskning. Våre elever tegnet de samme piktografiske og ikoniske representasjonene som barna i deres studie.

Som vi har nevnt tidligere, er elevene avhengig av veiledning i alle ledd i abstraksjonsprosessen (Holm, 2012, s. 90). Vår veiledning i *bamseoppgaven* innebar blant annet å stille spørsmål som skulle føre dem i retning mot å dokumentere ulike kombinasjoner de fant, men uten å gi eksempler på hvordan. Veiledningen gir støtte til elevene, slik at de kan klare mer enn de hadde gjort på egenhånd (Vygotskij, 1978/2001, s. 159). Støtten fra oss studenter kan ha bidratt til at flere av elevene benyttet dokumentasjon, eksempelvis ikoniske fremstillinger. Vi opplevde at dokumentasjonen hjalp flere av gruppene til å systematisere kombinasjonene. Palmér og van Bommel (2019, s. 61) fant i sin forskning ut at deres elever systematiserte allerede med bamsekonkretene. Elevene i vår forskning mestret også en viss grad av system kun ved bruk av konkreter, men systemet ble tydeligere for dem da de så konkretene i sammenheng med de ikoniske fremstillingene. Eksempelvis da én av elevene så på tegningen sin, og uttrykte «jeg ser ikke at vi har hatt den rød i midten». Dette utsagnet kom i sammenheng med at elevene brukte tegningen til å systematisk søke etter å finne en kombinasjon de ikke hadde fra før. Videre oppdaget gruppen at én bamse kunne beholde plassen sin, og at de andre byttet plasser. Palmér og van Bommel (2019, s. 61) fant det samme i sin forskning, men hos dem klarte noen av elevene å gjøre dette med alle bamsene.

5.1.4 Muntlig språk

Muntlig språk («spoken language») betegner all matematisk kommunikasjon i muntlig form (Hana, 2014, s. 144; Lesh et al., 1987, s. 33). For eksempel da elevene kom med løsningsforslag til hva de kunne gjøre, eller forklaringer til hva de gjorde samtidig som det ble gjort. Brage beskrev hvordan han ville dokumentere bamsekombinasjonene; «Jeg skulle tegnet en bamse, og så skulle jeg tatt liksom ... tegnet alle bortover». Albert forklarte hva han gjorde, samtidig som han tegnet; «Jeg bare lager en høne sånn her ... sånn her lager jeg en liten rar høne ... det er nebbet, pluss beina». Muntlig språk kan også være samtaler mellom elever som samarbeider om å løse en matematisk oppgave. Språket er ifølge Vygotskijs teorier, en essensiell del av læringsprosessen, og det som utgjør grunnlaget for å kunne gi støtte i den proksimale utviklingssonen (Traavik et al., 2014, s. 43). For at elevene skal få til å samarbeide er de avhengig av å kunne prate sammen, og bruke språket til å forstå, og gjøre seg forstått. Bakhtin så på mottakerens reaksjon i samspillet som viktig for utvidelse av forståelsen (Dysthe, 2012, s. 58). Elevene stilte flere ganger spørsmål ved det medelevene gjorde eller sa. Én av elevene på den tredje gruppen uttrykte til en medelev; «Nei, hvorfor tok du den store korken?». I samtalen var elevene uenige og forhandlet om hvilke dyr de ulike konkretene skulle representere. Bakhtin så på forhandling og uenighet som verdifullt for elevenes læring og utvikling (Dysthe, 2012, s. 61). Elevene på den fjerde gruppen forhandlet også om mening, da Didrik lurte på hvorfor Daria sin konstruerte ku av pinner bare hadde to bein. Det kan være utfordrende for Didrik å være enig i at Darias konstruksjon representerer en ku, da den ikke oppfyller hans forventning om at en ku skal ha fire bein. For henne kan det virke helt naturlig at man ikke alltid kan se alle kuas fire bein fra alle vinkler.

Et annet eksempel på samarbeid gjennom bruk av muntlig språk, er Claus og Carmen som vekslet én høne mot én ku. Det resulterte i at de fikk for mange dyrebein i forhold til den totale mengden som ble gitt i oppgaven. Claus spurte etter en stund om Caia kunne hjelpe dem. Samtalen som utspilte seg etter dette spørsmålet, viser at Caia hele tiden har observert de to andre, og oppdaget hvorfor de hadde to dyrebein for mye. Hun sa «på grunn av to pluss to, da er det fire. Men da må vi ta vekk to høner for å få en ku. På grunn av kuer har fire bein». Caia har observert at de to andre har vekslet èn høne for lite. Sammen med Caia, vil Claus og Carmen befinne seg i det Vygotskij (1978/2001, s. 158-159) omtaler som den nærmeste utviklingssonen. Denne sonen betegner hva Claus og Carmen kan lære sammen med noen som kan mer en dem selv (Vygotskij, 1978/2001). I samtalen som utspilte seg i etterkant av Caias forklaring, kan det virke som at både Claus og Carmen satt igjen med en forståelse av det hun sa. Carmen uttrykte dette ved å si: «Vi tok bort en», og Claus fulgte dette opp da han sa: «Åja for vi tok jo bare bort halvparten». Her ser vi at samhandling kan ha en vesentlig betydning for læring og utvikling, som er forenelig med Vygotskijs (1978/2001, s. 158-159) og Bakthins (Dysthe, 2012, s. 57-58) syn på barns utvikling.

5.1.5 Skriftlig språk

Representasjonssystemet for *skriftlig språk* («written symbols») inneholder både symboler som er spesifikke for matematikken, men også ord og setninger som kan anvendes i andre sammenhenger (Hana, 2014, s. 144; Lesh et al., 1987, s. 33). Vi forventet ikke at elevene ville bruke skriftlig språk i stor grad, fordi denne aldersgruppen heller tar i bruk andre representasjoner (Alseth & Røsseland, 2014, s. 119). I disse oppgavene forventet vi i større grad tegninger og bruk av konkreter. *Bamseoppgaven* legger ikke opp til en løsning med bruk av symboler, fordi det er små elever som ikke har lært kombinatorikk ved bruk av symboler enda.

I tillegg er bruk av symboler utfordrende for yngre elever, fordi symboler ikke har en mening alene, eller uten en kontekst (Alseth, 1998, s. 30; Donaldson, 1978/1984, s. 68-69). Likevel benyttet to av elevene på den første gruppen skriftlig språk, i form av matematiske symboler i *dyreoppgaven*. Hovedsakelig tallsymboler og er lik-tegn for å representere antall dyr og dyrebein. Bilde 12 i resultatkapittelet viser Albert sin dokumentasjon av løsninger, i form av en tabell. Disse løsningene fant gruppen sammen ved hjelp av ulike konkreter. Kolonnen til venstre representerer antall høner, og kolonnen til høyre representerer antall kuer, begge to ved bruk av tallsymboler. Han har dokumentert fire løsninger, og samtlige er koblet til hver sin pil, som peker mot tallet 20, som representerer antall bein til sammen. Albert har koblet tallene i tabellen til hvert sitt dyr ved å tegne en høne og en ku som en slags «tittel» i hver kolonne. De piktografiske tegningene av dyrene gjør at tallsymbolene gir mening. Pilene og er lik-tegnet gir mening til tallsymbolet 20, fordi det peker på at gitte antall høner og kuer har 20 bein til sammen. Dersom man kjenner til konteksten, vil det være åpenbart at han referert til 20 dyrebein, siden antallet er presisert i oppgaveteksten. Vi fikk inntrykk av at Albert hadde god oversikt over hva hvert av tallsymbolene representerte. Dette kan vi også se i besvarelsen hans gjennom at han har koblet tegning og symboler sammen, slik at symbolene gir mening og ikke står alene. Bilde 13 viser Anna sin representasjon av løsninger. Hennes besvarelse bærer preg av større tilfeldighet med tanke på hvor tall og tegn er plassert. Dette kan være fordi hun ble inspirert av det Albert gjorde, men klarte ikke hundre prosent å følge hans tempo i tankegangen. Alberts eksempel viser et godt bilde på viktigheten av å anvende flere forskjellige representasjoner (Lesh, 1981, s. 235). Han kobler oppgaveteksten sammen med konkretene for å finne ulike løsninger, deretter anvender han det muntlige språket i samarbeidet med de andre elevene på gruppen, før han til slutt dokumenterer løsningene i form av ikoniske fremstillinger og symboler. Albert får en dypere matematikkforståelse gjennom å meste overgangene mellom de ulike representasjonene (Lesh, 1981, s. 246; Svingen, 2018, s. 4).

Et annet eksempel på skriftlig språk, er elevene på andre og tredje gruppe, som benyttet seg av ord og setninger. I *dyreoppgaven* uttrykte den andre gruppen antall dyrebein ved å anvende ordene «kuer» og «høner» i samspill med tallsymboler og tellestreker (Bilde 14). I *bamse-oppgaven* begynte tredje gruppe å skrive setninger for å uttrykke bamsenes plasseringer, men oppdaget at det ble utfordrende, fordi de brukte mye energi på rettskriving (Bilde 7). Elevene på de tre gruppene vi har beskrevet, bevegde seg fra et konkret til abstrakt nivå, som krever mer forståelse av elevene enn de tidligere nivåene (Holm, 2012, s. 88-90). Selv om elevene ikke nødvendigvis har så mye erfaring med skriftlig språk, mestrer både den første og andre gruppen å benytte dette i oppgaveløsningen (Alseth & Røsseland, 2014, s. 119).

5.2 Overgangen mellom representasjoner

Når elevene arbeider med virkelige problemer, vil det kreve at de anvender og beveger seg mellom ulike representasjoner (Behr et al., 1983, s. 103). Lesh med kolleger (1987, s. 2-3) skiller mellom overganger mellom ulike representasjonssystemer, og overganger innenfor samme system. En *konvertering* («translation») er en overgang mellom to forskjellige representasjonssystemer (Lesh et al., 1987, s. 2-3; Svingen, 2018, s. 4). Gjennom arbeidet med begge oppgavene i vårt prosjekt, var elevene avhengig av å foreta flere konverteringer. Ulike representasjonssystemer har ulike egenskaper, som kan gjøre overgangene mellom dem mer utfordrende (Lesh, 1981, s. 247). Alle gruppene måtte konvertere fra oppgaveteksten, og videre til en annen representasjon for å løse oppgaven. Samtlige grupper begynte med å konvertere fra oppgaveteksten til bruk av konkreter. For å kunne anvende konkretene, var elevene avhengig av å knytte dem til opplysninger i oppgaveteksten (Hana, 2014, s. 144). Eksempelvis å vite hva antallet 20 betydde i sammenheng med de andre opplysningene. De måtte forstå hvilke konkreter som representerte dette tallet, altså om det var antall dyr eller dyrebein. Når elevene får presentert en erfaringsbasert situasjon, vil denne representasjonen i større grad inneholde «støy» enn konkretene gjør (Lesh, 1981, s. 247). Dermed vil denne konverteringen kreve at elevene mestrer å skille mellom «støy» og informasjon som er viktig for oppgaveløsningen.

Flere av gruppene foretok deretter en konvertering fra manipulerbare modeller til ikoniske fremstillinger, særlig i arbeidet med *bamseoppgaven*. Den største forskjellen mellom konkreter og tegninger, er at førstnevnte kan flyttes, mens de ikoniske fremstillingene er statiske (Lesh, 1981, s. 247). Konverteringen vil også utfordre elevene til å bevege seg fra det mest konkrete nivået til et semikonkret, eller semiabstrakt nivå (Holm, 2012, s. 90). Gjennom observasjonen virket det som at elevene hadde behov for å benytte bamsefigurene for å finne ulike kombinasjoner, og deretter dokumentere dem som ikoniske fremstillinger. Det kan se ut som de i begynnelsen var avhengig av å ta i bruk konkretene før de kunne tegne, og at en direkte konvertering mellom den erfaringsbaserte situasjonen og ikoniske fremstillinger ble for vanskelig. Dersom elevene opplever en konvertering som utfordrende, kan et *mellomledd* forenkle denne prosessen (Lesh, 1981, s. 247; Behr et al., 1983, s. 103).

Et annet mellomledd som er fremtredende i våre funn, er det muntlige språket. Elevene i begynneropplæringen er som regel godt vant til å uttrykke seg gjennom det muntlige språket lenge før de starter på skolen (Alseth & Røsseland, 2014, s. 119). Både andre og tredje gruppe anvendte det muntlige språket, for å beskrive hvordan de ulike kombinasjonene i *bamse-oppgaven* kunne dokumenteres. Den andre gruppen benyttet det muntlige språket som et mellomledd mellom konkretene og en ikonisk fremstilling. For eksempel da Brage uttrykte: «Jeg skulle tegnet en bamse, og så skulle jeg tatt liksom ... tegnet alle bortover». Det muntlige språket brukes i dette eksempelet som en forberedelse til å forenkle dokumentasjonen av kombinasjonene. Det virker som at elevene blir mer sikre på hva de skal skrive eller tegne, gjennom å kommunisere med det muntlige språket.

En *bearbeiding* («transformation») er en overgang mellom to ulike representasjoner innenfor det samme overordnede systemet (Lesh et al., 1987, s. 2-3; Svingen, 2018, s. 4). I *dyreoppgaven* ble samtlige grupper utfordret til å anvende mer abstrakte konkreter, og alle gruppene valgte melkekorker og små pinner. Dermed foretok elevene en bearbeiding innenfor systemet for konkreter. Anna valgte å representere dyrene med melkekorker, for deretter å legge pinner oppi melkekorkene som skulle representere dyrebeina. Dermed mestret Anna overgangen ved å bytte ut de laminerte kuene med melkekorker og fire pinner, og hønene med melkekorker og to pinner. Bearbeidingen var vanskeligere for Albert, fordi han valgte å representere en ku med en melkekork. Da Albert telte antall melkekorker, tilga han dem et pek, som førte til at han endte opp med 20 kuer.

5.3 Egenskaper

Det vil være nødvendig å mestre overgangen mellom ulike representasjoner, fordi «uttrykksmåtene har ulike styrker og svakheter» (Alseth & Rødseland, 2014, s. 119). For å vurdere representasjonenes styrker og svakheter har vi valgt å anvende tre av Kilpatrick med kolleger (2001) sine fem egenskaper. Vi vurderer bruken av representasjonene, og hvor hensiktsmessige de er i forhold til synlighet, effektivitet og generalitet. Dermed har vi valgt å ikke vurdere to av egenskapene, altså klarhet og presisjon.

5.3.1 Synlighet

Egenskapen *synlighet* dreier seg om hvorvidt matematikken kommer tydelig frem i representasjonen (Kilpatrick et al., 2001, s. 99). I eksempelet i forrige avsnitt (5.2), med Anna og Albert, kommer det frem at graden av synlighet med tanke på antallet dyrebein varierer ved bruk av de ulike konkretene. Denne mengden er mer synlig ved bruk av de laminerte dyrene, enn ved bruk av melkekorker og pinner. Forvekslingen mellom dyr og dyrebein kan være et resultat av melkekorkenes egenskaper, da antall bein ikke er synlige ved bruk av dette konkretet. En annen utfordring ved bruk av like melkekorker, gjør det heller ikke synlig hvilket dyr de representerer. De laminerte dyrene har enten to eller fire synlige bein, som man ikke kan se på melkekorkene. En gruppe løser dette ved å skille på store og små melkekorker, og på en annen gruppe skiller en elev mellom melkekorker og pinner som representerer hvert sitt dyr. På tross av at noen av elevene mestrer å bruke mer abstrakte konkreter som melkekorker og pinner, kan det virke som at disse konkretene har skapt mer forvirring for de fleste, grunnet det matematiske konseptets grad av synlighet. For eksempel Claus og Carmen på tredje gruppe, som blandet dyr og bein. Carmen telte ti melkekorker, og uttrykte at de hadde 20 høner, men Claus rettet det opp til 20 hønebein.

5.3.2 Effektivitet

En representasjons grad av effektivitet vil avhenge av oppgaven som skal løses, dermed vil ikke den samme representasjon være effektiv i alle oppgaver (Kilpatrick et al., 2001, s. 99). Representasjonens grad av effektivitet vil også avhenge av hvem som anvender den (Svingen, 2018, s. 5). Selv om skriftlig språk og matematiske symboler, i mange tilfeller vil være en effektiv representasjon (Alseth, 1998, s. 30), vil det ikke nødvendigvis være det for en andreklassing (Svingen, 2018, s. 5). Å benytte setninger for å representere bamsenes rekkefølge var en lite effektiv uttrykksform for elevene på den tredje gruppen. Dette fordi det tok lang tid og krevde mye energi å finne stavemåten til ordene. Uavhengig av det skriftlige nivået, vil ikke denne representasjonen være effektiv for å løse *bamseoppgaven*. Det vil heller ikke være enkelt å sammenligne de ulike setningene med hverandre, for å se hvilke som mangler. Vi så at det var mer effektivt å anvende ikoner, som noen av de andre gruppene gjorde. I *dyreoppgaven* benyttet elevene på første og andre gruppe seg av tall og andre matematiske symboler. Deres bruk av skriftlig språk, er hensiktsmessig i forhold til hva oppgaven etterspør, fordi det er mer effektivt enn å tegne alle dyr eller dyrebein. Som vi ser i eksemplene over, vil representasjonenes grad av effektivitet variere i de to oppgavene. I *bamseoppgaven* hadde den andre, tredje og fjerde gruppen dokumentert ned ulike kombinasjoner, men de gjorde dette på ulike måter. Gruppe to tegnet detaljerte bamser, noe vi observerte som mindre effektivt en rundingene elevene på gruppe tre tegnet. Våre observasjoner samsvarer med observasjonene Palmér og van Bommel (2017) også gjorde i sin studie. Deres barn brukte også lengre tid på å tegne piktografiske bamser, enn ikoniske streker eller rundinger. I *bamseoppgaven* vil de detaljerte bamsene og rundingene ha den samme funksjonen, dermed vil det ikke være nødvendig å bruke mye tid på å tegne bamsene. Den fjerde gruppen brukte mye tid på å tegne detaljerte sofaer. En av elevene forstod etter hvert at han kunne tegne streker i ulike farger som representerte de ulike bamsene, dette var en effektiv måte å tegne de ulike kombinasjonene.

5.3.3 Generalitet

Representasjonens grad av *generalitet* avhenger av om det vil være hensiktsmessig å benytte dem i arbeidet med flere ulike matematiske ideer (Kilpatrick et al., 2001, s. 100). At elevene har kjennskap til, og mestrer å anvende generelle representasjoner er noe elevene bør strekke seg mot, og ikke nødvendigvis skal mestre allerede på 2. trinn (Svingen, 2018, s. 6). Konkretene som blir anvendt i en direkte modell, eksempelvis tellebrikker, melkekorker og pinner, er mer generelle enn konkretene som blir anvendt i en direkte modell, altså bamsefigurer og laminerte dyr (Alseth, 1998, s. 29). En svakhet ved bruk av en direkte modell, er at den er spesifikk for en gitt oppgave, og dermed vanskelig å benytte i andre sammenhenger (Alseth, 1998, s. 29). På de laminerte dyrene sitter beina sammen, og man kan ikke dele dem opp. Dyrekonkretene fungerer godt til sin hensikt i *dyreoppgaven*, men er vanskeligere å bruke i andre sammenhenger. Pinnene kan brukes til andre mengder enn fire og to. Også innenfor uttrykksformen ikoniske fremstillinger, vil de ulike representasjonene ha ulik generalitet. Elevene benyttet både piktografiske og ikoniske representasjoner, der de ikoniske vil være mer abstrakte (Hughes, 1986, s. 57-58). De ikoniske representasjonene (tellestreker, rundinger, dyrebein, m.m.) vil være mer generelle enn de piktografiske (tegning av kuer, høner, bamser, m.m.). De matematiske symbolene som to av gruppene anvendte i *dyreoppgaven*, er meget generelle representasjoner som også kan brukes i andre matematiske situasjoner (Kilpatrick et al., 2001, s. 100). Når elevene får erfaringer med generelle representasjoner, kan det hjelpe dem i møte med andre matematiske problemer.

6 Konklusjon

Vårt kvalitative forskningsprosjekt har undersøkt problemstillingen; *hvordan anvender elever i begynneropplæringen ulike representasjoner i arbeidet med problemløsning?* Hensikten med prosjektet var å få bredere kunnskap og erfaringer om elevers bruk av representasjoner, som vi kan ta med oss inn i yrket som lærere på småskoletrinnet. I tillegg har vi ønsket å utvide forskningsfeltet ved å gi mer detaljerte beskrivelser av hvordan elevene anvender, representasjoner enn tidligere studier. De har i større grad vært kvantitative, eller gitt resultater i form av tall, brøker eller prosenter (Carpenter et al., 1993; Monoyiou et al., 2007; Palmér & van Bommel, 2017, 2019). For å undersøke dette har vi gjennomført deltakende observasjon og lydopptak av fire gruppers samarbeid om å løse to problemløsningsoppgaver. Etter innsamlingen benyttet vi blant annet Lesh med flere (1987) sine fem representasjonssystemer, og Kilpatrick med kolleger (2001) sine egenskaper til å drøfte empirien opp mot problem-stillingen. Analysen av funnene viste at elevene anvendte ulike representasjoner, både samtidig og hver for seg, samt at representasjonene hadde forskjellige egenskaper knyttet til ulike kontekster. For å avgrense og spesifisere problemstillingen utarbeidet vi to forskningsspørsmål.

Første forskningsspørsmål;

> *Hvordan anvender elevene representasjonene erfaringsbaserte situasjoner, muntlig språk, manipulerbare modeller, ikoniske fremstillinger og skriftlig språk?*

er laget for å svare på hvordan elevene anvender de fem ulike representasjonene fra Lesh med flere (1987), og overgangen mellom dem. I arbeidet med oppgavetekstene trakk noen av elevene inn egne premisser i løsningsprosessen, som førte til andre løsninger enn oppgaven la opp til. Elevene trakk ut ulik informasjon fra oppgavetekstene, og tolket informasjonen forskjellig. Dette la grunnlag for forskjellige valg av representasjoner. Det muntlige språket ble brukt til å forhandle om mening, særlig om ulike konkreters betydning. Alle elevene benyttet også muntlig språk til å samarbeide. Konkretene ble brukt til å utforske løsninger både tilfeldig og systematisk, og hos én av gruppene som figurer i lek. Elevenes tegninger hadde ulik grad av abstraksjon, og ble anvendt i flere sammenhenger. Eksempelvis som støtte til å systematisk finne nye kombinasjoner av bamser, eller illustrasjoner til en symbolsk fremstilling. Materialet viser at den minst brukte representasjonen var skriftlig språk, som kan skyldes at de små elevene ikke ofte naturlig tar i bruk symbolske representasjoner (Alseth & Røsseland, 2014, s. 119). Vi kan likevel se at noen grupper anvendte tallsymboler i *dyreoppgaven* til å representere antall dyr i en kombinasjon, eller antall bein til sammen.

Den mest fremtredende overgangen mellom ulike representasjonssystemer, var fra oppgave-teksten til konkretene. Det varierte hvordan gruppene mestret denne overgangen, fordi de tolket oppgaveteksten på egne premisser (Donaldson, 1978/1984, s. 70). Konkretene ble i flere tilfeller brukt som mellomledd i overgangen fra oppgaven til tegning eller skrift. Flere av gruppene brukte konkretene som støtte til å tegne løsninger. Muntlig språk ble hyppig brukt som mellomledd, eksempelvis gjennom samtale og diskusjon mellom elevene. De anvendte det til å forklare hva de tenkte til hverandre, og diskutere eller bli enige. Overganger som skjedde innenfor samme representasjonssystem, var særlig innenfor bruk av konkreter. Elevene ble utfordret til å vise løsninger med andre konkreter enn de laminerte dyrene. Flere av gruppene synes denne overgangen var utfordrende, og konkretene kunne derfor skape mer forvirring enn støtte. Andre grupper mestret å benytte seg av mer abstrakte konkreter.

Andre forskningsspørsmål;

> *I hvilken grad er elevenes bruk av representasjoner hensiktsmessig, i arbeidet med to problemløsningsoppgaver?*

er laget for å vurdere representasjonenes hensiktsmessighet, med tanke på hvilke egenskaper de har. Tre av Kilpatrick med kolleger (2001) sine fem egenskaper anvendes for å vurdere elevenes bruk av representasjoner, og i hvilken grad de er hensiktsmessig. Vi oppdaget at konkretenes *synlighet* varierte ut fra deres abstraksjonsnivå. Mengden fire og to var mer synlig i de laminerte dyrene enn i melkekorkene og pinnene, altså hvilket dyr man snakker om er mindre synlig ved bruk av abstrakte konkreter. *Effektiviteten* varierte i stor grad både innad i samme, og mellom ulike representasjonssystemer. Representasjonen *skriftlig språk* befinner seg på et abstrakt nivå (Holm, 2012, s. 90), og vil dermed i mange tilfeller være effektiv. Likevel viste funnene at det var tidskrevende for elevene å skrive setninger i *bamseoppgaven*. Det var heller mer hensiktsmessig for disse elevene å anvende ikoniske representasjoner i denne oppgaven. På den andre siden var det effektivt for flere elever å benytte tallsymboler for å uttrykke løsninger i *dyreoppgaven*. Noen av gruppene brukte lang tid på å tegne detaljerte tegninger, mens andre tegnet ikoner for å representere bamser eller dyrebein. De forskjellige representasjonene hadde ulik grad av *generalitet*, dette så vi særlig i konkretene. Tellebrikker, melkekorker og pinner er mer generelle enn de laminerte dyrene og bamsekonkretene. På de laminerte dyrene sitter beina fast, og det førte til at elevene ikke kunne dele dem opp. Pinnene kan brukes til andre mengder enn fire og to. Funnene viser at elevene hadde større utfordringer med å bruke mer generelle konkreter. For elever i begynneropplæringen var det mer tidskrevende å benytte tegninger av bamsene enn ikoniske representasjoner.

6.1 Egenrefleksjon

Gjennom arbeidet med denne masteroppgaven har vi lært hvorfor det er viktig å gi elevene mulighet til å arbeide med flere forskjellige representasjoner. Lesh (1981) sin modell for representasjonssystemer og overgangene mellom dem kan benyttes som hjelpemiddel i vårt planleggingsarbeid, fordi det kan gi oss en oversikt over hvilke representasjoner og overganger elevene møter i undervisningen (Hana, 2014, s. 150-151). Vi har også lært viktigheten av riktig veiledning til riktig tid. Dersom vi skulle gjort dette på nytt, ville vi valgt å sette flere rammer for bruken av konkretene, og tydeligere veiledning til hvordan de kunne brukes. Samtidig som vi kunne gitt elevene færre konkreter å forholde seg til. Det kommer frem av vår forskning at konkretene i noen tilfeller heller ble brukt som leketøy, enn hensiktsmessig bruk i henhold til oppgaven de fikk. Grunnen til at elevene fikk mange valg, var fordi vi ville se hvilke konkreter de selv valgte å ta i bruk. På en annen side ville det ikke være hensiktsmessig å gi elevene for mye veiledning, ved for eksempel å fortelle elevene hvordan de bør løse oppgaven eller gi dem svaret (Moch, 2008, s. 83). Dersom elevene presenteres for en løsningsstrategi, vil ikke oppgaven lenger kunne kategoriseres som en problemløsningsoppgave (Niss & Jensen, 2002, s. 201). Om vi skulle utført prosjektet på nytt kunne det vært hensiktsmessig å gjennomføre en test-observasjon, før selve datainnsamlingen. Da kunne vi fått erfaringer som kunne påvirket valgene vi tok, og endret disse før opptakene begynte. Eksempelvis hvor mange ulike konkreter elevene fikk mulighet til å benytte seg av.

Som vi har nevnt tidligere sendte vi ut et samtykkeskjema i forkant av observasjonen, for å sikre at deltakerne har fått tilstrekkelig informasjon om hva en eventuell deltakelse ville innebære. Planen var å ta lydopptak og bilder av elevarbeid underveis. I etterkant av observasjonen ser vi at samtykkeskjemaet ikke inneholdt informasjon om billedtaking. Bildene skulle supplere til lydopptaket, men skulle kun bestå av elevarbeid, hvor eventuelt noen av hendene til elevene kunne vises. Vi tok kontakt med Sikt da vi oppdaget den mangelfulle informasjonen, og de fortalte oss at siden bildene ikke inneholdt noe personidentifiserende, var det ikke nødvendig å innhente nytt samtykke. I tillegg valgte vi å rekonstruere flere av bildene, så vi har ikke brukt noen bilder i oppgaven hvor noe av elevene vises.

Litteraturliste

Alseth, B. (1998). *Kartlegging av matematikkforståelse: Matematikk på småskoletrinnet*. Utdanningsdirektoratet. https://web01.usn.no/~panderse/KIMhefter/Matematikk_paa_smaaskoletrinnet.pdf

Alseth, B. & Røsseland, M. (2014). Undersøkelseslandskap i matematikk. I M. E. Frislid & H. Traavik (Red.), *Lese, skrive, regne: Pedagogikk og fagdidaktikk i begynneropplæringen* (2. utg, s. 109-132). Universitetsforlaget.

Anker, T. (2020). *Analyse i praksis: En håndbok for masterstudenter*. Cappelen Damm akademisk.

Bartolini, M. G. & Martignone, F. (2014). Manipulatives in mathematics education. I S. Lerman (Red.), *Encyclopedia of mathematics education* (s. 365–372). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8_93

Behr, M. J., Lesh, R., Post, T. R. & Silver, E. A. (1983). Rational-Number Concepts. I R. Lesh & M. Landau (Red.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes* (s. 91-126). Academic Press.

Blikstad-Balas, M. & Dalland, C. P. (2021). Forskningsdesign – hva må du tenke på når du skal planlegge et forskningsprosjekt? I E. Andersson-Bakken & C. P. Dalland (Red.), *Metoder i klasseromsforskning: Forskningsdesign, datainnsamling og analyse* (s. 21-45). Universitetsforlaget.

Braun, V. & Clarke, V. (2006). Using thematic analysis in psychology. *Qualitative Research in Psychology, 3*(2), 77–101. https://doi.org/10.1191/1478088706qp063oa

Brottveit, G. (2018). Hermeneutikk og vitenskap. I G. Brottveit (Red.), *Vitenskapsteori og kvalitative forskningsmetoder: Om å arbeide forskningsrelatert* (s. 32-45). Gyldendal.

Bruner, J. S. (1964). The course of cognitive growth. *American Psychologist, 19*(1), 1–15. https://www.uky.edu/~gmswan3/544/Bruner_1964_CoCG.pdf

Carpenter, T. P., Ansell, E., Franke, M. L., Fennema, E. & Weisbeck, L. (1993). Models of problem solving: A study of kindergarten children's problem-solving processes. *Journal for Research in Mathematics Education, 24*(5), 428-441. https://doi.org/10.2307/749152

Dalland, C. P., Bjørnestad, E. & Andersson-Bakken, E. (2021). Observasjon som metode i barnehage- og klasseromsforskning. I E. Andersson-Bakken & C. P. Dalland (Red.), *Metoder i klasseromsforskning: Forskningsdesign, datainnsamling og analyse* (s. 125-152). Universitetsforlaget.

Donaldson, M. (1984). *Barns tankeverden* (T. D. Evans, Overs.). Cappelens Forlag. (Opprinnelig utgitt 1978).

Dysthe, O. (2012). Teoretiske perspektiver på dialog og dialogbasert undervisning. I O. Dysthe, N. Bernhardt & L. Esbjørn (Red.), *Dialogbasert undervisning: kunstmuseet som læringsrom* (s. 45-79). Fagbokforlaget.

Eriksen, H. & Svanes, I. K. (2021). Kategorisering og koding i intervju- og observasjonsforskning. I E. Andersson-Bakken & C. P. Dalland (Red.), *Metoder i klasseromsforskning: Forskningsdesign, datainnsamling og analyse* (s. 287-304). Universitetsforlaget.

Fangen, K. (2010). *Deltagende observasjon* (2. utg.). Fagbokforlaget.

Hagenah, S., Colley, C. & Thompson (2018, 30. november). Funneling Versus Focusing: When Talk, Tasks, and Tools Work Together to Support Students' Collective Sensemaking. *Science Education International 29*(4) 261-266. https://doi.org/10.33828/sei.v29.i4.8

Halkier, B. (2010). *Fokusgrupper*. Gyldendal akademisk.

Hana, G. M. (2014). *Matematiske tenkemåter: Metamatematikk for lærerutdanningen*. Caspar Forlag.

Holm, M. (2012). *Opplæring i matematikk* (2. utg.). Cappelen Damm.

Hughes, M. (1986). *Children and Number: Difficulties in Learning Mathematics*. Basil Blackwell.

Høigård, A. (2013). *Barns språkutvikling: muntlig og skriftlig* (3. utg.). Universitetsforlaget.

Høines, M. J. (1998). *Begynneropplæringen: Fagdidaktikk for barnetrinnets matematikkundervisning* (2. utg.). Caspar.

Johannessen, L. E. F., Rafoss, T. W. & Rasmussen, E. B. (2018). *Hvordan bruke teori?: Nyttige verktøy i kvalitativ analyse.* Universitetsforlaget.

Karlsen, L. (2023). *Tenk det!: Utforskning, forståelse og samarbeid – elever som tenker sjæl i matematikk* (2. utg.). Cappelen Damm akademisk.

Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B. (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics.* National Academy Press. https://doi.org/10.17226/9822

Klaveness, E., Karlsen, L. & Kverndokken, K. (2019). 10: Problemløsning som innledning til et tema. I E. Klaveness, L. Karlsen & K. Kverndokken (Red.), *101 grep for å aktivisere elever i matematikk: matematikkdidaktikk i teori og praksis* (s. 178-179). Fagbokforlaget.

Kunnskapsdepartementet (2017). *Overordnet del – verdier og prinsipper for grunnopplæringen.* Fastsatt som forskrift ved kongelig resolusjon. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020. https://www.udir.no/lk20/overordnet-del/?lang=nob

Kunnskapsdepartementet (2019). *Læreplan i matematikk 1.–10. trinn* (MAT01-05). Fastsatt som forskrift. Læreplanverket for kunnskapsløftet 2020. https://data.udir.no/kl06/v201906/laereplaner-lk20/MAT01-05.pdf?lang=nob

Kvale, S. & Brinkmann, S. (2015). *Det kvalitative forskningsintervju* (3. utg.). Gyldendal.

Lesh, R. (1981). *Applied mathematical problem solving*. https://doi.org/10.1007/BF00305624

Lesh, R., Post, T. & Behr, M. (1987). Representations and Translations among Representations in Mathematics Learning and Problem Solving. I C. Janvier, (Red.), *Problems of Representations in the Teaching and Learning of Mathematics* (s. 33-40). Lawrence Erlbaum.

Moch, P. L. (2008). Manipulatives Work! *The Educational Forum 66*(1), 81–87. https://doi.org/10.1080/00131720108984802

Monoyiou, A., Papageorgiou, P. & Gatasis, A. (2007). *Students' and teachers' representations in problem solving* (141-150). University of Cyprus. http://www.erme.tu-dortmund.de/~erme/CERME5b/WG1.pdf#page=59

Niss, M. & Jensen, T. H. (2002). *Kompetencer og matematiklæring: Ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark*. Undervsiningsministeriet. https://www.matematikksenteret.no/sites/default/files/attachments/page/Kompetencer%20og%20matematikl%C3%A6ring.pdf

NOU 2015: 8. (2015). *Fremtidens skole: Fornyelse av fag og kompetanser.* Kunnskapsdepartementet. https://www.regjeringen.no/no/dokumenter/nou-2015-8/id2417001/

Nyeng, F. (2012). *Nøkkelbegreper i forskningsmetode og vitenskapsteori*. Fagbokforlaget.

Ogden, T. (2020). *Skolens mål og muligheter*. Gyldendal.

Palm, K., Becher, A. A. & Michaelsen, E. (2018). Den viktige begynneropplæringen. I K. Palm & E. Michaelsen (Red.), *Den viktige begynneropplæringen: En forskningsbasert tilnærming* (s. 13-31). Universitetsforlaget.

Palmér, H. & van Bommel, J. (2017). *Exploring the role of representations when young children solve a combinatorial task* (s. 47-55). https://ncm.gu.se/media/smdf/Published/No11_Madif10/047056_madif_001_palmer.pdf

Palmér, H. & van Bommel, J. (2019). *Problemlösning som utgångspunkt: matematikundervisning i förskoleklass* (2. utg.). Liber.

Skaalvik, E. M. & Skaalvik, S. (2018). *Skolen som læringsarena: Selvoppfatning, motivasjon og læring* (3.utg.). Universitetsforlaget.

Stein, M. K. & Bovalino, J. W. (2001). Manipulatives: One Piece of the Puzzle. *Mathematics Teaching in the Middle School, 6*(6), 356-359. http://www.jstor.org/stable/41180973

Svingen, O. E. L. (2018). *Representasjoner i matematikk*. Matematikksenteret. https://www.matematikksenteret.no/sites/default/files/attachments/Elever%20som%20presterer%20lavt/P4_M1Representasjoner-i-matematikk_fagtekst.pdf

Sønstabø, R. (2014). Inn i klasserommet – begynneropplæring i praksis. I M. E. Frislid & H. Traavik (Red.), *Lese, skrive, regne: Pedagogikk og fagdidaktikk i begynneropplæringen* (2. utg, s. 21-40). Universitetsforlaget.

Thiel, O. & Nakken, A. H. (u.å.). *Tall, telling og antall.* Matematikksenteret. https://www.matematikksenteret.no/sites/default/files/attachments/page/Tall%2C%20telling%20og%20antall.pdf

Tjora, A. (2021). *Kvalitative forskningsmetoder: i praksis* (4. utg.). Gyldendal.

Traavik, H., Frislid, M. E. & Alseth, B. (2014). Ei oversikt over teorigrunnlaget for begynneropplæringa. I M. E. Frislid & H. Traavik (Red.), *Lese, skrive, regne:*

Pedagogikk og fagdidaktikk i begynneropplæringen (2. utg, s. 41-54). Universitetsforlaget.

Utdanningsdirektoratet (2019a, 13. mars). *Dybdelæring*. https://www.udir.no/laring-og-trivsel/dybdelaring/

Utdanningsdirektoratet (2019b, 18. november). *Hva er nytt i læreplanverket?* https://www.udir.no/laring-og-trivsel/lareplanverket/stotte/hva-er-nytt-i-lareplanverket/

Vygotskij, L. (2001). Interaksjon mellom læring og utvikling (B. Christensen, Overs.). I E. L. Dalen (Red.), *Om utdanning: klassiske tekster* (151-165). (Opprinnelig utgitt 1978).

Vygotskij, L. (2001). *Tenkning og tale*. (M. T. Roster & T.-J. Bielenberg, Overs.). Gyldendal akademisk. (Opprinnelig utgitt 1986).

Bilde- og figuroversikt

Bilder

Figurer

Vedlegg 1 – Samtykkeskjema

Vil du delta i forskningsprosjektet
Veksling mellom ulike matematiske representasjoner i begynneropplæringen?

Formålet med prosjektet
Dette er et spørsmål til deg om du vil la ditt barn delta i et forskningsprosjekt hvor formålet er å studere hvordan elever på småtrinnet arbeider med representasjoner i matematikk. Representasjoner er ulike måter å uttrykke seg matematisk, for eksempel tall, tegning, muntlig språk eller konkreter. Konkreter er fysiske gjenstander som kan hjelpe barna å løse oppgavene, for eksempel klosser eller mynter. Vi ønsker å bruke en modell som hjelpemiddel til å undersøke hvordan elevene veksler mellom representasjoner. Modellen er oppdelt i ulike ruter, hvor hver rute skal inneholde en type representasjon. Barna får presentert oppgaven, hvor målet er å løse den ved hjelp av å sette ulike representasjoner inn i rutene. Dette er en masteroppgave på lærerutdanningen for 1.-7. trinn, i faget begynneropplæring.

Hvorfor får du spørsmål om å delta?
Du får denne forespørselen fordi ditt barn er elev på småtrinnet. Vi har sendt ut dette informasjonsbrevet til alle foreldre/foresatte i klassen.

Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?
Universitetet i Sørøst-Norge er ansvarlig for personopplysningene som behandles i prosjektet.

Det er frivillig å delta
Det er frivillig å delta i prosjektet. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser hvis du eller barnet selv velger at barnet ikke skal delta eller senere trekker barnets deltakelse.

Hva innebærer det for barnet ditt å delta?
Vi planlegger å observere elevene når de arbeider for å samle inn data om elevenes arbeidsmetoder. Barna som deltar i prosjektet, vil bli tatt ut i små grupper på et eget rom. De ulike gruppene vil bli tatt ut på ulike tidspunkt i løpet av dagen, og den ordinære undervisningen i klasserommet går som normalt. Elevene som blir tatt ut vil arbeide med oppgaver sammen med én av oss. Den andre vil observere samtalen og arbeidet. Vi vil ta lydopptak av samtalen slik at vi kan høre gjennom den i etterkant. Vi vil besøke klassen 2-3 dager, og observere korte økter.

Kort om personvern
Vi vil bare bruke opplysningene om deg til formålene vi har fortalt om i dette skrivet. Vi behandler personopplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket. Du kan lese mer om personvern lenger ned.

Med vennlig hilsen

Bente Helgeland Sannæs	Fam A. Gogstad-Andersen	Mathilde Forren-Vik
(Veileder)	(Student)	(Student)

Du kan lese mer om personvern på neste side.

Utdypende om personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker dine opplysninger

De som vil ha tilgang til personopplysningene er prosjektets veileder, og studentene nevnt på forrige side. Lydopptaket gjøres og oppbevares gjennom nettskjema.no, som er en kryptert database med begrenset tilgang. Barnets navn og foresattes eventuelle kontaktopplysninger vil vi erstatte med en kode som lagres på egen navneliste adskilt fra øvrige data. Vi vil bruke barnets kodenavn når vi transkriberer lydopptaket, slik at det transkriberte materialet er anonymisert. Ditt barn vil ikke kunne gjenkjennes ved en eventuell publikasjon.

Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om ditt barn?

Vi behandler opplysninger om ditt barn basert på ditt og barnets samtykke.

På oppdrag fra Universitetet i Sørøst-Norge har personverntjenestene ved Sikt – Kunnskapssektorens tjenesteleverandør, vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Dine og ditt barns rettigheter

Så lenge ditt barn kan identifiseres i datamaterialet, har dere rett til:

- å be om innsyn i hvilke opplysninger vi behandler om deg og ditt barn, og få utlevert en kopi av opplysningene,
- å få rettet opplysninger om deg og ditt barn som er feil eller misvisende,
- å få slettet personopplysninger om deg og ditt barn,
- å sende klage til Datatilsynet om behandlingen av dine og ditt barns personopplysninger.

Vi vil gi dere en begrunnelse hvis vi mener at barnet ikke kan identifiseres, eller at rettighetene ikke kan utøves.

Hva skjer med personopplysningene dine når forskningsprosjektet avsluttes?

Prosjektet vil etter planen avsluttes i juni 2024. Opplysningene vil da slettes.

Spørsmål

Hvis du har spørsmål eller vil utøve dine rettigheter, ta kontakt med:

Prosjektansvarlig: Bente Helgeland Sannæs
Epost: bente.h.sannas@usn.no
Telefon: 35 57 53 53

Universitetet i Sørøst-Norges personvernombud:
Paal Are Solberg
Epost: personvernombud@usn.no

Hvis du har spørsmål knyttet til Sikts vurdering av prosjektet, kan du ta kontakt på e-post: personverntjenester@sikt.no, eller på telefon: 73 98 40 40.

Samtykkeerklæring
Jeg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet *veksling mellom ulike matematiske representasjoner i begynneropplæringen*, og har fått anledning til å stille spørsmål. Jeg samtykker til at mitt barn får lov til:

☐ å delta i prosjektet

Jeg samtykker til at opplysninger om

(barnets navn)

behandles frem til prosjektet er avsluttet.

(foreldre/foresattes underskrift)

Vedlegg 2 – Godkjenning fra Sikt

Vurdering av behandling av personopplysninger

Skriv ut | 04.12.2023

Referansenummer	Vurderingstype	Dato
347336	Standard	04.12.2023

Tittel
Masteroppgave om representasjoner i matematikk i begynneropplæringen

Behandlingsansvarlig institusjon
Universitetet i Sørøst-Norge / Fakultet for humaniora, idrett- og utdanningsvitenskap / Institutt for pedagogikk

Prosjektansvarlig
Bente Helgeland Sannæs

Student
Mathilde Forren-Vik og Fam Alexandra Gogstad-Andersen

Prosjektperiode
13.11.2023 - 30.06.2024

Kategorier personopplysninger
Alminnelige

Lovlig grunnlag
Samtykke (Personvernforordningen art. 6 nr. 1 bokstav a)

Behandlingen av personopplysningene er lovlig så fremt den gjennomføres som oppgitt i meldeskjemaet. Det lovlige grunnlaget gjelder til 30.06.2024.

Meldeskjema

Kommentar
OM VURDERINGEN
Sikt har en avtale med institusjonen du forsker eller studerer ved. Denne avtalen innebærer at vi skal gi deg råd slik at behandlingen av personopplysninger i prosjektet ditt er lovlig etter personvernregelverket.

FORELDRE SAMTYKKER FOR BARN
Prosjektet vil innhente samtykke fra foresatte til behandlingen av personopplysninger om barna (5-8 år).

FØLG DIN INSTITUSJONS RETNINGSLINJER
Vi har vurdert at du har lovlig grunnlag til å behandle personopplysningene, men husk at det er institusjonen du er ansatt/student ved som avgjør hvilke databehandlere du kan bruke og hvordan du må lagre og sikre data i ditt prosjekt. Husk å bruke leverandører som din institusjon har avtale med (f.eks. ved skylagring, nettspørreskjema, videosamtale el.) .

Personverntjenester legger til grunn at behandlingen oppfyller kravene i personvernforordningen om riktighet (art. 5.1 d), integritet og konfidensialitet (art. 5.1. f) og sikkerhet (art. 32).

MELD VESENTLIGE ENDRINGER
Dersom det skjer vesentlige endringer i behandlingen av personopplysninger, kan det være nødvendig å melde dette til oss ved å oppdatere meldeskjemaet. Se våre nettsider om hvilke endringer du må melde: https://sikt.no/melde-endringar-i-meldeskjema

OPPFØLGING AV PROSJEKTET
Vi vil følge opp ved planlagt avslutning for å avklare om behandlingen av personopplysningene er avsluttet.

Lykke til med prosjektet!