Universitetet i Sørøst-Norge

Fakultet for humaniora, idretts- og utdanningsvitenskap

Mastergradavhandling

Studieprogram: Masterprogrammet i grunnskolelærerutdanningen trinn 5 til 10

2023/2024

Toan Gjøystdal Ngo

Å fremme matematisk resonnering gjennom heltallsbrikketeori

En kvalitativ studie om hvordan arbeid med bevisbasert undervisning i form av heltallsbrikketeori kan fremme mellomtrinnselevers matematiske resonnering, argumentasjon og bevis.

Universitetet i Sørøst-Norge

Fakultet for humaniora, idretts- og utdanningsvitenskap

Institutt for matematikk og naturfag

Postboks 4

3199 Borre

http://www.usn.no

Denne avhandlingen representerer 45 studiepoeng

Sammendrag

Denne masteroppgaven undersøker hvordan bevisbasert undervisning kan fremme mellomtrinnselevers matematiske resonnering (MR), argumentasjon og bevis. Studien er basert på heltallsbrikketeori (HBT), en pedagogisk metode som bruker konkrete brikker for å illustrere matematiske konsepter som heltall, addisjon, subtraksjon og multiplikasjon. Ved å bruke HBT kan elever fysisk manipulere brikker for å visualisere matematiske operasjoner og utvikle en dypere forståelse av matematiske prinsipper.

Studien er gjennomført som en kvalitativ undersøkelse med deltagende observasjon av fem elever fra femte og sjette trinn. Elevene deltok i fem undervisningsøkter der de arbeidet med HBT for å utvikle sine ferdigheter i MR. Observasjonene inkluderte lydopptak og innsamling av skriftlig arbeid, samt individuell veiledning. Fokuset var på hvordan elevene utviklet sine hypoteser, identifiserte mønstre, generaliserte konsepter og argumenterte for sine matematiske påstander.

Resultatene viser at bruken av HBT bidro til å styrke elevenes forståelse av matematiske begreper og deres evne til å formulere og teste hypoteser. Elevene viste forbedret evne til resonnering gjennom sammenligning, klassifisering og eksemplifisering av matematiske objekter og operasjoner. Studien konkluderer med at bevisbasert undervisning, særlig gjennom bruk av heltallsbrikketeori, kan være en effektiv metode for å fremme dypere matematisk forståelse og resonnering hos elever på mellomtrinnet.

Nøkkelord: Heltallsbrikketeori, matematisk resonnering, argumentasjon, bevis, bevisbasert undervisning, matematikk og matematikkdidaktikk.

Abstract

This master's thesis study how proof-based teaching can promote elementary school students' mathematical reasoning (MR), argumentation, and their ability to prove in mathematics. The study is based on Integer Tiles Theory (ITT), a pedagogical method that uses concrete tiles to illustrate mathematical concepts such as integers, addition, subtraction, and multiplication. By using ITT, students can physically manipulate tiles to visualize mathematical operations and develop a deeper understanding of mathematical principles.

The study was conducted as a qualitative study with participatory observation of five students from the fifth and sixth grades. The students participated in five teaching sessions where they worked with ITT to develop their skills in MR. The observations included audio recordings and the collection of written work, as well as individual guidance. The focus was on how the students developed their hypotheses, identified patterns, generalized concepts, and argued for their mathematical claims.

The results show that the use of ITT contributed to strengthening the students' understanding of mathematical concepts and their ability to formulate and test hypotheses. The students demonstrated improved reasoning skills through comparison, classification, and exemplification of mathematical objects and operations. The study concludes that proof-based teaching, particularly using Integer Tiles Theory, can be an effective method for promoting deeper mathematical understanding and reasoning among middle school students.

Keywords: Integer Tiles Theory, mathematical reasoning, argumentation, proof, proof-based teaching, mathematics, and mathematics didactics.

Innhold

Tabeller

Figurer

Forord

Denne masteroppgaven markerer slutten på en femårig masterstudie ved USN Notodden. Det er tid for å si farvel til studenttilværelsen og starte å jobbe som lærer for fullt. Å skrive masteroppgave har vært en slitsom prosess, men også en lærerik en. Jeg er takknemlig for å ha valgt et spennende tema som har holdt motivasjonen oppe. Disse fem årene har gått fort. Jeg har fått jobbet meg opp til en faglig kompetanse omkring temaet for masteroppgaven, samt fått godt innsyn i mange andre relevante tema i skolematematikken. Denne kompetansen ønsker jeg å ta med meg videre i min yrkeskarriere som lærer. Selv om dette har vært en individuell oppgave, har jeg fått mye hjelp og støtte i arbeidet. Jeg vil benytte anledningen til å takke alle som har bidratt til både studiet og masteroppgaven.

Først vil jeg si takk til min elskede kone Synnøve som har vært støtte for familien i alle de fem åra jeg har vært student. I tillegg til å ha sett på språket i oppgaven, har hun hjulpet meg med å gi oppgaven en god struktur. Jeg vil også nevne barna mine, Reina, Selma og Elias som i tillegg til å ha bidratt med fiktive navn i oppgaven gir meg masse glede og kjærlighet.

Jeg vil også takke min fantastiske veileder Andrea Hofmann som har veiledet meg gjennom masteroppgaven. Hun har stilt opp for meg og gitt meg mange gode råd underveis. Jeg er svært takknemlig for alle tilbakemeldingene jeg har fått, og jeg har fått mye mer hjelp enn jeg forventet. I tillegg vil jeg takke alle mine medstudenter som har vært støttende og viet sin tid til å hjelpe meg gjennom studiet. En ekstra takk til medstudentene Ine, Kenneth, Lars Tore, Simon, Hassan, Sara og Nerea for både faglig og sosialt fellesskap.

Jeg vil også gi en takk til elevene som deltok og gjorde det mulig for meg å utføre denne studien. Annen takk går til skolen der jeg jobber, som har latt meg få sjonglere mellom jobb og studie på en fleksibel måte. Jeg har hatt fem fantastiske studieår og angrer ikke på å ha hatt denne reisen.

Sist, men ikke minst takker jeg Jesus for ny nåde hver dag.

Oslo, mai. 2024
Toan Gjøystdal Ngo

1 Innledning

1.1 Tema og bakgrunn for studien

Under lærerutdanningen ble jeg inspirert av bevisbasert undervisning, men selv om temaet var tema for et arbeidskrav i tredje studieåret følte jeg at jeg kunne veldig lite om det. Mot eksamen begynte jeg å forstå hvordan den bevisbaserte undervisningens formål og utførelse fungerte, og videre ble jeg inspirert av artikkelen til Reid og Vallejo Vargas (2019), «*Evidence and argument in a proof based teaching theory*», om hvordan de brukte Heltallsbrikketeori (heretter omtalt som HBT) til å undervise ungdomsskoleelever. Jeg ville rette mitt fokus på at elever skal utvikle evnene sine innen matematisk resonnering (heretter omtalt som MR), argumentasjon og bevis. Derfor valgte jeg å lage oppgaver som dreier seg om forståelse av teoremer i heltall der HBT kan hjelpe elevene å forstå og støtte dem på veien mot bevisføring. Læreplanen i matematikk støtter opp dette der det står følgende: «Matematikk skal bidra til at elevene utvikler et presist språk for resonnering, kritisk tenkning og kommunikasjon gjennom abstraksjon og generalisering» (Utdanningsdirektoratet, 2023, s. 2).

Jeg vurderte underveis om jeg skulle rette blikket mot elevenes utvikling eller pedagogen som kunne aktivisere resonnering, argumentasjon og bevis hos eleven. Det endte med at jeg ville holde fokus på elevene og deres utvikling. Grunnen til det er at i min nåværende stilling som lærer arbeider jeg på en skole med høy andel elever med minoritetsbakgrunn, som ofte har utfordringer med både matematikk og norsk. Selv om denne studien ikke spesifikt handler om elever med minoritetsbakgrunn, er mitt mål å utvikle undervisningsmetoder som kan være til hjelp for disse elevene også. Jeg ønsker at denne studien skal bidra til at alle elever, uansett bakgrunn, kan mestre matematikkfaget og kunne gjøre det de ønsker i livet. I læreplanen står det videre at: «Kritisk tenkning i matematikk omfatter kritisk vurdering av resonnementer og argumenter og kan ruste elevene til å gjøre egne valg og ta stilling til viktige spørsmål i sitt eget liv og i samfunnet» (Utdanningsdirektoratet, 2023, s. 2). Dette viser til hvor viktig arbeid med resonnering og argumentasjon er for at elevene skal lykkes i livet.

1.2 Problemstilling

I denne studien ønsker jeg å se på hvordan Heltallsbrikketeorien støtter elevene i prosesser, som matematisk resonnering. Jeg retter fokuset ekstra mot prosesser innen argumentasjon og bevis. På grunnlag av dette har jeg kommet fram til en problemstilling som lyder slik:

Hvordan kan arbeid med Heltallsbrikketeori fremme mellomtrinnselevers matematiske resonnering, argumentasjon og bevis?

Denne problemstillingen er grunnlaget for studiens fokus og retning, og søker å forstå hvordan en konkret og visuell undervisningsmetode kan forbedre elevenes matematiske ferdigheter. For å besvare denne problemstillingen, har jeg utformet tre forskningsspørsmål som skal hjelpe meg med å utforske og forstå de ulike aspektene av HBTs innvirkning på elevenes læring:

1. På hvilke måter bidrar undervisning i heltallsbrikketeori til å fremme mellomtrinnselevers evne til prosessen søk etter likheter og ulikheter?
2. Hvordan bidrar elevenes bruk av heltallsbrikketeori som representasjonsform til deres evne til å argumentere i matematikk?
3. Hvordan støtter heltallsbrikketeori elevenes bevisføring av kunnskap på nye matematiske områder?

Det første forskningsspørsmålet undersøker hvordan HBT kan hjelpe elever med å identifisere mønstre og forskjeller i matematiske problemer. Dette er en essensiell del av MR, da det å kunne se likheter og ulikheter mellom ulike matematiske objekter og operasjoner legger grunnlaget for å forstå mer komplekse matematiske sammenhenger. Det andre forskningsspørsmålet utforsker hvordan HBT som en konkret representasjonsform kan styrke elevenes evne til å formulere og kommunisere logiske resonnementer og argumenter for matematiske påstander. Ved å bruke Heltallsbrikker, kan elevene fysisk manipulere matematiske objekter, noe som kan gjøre det lettere for dem å utvikle og forklare sine resonnementer. Det tredje forskningsspørsmålet fokuserer på hvordan HBT kan hjelpe elever med å overføre sin forståelse til nye og mer komplekse matematiske konsepter. Dette innebærer å undersøke hvordan arbeid med HBT kan gjøre det lettere for elevene å bevise nye teoremer og regler basert på tidligere læring, og dermed utvide deres matematikkunnskap til nye områder.

Ved å utforske disse forskningsspørsmålene håper studien å gi innsikt i hvordan HBT kan integreres i matematikkundervisningen for å styrke elevenes ferdigheter i MR, argumentasjon og bevisføring. Denne tilnærmingen søker å gi en helhetlig forståelse av hvordan konkrete manipulerbare objekter som HBT kan forbedre elevers evne til å forstå og anvende matematiske konsepter.

Forkortelse	**Fullstendig navn**
MR	Matematisk resonnering
HBT	heltallsbrikketeori

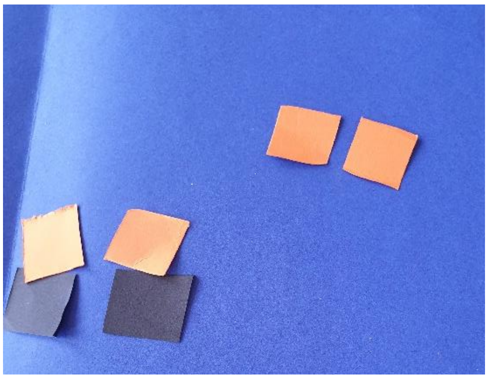
2 Teori

2.1 Heltallsbrikketeori

Det matematiske rammeverket som skal brukes til denne masteroppgaven er det Reid og Vallejo Vargas (2019) kaller for Heltallsbrikketeori (HBT). Dette er en undergruppe av det som kalles algebraiske brikker. Algebraiske brikker er en samling av rektangulære og kvadratiske brikker der brikkene kan illustrere numeriske eller algebraiske størrelser (North, 2023, s. 7). Brikkene fungerer som en bro mellom det abstrakte og det noe mer kjente for elevene, noe som gjør det lettere for dem å forstå ved at konseptene konkretiseres (North, 2023, s. 6). Reid og Vallejo Vargas (2019, s. 10) skriver at bruk av konkrete brikker hjelper elevene til å forstå abstrakte fenomener, slik som negative tall. I HBT fungerer brikkene som en konkretisering som representerer heltall, og handlinger med disse brikkene støtter opp mot bevis for matematiske utsagn (Reid & Vallejo Vargas, 2019, s. 811). Figur 2.1 vises forskjellige typer algebraiske brikker. I HBT vil man bare forholde seg til brikker som på bildet vises som små, gule (positive) og små, røde (negative) heltallsbrikker. I seg selv representerer hver enkelt brikke enten 1 eller -1, mens sammen kan de representere alle ulike heltall. Derfor kalles de heltallsbrikker (Reid & Vallejo Vargas, 2019, s. 810). Et eksempel på heltallsbrikkene jeg og elevene har brukt i min studie ses i Figur 2.2. Disse heltallsbrikkene representerer verdien 2, med 4 positive (oransje) brikker og 2 negative (svarte) brikker.

Figur 2.1 Algebraiske brikker (North, 2023, s. 6).

Figur 2.2 Viser verdien 2 med 4 positive brikker og 2 negative brikker.



2.1.1 Heltallsbrikke som representasjonsform

I matematikken fungerer konkreter som brukes i matematikkundervisning som representasjoner. Definisjonen for representasjon som jeg velger å bruke er at det er «noe som står for noe annet» (Hana, 2013, s. 131; Duval, 2006, s. 103). Det finnes to former for representasjoner: (1) Interne representasjoner som er mentale bilder en person danner fra et objekt eller en prosess, og (2) eksterne representasjoner som er representasjoner som fysisk kan utrykkes og brukes i kommunikasjon mellom medmennesker. Eksterne representasjoner blir også kalt semiotiske representasjoner fordi de er knyttet til tegn (Duval, 2017, s. 97). «Semiotikk er læren om tegn og tegnbrukende atferd» (Nes, 2023) Semiotiske representasjoner har fem klassifiseringer ifølge Lesh, deriblant muntlig språk og manipulerbare modeller, som her kobles opp mot argumentasjon og HBT (Hana, 2013, s. 145). Argumentasjonen til elevene og bruk av HBT kan være med på å danne semiotiske representasjoner som kan hjelpe elevene å lære eller forklare til andre (Duval, 2017, s. 98). Et eksempel på en semiotisk representasjon der manipulerbare modeller blir brukt, kan være at tallet 4 kan representeres som fire steiner, fire brikker eller som i HBT hvor tallet 4 representeres som fire brikker.

Jeg vil også nevne at representasjoner er essensielle for å forstå matematiske objekter og konsepter (Duval, 2017, s. 107). Duval skriver at for å få til matematiske aktiviteter er semiotiske representasjoner nødvendige fordi matematiske objekter ikke kan oppfattes eller måles. En annen ting er at matematiske objekter kan vises ved semiotiske representasjoner, men representasjonene er ikke objektet. Fra eksemplet ovenfor representerer de fire brikkene tallet 4, men brikkene er ikke selve objektet 4.

2.1.2 Heltallsbrikker som matematiske konkreter

HBT tar i bruk fysiske algebraiske brikker som vi kaller matematiske konkreter. Bartolini og Martignone (2014, s. 365) definerer matematiske konkreter slik: «Konkrete manipulasjonsobjekter er fysiske verktøy som elever kan håndtere direkte, og som tilbyr et bredt og dypt sett av sensoriske opplevelser». (Min oversettelse). Algebraiske brikker brukes som konkreter for at abstrakte fenomener, som algebra, blir lettere å forstå (North, 2023, s. 6).

Semadeni (1984) introduserer begrepet konkretiseringsskjema for å binde abstrakte ideer til fysiske objekter. Et konkretiseringsskjema er en pedagogisk metode for å utvide forståelsen av aritmetiske sammenhenger fra et kjent tall til et bredere sett av tall (Semadeni, 1984, s. 379). I artikkelen bruker han steiner som konkreter for å vise hele tall og han skiller mellom positive og negative tall ved å ha dem i forskjellige farger (Semadeni, 1984, s. 391).

En årsak til å jobbe med HBT, er for å variere måten vi representerer matematiske objekter på. Ved å endre måten vi representerer uttrykkene på, blir det enklere å identifisere mønstre, forbindelser og relasjoner (North, 2023, s. 8). North (2023) kaller dette for konseptuell variasjon. Det innebærer å utforske et objekt fra ulike perspektiver og ved hjelp av forskjellige representasjoner, for å identifisere og utdype ulike egenskaper ved objektet.

2.1.3 Handlinger i Heltallsbrikketeori og gester

Jeg har skrevet en del om brikker som konkreter, men i HBT trengs det også en overflate der disse brikkene kan brukes. Reid og Vallejo Vargas (2019, s. 810) tar i bruk en matte som brikkene kan manipuleres på for å visualisere matematiske påstander. Figur 2.2 viser en matte med en strek på midten. Streken representerer et likhetstegn mellom venstre og høyre side av matta. Dette betyr at matta kan fungere som en ligning der verdiene på begge sider må være like.

Figur 2.3 Viser en matte med verdien 12 på begge sider av likhetstegnet.

Godkjente operasjoner i HBT er ifølge Reid og Vallejo Vargas (2019, s. 815) disse tre grunnleggende handlingene:

1. Brikker kan legges på matten.
2. Brikker kan tas vekk fra matten
3. Brikker kan omorganiseres på matten.

Handlingene medfører effekter på matten i det de utføres. Handling 1 vil nøytraliseres av handling 2 og det samme gjelder også omvendt. Handling 3 vil derimot ikke forandre på verdien som er på matten. Ved hjelp av disse tre handlingene kan elevene demonstrere bevis og argumenter, som vil hjelpe dem i forståelsen av matematiske påstander og teorier (Reid & Vallejo Vargas, 2019, s. 811).

I tillegg til de tre grunnleggende handlinger i HBT, blir det brukt manipulerbare modeller, som heltallsbrikker. Elevene må navigere ved hjelp av muntlig språk og kroppslige bevegelser for å kommunisere med andre. Kroppslige bevegelser blir i denne oppgaven omtalt som gesturer, og det er bevegelser med armer og hender (Hiis, 2024). Enkelte forskere, som Freedman (1977), ser på gestikulasjoner som hjelpemidler for verbal uttrykkelse, mens andre ser på gestikulasjoner og tale som integrerte deler av samme kognitive kilde (Radford, 2009, s. 113). Duval (2017, s. 18) skriver at håndgesturer i seg selv ikke står for noe før vi gir dem mening. Elever bruker ofte gester før de har utviklet et verbalt språk for de aktuelle begrepene og prosessene, og gestene er spesielt nyttige for å beskrive romlige egenskaper og fysiske konkreter (Hana, 2013, s. 179; Roth, 2002, s. 538). Gester fungerer som en bro, som muliggjør overgangen fra handling til verbal diskurs, og hjelper elever med å artikulere og forbedre sine matematiske resonneringer gjennom tankeprosessene som involverer kroppen (Roth, 2002, s. 538).

Diskurs refererer til en bestemt måte å bruke språklige og ikke-språklige ressurser på for å kommunisere og forme sosiale realiteter innen et bestemt felt. Innenfor matematikkundervisning kan diskurs forstås som de måtene lærere og elever kommuniserer om matematiske begreper, prosedyrer og resonnementer på, inkludert bruk av spesifikke terminologier, symboler og representasjoner (Sfard, 2007, s. 570). Gjennom matematisk diskurs utvikler elevene forståelse for matematiske konsepter og resonnementer ved å delta i kommunikasjon som krever nøyaktighet og presisjon.

2.1.4 Relevante matematiske aksiomer og teoremer til HBT

I arbeid med HBT vil jeg og elevene repetere og lære aksiomer og teoremer som er relevante for denne masteroppgaven. Aksiomer er grunnleggende regler som elevene har lært i skolesammenheng, og sammen danner aksiomene matematiske systemer (Briseid, 2024). Aksiomer er altså utgangspunktet for å komme med matematiske påstander, og om disse bevises har de kommet frem til et matematisk teorem (Stylianides, 2016, s. 14). Aksiomer og teoremer som er relevante til masteroppgaven er naturlige tall, negative tall, heltall, partall, oddetall, addisjon, subtraksjon, multiplikasjon og den kommutative lov. Teoremene og deres definisjoner er tatt fra artikkelen til Reid og Vallejo Vargas (2019). Aksiomer som jeg forventer at elever kan etter andre trinn er addisjon, subtraksjon, partall, oddetall og den kommutative loven for addisjon (Utdanningsdirektoratet, 2023, s. 6). Multiplikasjon og dens kommutative lov kommer i tredje trinn, men merk her at jeg ikke forventer at elevene kan begge definisjonene av multiplikasjon som brukes i denne masteroppgaven (Utdanningsdirektoratet, 2023, s. 7).

Naturlige tall: «Naturlige tall er innen matematikken den vanlige betegnelsen på de hele, positive tallene, altså 1, 2, 3 og så videre.» (Vatne, 2023b).

Heltall: «Heltall er alle naturlige tall (1, 2, 3, 4 ...) og deres negative verdier (-1, -2, -3, -4 ...), samt 0. Heltall omfatter altså ikke tall med desimaler.» (Bratbergsengen, 2020).

Partall: «Partall er alle heltall som kan deles på 2. For eksempel er tallene –4, –2, 6, 14 og 34 partall.» (Vatne, 2022).

Oddetall: «Oddetall er alle hele tall som ikke kan deles på 2, for eksempel 3, 5, 7. De kalles også ulike tall.» (Vatne, 2023c).

Addisjon i naturlige tall: «For alle naturlige tall a og b er summen $a + b$ tallet som representeres på matten etter at vi har plassert en samling av a brikker og en samling av b brikker på en tom matte» (Reid & Vallejo Vargas, 2019, s. 811). (Min oversettelse).

Subtraksjon i naturlige tall: «For alle naturlige tall a og b, der $a \geq b$, er differansen $a - b$ tallet som representeres på matten når en samling av a brikker plasseres på matten og deretter b brikker fjernes fra matten» (Reid & Vallejo Vargas, 2019, s. 812). (Min oversettelse).

Når det gjelder regler for multiplikasjon av naturlige tall finnes det to definisjoner, og uansett hvilken av dem elevene kan fra før eller om de kan begge, vil jeg i undervisningen gå gjennom begge disse definisjonene. De to definisjonene er:

1. **Multiplikasjon som gjentatt addisjon:** «For alle naturlige tall a og b, er produktet a · b tallet som representeres på matten etter at vi har lagt a grupper med b heltallsbrikker på matten» (Reid & Vallejo Vargas, 2019, s. 813). (Min oversettelse).

2. **Multiplikasjon som laging av rektangler:** «For alle naturlige tall a og b, er produktet a · b tallet som representeres på matten etter at vi har lagt så mange heltallsbrikker som nødvendig på en matte for å lage et rektangel med a rader og b kolonner» (Reid & Vallejo Vargas, 2019, s. 813). (Min oversettelse).

Kvadrattall: «Kvadrattall er de tallene vi får når de naturlige tallene blir opphøyd i andre potens, altså multiplisert med seg selv. Kvadrattallene er altså tallene 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121 ...» (Vatne, 2023a).

Kommutativ lov i addisjon og multiplikasjon: «Uansett hvilke to tall som er involvert, vil det å bytte om på posisjonene til de to leddene ikke endre summen, da tallet (summen/produkt) som representeres på matta vil være akkurat det samme.» (Reid & Vallejo Vargas, 2019, s. 811-812 og 813-814). (Min oversettelse).

Nullpar: «Hvis vi legger til et visst antall positive brikker og samme antall negative brikker, vil vi bare ha nullpar som representerer den totale summen 0» (Reid & Vallejo Vargas, 2019, s. 816). (Min oversettelse).

2.1.5 HBT og bevisbasert undervisning

Reid og Vallejo Vargas (2019, s. 809) skriver om bevisbasert undervisning der elevene antar og jobber med å bevise viktige teoremer i matematikken. De sier videre at hvis elevene skal få til dette er det viktig å bruke argumentasjon og bevis, og dette gjøres ved at elevene som en klasse eller en gruppe kollektivt bygger opp teorier der deres kunnskap er forankret. Lærerens rolle i bevisbasert undervisning er å finne rammeverksteorier som veileder utviklingen av undervisningsaktivitetene og hvordan disse kan gjennomføres i klasserommet. HBT er en sånn rammeverksteori, og den jeg skal bruke i denne oppgaven for å hjelpe elevene til å styrke sin matematiske resonnering, argumentasjon og bevis. I arbeid med denne rammeverksteorien må vi ta i bruk en «verktøykasse» bestående av påstander som tidligere er bevist og akseptert av klassen (Reid & Vallejo Vargas, 2019, s. 809). Aksiomene og teoremene beskrevet i forrige delkapittel skal være innholdet i gruppens verktøykasse, og hvordan de skal brukes og læres kommer senere i metodekapittelet.

For at bevisbasert undervisning skal kunne hjelpe elevene i matematikken, må det spesifiseres en rekkefølge på det elevene skal lære. Målet med dette er at det skal være mulig for elevene å jobbe med bevis av matematiske påstander, som videre blir til teoremer (Reid & Vallejo Vargas, 2019, s. 809). Teoremene som blir dannet, blir senere brukt for å støtte opp nye hypoteser og bevisføringer som gir elevene ny kunnskap. Etablering av bevisbasert undervisning skjer på grunnlag av to forskjellige typer bevis (Reid & Vallejo Vargas, 2019, s. 809). Den første typen bevis er grunnleggende prinsipper, definisjoner og notasjoner som allerede brukes i klassen. Alle andre nye påstander må gjennom matematisk bevisføring. Denne bevisføringen må oppfylle Stylianides (2007) sine tre kriterier for et bevis. Disse får du høre mer om senere.

2.2 Matematisk Resonnering

Matematisk resonnering (MR) er utfordrende å definere, og forskjellige litteraturer presenterer ofte motstridende syn på hva resonnering kan innebære. Noen ganger brukes til og med begrepet uten en klar definisjon (Yackel & Hanna, 2003, s. 228). Dette gjør det ekstra vanskelig å skrive om MR, da det ikke finnes enighet om hva begrepet egentlig omfatter. Artikkelen til Jeannotte og Kieran (2017) refererer til flere forskere som presenterer sine definisjoner av MR. Lithner (2008, s. 257) beskriver for eksempel MR som tankeprosesser som leder til formulering av påstander og konklusjoner ut fra matematiske oppgaver, uten nødvendigvis å være begrenset til formell logikk eller korrekte resonnementer. I denne masteroppgaven vil jeg anvende en annen definisjon av MR som er: «Dens funksjon med å endre den epistemiske verdien av en bestemt påstand.» (Duval, 1995, sitert i Jeannotte & Kieran, 2017, s. 2). (Min oversettelse). Jeannotte og Kieran (2017, s. 7) definerer selv MR som: «en kommunikasjonsprosess med andre eller en selv, som gjør det mulig å utlede matematiske ytringer fra andre matematiske ytringer.»

Den epistemiske verdien av en påstand refererer til ideen om hvorvidt en ytring kan anses som sann, sannsynlig, mulig eller falsk (Jeannotte & Kieran, 2017, s. 2). Som eksempel på en slik vurdering, kan vi bruke påstanden: Summen av to partall er alltid et partall. Dersom vi kan presentere et matematisk bevis som viser at denne påstanden er sann under alle omstendigheter, vil påstanden ha høy epistemisk verdi. Det betyr at vi kan ha full tillit til dens sannhet, og den kan betraktes som en pålitelig regel eller teorem innenfor matematikken. På den annen side, dersom vi observerer flere tilfeller der summen av to partall resulterer i et partall, men vi ikke har et generelt bevis som dekker alle mulige situasjoner, kan vi likevel si at påstanden er sannsynlig eller sannsynligvis sann basert på disse observasjonene. I denne situasjonen vil påstanden ha en moderat epistemisk verdi. Vi kan anta at den gjelder for de fleste tilfeller, men vi kan ikke være helt sikre på dens absolutte gyldighet. Om vi derimot finner et eksempel der summen av to partall ikke er et partall, vil påstanden være usann. I dette tilfellet vil påstanden ha lav epistemisk verdi, og vi kan verken stole på den som en generell regel eller teorem i matematikken. Slik kan konseptet om den epistemiske verdien av en påstand hjelpe oss med å evaluere påliteligheten og gyldigheten til matematiske påstander og resultater, basert på tilgjengelige bevis og observasjoner.

Hittil har vi sett på den strukturelle siden av MR, men som lærer er vi mer interessert i de prosessene som skjer i elevene gjennom MR. Stylianides (2008, s. 10) presenterer noen prosesser som er relevante for MR, og han mener at MR handler om å gjennomføre disse prosessene. De fire prosessene han trekker fram er å lage matematiske generaliseringer, å formulere hypoteser (conjecture), å identifisere mønstre og å argumentere for matematiske påstander som gyldige eller ikke gyldige bevis. I tabell 2.1 presenterer jeg hans tabell som viser hans analytiske rammeverk for MR og bevis. Der vises det til prosessene innenfor MR. I tabellen viser Stylianides (2008) til to kategorier om hva MR er, samt underkategorier. De to kategoriene kalles: Lage matematiske generaliseringer (Making Mathematical Generalizations) og Gi støtte til matematiske påstander (Providing Support to mathematical Claims). Fra tabellen ser vi at prosessen å lage matematiske generaliseringer skjer ved hjelp av to andre prosesser, identifisere et mønster og forme hypoteser. Kategori to som er å gi støtte til matematiske påstander, inneholder to prosesser, forme bevis og ikke bevisbare argumenter.

Tabell 2.1 Analytisk rammeverk hentet fra Stylianides (2008, s. 10).

	Reasoning-and-proving			
Mathematical Component	Making Mathematical Generalizations		Providing Support to Mathematical Claims	
	Identifying a Pattern	Making a Conjecture	Providing a Proof	Providing a Non-proof Argument
	• Plausible Pattern • Definite Pattern	• Conjecture	• Generic Example • Demonstration	• Empirical Argument • Rationale
Psychological Component	What is the solver's perception of the mathematical nature of a pattern / conjecture / proof / non-proof argument?			
Pedagogical Component	How does the mathematical nature of a pattern / conjecture / proof / non-proof argument compare with the solver's perception of this nature? How can the mathematical nature of a pattern / conjecture / proof / non-proof argument become transparent to the solver?			

Tabell 2.2 Prosesser innen matematisk resonnering oversatt av Skott og Valenta (2022, s. 64)

Matematiske resonneringsprosesser		
Prosesser relatert til søk etter likheter og forskjeller	**Prosesser relatert til validering**	**Eksemplifisering**
Generalisere	Argumentere	Bruke eksempler som støtte for leting etter likheter og forskjeller
Forme en hypotese	Formulere bevis	Bruke eksempler som støtte for validering
Identifisere et mønster	Formulere formelt bevis	
Sammenligne		
Klassifisere		

I min masteroppgave vil jeg ta i bruk Jeannotte og Kieran (2017) sitt rammeverk, vist i tabell 2.2, som beskriver MR basert på Stylianides (2008). Tabellen over er laget av Skott og Valenta (2022, s. 64). De har satt Jeannotte og Kieran (2017) rammeverk i tabellform og oversatt til norsk. Ideene og teoriene er ganske like Stylianides analytiske rammeverk, men har flere kategorier og prosesser. Flere av disse er relevante for min masteroppgave som handler om bruken av HBT til MR. Jeannotte og Kieran har klassifisert resoneringsprosessene i tre kategorier: prosesser relatert til søk etter likheter og ulikheter, prosesser relatert til validering og eksemplifisering.

Gjennom prosesser relatert til søk etter likheter og ulikheter, utvikles narrativer om egenskaper ved og relasjoner mellom matematiske objekter. En narrativ er enhver tekst, enten muntlig eller skriftlig, som beskriver objekter, relasjoner mellom objekter, eller aktiviteter med eller av objekter, og som er gjenstand for godkjenning eller avvisning, det vil si å bli merket som sann eller falsk (Sfard, 2007, s. 572). Narrativer brukes i matematikkundervisning for å illustrere og støtte elevenes forståelse av matematiske konsepter, og for å bygge og validere matematiske påstander gjennom muntlige og skriftlige fortellinger.

Noen av disse narrativene kan umiddelbart aksepteres som sanne i det gitte fellesskapet (Skott & Valenta, 2022, s. 64), noe som er et sentralt kriterium i arbeid med bevisføring. Dette skal jeg skrive mer om senere. Tabellen 2.1 til Stylianides (2008) har identifisering av mønstre og å forme hypoteser som underkategorier av «Lage matematiske generaliseringer», mens tabellen 2.2 likestiller de tre kategoriene som en av metodene til å finne «prosesser relatert til søk etter likheter og ulikheter». Stylianides (2008) viser til forskjellige typer argumenter når vi jobber med argumentasjoner for matematiske påstander, mens i tabell 2.2 går alle argumentasjonene under ett. Jeg vil i senere kapittel skrive om forskjellige type argumentasjoner, men vil kun fokusere på de argumentasjonsformene som er relevant for HBT. Tabell 2.2 inneholder både å formulere bevis og å formulere formelt bevis, men i denne masteroppgaven skal kun den første brukes. Jeg vil forklare hvorfor senere og hva som skiller mellom de to formene for bevis.

2.2.1 Prosesser relatert til søk etter likheter og ulikheter

Som jeg tidligere skrev, er prosessene i den første kategorien relatert til søk etter likheter og ulikheter, slik at narrativer om egenskaper ved og relasjoner mellom matematiske objekter utvikles. Noen av narrativene som utvikles kan være så enkle og åpenbare som at 6 er et partall og to femmere gir en tier. Andre narrativer kan være mer krevende å skjønne for fellesskapet, selv om de tidligere har blitt undersøkt og validert.

2.2.1.1 Generalisere

Generalisering spiller en kritisk rolle i matematikken, da den tillater oss å utvide spesifikke observasjoner til universelle regler. Dette er viktig fordi generalisering gjør narrativene som generaliseres mer troverdige, og i matematiske argumentasjoner er målet alltid etter å søke etter sannheten (Pedemonte (2002), referert i Jeannotte & Kieran, 2017, s. 9). Generalisering i matematikk, som beskrevet av Stylianides (2008, s. 9), defineres som prosessen med å «transportere matematiske forhold fra gitte sett til nye sett hvor de opprinnelige settene er delmengder av settet» (Min oversettelse). Dette innebærer å anvende matematiske konsepter fra spesifikke og kjente forhold til et bredere og mer generelt tilfelle.

For eksempel, i tallrekkene $2, 4, 6, 8, 10, \ldots$ og $3, 6, 9, 12, 15, \ldots$ er begge eksempler på aritmetiske sekvenser, men med forskjellige felles differanser. I den første sekvensen er differansen 2, mens den i den andre er 3. Denne observasjonen leder til en generalisering: Formelen for det n-te-tallet i en aritmetisk rekke kan uttrykkes $a_n = a + (n - 1)d$, hvor a_n representerer det n-te-tallet, a er det første tallet, og d er differansen mellom hvert etterfølgende tall.

2.2.1.2 Formulere hypoteser

Ifølge Stylianides (2008, s. 11) er en hypotese et forslag brukt av elever som svar på matematiske oppgaver, basert på observerte mønstre. Dette representerer en ufullstendig bevisføring, og begrepet hypotese indikerer et nivå av usikkerhet omkring en hendelse, noe som nødvendiggjør ytterligere handlinger for å bekrefte eller avkrefte hypotesen (Reid, 2002, s. 23). Andre matematiske prosesser er nødvendig for å bekrefte om hypotesen er riktig eller ikke, og dette kan videre resultere i en generalisering. (Jeannotte & Kieran, 2017, s. 10). Basert på prosessene over kommer Jeannotte og Kieran (2017, s. 10) med en definisjon av hypotese: «En MR-prosess som, ved å søke etter likheter og forskjeller, utleder en narrativ om en regelmessighet med en sannsynlig eller sann epistemisk verdi, og som har potensial for matematisk teoretisering» (Min oversettelse).

2.2.1.3 Identifisere et mønster

Neste kategori er å identifisere mønstre i matematiske oppgaver og objekter. Identifisering av et mønster går dypere enn å bare observere et mønster, det er en aktiv søking som kan føre til utforming av hypoteser (Jeannotte & Kieran, 2017, s. 10). Videre definerer Jeannotte & Kieran i deres oppgave identifisering av et mønster som følgende: «En matematisk resonneringsprosess som søker etter likheter og forskjeller, utlede en narrativ om en rekursiv relasjon eller mellom matematiske objekter og relasjoner» (Min oversettelse). De sier at dette gjøres uten å utvide det til et større sett, slik det blir gjort når man generaliseres. I generalisering jobbes det med å utvide anvendelser av spesifikke regler, prinsipper eller ideer, mens identifikasjon av mønstre er hvordan disse kan gjenkjennes.

Et eksempel på dette er å se på en enkel tallsekvens der hvert nytt tall er summen av de to foregående tallene: $1, 1, 2, 3, 5, 8, ...$ $(1 + 1) = 2,\ (1 + 2) = 3,\ (3 + 5) = 8$. En rekursiv formel kan skrives som følgende formel $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ hvor a_n representerer tallet n i rekken og a_{n-1} og a_{n-2} er de to tidligere tallene i tallrekken. Her er det viktig å se forskjellen mellom en rekursiv formel og en generell formel. En rekursiv formel definerer hvert element (tall) i en sekvens i forhold til ett eller flere av de foregående elementene i samme sekvens (Mæhlum, 2024). En generell formel definerer derimot hvert element i en sekvens direkte i forhold til dets posisjon i sekvensen, uten å referere til andre elementer i sekvensen (Jeannotte & Kieran, 2017, s. 10).

2.2.1.4 Sammenligning

Jeannotte og Kieran (2017) definerer sammenligning som: «En matematisk resonneringsprosess som antyder, ved søk etter likheter og forskjeller, en narrativ om matematiske objekter og relasjoner» (Min oversettelse). De sier videre at sammenligning i seg selv ikke gir mye nytte for MR, men sammen med andre prosesser, for eksempel generalisering, kan det skape mening. For eksempel trenger vi sammenligning for å kunne se likheter og ulikheter sånn at mønstre kan identifiseres, deretter videre til generalisering og å validere hypoteser.

Et eksempel kan være en tallsekvens presentert i en matematikkundervisning: $2, 4, 8, 16$. Ved å sammenligne hvert tall med det forrige, observeres det at hvert påfølgende tall er dobbelt så stort som det forrige. Denne observasjonen hjelper til å identifisere et gjentakende mønster: multiplikasjon med to. Det generaliserer deretter at det neste tallet i sekvensen vil være 32, fordi 16 doblet er 32.

2.2.1.5 Klassifisere

I MR er klassifisering en sentral prosess som går utover å skille og beskrive egenskaper ved matematiske objekter. Den omfatter også rettferdiggjøring av hypoteser om at alle potensielle objekter med disse egenskapene er fullstendig beskrevet eller identifisert (Jeannotte & Kieran, 2017, s. 11). Mason (2001, s. 7) fremhever betydningen av matematiske egenskaper og definisjoner i denne prosessen, og hevder at en meta-diskursiv regel er fundamentalt for utførelsen av klassifisering. I denne oppgaven anvender jeg Jeannotte og Kieran (2017) sin definisjon av klassifisering i MR: «En matematisk resonneringsprosess som søker etter likheter og forskjeller mellom matematiske objekter, samt en narrativ om en klasse objekter basert på matematiske egenskaper og definisjoner» (Min oversettelse). Denne prosessen er nært knyttet til andre matematiske prosesser som sammenligning, gjetting og generalisering, og spiller en vital rolle i den bredere konteksten av matematisk forståelse (Jeannotte & Kieran, 2017, s. 11).

Et eksempel på klassifisering finner vi i studien av tall. La oss betrakte egenskapene til partall og oddetall. Ved å klassifisere tallene i disse to kategoriene, bruker vi deres matematiske egenskaper til å gruppere dem. Partall er definert ved at de kan deles med to uten å etterlate en rest, mens oddetall etterlater en rest når de deles med to. Denne klassifiseringen hjelper elever å forstå og forutse egenskaper ved større aritmetiske operasjoner, som for eksempel at summen av to partall alltid er et partall, mens summen av to oddetall også resulterer i et partall. Denne prosessen med å skille og gruppere tall basert på deres delbarhet med to, illustrerer hvordan matematiske definisjoner anvendes for å strukturere og forstå det matematiske universet mer effektivt. Ved å bruke klassifisering på denne måten, utvikler elevene en grunnleggende ferdighet i matematisk tenkning som er avgjørende for videre studier i matematikk.

2.2.2 Prosesser relatert til validering

Denne kategorien har som formål å jobbe med valideringsprosesser relatert til matematikk. Dette handler om å finne ut om narrativer er sanne eller ikke, og hvorfor det er slikt. Denne prosessen forandrer på den epistemiske verdien. Jeannotte og Kieran (2017, s. 11) tar for seg begrepet validering som knyttes til den epistemiske verdien en ytring kan ha; om noe er sannsynlig, sant eller usant. De har en definisjon av validering som lyder: «Validering er en matematisk resonneringsprosess som har som mål å endre den epistemiske verdien av en matematisk narrativ» (Jeannotte & Kieran, 2017, s. 11). (Min oversettelse). Endringen det er snakk om er hvordan sannsynlige matematiske påstander endres til sanne, usanne eller kanskje mer sannsynlige. For å få til dette finnes tre prosesser som hjelper oss med å endre den epistemiske verdien, nemlig argumentasjon, bevis og formelt bevis.

2.2.2.1 Argumentasjon

Tabell 2.2 viser argumentasjon som én prosess av mange i MR, og denne er sentral for arbeidet med bevisføring. Elever bruker argumentasjoner for å vise i et bredere spekter at en påstand er sann (Carpenter et al., 2003, s. 83). Matematisk arbeid med argumentasjon, er viktig for at elever skal få en god og dypere forståelse innen matematikk. Det som skjer, er at elevene vil kunne gi mening til og begrunne begreper og framgangsmåter for andre i klasserommet og for seg selv. De bruker overbevisende argumenter om at en framgangsmåte de har brukt er gyldig (Carpenter et al., 2003, s. 85). Dette stemmer overens med hva skolen ønsker med argumentasjon. I læreplanen står det at: «Argumentasjon i matematikk handler om at elevene begrunner framgangsmåter, resonnementer og løsninger og beviser at disse er gyldige» (Utdanningsdirektoratet, 2023, s. 3).

Stylianides (2008, s. 11) definerer argumentasjon som: «En sammenhengende sekvens av matematiske påstander» (Min oversettelse). Dette er assosiert med to typer overganger. I den første overgangen kan den epistemiske verdien endres fra sannsynlig til mer sannsynlig på bakgrunn av observasjonene som fører til forming av en hypotese. Altså en sammenhengende sekvens av matematiske påstander. Dette beskrev jeg i kapitlene om MR.

Den andre typen overgang skjer når vi endre den epistemiske verdien fra sannsynlig til sann eller usann. Den er relatert til valideringsprosessen, uten å nødvendigvis utgjøre en del av bevisprosessen (Jeannotte & Kieran, 2017, s. 12). Fra tabell 2.2 kan vi se at Stylianides (2008, s. 10) også deler argumenter i to deler der den første handler om argumenter som ikke er gyldige bevis, som empiriske argument og redegjørelse (rationale), mens den andre er argumenter som er gyldige bevis, som generiske eksempler og generelle logiske slutninger.

Gjennom teorien kommer Jeannotte og Kieran (2017, s. 12) med en definisjon av argumentasjon (rettferdiggjørende): «En matematisk resonneringsprosess som ved å søke etter data, garanti og støtte som tillater endring av den epistemiske verdien av en narrativ» (Min oversettelse). Dette kan være påstander og meninger som støtter opp mot bevis og hypoteser der de styrkes eller svekkes. Et eksempel som tar i bruk slik argumentasjon kan være å forklare denne tallrekken: 2, 4, 6, 8, … Der argumentasjonen kan være logiske resonnementer, bevis og for å støtte en matematisk påstand som i dette tilfelle se mønster, likheter og komme med en hypotese. Hypotesen er at neste tall i tallrekken er 10 fordi vi observerer et mønster der det etterfølgende tallet øker med verdien 2. Da kan vi argumentere for at neste tall i tallrekken er 2 høyere enn tallet før, og det vil gi oss svaret 10.

Argumentasjon kan foregå deduktivt eller induktivt. Et deduktivt argument er en type resonnement hvor konklusjonen må være sann, hvis premissene er sanne. Dette betyr at et deduktivt resonnement lar deg trekke en sikker konklusjon basert på de gitte premissene

(Morris, 2002, s. 80). Jeg vil vise til eksempler som viser til de deduktive argumentasjonsformene modus ponens og modus tollens (Holmen, 2024).

I dette eksempelet om modus ponens bruker vi en generell regel for å trekke en spesifikk konklusjon om tallet 5. Modus ponens følger argumentasjonene: Hvis P så Q er sant, og P er sant, så må Q være sant (Briseid, 2022).
Premiss 1: Hvis et tall er et primtall større enn 2 er det et oddetall. (P så Q)
Premiss 2: Tallet 5 er et primtall som er større enn 2. (P)
Konklusjon: Tallet 5 er et oddetall. (Q)

Dette eksempelet om modus tollens følger argumentasjonene: Hvis P så Q er sant og Q er usann, så må også P være usann (Briseid, 2017).
Premiss 1: Hvis et tall er et partall større enn 2, er det ikke et primtall. (P så Q)
Premiss 2: Tallet 5 er et primtall. (Ikke Q)
Konklusjon: Tallet 5 er ikke et partall som er større enn 2. (Ikke P)

Induktiv argumentasjon er en resonnementstype hvor konklusjonene trekkes fra spesifikke observasjoner eller eksempler, og man generaliserer disse til bredere regler eller påstander (Morris, 2002, s. 80). Denne formen for argumentasjon gir ikke en garanti for at konklusjonen er sann, men den gir en sannsynlig konklusjon basert på de tilgjengelige bevisene.

Et eksempel på induktivt resonnement i matematikk kan være observasjonen av summen av de første få partallene:
Observasjon 1: 2 + 4 = 6 (som også er et partall)
Observasjon 2: 2 + 4 + 6 = 12 (som også er et partall)
Observasjon 3: 2 + 4 + 6 + 8 = 20 (som også er et partall)

Fra disse observasjonene kan man trekke konklusjonen at summen av de første n partallene alltid er et partall. Her bruker man spesifikke eksempler på summer av partall for å gjøre en generell påstand om at denne regelen gjelder for alle n. Selv om det virker sannsynlig basert på de tilgjengelige eksemplene, er det ikke garantert at denne konklusjonen alltid er sann uten et formelt bevis. Induktiv argumentasjon gir altså en sannsynlig, men ikke sikker, konklusjon.

2.2.2.1.1 Empirisk argument og redegjørelse

Empiriske argumenter går under argumenter som ikke kan defineres som godkjente bevis innenfor matematikken (Stylianides, 2008, s. 10). Det vil si at empiriske argumenter går ut på at elever kun sjekker en delmengde av alle mulige tilfeller eller vurderer alle mulige tilfeller uten at de faktisk viser at de gjør det, og på den måten konkluderer de med at en påstand stemmer uten at den er gyldig bevisført (Stylianides, 2008, s. 12). Argumenter som godkjennes som bevis og hva slags egenskaper og kvalifikasjoner som må til, har jeg skrevet om i kapittel 2.2.2.2 Formulere bevis.

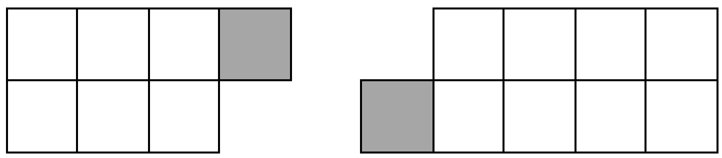
Et eksempel på et empirisk argument er når en eller flere elever argumenterer for at summen av to partall alltid vil bli et partall, ved å vise til at det gjelder for summen av fire og åtte som blir 12, summen av 24 og 36 som blir 60 og summen av 368 og 12 som blir 380. Elevene bruker disse tre eksemplene til å argumentere for at det også vil gjelde for alle andre partall. Disse eksemplene er ikke nok til å bevise at det alltid vil stemme. Stylianides (2008, s. 12) sier elever ikke ser behovet for å resonnere videre, og at det kan være fordi de er overbeviste om at empiriske argumenter er gyldige former for argumentasjon. Empiriske argumenter benytter ugyldige argumentasjonsformer, og kan ikke defineres som gyldige bevis i undervisningen, heller ikke på barneskolen. Selv om det er ugyldig, har eksemplene en viktig rolle i aktiviteter som har med bevis å gjøre. Å kunne «se det generelle i eksemplene, er grunnleggende i å få fram underliggende matematiske strukturer, utforske definerende grenser for generaliseringer og lage avgrensede påstander» (Stylianides, 2016, s. 18). Et eksempel kan være å identifisere at de første oddetallene, 3, 5, 7, 9 og 11, alltid har en i rest når de deles på to. Dette kan hjelpe elevene til å komme med påstander som «alle heltall som har én i rest etter å ha blitt delt på 2, er antageligvis oddetall.» Denne påstanden kan vise en forståelse for egenskapen til oddetall, og utfordre elevene til å finne andre heltall eller påstander som støtter eller går imot påstanden.

Redegjørelse blir presentert av Stylianides (2008, s. 12) som et begrep som beskriver argumenter for eller mot matematiske påstander som verken er formelle bevis eller basert på empiriske observasjoner. Redegjørelse brukes til å uttrykke forståelse eller resonnement som ikke nødvendigvis refererer til velkjente eller aksepterte sannheter eksplisitt. Redegjørelser kan enten ta utgangspunkt i eksempler eller en generell formulering. Et eksempel på en redegjørelsesargumentasjon hentet fra Stylianides (2008, s. 12) kan være når en elev sier «når du legger sammen to oddetall vil den ene resten av begge oddetallene danne et par og bli et partall». Sitatet tar ikke for seg definisjonen av oddetall eller partall, noe som gjør at påstanden ikke er et generisk argument, som jeg vil forklare om i neste delkapittel.

2.2.2.1.2 Generisk eksempel og generell logisk slutning

Generiske eksempler gir støtte til å formulere argumenter som fører til bevis. Generiske eksempler tas i bruk når man skal bevise en påstand. Det tas utgangspunkt i et eksempel eller en påstand som skal bevises. Deretter resonnerer man matematisk rundt hvorfor påstanden holder for eksemplet. Videre ser man om det matematiske resonnementet kan gjelde som en generell påstand (Rø & Arnesen, 2020, s. 13). Et generisk eksempel er et konkret eksempel som presenteres på en slik måte at det får fram det generelle i den situasjonen det er snakk om (Rowland, 1998, s. 67). Dette betyr at selv om eksemplet presenteres gjennom et spesifikt tall, er det ikke knyttet til de unike egenskapene til dette tallet for å støtte påstanden (Mason & Pimm, 1984, s. 284). Et generisk eksempel gir ikke bare bekreftelse på et enkeltstående eksempel, men tilbyr også forståelse for hvorfor det matematiske eksemplet er sant. Gjennom denne tilnærmingen kan man forstå hvorfor det samme prinsippet gjelder for alle lignende tilfeller (Rowland, 1998, s. 68). Rowland (1998) mener at generiske eksempler er anvendbare på alle nivåer i utdanningen, både som et middel til overbevisning og forklaring. Et eksempel på bruk av et generisk eksempel kan være at man argumenterer for at summen av to oddetall alltid blir et partall. Ved å vise at tallene 7 og 9 får en mengde eller en verdi «til overs» hvis man tegner det opp som figurer samlet i par, som vist i Figur 2.4. Tallene 7 og 9 kan anses som generiske eksempler fordi de ikke kan deles likt på to uten å få desimaltall, som da er definisjonen for alle oddetall. Delene som er til overs i de to oddetallene vil til sammen danne et nytt par. På grunn av dette vil elevene kunne komme med en påstand om at dette vil gjelde for summen av hvilke som helst to andre oddetall også.

Figur 2.4 Generisk eksempel som viser summen av to oddetall



Når vi arbeider med generelle logiske slutninger benyttes det ikke eksempler, men kun et generelt språk. Dette brukes for å argumentere for at en påstand er sann eller usann (Krogh Arnesen, 2022, s. 4). Argumenter som benytter seg av generelle logiske slutninger, er derfor ikke avhengige av spesifikke eksempler, men fokuserer i stedet på det generelle i situasjonen eller tilfellet (Stylianides, 2008, s. 11). Hvis vi tar for oss det samme eksemplet om at summen av to oddetall alltid blir et partall, kan eleven, istedenfor å bruke eksempler, bare si at når man har et oddetall kan man sette sammen par innad i oddetallet og få et halvt par eller én del av et par til overs. Hvis man da har summen av to oddetall vil det være to halve pardeler som til sammen danner et helt par og dermed vil det ikke bli noen deler til overs. Sånn kan vi se at summen av to oddetall alltid bli et partall. Det kan benyttes en lignende modell som i Figur 2.4, men se bort fra det spesifikke antallet med bokser, men heller fokusere på at begge oddetallene er en boks med en ekstra brikke og at sammen kan de ekstra brikkene danne et par.

Generiske eksempler og generelle logiske slutninger er innenfor den konseptuelle rekkevidden til elevene på barneskolen og at dette fører til ikke-empiriske argumentasjonsmåter (Stylianides, 2016, s. 17). Dette vil si at de følger den deduktive formen. Det er viktig at elevene allerede på barneskolen lærer at empiriske argumenter ikke er gyldige bevis (Stylianides, 2007, s. 298). Det kan føre til at elevene får en mer naturlig utvikling i sin læring senere i skolegangen. En ting vi må merke oss er at selv om den deduktive formen er viktig, så må dette ikke overskygge elevenes matematiske forståelse (Hanna, 1990, s. 12). Dette er spesielt viktig for elever som ikke behersker matematikkfaget enda.

Av å jobbe med bevis i barneskolen, trenger ikke elevene å lære definisjon av bevis på nytt på ungdomskolen eller videregående, men kan heller bygge videre på den de allerede har lært, som fortsatt er riktig, når de arbeider med matematisk bevis på et høyrere nivå (Stylianides, 2016, s. 19). Når man jobber med matematikk på skolen begynner man gjerne å utforske eksempler, for så å bruke dette til å argumentere for en generell påstand senere. Uten kjennskap til hva en bestemt påstand er, gjør det vanskelig at elever går rett på å formulere et formelt bevis. Et formelt bevis vil si en generell logisk slutning som er skrevet med et algebraisk utrykk (Krogh Arnesen, 2022, s. 4).

2.2.2.2 Formulere bevis

Når det gjelder de to andre kategoriene, formulere bevis og formulere formelt bevis, vil denne masteroppgaven kun omhandle å formulere bevis. Å formulere formelt bevis er en formell prosess som ikke øker elevenes forståelse eller utvikling av matematisk kunnskap (Stylianides, 2008, s. 9). Siden dette ikke bidrar til elevenes utvikling, er ikke denne formen for bevis like relevant for mellomtrinnselever. Dette er fordi vi i skolen først og fremst ønsker å utvikle elevenes ferdigheter i matematikk, for eksempel evne til kritisk tenkning, resonnering og argumentasjon (Kunnskapsdepartementet, 2019, s. 2).

Bevis er et begrep vi ofte hører, men gjerne ikke har tenkt gjennom hva egentlig innebærer. I matematikken har vi litteratur som deler bevis inn i to deler (Jeannotte & Kieran, 2017, s. 12). Vi har det som handler om bevisføring og det vi kaller for et formelt bevis. Bevisføring i skolematematikken handler om en sosial prosess, og Balacheff (1988, referert i Jeannotte & Kieran, 2017, s. 12) utdyper det videre som en forklaring som er sosialt akseptert. For at elevene skal kunne ha nytte av bruk av bevis i klasserommet må vi tilpasse dette til et nivå som er til støtte for dem. Målet for elevenes læring er forståelse innenfor matematikk og når vi forklarer noe er det som mål å gi elevene forståelse. Når vi arbeider med bevis er det viktig at det inneholder en forklaring på hvorfor det er sant. David A. Reid tar for seg bevisdefinisjonen til Gila Hanna, og hun sier at forståelse og forklaring går hånd i hånd (Hanna, 2016, s. 2). Formen for beviset Hanna skriver om er forklarende bevis. Om det sier hun at et bevis kan være forklarende bare når egenskapen til et matematisk objekt er fremtredende (Hanna, 2016, s. 4). Forklarende bevis, i motsetning til bare bevis som viser at noe er sant, hjelper elever med å forstå hvorfor noe er sant (Hanna, 1990, s. 12). Dette gir en dypere innsikt i matematiske konsepter. Et eksempel er hvis du har et resultat fra en geometrisk figur som et kvadrat, kan en fremtredende egenskap for eksempel være et lengdeforhold som gjelder for denne figuren. Et forklarende bevis vil i denne sammenhengen være hvorfor denne fremtredende egenskapen skaper den konklusjonen at alle lengder er like lange og gjør det til et kvadrat.

I artikkelen til Reid og Vallejo Vargas (2019, s. 808) tar de seg for Andreas J. Stylianides sin definisjon av bevis i skolen. Denne måten å jobbe med bevis på er viktig for elevenes bruk og læring av bevis, fordi elevene kan klare å håndtere det. Her må vi ikke forveksle mellom

Andreas J. Stylianides og Gabriel J. Stylianides. Andreas J. Stylianides er forfatteren for artikkelen «*Proof and Proving in School Mathematics (2007)*», og forfatteren for boka «*Proving in the elementary mathematics classroom (2016)*». Han definerer bevis som: «Et matematisk argument med diverse påstander for og imot en matematisk påstand» (Stylianides, 2007, s. 291). (Min oversettelse). Videre sier han at et matematiske bevis må følge disse tre kriteriene:

(1) Aksepterte påstander (Narrativ som er akseptert av klassefellesskapet).
(2) Argumentasjonsmåter (En endelig omstrukturering som er deduktiv av natur).
(3) Representasjonsformer (Realiseringer som er passende og kjente, samt tilgjengelig for klassen).

Før vi går nærmere inn i kriteriene må vi fokusere på hva Stylianides mener når han skriver at en narrativ er akseptert av klassefellesskapet. Det er ikke forventet at alle i fellesskapet forstår disse sannhetene på samme måte (Stylianides, 2008, s. 11). I stedet refererer forfatteren til de sannhetene som kan antas og brukes i offentligheten uten at det er nødvendig å rettferdiggjøre dem hver gang.

Det første kriteriet i arbeid med bevisføring er at «Det brukes utsagn akseptert av klassefellesskapet (sett av aksepterte utsagn) som er sanne og tilgjengelige uten ytterligere begrunnelse» (Stylianides, 2007, s. 291). (Min oversettelse). Dette betyr utsagn som betraktes som grunnleggende og ikke trenger ytterligere forklaringer, eller utsagn som aksiomer, tidligere beviste teoremer eller definisjoner som læreren har godkjent.

Det andre kriteriet i arbeid med bevisføringer er: «Det benytter resonneringsformer (argumentasjonsformer) som er gyldige og kjente for, eller innenfor den konseptuelle rekkevidden, til klassefellesskapet» (Stylianides, 2007, s. 291). (Min oversettelse). Dette inkluderer bruk av logiske regler for å trekke konklusjoner fra premisser og presise definisjoner for å utlede generelle utsagn (Stylianides, 2007, s. 292). Dette betyr at deduktive argumentasjonsmåter er formen som er godkjent for bevis fordi det trekkes konklusjoner gjennom premisser, som modus ponens og modus tollens (Stylianides, 2008, s. 11). Systematisk oppregning av alle mulige tilfeller når antallet er begrenset, bidrar til grundighet. Videre er konstruksjon av moteksempler essensielt for å motbevise generelle utsagn, mens utvikling av resonnementer som fører til motsigelser er avgjørende for å avvise feilaktige utsagn. Disse metodene sikrer presis og konsistent argumentasjon i matematiske og logiske sammenhenger.

Det siste kriteriet er at «Det kommuniseres med uttrykksformer (argumentasjonsrepresentasjonsmoduser) som er passende og kjente for, eller innenfor den konseptuelle rekkevidden til klassefellesskapet.» (Stylianides, 2007, s. 291). (Min oversettelse). Uttrykksformer i denne sammenhengen kan være hvordan argumenter og bevis blir fremstilt. Disse fremstillingene kan være verbale, fysiske konkreter, diagrammer eller algebraisk uttrykk (Stylianides, 2007, s. 292).

Når alle tre kriteriene er godkjente kan vi akseptere det som et bevis. På bakgrunn av dette har Jeannotte og Kieran (2017, s. 12) definert bevisføring som: «En matematisk resonneringsprosess som ved å søke data, garanti og støtte, endre den epistemiske verdien av en narrativ fra sannsynlig til sann» (Min oversettelse).

2.2.3 Eksemplifisering

Mason (1982, referert i Jeannotte & Kieran, 2017, s. 13-14) «definerer eksemplifisering som en prosess som lar oss utforske et problem med mål om å formulere eller verifisere en hypotese og forbedre den» (Min oversettelse). Videre står det i artikkelen at eksemplifisering kan føre til generalisering, og den generelle typen eksemplifisering kan knyttes til valideringsprosessen (Balacheff, 1988, referert i Jeannotte & Kieran, 2017, s. 14). Dette gir oss en definisjon på eksemplifisering som: «En matematisk resonneringsprosess som støtter andre matematiske resonneringsprosesser ved å utlede eksempler som bistår i: i) Søket etter likheter og forskjeller og ii) Søket etter validering» (Jeannotte & Kieran, 2017, s. 14). (Min oversettelse).

Et eksempel på dette er om vi skal utforske hypotesen: summen av to oddetall blir til et partall. Dette gjør vi ved å komme med eksempler og for eksempel legge tallverdiene med fysiske brikker. Om vi legger frem brikker som representerer de to oddetallene 3 og 5, vil vi ved å legge dem sammen få summen 8, altså et partall. Sånne eksempler bidrar med å konkretisere og verifisere hypotesen, og senere kan man komme med et generaliserende eksempel for å få en endelig verifisering av hypotesen.

3 Metode

I denne masterstudien har jeg undersøkt hvordan en gruppe på fire elever fra 6.trinn, og en elev fra 5.trinn bruker HBT i læring til å styrke elevens matematiske resonnering, argumentasjon og bevis. Fokuset ligger på hvordan elevene viser og forklarer deres funn under arbeidet med heltallsbrikker. Dette viser de ved å resonnere seg fram til svar på oppgaver som blir gitt av meg, som skal undervise dem. I denne oppgaven benyttet jeg meg av en kvalitativ tilnærming der jeg har deltatt og undervist elevene tett gjennom fem økter som gruppe. I tillegg hadde alle elevene mellom en til to individuelle økter med meg.

3.1 Kvalitativ forskningsmetode

I denne studien har jeg valgt en kvalitativ tilnærming. I en kvalitativ forskning går man i dybden og analyserer et lite datamateriale der man kan si «mye om lite» (Nyeng, 2012, s. 73). Jeg valgte en forskningsmetode som er viktig innenfor kvalitativ forskning, nemlig observasjonsrollen som heter deltagende observasjon (Tjora, 2021, s. 68). Grunnen til at bruken av en kvalitativ studie kan være nyttig, er at en forsker får muligheten til å komme tett inn på en situasjon og observere hvordan virkeligheten oppfattes av deltagerne (Nyeng, 2012, s. 72). Forskeren må gjøre gode tolkninger underveis i innsamlingen av dataene, samtidig som man ikke kan konkludere bastant om hvordan eleven faktisk tenkte (Nyeng, 2012, s. 74).

Kvalitativ forskning skiller seg ut fra en kvantitativ forskning ved at den bruker ord, framfor tall, for å presentere en analyse av samfunnet (Tjora, 2021, s. 27). Fokuset i studien er deltagernes perspektiv, der det gir forskeren mulighet til å bli nært involvert i deltagernes tankeprosesser. Dette gjør at man kan forstå deltagernes synspunkt og se deres opplevelse eller side av en situasjon (Nyeng, 2012, s. 71-72). I kvalitativ forskning har man ofte et induktivt syn hvilket vil si at man i sånne studier antar eller utvikler noen generelle sammenhenger ut fra observasjonene (Tjora, 2021, s. 40).

Kvalitativ forskningsmetode er ofte en god forskningsform og egnet til mange studier, men det er fortsatt en del ting man bør passe på når man bruker denne forskningsmetoden. Bruken av en kvalitativ tilnærming kan gi utfordringer angående tolkning av data (Tjora, 2021, s. 38).

Grunnen til det er at det kan bli for subjektivt med tanke på hva forskere anser som viktig eller ikke. Et annet problem er at det sjeldent er mange nok deltagere eller informanter til å gi oss et allmenngyldig funn (Nyeng, 2012, s. 75). Dette medfører at det er vanskelig for andre forskere å gjenskape en kvalitativ studie med identiske prosedyrene fordi det er mange variabler underveis i studiet som kan medføre til forandring. Deltagerne kan være veldig ulike fra forrige studie, og forskerens egenskaper, som personlighet, alder og kjønn kan påvirke dataen som blir innsamlet (Nyeng, 2012, s. 76).

3.1.1 Deltagende observasjon

Innsamlingen av data i denne studien ble gjort i form av deltagende observasjon der jeg underviste en gruppe elever. Under deltagende observasjon må observatøren gjøre seg ekstra oppmerksom på å finne en rolle som ikke påvirker informantene (Tjora, 2021, s. 69). I observasjonsstudier finnes det ulike roller, som kan defineres ut fra i hvilken grad observatøren er en del av det som skal studeres eller tar avstand til det som skal observeres (Tjora, 2021, s. 68-69). Siden jeg fungerer som deres lærer har jeg her en aktiv rolle som ifølge Tjora (2021) er en åpen rolle. Åpen rolle i denne sammenhengen er en deltagende observatør som betyr at jeg som skal undervise informantene også er forskeren (Tjora, 2021, s. 68)

For å supplere den deltagende observasjonen, vil denne studien også bruke strukturerte, oppgavebaserte intervjuer som foreslått av Goldin (2000). Goldin understreker viktigheten av å bruke oppgavebaserte intervjuer for å forstå matematisk atferd, ved å strukturere intervjuer på en måte som gir konsistente og pålitelige data (Goldin, 2000, s. 314). Goldin beskriver hvordan disse intervjuene kan tjene både forsknings- og vurderingsformål ved å fokusere på elevenes prosesser og resonnementer snarere enn bare resultatene. Dette er spesielt relevant for min studie, som søker å avdekke de underliggende resonneringsprosessene hos elevene.

Dette tilsier at i denne studien tar jeg en dobbeltrolle som både underviser og forsker. Denne rollen gir meg en unik mulighet til å integrere praktisk undervisning med forskningsaktiviteter for å få en dypere forståelse av elevenes læringsprosesser. Som underviser er min hovedoppgave å tilrettelegge for et læringsmiljø hvor elevene kan utvikle sine matematiske resonneringsferdigheter. Jeg benytter manipulerbare modeller som heltallsbrikker og fremmer kommunikasjon gjennom muntlig språk og gestikulasjoner.

Som forsker samler jeg systematisk inn og analyserer data om elevenes læringsprosesser. Jeg bruker strukturerte, oppgavebaserte intervjuer som foreslått av Goldin (2000) slik jeg skrev om over. Goldin understreker viktigheten av detaljerte intervjuskjemaer og nøye planlegging for å sikre pålitelige data (Goldin, 2000, s. 314). Ved å bruke denne metoden kan jeg avdekke dypere forståelser hos elevene som ikke alltid er synlige gjennom tradisjonelle vurderingsmetoder. Ved å kombinere undervisning og forskning kan jeg tilpasse undervisningen basert på empiriske funn og bidra til forskningslitteraturen med ny innsikt i elevenes matematiske utvikling.

Under undervisningen ble de tatt lydopptak, og elevene fikk gjøre notater samt utføre oppgavene der jeg tok bilder av det elevene skrev og brukte til å forklare oppgavene. Jeg må derfor være på vakt for at elevene ikke oppfører seg som de normalt gjør fordi de vet det blir tatt lydopptak av dem. Tilstedeværelsen av en forsker og at det blir gjort lydopptak kan påvirke oppførselen til de som blir observert og dermed påvirke funnene (Dalland & Andersson-Bakken, 2021, s. 130). Jeg har vært vikar i den klassen før, og elevene er vant til å se meg undervise både i store og små grupper.

3.1.2 Utvalg

Før jeg valgte elevgruppen ville jeg prøve å få med meg en hel klasse på femte trinn fordi det var det laveste jeg kunne gå med tanke på at min utdanning er fra femte til tiende trinn. Etter en pilottest med en gruppe femteklassinger på en studiesamling, innså jeg at det var vanskelig å undervise for en større gruppe. Det var et nytt konsept for dem og tiden ble brukt til å gå mellom elevpar der jeg forklarte operasjonsregler for HBT. Senere hadde jeg en ny pilot økt med min datter som går i fjerde klasse, og fant ut at det var mye lettere å følge opp henne alene. I samtale med veileder ble vi enige om en gruppe på fire elever siden jeg da kunne forholde meg kun til et opptaksverktøy, noe som gjorde min transkriberingsjobb lettere.

Elevene fikk med seg et informasjonsskriv og et samtykkeskjema (vedlegg 1) fysisk hjem, slik at foresatte ble informert om hva studien handlet om og hva slags rettigheter både foresatte og deres barn hadde. I samtykkeskjemaet var det spørsmål som foresatte kunne krysse av på. Spørsmålene var om det kunne tas lydopptak av elevene i undervisningen, om innsamling av skriftlig arbeid i undervisningen og at de kunne trekke seg eller i senere tid angre og fjerne deres deltagelse. For å gjøre det ekstra nøye ble det ringt hjem til alle foresatte og informasjonen ble også gitt muntlig. Foresatte godkjente og jeg kunne starte med undervisningen uka etter at samtykkeskjemaene ble samlet inn. Fire elever fra 6.trinn ble plukket ut av deres kontaktlærer.

Et kriterieutvalg er at utvalget av deltakerne er begrenset etter valgte kriterier (Tjora, 2021, s. 48). Grunnen til at man velger å sette kriterier på utvelgelsen av deltakere, er at man dermed kommer nærmere dem. Kriteriene skal også være til hjelp for å besvare problemstillingen. Det første kriteriet jeg ba om var at ingen av elevene hadde noe form for individuelle opplæringsplan (IOP) i matematikk eller norsk. Grunnen til det er for å ikke gjøre det vanskelig for meg å gjøre ekstra tilpasninger eller ha ekstra faktorer som gjør det vanskelig for meg å vurdere effektiviteten av HBT. I tillegg til dette var det andre kriteriet mitt at elevene er elever på mellomtrinnet.

De fire elevene fra 6.trinn er to jenter og to gutter. Ifølge kontaktlæreren deres behersker de to jentene matematikk godt, men de er ikke særlig snakkesalige. Av guttene er den ene av dem den sterkeste i matte av gutta i klassen, men likevel et stykke bak jentene. Den siste gutten sliter litt med matematikk, men kontaktlæreren forteller at han på tross av det har gode resonneringsevner. Disse elevene var med på 5 gruppeøkter, og hver sin individuelle samtale.

Den femte eleven ble plukket ut mot slutten av datainnsamlingen. Det er en gutt fra 5.trinn. Ifølge kontaktlæreren behersker eleven matematikkfaget godt, og er blant de sterkeste på trinnet. Årsaken til at en ny elev ble innlemmet var at de fire andre elevene var borte fra skolen uka jeg hadde planlagt den siste undervisningsøkten. Selv om denne eleven ikke hadde vært med på de tidligere øktene, fikk han akkurat de samme oppgavene jeg hadde tenkt å gi de andre, fordi jeg mente at han skulle være i stand til å håndtere dem. Før opptaket ble satt på, viste jeg ham kjapt de elementære prinsippene i HBT.

3.2 Oppgaver og teori til elevens «verktøykasse»

Under innsamlingen av data fikk elevene oppgaver som skulle øke deres forståelse av heltall og hvordan HBT fungerer. Alle oppgavene er basert på Reid og Vallejo Vargas (2019) artikkel *"Evidence and arguments in a proof-based teaching theory"*, hvor jeg ble inspirert til å lage undervisningsøkter som inneholdt de forskjellige matematiske definisjonene. Artikkelen handler om hvordan elever kan bevise påstanden "Produktet av to negative heltall er et positivt heltall" ved å bruke HBT sammen med matematiske teoremer om påstand, teori og bevis (Reid & Vallejo Vargas, 2019, s. 807). Gjennom prosessen skal elevene lære seg diverse teorier som danner en "verktøykasse" med aksepterte påstander og aksepterte argumentasjoner og uttrykk som gruppen blir enige om. Før jeg startet med innsamling av data, gjorde jeg noen tilpasninger. Jeg ville ikke ha flere enn fem økter på grunn av studiens begrensninger, og det er også spennende å se om disse øktene er nok til å styrke elevenes matematiske forståelse, samt deres evne til MR, argumentasjon og bevis.

Oppgavene jeg ga elevene inneholdt addisjons-, subtraksjons- og multiplikasjonsoppgaver. Det var også oppgaver med både positive og negative heltall i alle tre regneartene, og elevene regnet dem med heltallsbrikkene. Elevene fikk undervisning i nullpar-teorien. Det vil si hvordan du danner par mellom en positiv heltallsbrikke og en negativ heltallsbrikke for gi verdien null (Reid & Vallejo Vargas, 2019, s. 816). Underveis holdt vi samtaler rundt oppgavene for å komme fram til matematiske teoremer som vi kan ha i gruppens "verktøykasse". Disse teoremene er de samme som ble brukt i artikkelen til. Med «verktøy» menes narrativer de kan bruke for å løse oppgavene i de neste øktene (Reid & Vallejo Vargas, 2019, s. 809).

Oppgavene ble strukturert slik at de utfordret elevene til å forklare sin tenkning og resonnement, i tråd med Goldins (2000) anbefalinger. Dette inkluderte åpne spørsmål som krevde at elevene beskrev trinnene de tok for å komme fram til en løsning (Goldin, 2000, s. 314). Oppgavene elevene fikk ble ikke delt ut på ark, men de fikk dem muntlig av meg i undervisningen. Under samtalene rundt oppgavene brukte jeg oppfølgingsspørsmål for å utforske elevenes forståelse og få innsikt i deres resonneringsstrategier, noe som bidro til å avdekke dypere lag av elevenes tenkning (Goldin, 2000, s. 315). Dette gjelder spesielt i gruppeundervisningen. Da vi kom til de individuelle øktene, spisset jeg dem inn mot bevisføring. Målet var å kunne gjenkjenne de ulike prosessene av MR, og hvordan HBT fasiliterer for disse. Derfor lot jeg dem bevisføre alle relevante aksiomer.

3.2.1 Oppgavene

Oppgave 1: Hva er 3 + 5?

- Be elevene vise hva 3 + 5 er på heltallsbrikkematten.
- Spør: «Hvordan kan dere vise meg at svaret dere har er riktig?»
- Be elevene forklare sin tankeprosess og argumentere for hypotesen sin.

Oppgave 2: Utforske kommutative egenskaper

- Gi elevene i oppgave å vise at 4 + 3 er det samme som 3 + 4 ved hjelp av brikkene.
- Videre, gi dem flere eksempler for å demonstrere det kommutative ved addisjon.
- Spør: «Hva skjer når dere bytter rekkefølge på tallene? Er resultatet det samme? Hvorfor?»

Oppgave 3: Subtraksjon og Negative Tall

- Be elevene vise 3 - 2 på matta.
- Diskuter: «Hva skjer når leddene bytter plass? Hva observerer dere?»
- Introduser konseptet med negative tall og bruk brikkene til å representere -1.
- Sammenlign med 3 + 2 og diskuter hvorfor den kommutative regelen ikke gjelder for subtraksjon.

Oppgave 4: Mengdeforståelse

- Sett opp to mengder med brikker på matta: En på den venstre siden med en del positive brikker, og en på høyre siden fordelt på matta og i den negative sonen.
- Be elevene sammenligne mengdene uten å telle.
- Spør: «Hvordan kan dere observere og danne hypoteser om mengdene uten å telle alle brikkene?»

Oppgave 5: Bevisføringer med Partall i Addisjon

- Be elevene arbeide med å bevise hvorfor summen av to partall alltid er et partall.
- Bruk heltallsbrikker for å konkretisere og validere argumentene ved å telle og pare brikkene.
- Spør: «Hvordan kan dere vise at resultatet alltid er et partall?»

Oppgave 6: Bevisføringer med Oddetall i Addisjon

- Be elevene bevise at summen av to oddetall alltid resulterer i et partall.
- Bruk brikkene for å demonstrere at de overskytende enhetene fra begge oddetallene alltid danner et nytt par.
- Spør: «Hvordan kan dere vise at resultatet alltid er et partall når to oddetall legges sammen?»

Oppgave 7: Multiplikasjon som gjentatt addisjon

- Be elevene vise 3 * 4 på matta som gjentatt addisjon.
- Spør: «Hvordan kan dere vise at 3 * 4 er det samme som å legge til 3 fire ganger?»
- Diskuter hvordan multiplikasjon kan representeres som rektangler på matta.
- Utforske kvadrattall. Snakk om egenskapene til kvadrattall, og hvordan vi kan gjenkjenne det.

Oppgave 8: Sammenligne regnestykker

- Lag regnestykker som inneholder negativ sone, og regnestykker som har flere ledd med negative brikker.
- Spør: «Kan du se forskjellen mellom regnestykkene»
- Diskuter hvordan du kan gjenkjenne forskjellige type regnestykker.

Oppgave 9: Utforske kommutative egenskaper i multiplikasjon

- Be elevene vise at 4 * 3 er det samme som 3 * 4 ved hjelp av brikkene.
- Gi dem flere eksempler og diskuter omplassering av brikkene.
- Spør: «Hva skjer når dere bytter rekkefølge på faktorene? Er resultatet det samme? Hvorfor?»

Oppgave 10: Bevisføringer med Oddetall i Multiplikasjon

- Be elevene bevise hvorfor produktet av to oddetall alltid er et oddetall.
- Bruk heltallsbrikker for å vise hvordan multiplikasjon av oddetall resulterer i grupperinger som bevarer oddetallsstrukturen.
- Spør: «Hvordan kan dere vise at produktet av to oddetall alltid er et oddetall?»

3.3 Datainnsamling

3.3.1 Forarbeidet

Som forarbeid har jeg lest gjennom artikkelen til Reid og Vallejo Vargas (2019) som handler om bruken av HBT for å lære skoleelever bevis og argumenter. Gjennom artikkelen og lærerstudiet ble jeg videre introdusert til Andreas J. Stylianides og Gabriel J. Stylianides som introduserer kriteriene for bevisarbeid i skolen og et teoretisk rammeverk for MR. I eksamen for teori og vitenskap kom det en artikkel fra Skott og Valenta (2022) som bruker et teoretisk rammeverk for MR tatt fra artikkelen til Jeannotte og Kieran (2017). Jeannotte og Kieran (2017) sitt rammeverk har koblinger til Stylianides (2008) sitt rammeverk (tabell 2.1) og bruker beviskriteriene til Andreas J. Stylianides (2007). På grunn av koblingen mellom forskerne så jeg relevans mellom deres arbeid og fordypet meg nærmere i deres arbeid. Gjennom dette arbeidet kom jeg fram til forskningsspørsmålene og å bruke HBT for å fremme elevenes MR gjennom rammeverket til Jeannotte og Kieran (2017) sin tabell 2.2.

Oppgavene som ble brukt var sterkt inspirert av artikkelen til Reid og Vallejo Vargas (2019). Jeg satt sammen oppgavene på en måte der elevene kunne bruke kunnskap fra forrige økt til å hjelpe dem til å forstå og løse oppgavene de fikk. I den første økten underviste jeg om vanlige prosesser og grunnleggende addisjon og subtraksjon i HBT. I den andre økten utforsket vi multiplikasjon på to måter, som gjentatt addisjon og som rektangler. Vi var også innom temaene generell gyldighet og generiske eksempler. I tredje økt introduserte jeg hvordan negative tall illustreres i HBT gjennom eksempler av addisjon og subtraksjon. Her kommer også teorien om nullpar inn. Elevene fikk også lage egne oppgaver til hverandre. I fjerde økt arbeidet vi med multiplikasjon med en positiv og en negativ faktor, og til slutt også multiplikasjon med to negative faktorer. Femte økt var en prøve med oppgaver fra alle temaene i de ulike øktene.

Til både gruppeundervisningene og de individuelle samtalene skrev jeg ned oppgavetekstene og notater til meg selv på et eget ark som jeg tok med meg under gjennomføringen av datainnsamlingen. Oppgavene var veiledende, og jeg brukte ikke alle oppgavene i hver økt. I tillegg tok jeg bilder av interessante funn og skrev da notater opp mot bildene for å huske grunnen til at de ble tatt. På denne måten var det lettere for meg å huske hva bildene var for og situasjonen. Opplegget elevene fikk var muntlige fra meg og det var viktig å ha progresjonen på et eget ark så jeg ikke skulle glemme den under undervisningen. Her sto det også ting jeg burde huske å forklare eller fortelle elevene undervis, og spørsmål som var viktige å stille elevene. Grunnen til denne metoden var at jeg da i større grad sikret meg at jeg fikk mest mulig og relevant informasjon ut av observasjonene.

Før de første fem øktene satt jeg opp lydopptak og utstyr til heltallsbrikkeundervisningen i grupperommet før elevene ble hentet. Det ble plassert fire matter, en til hver og brikkene var i en egen pose som jeg venter med å dele ut. Elevene fikk også beskjed i forkant å ta med kladdebok og pennal når de blir hentet av meg. Jeg informerte dem om formålet med undervisningen, og at jeg ikke er opptatt av svar, men hvordan elevene viser og forklarer tankegangen sin. Hvis det var vanskelig å forklare det verbalt kunne de skrive/tegne det ned, eller bruke visuell støtte ved å skrive/tegne. Jeg forklarte dem at framgangsmåten for å vise hvordan de har tenkt skal støtte opp mot heltallsbrikkene, men hvis det er i veien kan de bare forklare det slik det var lettest for dem. De fikk også vite at det var mulig å samarbeide, men det var også lov å jobbe alene. De ble oppfordret til å bruke hverandre som støtte til å komme fram til svar og forklaringer til regneprosessene. Feil var ikke farlig, og elevene ble oppfordret til å gjøre oppgavene så godt de kunne uten å tenke på at det skulle være konsekvenser av å svare feil. De var jo der for å lære.

3.3.2 Innsamling

Datainnsamlingen ble gjort i løpet av to perioder med mellomrom mellom. Første periode bestod av fem økter varierende fra 20 minutter til en time. Disse fem øktene ble avholdt i løpet av 2 uker. Jeg visste ikke helt hvor mye tid som skulle gå til disse samtale, så jeg holdt det fleksibelt for å se hvor elevenes MR-prosesser kunne føre oss. Vi kunne bruke mer eller mindre tid på diverse oppgaver gitt hvor vanskelig eller lett det var for gruppen. Gjennom de fleksible øktene kunne jeg observere elevenes arbeidsprosesser og justere undervisningen basert på deres behov og forståelse, i tråd med Goldins (2000) prinsipper om å fokusere på prosessen elevene bruker, ikke bare på de endelige svarene (Goldin, 2000, s. 316). Dette inkluderte å observere hvordan de formulerte og forsvarte sine løsninger, samt hvordan de brukte de lærte verktøyene til å løse nye oppgaver.

Under gjennomføringen av første periode satt jeg og fire elever rundt et bord på et grupperom. Det ble gjort lydopptak av alle øktene, og skriftlige arbeider ble tatt bilde av og brukes som visuell støtte i denne oppgaven. Oppgavene ble gitt muntlig av meg. Elevene regnet, og når alle fire var ferdige gikk jeg gjennom tankeprosesser og svar fra den enkelte. Som regel forklarte elevene i tilfeldig rekkefølge, men noen ganger valgte jeg strategisk hvem som skulle forklare først. Dette kommer jeg mer inn på i drøftingen. Etter hver forklaring stilte jeg spørsmål, som for eksempel «Hvordan kom du fram til det svaret?» eller «Hvordan tenkte du?». Fokuset lå på deres forståelse av å forme narrativer, hvordan de resonnerte seg fram til en hypotese, deres argumentasjon for hypotesen, operasjonsvalg samt representasjonsformen av utregningen. Jeg prøvde å ikke bekrefte om svaret deres var riktige eller feil, men klarte ikke alltid å holde meg, fordi målet var at de skulle resonnere seg fram til svaret selv. Dette stemmer overens med det Goldin (2000, s. 314) sier om å inkludere åpne spørsmål for at elevene skal beskrive sine tankeprosesser. Etter noen oppgaver stoppet jeg opp og underviste dem om forskjellige konsepter som hjelper til å bevisføre i HBT som kommutativ regel, generisk eksempel og nullpar. Mot slutten av alle øktene gikk repeterte vi teoremene fra verktøykassa, både de som ble formet i den gitte undervisningen og de vi kunne fra før.

Den andre perioden inneholdt flere korte, individuelle økter, der jeg tok ut én og én elev. Disse øktene varte fra 5 til 20 minutter. Årsaken til de korte øktene var at jeg gjennomførte dem i friminutt eller når skoledagen var ferdig, for at elevene ikke skulle tas så mye ut av den ordinære undervisningen. Det var også her en femte elev ble innlemmet i opplegget. De individuelle øktene ble også gjennomført i et grupperom, og jeg hadde samme oppsett, men bare for en elev denne gangen. Jeg og eleven satt sammen og gjennomførte oppgaver på samme måte som i gruppeøktene. Det ble også gjort lydopptak og tatt bilder av brikkene og deres skriftlige arbeider her også. De fikk de lignende oppgaver som tidligere, men denne gangen passet jeg på at de skulle prate mest mulig og vise meg bevisføringen for oppgavene. Det hadde gått mellom en og tre måneder mellom gruppeøktene og de individuelle øktene. De fikk derfor litt repetisjon underveis siden det var en stund siden de jobbet med HBT. Jeg var likevel mest interessert i om deres matematiske resonnering, argumentasjon og bevis var styrket.

3.3.3 Etterarbeid

Etter at observasjonene ble gjennomført, ble alle lydfilene sendt til og lagret i diktafonappen og deres hjemmeside. Disse filene blir godt beskyttet av de som har laget appen og er en sikker side som alle studenter ble oppfordret til å bruke. Jeg er den eneste som har tilgang og det kreves mitt brukernavn og passord for å få tilgang. Da jeg begynte å transkribere byttet jeg ut navnene til elevene for egenvalgte navn, slik at de ikke kunne bli gjenkjent i transkripsjonen. Begge lydopptakene ble transkribert, og etter transkriberingen begynte jeg å analysere transkripsjonen og se etter relevante uttalelser og svar som kunne hjelpe studien. Jeg utdyper dette under kapittel 3.4 Metode for analyse.

I transkripsjonen brukte jeg visse tegn (se under) for å gjøre transkripsjonen så presis som mulig for å samle relevant informasjon for denne masteravhandlingen.

[…]	Hopper over situasjoner som ikke er relevant for studien
…	Pause mellom 1-10 sekunder
F.eks. neii..	Trekker/drar litt på ordene (like bokstaver etterfulgt av «..»)

3.4 Metode for analyse

I arbeidet med innsamling av data, valgte jeg en deduktiv tilnærming. Det vil si at jeg går fra teori til empiri, der jeg i forkant har definert kategorier basert på teori. Etter å ha samlet inn relevant data, systematiseres denne også basert på teori (Anker, 2020, s. 79). Det første jeg gjorde var å basere kodingen basert på de tre kategoriene som ifølge Jeannotte og Kieran (2017) er matematiske resonneringsprosesser, altså prosesser relatert til søk etter likheter og ulikheter, prosesser relatert til validering og eksemplifisering. Ut ifra disse prosessene prøvde jeg å finne og markere argumenter fra elevene som tilhørte disse prosessene. Før jeg går videre vil jeg nevne at den siste prosessen eksemplifisering er tatt ut av denne analysen. Det er fordi HBT bruker konkreter som fungerer som eksempler for denne prosessen, og alle eksempler for de to andre prosessene må gjennom eksemplifiseringsprosessen. Jeg skal forklare i drøftingen hvorfor dette stemmer og hvordan HBT fremmer prosessen bare ved å bruke brikkene.

Jeg ga hver kategori en fargekode og deretter farget jeg alle utdrag i transkripsjonene, som gikk under disse kategoriene (tabell 3.1). Husk at en del av påstandene til elevene kunne inneholdt flere fargekoder, fordi elevene bruker prosesser relatert til søk etter likheter og ulikheter for å danne argumenter som igjen støtter deres hypoteser.

Tabell 3.1 Kategorier med tilhørende fargekoder

Prosesser relatert til søk etter likheter og ulikheter: «*Kunne ha vært hvilken som helst annet tall.», «Fordi de er samme svar, men det er bare forskjellige plassering.», De er ikke plassert sånn eller noe.», «Tre minus to er jo en» og «På et partall er det at hver brikke har som en bestevenn.»*
Prosesser relatert til validering: *«To oddetall. Å ja, du vil at to oddetall alltid blir et partall?»*

Videre i arbeidet delte jeg Prosesser relatert til søk etter likheter og ulikheter på flere kategorier etter kategoriene i Tabell 2.2 tatt fra Skott og Valenta (2022, s. 64), som er omtalt i teoridelen av oppgava. Jeg er ute etter å finne ut hvordan elevene kommer fram og forstår disse prosessene ved hjelp av HBT. Dette er relevant for første forskningsspørsmål som er: «På hvilke måter bidrar undervisning i HBT til å fremme mellomtrinnselevers evne til prosessen søk etter likheter og ulikheter i matematisk resonnering?».

Den vanskeligste kategorien å markere videre var argumentasjon fra Prosesser relatert til validering, fordi argumentasjoner ble brukt i alle prosesser gjennom hele arbeidet med HBT, mens bevisføring gjøres gjennom flere prosesser. Argumentasjoner løste jeg ved å sette inn elevenes gester basert på hukommelsen underveis i transkriberingen. Disse gestene, som er arm og håndbevegelser, blir beskrevet og plassert inni parenteser der det er relevant i samtalene (Hiis, 2024). Gestene kan blir brukt av elever for å beskrive romlige egenskaper og fysiske konkreter (Roth, 2002, s. 538). Dette kan være gester som: (peker på brikkene), (flytter på brikkene), (viser til brikkene), (peker på en gruppe brikker), (tar vekk brikkene) osv. Dette gjorde jeg for å se hvor mye elevene støttet seg til HBT for å kunne formulere sine argumenter, som er relevant til mitt andre forskningsspørsmål som er: Hvordan elevenes bruk av HBT som representasjonsform bidrar til deres evne til å argumentere i matematikk?

Neste kategori jeg valgte å markere var generiske eksempler fordi disse eksemplene er med på å danne bevis; ifølge rammeverket (tabell 2.2) til Stylianides (2008, s. 10). Dette gjør jeg fordi slike eksempler gjerne er med i samtaler der bevisføring foregår. Jeg har valgt å markere generalisere og generiske eksempler med samme farge, fordi for å komme til et generisk eksempel har det mest sannsynlig foregått en generalisering. Jeg valgte å ikke fargekode argumentene fordi jeg har gjort det med de andre prosessene, og vil heller bruke dataene fra de andre kategoriene til å se hvordan HBT støtter argumentasjonsgrunnlaget deres.

Tabell 3.2 kategorier til analyse av datamateriale

Prosesser relatert til søk etter likheter og ulikheter	• Generalisere: *«Kunne ha vært hvilken som helst annet tall.»* • Forme hypotese: *«Fordi de er samme svar, men det er bare forskjellige plassering.»* • Identifisere av et mønster: *«De er ikke plassert sånn eller noe (Tar vekk tre av brikkene).»* • Sammenligne: *«Tre minus to er jo en»* • Klassifisere: *«På et partall er det at hver brikke har som en bestevenn.»*
Prosesser relatert til validering	• Generisk eksempler: *«To oddetall. Å ja, du vil at to oddetall alltid blir et partall?»*

Når det gjelder bevis var det veldig vanskelig å markere fordi for å finne bevis må det tilfredsstille de tre kriteriene til Stylianides (2007, s. 291), og dette foregår i fullstendige samtaler som krever en sammenheng av flere argumentasjoner. Siste forskningsspørsmål er: «Hvordan støtter heltallsbrikketeori elevenes bevisføring av kunnskap på nye matematiske områder?» For å svare på dette brukte jeg de tre kriteriene som analysegrunnlag for å se om elevene har bevist matematiske aksiomer og teoremer. Første kriterium er utsagn som er akseptert av klassefelleskapet, som da er aksiomer og teoremer som de har lært tidligere eller bevist i tidligere økter. Dette kan være bruken av partall, oddetall, addisjon, subtraksjon og multiplikasjon. Senere kan de også ta i bruk teoremer de har bevist tidligere til støtte for bevisføring av nye teoremer.

Andre kriterium er at det tas i bruk argumentasjonsformer som er kjent og innenfor det konseptuelle rekkevidden til klassefellesskapet (Stylianides, 2007, s. 291). Dette innebærer å anvende logiske regler for å trekke konklusjoner fra premisser, bruke presise definisjoner for å utlede generelle utsagn, systematisk oppregne alle mulige tilfeller når antallet er begrenset, utvikle moteksempler for å motbevise generelle utsagn, og utarbeide resonnement som viser at aksept av et utsagn fører til en motsigelse (Stylianides, 2007, s. 292).

Tredje kriterium er at det tas i bruk uttrykksformer som er kjent og innenfor det konseptuelle rekkevidde til klassefellesskapet (Stylianides, 2007, s. 291). I denne sammenhengen vil disse uttrykksformene være verbale argumentasjoner og fysiske konkreter fra HBT. I drøftingen vil jeg ta for meg hvordan disse konkretene gjør det enklere for klassefelleskapet å forstå argumentasjonene som blir dannet.

3.5 Justeringer og forandringer underveis

I løpet av datainnsamlingen kom det fram at det var vanskelig å lære elevene multiplikasjon med negative heltall. I tillegg var jeg ikke godt nok forberedt så jeg fikk ikke stilt dem spørsmål om generalisering av utrykk. Dette medførte at en del av dataene fra gruppeundervisningene ikke var relevant for studiet. Jeg har derfor valgt å ikke bruke dataene fra gruppeøktene, men kun fra de individuelle øktene. I analysen vil det altså ikke forekomme oppgaver med negative faktorer, selv om jeg i utgangspunktet var inspirert av Reid og Vallejo Vargas (2019) forsøk på å få elevene til å bevise produktet av to negative faktorer.

3.6 Studiens troverdighet

For å snakke om en studies troverdighet innenfor kvalitativ forskning må man innom kvalitetskriteriene pålitelighet (reliabilitet), gyldighet (validitet) og generaliserbarhet (Tjora, 2021, s. 259). Pålitelighet handler om det er sammenheng gjennom hele forskningen, gyldighet handler om logiske sammenhengen mellom utformingen av prosjektet og funnene, samt hvordan man søker svar på spørsmålene (Tjora, 2021, s. 258-259). Når det gjelder generaliserbarhet handler det om funnene som er funnet er relevante og om de har «overførbarhet» utover det som er undersøkt i det enkelte prosjektet (Tjora, 2021, s. 259). Det er viktig at masteroppgaven min inneholder alle disse punktene for å sikre kvaliteten og troverdigheten i forskningen.

3.6.1 Pålitelighet (reliabilitet)

Pålitelighet handler ikke bare om en sammenheng gjennom hele forskningen, men at det i tillegg synliggjøres i rapporteringen (Tjora, 2021, s. 263). Det er viktig meg relevante koblinger mellom teori, empiri og analysen for å styrke påliteligheten. Det holder ikke bare å vise koblingene, men må redegjøres for (Tjora, 2021, s. 263). Fra teori, empiri og analyse tar jeg i bruk et rammeverk som viser til prosesser i MR (Tabell 2.2). Ut fra rammeverket kommer det prosesser som blir utgangspunktet for å lete etter empiri som tar i bruk disse prosessene. I analysen hentes relevant empiri kategorisert basert på prosessene fra rammeverket.

Tjora (2021, s. 263) tar også opp hvor mye teori kan forme forskningen, og det er viktig å vise til hvor mye teorien har påvirket forskingsdesign og analyse. Teorien i denne masteroppgaven er sentralt til hele forskningsdesignet, og dere vil gjenkjenne at strukturen og temaene fra Tabell 2.2 danner base for hvordan både teori-, analyse- og diskusjonskapitlene er bygget opp. Det kan også gjenkjennes i metodekapittelet i delkapittel 3.4 Metode for analyse. Der skriver jeg at jeg analyserer dataene fra teori til empiri, hvilket betyr at jeg bruker prosessene fra teorien til å finne relevant empiri innenfor prosessene. Alle valg er tatt basert på rammeverket for å besvare de tre forskningsspørsmålene. Alle kilder jeg har brukt for å bygge teorien er også gjort rede for i den løpende teksten og i Litteraturlisten.

3.6.2 Gyldighet (validitet)

Gyldighet handler om svarene vi finner i en forskning faktisk svarer på de forskningsspørsmålene vi ønsker å finne svar på (Tjora, 2021, s. 260). Forskningsspørsmålene mine tar for seg elevenes MR, og hvordan bruken av HBT og bevisbasert undervisning fremmer elevenes MR. For å besvare forskningsspørsmålene har jeg satt meg ned med et utvalg elever, lært dem å bruke HBT og lyttet til hvordan de har resonnert. Jeg har gjennom dette samlet inn relevant data. Dataene kom fra flere datakilder og metoder, dette inkluderer deltagende observasjoner, lydopptak og innsamling av elevenes skriftlige arbeid. Ved å bruke flere datakilder kan man bekrefte funnene fra ulike vinkler og sikre at de er pålitelige.

I kvalitativ forskning jobbes det også med begrepsvaliditet som betyr å jobbe med å forstå og utforske begreper som ikke er klart definerte (Nyeng, 2012, s. 114). Dette studiet tar fram en del begreper som forskerne har forskjellige definisjoner på. Spesielt finnes det flere ulike vinklinger på begrepet MR. I teorien viser jeg til flere ulike definisjoner, og i diskusjonsdelen redegjør jeg for min tolking av begrepet MR på bakgrunn av de ulike definisjonene.

3.6.3 Generaliserbarhet

Generaliserbarhet blir også kalt for ytre validitet og handler om forskningen er overførbar til andre sammenhenger (Nyeng, 2012, s. 109). I kvantitativ forskning prøver man gjerne å oppnå generaliserbarhet, for eksempel ved at utvalget som har vært med i forskningen kan representere en større gruppe eller kanskje en hel populasjon (Tjora, 2021, s. 267). I kvalitativ forskning må vi tenke annerledes, siden det er vanskelig å finne felles trekk fra et kvalitativt uttak. Hvordan mine 5 elever har argumentert, kan ikke representere hvordan alle mellomtrinnselever argumenterer. Den generaliseringen som er relevant for min masteroppgave er derimot den konseptuelle generaliseringen. Konseptuell generalisering er å utvikle konsepter eller teorier som vil ha relevans i andre studier og sammenhenger (Tjora, 2021, s. 268). Gjennom oppgaven vil jeg vise til hvordan HBT kan fremme MR blant elevene, og jeg håper at det kan være til inspirasjon for andre lærere og forskere. Jeg skriver mer om dette i Konklusjonen i kapittel 6.

3.7 Forskningsetikk

For å være innenfor gode forskningsetikk viser Den nasjonale forskningsetiske komité for samfunnsvitenskap og humaniora (NESH) til at forskere skal «innhente et forskningsetisk samtykke til deltagelse i forskning». Dette samtykket skal være frivillig og det bør helst være dokumenterbart, samt gi nok informasjon om hva det innebærer å delta i forskningen (Staksrud et al., 2021). All informasjon som deltagerne har rett på, ble sendt ut i form av et skriftlig informasjonsskriv og en samtykkeerklæring (vedlegg 1). Elever som ble med i prosjektet ble godkjent av foresatte og dette ble gjort på forhånd før elevene ble valgt. Ifølge NESH er det veldig viktig å få godkjenning både fra foresatte og barnet selv. Blant elevene som fikk skriftlig godkjennelse av foresatte, plukket kontaktlæreren deres ut en gruppe etter kriteriene jeg ga. Jeg ønsker å ha en variasjon blant de fire elevene, og kontaktlæreren er den som har best innsikt i elevenes matematikknivå.

Før dette hadde jeg allerede sendt digital søknad til Sikt (Kunnskapssektorens tjenesteleverandør) for godkjennelse til å gjennomføre denne masteravhandlingen (vedlegg 2). Deltakerne er lovet anonymitet og at ingen av elevene i studien eller skolen deres skal kunne identifiseres i min masteravhandling, hvilke også er krav fra NESH (Staksrud et al., 2021). All data fra lydopptakene er lagret på nett via Universitetet i Oslos diktafon-app. Alle data er passordbeskyttet og jeg er den eneste som har tilgang til dem. Alle transkriberte filer er lagret på en passordbeskyttet minnebrikke. Transkriberte filer som er under arbeid sammen med bilder av elevenes oppgaver er lagret på et sikkert og passordbeskyttet område. Alt innsamlet materiale vil bli slettet når arbeidet med masteravhandlingen er avsluttet.

4 Analyse

Jeg har analysert den transkriberte dataen jeg samlet inn som forklart i kapittel 3.4 Metode for analyse. For å svare på det første forskningsspørsmålet har jeg gjennom analysen funnet eksempler på MR gjennom prosesser for å søke etter likheter og ulikheter, hentet fra rammeverket til Jeannotte og Kieran (2017, s. 9). Disse prosessene består av fem kategorier: generalisere, forme en hypotese, identifisere et mønster, sammenligning og klassifisere. Kapittel 4.1 vil derfor fokusere på prosesser relatert til søk etter likheter og ulikheter, der jeg vil inkludere relevant data som faller innenfor de fem prosessene. Dataen som brukes her er fra de individuelle øktene til de fire elevene fra 6. trinn, som vil få fiktive navn: Samuel, Elias, Reina og Selma.

Kapittel 4.2 vil inneholde data og analyse som er relevant for andre forskningsspørsmål, der jeg skal finne ut hvordan elevene støtter seg til HBT som representasjonsform i argumentasjonene sine. Representasjoner er «noe som står for noe annet» (Duval, 2006, s. 103), og HBT går innenfor manipulerbare modeller i form for fysisk konkreter (Hana, 2013, s. 213). Kapittelet vil deles opp i to delkapitler der første del omhandler gester elevene bruker for å koble HBT til deres argumentasjoner, mens andre del inneholder data og analyse av elevenes argumentasjonsformer, som viser hvordan HBT hjelper argumentasjonsformene. Argumentasjonsformene som er relevante er redegjørelse og deduktive argumentasjoner som generelle logiske slutninger.

I kapittel 4.3 ligger data og analyse relevant til det tredje forskningsspørsmålet, som omhandler elevenes bevisføringer. Disse dataene kommer kun fra eleven fra 5. trinn, som har fått det fiktive navnet Matteo. Dataene her skal inneholde de tre kriteriene for bevis basert på sammenhengende samtaler gjennom alle de tre temaene. De tre kriteriene er aksepterte påstander, argumentasjonsmåter og representasjonsformer (Stylianides, 2007, s. 291). Kapittelet deles inn i disse tre temaer:

1. Bevisføringer med partall i addisjon.
2. Bevisføringer med oddetall i addisjon.
3. Bevisføringer med oddetall i multiplikasjon.

4.1 Prosesser relatert til søk etter likheter og ulikheter

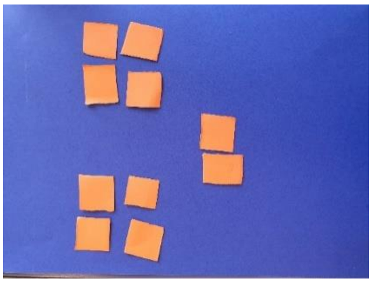
4.1.1 Generalisere

Under både gruppeøktene og de individuelle øktene viste elevgruppen at de hadde god forståelse av hva partall og oddetall er, samt deres egenskaper. Forskjellen mellom øktene var imidlertid at de ikke ordla seg like godt i gruppeøktene som når de var alene med meg. I de individuelle øktene var de mye mer snakkesalige. Jeg har valgt et utdrag fra økt 6 som viser hvordan Selma bruker generalisering til å søke etter likheter og ulikheter, noe som er en viktig MR-prosess.

Utdrag fra økten med Selma:

1. *Lærer: Nå vil jeg at du skal lage to oddetall, som du plusser sammen.*
2. *Selma: To oddetall. Å ja, du vil at to oddetall alltid blir et partall?*
3. *Lærer: Ja, det er det. Hvorfor blir det alltid et partall da?*
4. *Selma: På et partall er det at hver brikke har som en bestevenn, eller noe. Ta 5 pluss 5 for eksempel. Disse to brikker blir venner (organiserer brikkene), disse andre to blir venner (peker på brikkene). Etterpå er det alltid en i gruppa som er alltid sånn left out. Så hvis to oddetall blir ... Hvis vi plusser det samme, så blir de ... Like the left out blir sånn venner, så da får de en venn på en måte.*
5. *Lærer: Vil det gjelde absolutt alle oddetall?*
6. *Selma: Ja.*

Figur 4.1 Sortering av 5 + 5 der de blir plassert i par.



Selma viser sin evne til å generalisere matematisk kunnskap ved å forklare hvorfor summen av to oddetall alltid blir et partall. Når jeg ber henne om å addere sammen to oddetall, spør Selma om dette alltid vil resultere i et partall, noe hun bekrefter ved å bruke en analogi med brikker. Hun forklarer at i et partall har hver heltallsbrikke en "bestevenn", og illustrerer dette med eksemplet $5 + 5$, hvor fire heltallsbrikkene danner to par og en brikke blir til overs. Hun utvider dette til å forklare at når to oddetall legges sammen, vil de "left out" brikkene danne et nytt par og dermed skape et partall (Figur 4.1). Når jeg spør om dette gjelder for alle oddetall, bekrefter Selma dette.

I utdraget fra økten med Elias spør jeg hvorfor summene av $2 + 3$ og $3 + 2$ er det like, og eleven gir sin forklaring. Her er jeg ute etter den kommutative loven. Jeg stiller samme spørsmål med to andre tall, og eleven gir igjen sin forklaring. Deretter stiller jeg samme spørsmål med subtraksjon: $2 - 3$ og $3 - 2$. Eleven forklarer hvorfor resultatene her ikke er det samme som i addisjonsregnestykkene. I samtalen prøver jeg å avdekke om elevens funn fra eksemplene kan generaliseres.

Utdrag fra økten med Elias:

1. *Lærer: Kan du starte å vise meg, Elias, hvorfor 2 pluss 3 og 3 pluss 2 er det samme?*
2. *Elias: Ok. 2 pluss 3, ikke sant? Ja, det er det samme. […]*
3. *Lærer: Kan du si da 3 pluss 5, for eksempel. Hvorfor er 3 pluss 5 det samme som 5 pluss 3?*
4. *Elias: Jeg skal si det for deg. Ok. Det er det samme fordi de er bare i forskjellige plasser.*
5. *Lærer: Kunne du vise meg? Hvis dette her var ligning streken, ikke sant? Hvordan kan du se at det gir samme svar? (Peker på matta).*
6. *Elias: Fordi det er samme stykket, bare forskjellige veier. (Peker på brikkene).*
7. *Lærer: Og at det er?*
8. *Elias: Det blir 5. Ja.*
9. *Lærer: At svaret alltid blir 5, ikke sant? Ja. Bra. Kan du vise meg, er det det samme hvis det er negative tallet? Hvis det var 3 minus 2? Kunne du ha byttet plass på dem?*
10. *Elias: Ja, det hadde blitt det samme.*
11. *Lærer: Er det? Se da. Hvis det var sånn der 3 minus 2, hva om det hadde vært 2 minus 3 da?*
12. *Elias: Det hadde ikke funket.*
13. *Lærer: Hvorfor ikke?*

14. Elias: Fordi da har du sånn mindre her.

15. Lærer: Hva slags svar får du der, og hva slags svar får du her da?

16. Elias: Her får du 1, her får du minus 1..

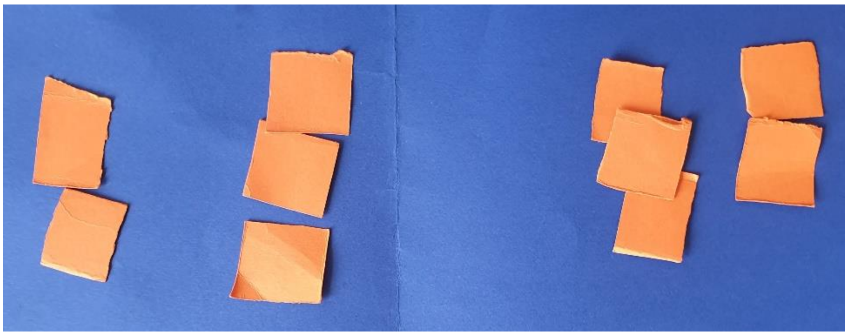
17. Lærer: Ok. Kan du si det en gang til? […]

18. Elias: Fordi det er 3 minuser, og det er bare 2 av de positivt brikkene. Men her er det 3 av de positivt brikkene, og der er det 2 minusbrikker. Så her får du 1.

19. Lærer: Gjelder det for absolutt alle tall? For eksempel måtte det være 3 og 2, eller kunne det vært hvilken som helst annen tall?

20. Elias: Kunne ha vært hvilken som helst annet tall.

Figur 4.2 Venstre side viser $2 + 3$*, og høyre side viser* $3 + 2$



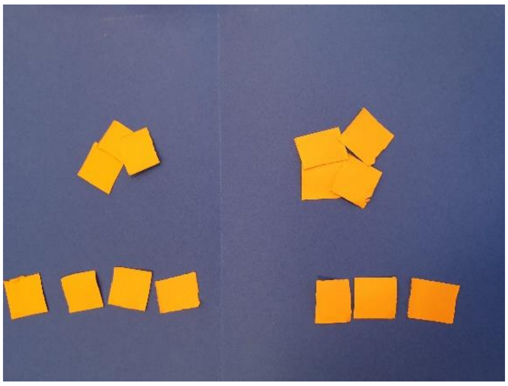
Elias viser hvordan han generaliserer den kommutative egenskapen ved addisjon og sammenligner dette med subtraksjon. Kommutativ egenskap betyr at rekkefølgen på leddene ikke har noe å si for resultatet (Reid & Vallejo Vargas, 2019, s. 811-812). Når han blir spurt om hvorfor $2 + 3$ er det samme som $3 + 2$, forklarer Elias at det er det fordi tallene bare er plassert forskjellig, men summen forblir den samme (Figur 4.2). Han viser dette med heltallsbrikkene og påpeker at resultatet alltid er det samme, uavhengig av rekkefølgen. Deretter, når han blir utfordret med subtraksjon, forklarer han at $3 - 2$ og $2 - 3$ ikke gir samme resultat, fordi rekkefølgen påvirker forskjellen. Han illustrerer dette ved å forklare at $3 - 2$ gir 1, mens $2 - 3$ gir - 1. Til slutt, når jeg spør om disse prinsippene gjelder for alle tall, bekrefter Elias at de gjør det. Gjennom denne prosessen viser Elias en forståelse av hvordan addisjonens kommutative egenskap kan generaliseres, mens han erkjenner at subtraksjon ikke følger samme regel.

Under økten med Samuel fikk han i oppgave å vise likheten mellom 4 + 3 og 3 + 4. Senere ble han bedt om å komme med et eget regnestykke der summen fortsatt er 7, men leddene er annerledes. Samuel foreslo 2 + 5 og 5 + 2, og forklarte at begge gir samme svar. Målet med øvelsen var å hjelpe Samuel å generalisere kommutativitet fra et aksiom til et teorem ved å bevise at rekkefølgen av tallene i addisjon ikke påvirker summen.

Utdrag fra økten med Samuel:

1. *Lærer: Ok, nå vil jeg at du skal ... Kan du vise meg hvordan 4 pluss 3 er?*
2. *Samuel: 4 pluss 3?*
3. *Lærer: Ja. 4 pluss 3. Hvis jeg hadde snudd om, da, og tatt 3 pluss 4, hvordan hadde det lest seg ut?*
4. *Samuel: Samme. Eller 3 pluss 4?*
5. *Lærer: Ja, 3 pluss 4, eller 4 pluss 3. Du sier det er det samme. Hvorfor det?*
6. *Samuel: Fordi de er samme svar, men det er bare forskjellige plassering.*
7. *Lærer: Hvordan kan du se at de er samme svar, da?*
8. *Samuel: Fordi 4 pluss 3, hvis man teller 3 og plusser det på 4, det blir 7 (viser med brikkene). Men hvis man plusser 4 med 3, det blir også 7 (viser med brikkene).*
9. *Lærer: Så da betyr at summen på brettet er 7 uansett hvordan du flytter på det. Kunne du lage et annet regnestrikke som gir 7?*
10. *Samuel: Ja. 5 pluss 2. 5 pluss 2, riktig.*
11. *Lærer: Da sier du at på addisjon, så hvordan du flytter på brikkene har ikke noe å si, for de er bare samme svar. Gjelder det for alle regnestykker med pluss, eller gjelder det bare for 4 og 3?*
12. *Samuel: Det gjelder med alle. Det gjelder med alle.*
13. *Lærer: Hvorfor gjelder det med alle?*
14. *Samuel: Fordi alle kan gi samme svar, for tallene bytter ikke på, det er bare posisjon.*

Figur 4.3 Viser til opptelling av heltallsbrikker.



Samuels evner å generalisere den kommutative egenskapen ved addisjon gjennom praktiske eksempler. Når han blir bedt om å illustrere 4 + 3, bruker han heltallsbrikker for å vise at 4 + 3 = 7, og viser deretter at 3 + 4 også gir 7 ved å telle brikkene på nytt. Samuel erkjenner at rekkefølgen på tallene ikke påvirker summen, og forklarer at begge regnestykkene gir samme resultat fordi det bare er plasseringen av tallene som endres (se Figur 4.3). For å understøtte sin forståelse, gir han et annet eksempel med 5 pluss 2, som også gir 7. Når jeg spør om denne egenskapen gjelder for alle addisjonsstykker, bekrefter Samuel det og forklarer at dette gjelder alle addisjonsstykker fordi tallene ikke endrer verdi, bare posisjon.

4.1.2 Forme en hypotese

I økten med Reina fikk hun i oppgave å gi sine hypoteser om svar for forskjellige mengder på matta. Selv om hun ikke var veldig snakkesalig, støttet hun hypotesene sine ved hjelp av matta og brikkene. Reina ble også bedt om å sammenligne forskjellige mengder, der hun skulle gi og forklare sine hypoteser. Gjennom disse oppgavene viste hun forståelse for å bruke konkret materiale for å utvikle og forklare sine matematiske resonnementer.

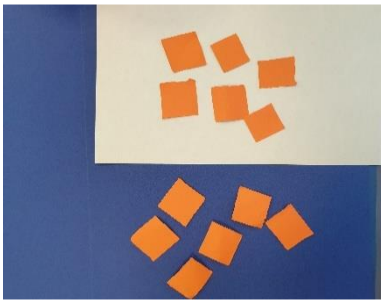
Utdrag fra økten med Reina:

1. *Lærer: Hvis du skulle gjette hvor stort det svaret er her, og hvor mye er det på den siden her, uten å telle. Hvis du bare ser kjapt, da. Hvilke av disse tallene er størst?*
2. *Reina: Denne. (Peker på delen med flest brikker.)*
3. *Lærer: Ok, kan du si litt om hva du pekte på?*
4. *Reina: Denne. (Peker på samme.)*

5. *Lærer: Det er sånn at det er brettet med flest brikker, ikke sant? Hvor mye cirka tror du at svaret er der? […]*
6. *Reina: Mer enn 10.*
7. *Lærer: Mer enn 10, ikke sant? Og her da?*
8. *Reina: 4.*
9. *Lærer: 4. Så hvis jeg hadde gjort sånn her, og droppet. (Flytter omtrent halvparten av brikkene på siden med flere brikker enn ti, inn på den negative sonen.) Hva hadde svaret blitt da? Uten å telle. Tror du svaret blir et stort svar, som vi sa, mer enn 10? Eller tror du den blir mindre?*
10. *Reina: Mindre.*
11. *Lærer: Mindre. Hvorfor tror du det?*
12. *Reina: Man kan se at det er likt.*
13. *Lærer: At det er cirka like mange brikker på den positive og den negative sonen. Ja, så det er ikke forvirrende å se om det ligger mange brikker der?*
14. *Reina: (Nikker.)*

Figur 4.5 Sammenligning fra linje 2.

Figur 4.4 Sammenligning med negativ sone fra linje 10

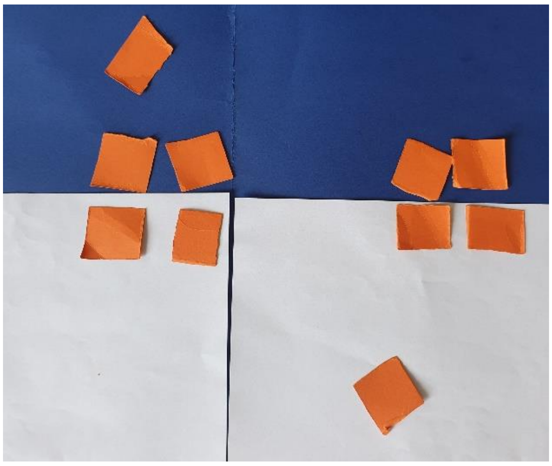


I samtalen danner Reina hypoteser ved å bruke visuelle estimater av mengdene på matta. Når jeg spør henne om hvilken av de to mengdene som er størst uten å telle, peker hun på den delen med flest brikker og gir en kvalifisert gjetning på mer enn 10 (Figur 4.4). Hun styrker hypotesen sin ved å sammenligne den med en mindre mengde, som hun estimerer til å være 4. Når jeg legger til og fjerner brikker i den negative sonen, justerer Reina hypotesen sin ved å anta at svaret blir mindre fordi antall brikker på den positive og negative sonen ser ut til å være omtrent like (Figur 4.5). Gjennom disse aktivitetene viser Reina evnen til å danne og justere hypoteser basert på visuelle observasjoner og enkle sammenligninger.

I økten med Samuel fra *4.1.1 Generalisere* får han i oppgave å sette opp regnestykket 4 + 3 og deretter bytte plass på leddene. Han blir spurt hvordan det nye regnestykket 3 + 4 ser ut og hva som skjer når han snur på tallene. Samuel gir en hypotese i linje 6 hvor han sier: *«Fordi de er samme svar, men det er bare forskjellige plasseringer.»* Samuel viser at begge regnestykkene gir samme svar ved å flytte brikkene rundt på matta, slik at den totale summen på syv forblir den samme. Videre forklarer han at denne egenskapen også gjelder for andre tall med argumentet: *«Fordi alle kan gi samme svar, for tallene bytter ikke plass, det er bare posisjonen»* (linje 14). Denne samtalen viser at han er i stand til å styrke sin hypotese ved å gi argumenter og bevis som støtter at addisjon er kommutativt, uavhengig av hvilke tall som brukes. Samuels evne til å generalisere fra et spesifikt eksempel til en generell regel viser en dypere forståelse av matematiske prinsipper.

I kapittel *4.1.1 Generalisere* er det en situasjon der eleven Elias kommer med en feil hypotese, hvor han antar at 3 - 2 og 2 - 3 gir samme svar: *«Ja, det hadde blitt det samme.»* (linje 10). Han retter opp denne feilen selv etter at jeg viser han regnestykkene på brettet. Gjennom observasjon av regnestykkene innser han at det ikke kan stemme, fordi det ene stykket gir svaret 1, mens det andre gir minus -1. Dette blir tydelig for ham, spesielt når den negative sonen der subtraksjonen skjer, er så synlig og svarer med: «*Det hadde ikke funket*» (linje 12). Ved å plassere stykkene ved siden av hverandre, ser han at svaret på hver side er på forskjellige soner, noe som illustrerer forskjellen tydelig. Denne innsikten demonstreres i figur 4.6, som viser hvordan Elias sammenligner ligningene og observerer de forskjellige resultatene.

Figur 4.6 Venstre viser 3 - 2, og høyre viser 2 – 3 sortert til nullpar.



4.1.3 Identifisere et mønster

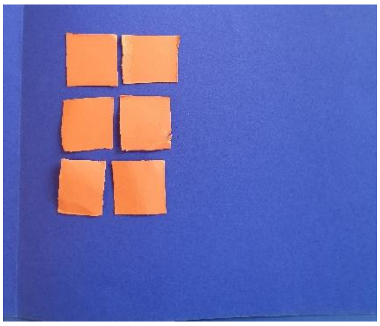
I kapittel 4.1.1 Generalisere, i økten med Selma, forklarer hun egenskapen og mønster til partall og oddetall. I linje 4 gir hun denne forklaringen: «*På et partall er det at hver brikke har som en bestevenn, eller noe. Ta 5 pluss 5 for eksempel. Disse to brikker blir venner (peker på brikkene), disse andre to blir venner (peker på brikkene). Etterpå er det alltid en i gruppa som er alltid sånn left out. Så hvis to oddetall blir ... Hvis vi plusser det samme, så blir de ... Like the left out blir sånn venner, så da får de en venn på en måte.*» Hun viser her at hun ser et mønster i hvordan partall alltid kan danne par uten å ha brikker til overs, mens alle oddetall har en "left out" brikke til overs.

I arbeid med multiplikasjon fikk eleven Selma i hennes økt et spørsmål om hvordan hun kan se at brikkene på matta viser et multiplikasjonsstykke. Selma forsøkte å formulere seg, men det var tydelig vanskelig, så hun brukte matta og brikkene som visuell hjelp. Brikkene foran henne var seks stykker plassert i to rekker med tre brikker i hver, og de dannet et rektangel (se figur 4.7). Denne visuelle representasjonen hjalp Selma å forstå og forklare at multiplikasjon kan sees som en organisering av brikker i rader og kolonner, som i dette tilfellet illustrerer 2 ganger 3. Ved å bruke brikkene på denne måten, kunne Selma konkretisere multiplikasjonskonseptet og se sammenhengen mellom gjentatt addisjon og rektangulære mønstre.

Utdrag fra økten med Selma:

1. *Lærer: Ser du noen mønstre?*
2. *Selma: Så først er det bare tre i rekker. (Peker på brikkene.) Etter de andre rekker er det samme. (Viser til de resterende brikkene.) Samme som speil da, imellom.*
3. *Lærer: Hvis det står sånn her da, hva slags figurer tror du du ser eller kan danne?*
4. *Selma: Tre ganger to. […]*
5. *Lærer: Men hvordan vet du et gangestykke, da? Hvordan kan du se at det er et gangestykke?*
6. *Selma: De er ikke plassert sånn eller noe. (Tar vekk tre av brikkene).*
7. *Lærer: De er plassert rett ved siden av hverandre og danner et rektangel?*
8. *Selma: (Nikker).*

Figur 4.7 Representasjon av 3 ganger 2 fra linje 2.



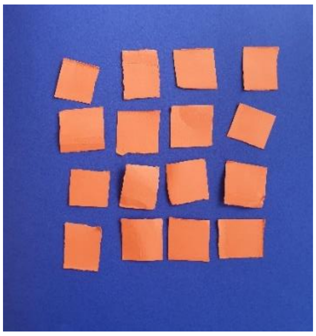
Selma viser sin evne til å identifisere et mønster i brikkene på matta. Når jeg spør om hun ser et mønster, peker Selma på brikkene og forklarer at de er arrangert i rekker med tre brikker i hver. Hun sammenligner dette med et speilbilde, hvor de resterende brikkene danner samme mønster. Når jeg endrer oppstillingen og spør hva slags figur hun ser, svarer Selma at det er tre ganger to. Videre, når jeg spør hvordan hun vet at det er et gangestykke, forklarer Selma at brikkene er plassert rett ved siden av hverandre og danner et rektangel (Figur 4.7). Denne visuelle oppdagelsen hjelper Selma med å se sammenhengen mellom gjentatt addisjon og multiplikasjon, og hun klarer å identifisere og beskrive mønsteret som et rektangulært arrangement av brikker.

Videre i økten med Reina får elevene i oppgave å identifisere mønstre i multiplikasjonssvarene. Jeg prøver å få dem til å gjenkjenne kvadrattall, som er produkter dannet når to like faktorer multipliseres og danner et kvadratisk mønster. Disse tallene, som danner kvadratiske mønstre, kalles kvadrattall og oppstår når samme tall multipliseres med seg selv (Vatne, 2023a). Ved å observere disse kvadratiske mønstrene kan elevene lettere forstå og visualisere konseptet med kvadrattall i multiplikasjon, som for eksempel at 4 x 4 = 16 (se figur 4.8). Dette hjelper dem å se sammenhengen mellom geometriske former og aritmetiske operasjoner, noe som forsterker deres forståelse av multiplikasjon.

Utdrag fra økten med Reina:

1. *Lærer: Ja. Og hva slags figur er det vi kaller disse her da?*
2. *Reina: Vet ikke.*
3. *Lærer: Hvis dette er rektangel, og dette er?*
4. *Reina: Firkant.*
5. *Lærer: Ja. Men hvis det er likt (viser formen brikkene lager)?*
6. *Reina: Kvadrat.*
7. *Lærer: Så hva er kvadrater for noe da?*
8. *Reina: Hva da?*
9. *Lærer: Liksom regnestykket.*
10. *Reina: 4 ganger 4. (Peker på brikkene.)*
11. *Lærer: Ja. Men hvorfor visste du at 4 ganger 4 er kvadrat? Hva er det som er så spesielt med kvadrater?*
12. *Reina: Fordi de er like på sidene.*

Figur 4.8 Representasjon av 4 ganger 4 i kvadratisk mønster fra linje 5.



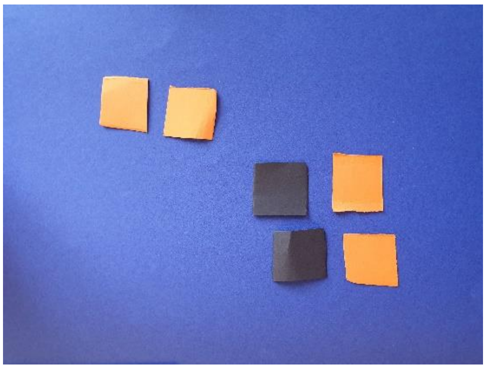
Reina viser hvordan hun gjenkjenner mønstre i multiplikasjon ved å identifisere kvadrattall. Jeg spør henne først om figuren hun ser, og etter litt veiledning identifiserer Reina det som et kvadrat. Når jeg videre spør om regnestykket som danner kvadratet, peker Reina på brikkene og svarer *«4 ganger 4. (Peker på brikkene.)»*. Jeg spør hvorfor hun visste at $4 * 4$ er et kvadrat, og Reina forklarer at det er fordi sidene er like (Figur 4.8).

Når Selma får i oppgave å regne ut et addisjonsregnestykke som inneholder positive og negative heltallsbrikker, bruker hun en metode jeg underviste i gruppeøkten. Hun forklarer hva nullpar er, hvordan de dannes, og hvordan hun anvender dem i utregningen for å finne svaret på regnestykket. Nullpar er et konsept først introdusert i HBT for å hjelpe elevene med å sortere brikkene og løse komplekse matematiske konsepter (Reid & Vallejo Vargas, 2019, s. 816). Denne metoden hjelper dem med å forstå at et positivt og et negativt tall som legges sammen, utgjør null, noe som forenkler utregningen. Jeg vil diskutere mer om hvordan dette konseptet hjelper elevene med å forstå multiplikasjon av to negative faktorer senere i diskusjonen om elevenes matematiske forståelse.

Utdrag fra økten med Selma:

1. *Selma: Den siste er litt interessant. Der ser du tre forskjellige grupper. Det er tre minus en minus. Nei, det er tre pluss en pluss minus to eller noe.*
2. *Lærer: Ja. Så hvordan kan du vite hva svaret er her da?*
3. *Selma: Du bruker nullpar reglene. Ta to av de pluss, de positive på og legg de sammen med de som er mørke, eller minus tallene. Oppå så er det to igjen.*
4. *Lærer: Kan du snakke litt om nullpar? […].*
5. *Selma: Nullpar er på en måte når en positiv brikke møter en negativ brikke. Det er som at du bare legger sammen en brikke her (Viser på matta.), så er det en. Dette er en og noe. Oppå så kommer en annen brikke som er negativ og tar den positive bort. Ja. Sånn det er jo minus. Så de bare tar hverandre bort.*
6. *Lærer: Så betyr det at det ligger nå fire nullpar på brettet, så hva er svaret her da?*
7. *Selma: Null.*
8. *Lærer: Så det er det samme som du ikke har lagt noe der da?*
9. *Selma: Ja.*

Figur 4.9 Regnestykket 3 + 1 + (-2) som blir sortert til nullpar.



I samtalen demonstrerer Selma hvordan hun finner mønster i nullpar for å løse et addisjonsregnestykke med både positive og negative heltallsbrikker. Når hun står overfor *regnestykket «… tre pluss en pluss minus to …»,* identifiserer hun at hun kan bruke nullparr regelen (Figur 4.9). Hun forklarer at nullpar oppstår når en positiv brikke møter en negativ brikke, og disse to brikkene kansellerer hverandre ut. Ved å anvende denne regelen, tar Selma to av de positive brikkene og legger dem sammen med to negative brikker, som resulterer i null. Hun kommer med et eget eksempel for å forklare prinsippet med nullpar der hun har fire positive og fire negative brikker. Brikkene danner fire nullpar og gir svaret null. Denne prosessen viser hvordan Selma bruker og forstår prinsippet til nullpar for å forenkle og løse regnestykker.

4.1.4 Sammenligning

I kapittel *4.1.2 Forme en hypotese* viser Reina en god forståelse av mengdeforskjeller. Dette illustreres i linje 6 hvor hun sier: «*Mer enn 10*», og viser til at brikkene på den ene siden av matta utgjør en mengde som er større enn 10, mens det er fire brikker på den andre siden. Senere blir hun spurt om sin hypotese angående to mengder, hvor den ene er på matta og den andre er i den negative sonen. Reina viser en god forståelse og bruk av den negative sonen. I linje 10 sier hun: «*Mindre*», og forklarer at summen blir mindre enn 10, fordi begge mengdene omtrent er like store. Dette utdyper hun i linje 12 ved å si: «*Man kan se at det er likt*». Denne samtalen demonstrerer hvordan Reina bruker visuelle og logiske vurderinger til å danne og styrke sine hypoteser om mengdeforskjeller og nullpar.

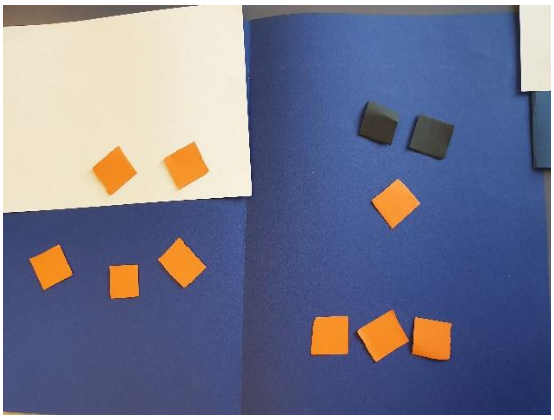
I en samtale fra 4.1.1 Generalisere får Elias i oppgave å vise at plasseringen av leddene i addisjon av to heltall ikke påvirker summen. Dette uttrykker han i linje 4 og 6: «Jeg skal si det for deg. Ok. Det er det samme fordi de er bare i forskjellige plasser» og «Fordi det er samme stykket, bare forskjellige veier». Han viser på matta at de to regnestykkene gir samme svar. Elias sammenligner her to regnestykker med samme resultat, men med ombyttede ledd. Når jeg spør om samme egenskap gjelder for subtraksjon, svarer Elias først i linje 10 at det ville være det samme. Jeg viser ham begge regnestykkene på hver sin side av matta, og han innser at det ikke gjelder for subtraksjon. Elias forklarer at ved å bytte om på to ledd med ulike størrelser i subtraksjon, får man to forskjellige svar, henholdsvis en og minus en (linje 16). Denne prosessen viser hans forståelse av forskjellen mellom addisjon og subtraksjon, og hvordan rekkefølgen av leddene påvirker resultatet i subtraksjon.

Denne samtalen er en fortsettelse fra kapittel 4.1.3 Identifisere et mønster, hvor Selma får spørsmål om hvordan hun klarer å gjenkjenne et multiplikasjonsstykke. Hun får i oppgave å skille mellom tre forskjellige regnestykker (se figur 4.7 og 4.10) og forklare hvordan hun klarer å skille mellom dem. Jeg ønsker å finne ut hva slags resonneringer som kommer fram når Selma forklarer, og hvordan hun kan gjenkjenne forskjellen mellom tre ulike regneoperasjoner. Ved å analysere Selmas forklaringer, kan vi bedre forstå hennes tankegang og evne til å identifisere mønstre i multiplikasjon, samt hvordan hun anvender denne forståelsen til å skille mellom forskjellige matematiske operasjoner.

Utdrag fra økten med Selma:

1. *Lærer: Så hvis vi går over til det stykket som er til høyre for deg. Hva slags regnestykke er det du ser der? (Peker på brikkene.)*
2. *Selma: Tre minus to.*
3. *Lærer: Hvordan vet du det er minus to?*
4. *Selma: Jeg ser de to brikkene er på minusmatte.*
5. *Lærer: Så svaret på dette blir?*
6. *Selma: Tre minus to er jo en.*
7. *Lærer: Og den siste da?*
8. *Selma: Den siste er litt interessant. Der ser du tre forskjellige grupper. Det er tre minus en minus. Nei, det er tre pluss en pluss minus to eller noe.*

Figur 4.10 Venstre viser 3 – 2 og høyre 3 + 1 + (- 2).



Eleven bruker sammenligning for å identifisere og finne forskjeller mellom alle tre regnestykkene (Figur 4.7 og 4.10). Dette gjør hun ved å observere og analysere brikkene på matta. I linje 4 argumenterer hun for at hun gjenkjenner et subtraksjonsregnestykke (Figur 4.10 venstre side) ved å se på posisjonen til brikkene, og bruker sin forståelse av addisjon og subtraksjon for å tolke og løse regnestykket (linje 6). I siste linje viser hun hvordan hun leser addisjonsregnestykker som inneholder positive og negative brikker, og tolker det som 3 + 1 – 2 (Figur 4.10 høyre). Selv om jeg ønsket at hun skulle se fortegnene og introdusere dem, viser hun allerede en god forståelse av hvordan brikkene representerer disse operasjonene. Merk at på bildet (Figur 4.10) bruker ikke eleven streken som et likhetstegn, men er kun i bruk som skille mellom to regnestykker.

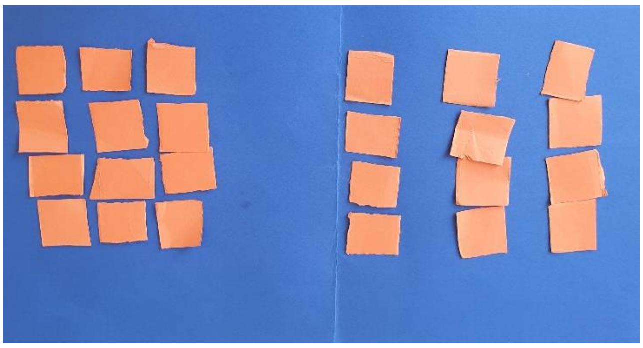
For å hjelpe elevene å forstå multiplikasjon, jobbet jeg sammen med dem med en av definisjonene av multiplikasjon som gjentatt addisjon. Jeg prøvde å få Selma til å se likheten mellom addisjonen $4 + 4 + 4$ og multiplikasjonen $3 * 4$. Selma satte opp regnestykkene på hver sin side av matta, og jeg forsøkte å bruke prinsippet om likhetstegn i HBT for å indikere at det er en likhet mellom begge sidene. Selv om hun ikke så ut til å bruke dette prinsippet direkte, var målet mitt å få henne til å forstå at begge regnestykkene representerer samme verdi. Jeg spurte om det var en annen måte å illustrere 3 * 4.

Utdrag fra økten med Selma:

1. *Selma: Da er det* $4 + 4 + 4$. *(Peker på matta høyre side).*

2. *Lærer: Ja, så det du sier nå er at når du multipliserer, betyr det egentlig at du plusser så og så mange ganger. Ja. Ikke sant? Gjelder dette all ganging? Alle tall i ganging? Eller er det bare her?*
3. *Selma: På en måte alt. Alt.*
4. *Lærer: For da kan jeg tenke, hva betyr da egentlig multiplikasjon da?*
5. *Selma: Det betyr å gange.*
6. *Lærer: Ja. Så hva betyr egentlig å gange da?*
7. *Selma: Å gange. Til å kopiere dem på masse mer enn en gang.*
8. *Lærer: Ja. Så stemmer det da som jeg tror, da. Det du prøver å si er at det er det samme som du bare adderer eller plusser dem så og så mange ganger sammen?*
9. *Selma: Ja.*

*Figur 4.11 Venstre sider viser 3 * 4, høyre side viser 4 + 4 + 4.*



I samtalen viser Selma sin forståelse av multiplikasjon som gjentatt addisjon ved å sammenligne. Når hun sier at "4 + 4 + 4" tilsvarer 3 * 4, bekrefter hun at multiplikasjon betyr å plusse et tall flere ganger (Figur 4.11). Når jeg spør om dette gjelder all multiplikasjon, svarer Selma at det gjør det. Hun forklarer at å gange betyr å kopiere et tall flere ganger. Gjennom denne samtalen sammenligner og generaliserer Selma at multiplikasjon alltid kan forstås som gjentatt addisjon, uansett hvilke tall som multipliseres.

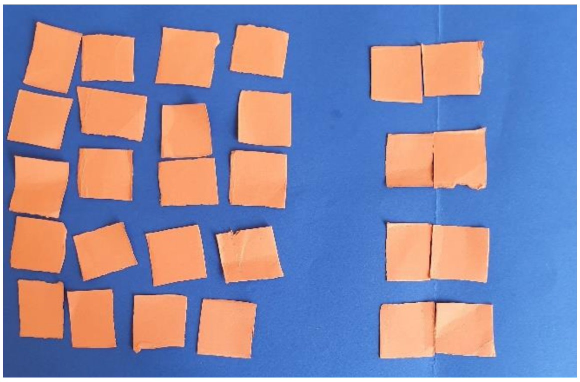
4.1.5 Klassifisere

I denne samtalen prøver jeg å hjelpe Samuel å forstå hvorfor summen av to oddetall alltid resulterer i et partall. Ved å be Samuel om å lage to oddetall med brikkene, veileder jeg han gjennom prosessen med å visualisere og analysere resultatene. I samtalen prøver jeg å fremheve forskjellen til egenskapen på partall og oddetall.

Utdrag fra økten med Samuel:

1. *Lærer: Ja. Men, hvis du hadde 2 oddetall, kan du lage et oddetall der og et oddetall der? (Peker på brikkene). […]*
2. *Samuel: Det blir ikke partall.*
3. *Lærer: Det blir ikke partall. Hvordan kan du vite at det ikke blir et partall?*
4. *Samuel: Fordi jeg plusser det, det blir 28, og 8 er et partall. (Peker på de 8 brikkene fra 28).*
5. *Lærer: Ja, men kan du se på brettet og vise meg på brettet at det alltid blir partall?*
6. *Samuel: Ja. Hvis det blir her og her, og her, kanskje det ser ikke ut som det, men et partall, to partall. Alle er to. (Deler opp de 8 brikkene i par.)*
7. *Lærer: Ja, alle er to. Og i et oddetall er det ikke alle to, ikke sant? Hva er så spesielt med et oddetall, da? […]*
8. *Samuel: Det er enten 1 eller 3. Så det er et tall til overs, ikke sant?*

Figur 4.12 Tallet 28 som blir delt opp i en gruppe på 20, og 8 delt opp i 4 par.



I samtalen klassifiserer Samuel egenskapene til oddetall og partall ved å analysere brikkene på brettet. Når jeg spør om summen av to oddetall kan bli et partall, svarer Samuel at det ikke blir et partall. Han forklarer at når han legger sammen to oddetall og får 28, er 8 et partall. Jeg ber han deretter demonstrere dette på matta. Samuel deler de 8 brikkene i par og viser at alle parene består av to brikker, noe som kjennetegner et partall (se Figur 4.12). Videre forklarer jeg at i et partall er alle brikkene i par, mens i et oddetall er det alltid en brikke til overs. Samuel bekrefter dette ved å si at et oddetall alltid har enten 1 eller 3 brikker som er uten en partner.

I kapittel 4.1.1 Generalisere, i samtalen med Selma, klassifiserer hun partall og oddetall ved å forklare hvorfor summen av to oddetall alltid blir et partall. Først forklarer hun at i et partall har alle brikkene en partner, som hun kaller «bestevenn». Deretter viser hun på matta og bruker brikkene til å illustrere hvorfor oddetallene alltid har én «ensom» brikke uten partner, som hun kaller «left out». Når to slike oddetall adderes, finner de «left out» brikkene hverandre og danner et par, slik at det totale svaret blir et partall. Gjennom denne forklaringen viser Selma sin evne til å identifisere og generalisere mønstre i matematikken.

4.2 Prosesser relatert til validering: Argumentasjoner

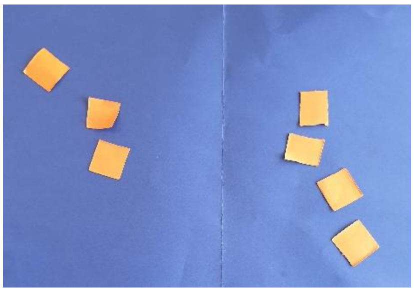
4.2.1 HBT som støtte til argumentasjoner

I denne samtalen prøver jeg å få fram forståelsen av forskjellen mellom subtraksjonene 4 – 3 og 3 – 4. Her vil jeg se hvordan eleven skal bruke matta som hjelp, og hvordan han skal forklare at disse to regnestykkene gir ulike resultater.

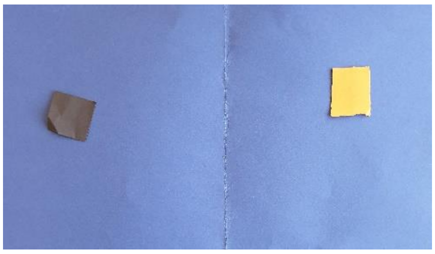
Utdrag fra økten med Samuel:

1. *Lærer: Hvordan kan du se at 4 minus 3 og 3 minus 4 ikke er det samme?*
2. *Samuel: Og du mener det er fordi denne, for dette er 4, så jeg har 4. (Peker på brikkene høyre matte.) Jeg kan ta bort 3 hvis jeg har 4. Men jeg kan ikke ta bort 4 hvis jeg har 3. (Flytter på brikkene på venstre matte.)*
3. *Lærer: Ja, for her, hva blir svaret her da?*
4. *Samuel: Her? (Peker på brikkene.) 3 minus 4, det blir 1.*
5. *Lærer: Ja, og her da?*
6. *Samuel: Minus 1 (Legger på en negativ brikke).*

Figur 4.13 Venstre side har 3 brikker, og høyre side har 4 brikker.



Figur 4.14 Venstre viser svaret til 4 – 3. Høyre viser svaret til 3 – 4.



I samtalen bruker Samuel heltallsbrikkene som en visuell støtte for å argumentere forskjellen mellom subtraksjonene 4 - 3 og 3 - 4. Når jeg spør hvorfor disse operasjonene gir forskjellige resultater, peker Samuel på brikkene for å forklare. Han setter opp 3 brikker på venstre side og 4 brikker på høyre side før han fjerner brikkene for å vise operasjonene 4 – 3 og 3 – 4 (Figur 4.13). Han viser at når han har 4 brikker, kan han ta bort 3 av dem, og resultatet er 1 (Figur 4.14, høyre side). Deretter demonstrerer han at han ikke kan ta bort 4 brikker hvis han bare har 3, og dette fører til et negativt resultat, nemlig -1 (Figur 4.14, venstre side). Ved å fjerne brikker på brettet illustrerer Samuel visuelt hvordan rekkefølgen på tallene i subtraksjon påvirker resultatet.

4.2.2 Argumentasjonsformer

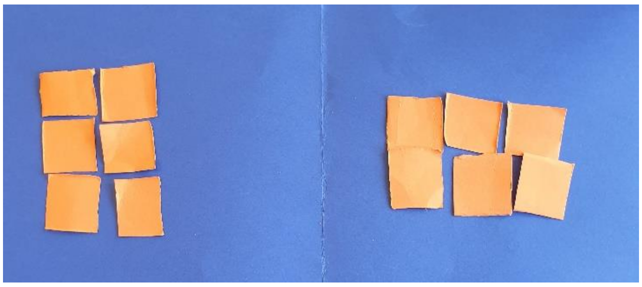
I denne samtalen prøver jeg å få fram forståelsen av den kommutative egenskapen ved multiplikasjon ved å stille spørsmål om hvordan $3 * 2$ og $2 * 3$ ser ut. Jeg vil at Samuel skal beskrive egenskapene deres og lede han til å oppdage at begge operasjonene gir samme resultat, selv om rekkefølgen på faktorene er forskjellig. Gjennom å visualisere og forklare disse eksemplene med brikker, ønsker jeg at Samuel skal se at $3 * 2$ betyr 3 rader med 2 brikker og $2 * 3$ betyr 2 rader med 3 brikker, og begge gir produktet 6 (Figur 4.15). Dette hjelper ham å forstå og anvende den kommutative egenskapen i multiplikasjon.

Utdrag fra økt med Samuel:

1. *Lærer: Hvordan ser 3 ganger 2 og 2 ganger 3 ut? […] Kan du snakke litt om egenskapene til dem?*

2. *Samuel: Denne her går 3 nedover og 2 bortover, så det blir 6. (Peker på gruppen av brikker.) Men denne her går 2 nedover og 3 bortover, (Peker på den andre gruppen av brikker.) men det blir fortsatt samme svar.*
3. *Lærer: Hvorfor er det også fortsatt samme svar?*
4. *Samuel: Fordi 3 ganger 2 og 2 ganger 3 er det samme svar.*
5. *Lærer: Hvorfor er det også fortsatt samme svar?*
6. *Samuel: Fordi 3 ganger 2, det betyr du gjør, jeg vet ikke hva det er, plusser 3 to ganger. Men hvis du gjør 2 ganger 3, du plusser 2 tre ganger.*
7. *Lærer: Og det samme om det hadde vært 4 ganger 5, 5 ganger 9, så er det fortsatt det samme, ikke sant?*
8. *Samuel: (Nikker.)*

*Figur 4.15 Venstre viser 3 * 2, og høyre viser 2 * 3.*



Samuel bruker en deduktiv argumentasjonsform for å forklare den kommutative egenskapen ved multiplikasjon. Når jeg spør hvordan 3 * 2 og 2 * 3 ser ut, viser Samuel at han kan visualisere begge operasjonene med brikker: 3 rader med 2 brikker og 2 rader med 3 brikker, begge resulterer i et produkt på 6 (Figur 4.15). Jeg spør hvorfor dette er tilfellet, og Samuel forklarer at 3 * 2 betyr å plusse 3 to ganger, mens 2 * 3 betyr å plusse 2 tre ganger. Gjennom denne prosessen bruker Samuel en generell regel for multiplikasjonens kommutative egenskap og anvender den på spesifikke eksempler for å demonstrere at rekkefølgen av faktorene ikke påvirker produktet.

I kapittel 4.1.1 Generalisere gir Selma en redegjørelse for hvorfor summen av to oddetall alltid blir et partall. Hun bruker heltallsbrikkene for å illustrere at i et partall har alle brikkene en partner som hun kaller "bestevenn", mens i et oddetall er det alltid en brikke som er "left out". Når to oddetall adderes, finner de "left out" brikkene hverandre og danner et par, slik at svaret blir et partall

4.3 Prosesser relatert til validering: Bevisføringer

4.3.1 Bevisføringer med partall i addisjon

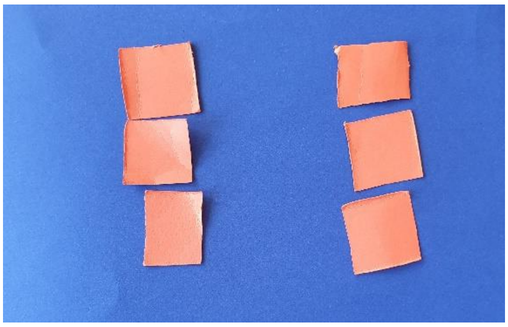
Dette er første utdrag av en rekke med bevisføringer der elevene skal utforske og vise forståelse av definisjonen av partall. Tidligere har elevene forklart partall og oddetall ved at de enten danner par i partall eller at det blir en heltallsbrikke i rest som i oddetall. Her får eleven i spørsmål om å forklare hva et partall er og jobbe med å bevisføre teoremet om summen av to partall.

Utdrag fra økten med Matteo:

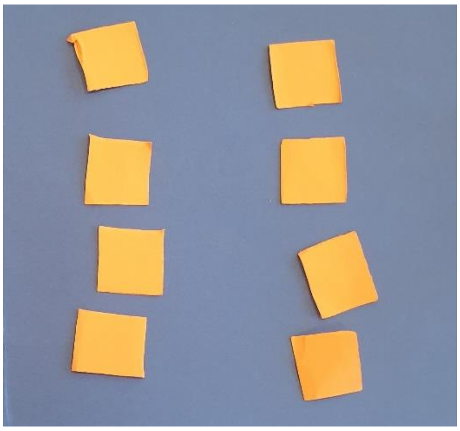
1. *Lærer: […] Vet du hva et partall er?*
2. *Matteo: Et tall som kan deles på to likt uten å gjøre om til desimaltall.*
3. *Lærer: […] Er tallet 6 et partall eller et oddetall?*
4. *Matteo: Partall.*
5. *Lærer: [...] Hvordan kan du vite at det er et partall?*
6. *Matteo: Jeg kan dele det på 3 og 3.*
7. *Lærer: Dette i to grupper?*
8. *Matteo: (Nikker)*
9. *Lærer: […] Hvilket tall har jeg nå, da? (Peker på matta med brikker)*
10. *Matteo: 8.*
11. *Lærer: Er det også et partall?*
12. *Matteo: Ja, for du kan dele det på 4 og 4.*
13. *Lærer: […] Hva om vi har ... 4 pluss 2, da?*
14. *Matteo: For 4 er partall, og 2 er partall.*
15. *Lærer: Hva vet vi om svaret til disse to? (Peker på brikkene.)*
16. *Matteo: At det blir 6.*
17. *Lærer: Og hva slags egenskap har svaret?*
18. *Matteo: Pluss? Ja, unnskyld, for svaret blir seks.*

19. *Lærer: Er 6 et partall eller oddetall?*
20. *Matteo: Partall.*
21. *Lærer: Hva om vi har 4 pluss 4, da? (Peker på brikkene.)*
22. *Matteo: 8, og det er 4 ... (Deler brikkene.)*
23. *Lærer: Begge to er et partall, så er 8 et partall, det også?*
24. *Matteo: Ja.*
25. *Lærer: Kan du si noe om ... Hva er det vi kan vite om svaret til to partall?*
26. *Matteo: At det blir et partall? Ja. (Peker på brikkene.)*
27. *Lærer: Vil det gjelde for absolutt alle partall?*
28. *Matteo: Ja.*
29. *Lærer: Hvorfor tror du det?*
30. *Matteo: Det blir ikke noe 1 pluss 1 […] 4 pluss 7 […]. Tar du vekk 1, så er det 1 igjen i stedet for 2 og 2. Så blir det 2, 2, 2, 2, 2 og 1. (Peker på brikkene.)*

Figur 4.16 Summen 6 som deles på to grupper på 3 brikker.



Figur 4.17 Viser 4 + 4, eller summen 8 delt i to grupper.



Gjennom samtalen mellom meg og eleven forklarer han hva et partall er og forklarer egenskapen til et partall. Fra linje 6 til 8 forklarer eleven hvorfor tallet 6 er et partall og at det er definert ved å kunne dele på 2 (Figur 4.16). Dette viser eleven ved å dele opp tallet 6 i to like store grupper på 3 brikker hver. Eleven får senere spørsmål om summen av to partall ender opp som partall eller ikke. Dette svarer eleven i linje 20 ja, og viser i linje 26 at summen av to partall alltid er et partall (Figur 4.7.) I linje 27 spør jeg om dette gjelder alle partall, og eleven bekrefter dette i linje 28. I linje 30 forklarer eleven hvorfor dette gjelder alle partall, og han forklarer ved å vise til hva som skjer når man leter etter summen av et oddetall. Ved å ta fram eksemplet 4 + 7, et partall addert med et oddetall, ender det opp med et oddetall som svar fordi det gir 1 brikke i rest.

I linje 2 ser vi et eksempel av et utsagn som er akseptert i klassefellesskapet, som er første kriterium av de tre kriteriene for bevis fra Stylianides (2007, s. 291). Eleven definerer hva partall er, og dette er et utsagn som er akseptert av klassen. Definisjonen av et partall blir nemlig undervist til elever helt fra 2.trinn (Kunnskapsdepartementet, 2019, s. 5). I linje 14 sier Matteo at tallene 4 og 2 er partall uten å forklare noe ytterligere, fordi det har blitt etablert tidligere og det er en kjent definisjon som er godkjent i klassen. I linje 26 bekrefter han at summen av to partall blir et partall uten å vise hvorfor summen er et partall.

Det andre kriteriet setter fokus på at det må være innenfor den konseptuelle rekkevidden til klassefellesskapet, og dette gjøres ved at HBT viser til konkreter som støtter de muntlige argumentasjonene til elevene. I linje 2 bruker Matteo definisjonen av partall, der han bruker divisjon som en gyldig og kjent resonneringsform som gjør det lett for andre å forstå. Fra linje 25 til 28, der jeg spør om hva som kan sies om svaret når to partall legges sammen, svarer Matteo at resultatet blir et partall og bekrefter at dette gjelder for alle partall. Her bruker han en generalisering basert på en matematisk regel som er kjent og akseptert innenfor klassefellesskapet.

Det tredje kriteriet er representasjonsform. I denne masteroppgaven blir det fremstilt ved hjelp av konkreter fra HBT, og støtter opp med språklige beskrivelser. Gjennom samtalen bruker både jeg og Matteo grunnleggende matematikkterminologi som partall, dele (divisjon) og pluss (addisjon). Disse termene er passende og kjente for elevene og er innenfor den konseptuelle rekkevidden til de fleste i klasserommet. Et eksempel er i linje 2, der eleven bruker partall i sin forklaring, noe som er kjent og forståelig for klasserommet. Det blir brukt heltallsbrikker for å representere tall, og dette kan du se i linje 9, 15, 21, 22 og 30. Disse konkretene brukes for å støtte opp mot elevens argumentasjoner.

4.3.2 Bevisføringer med oddetall i addisjon

I denne økten ville jeg at elevene skulle jobbe med å vise til deres forståelse av oddetall, hva beskrivelsen er og hvordan de skiller seg fra partall. Deretter ønsket jeg at eleven skulle bevisføre og forklare hva slags egenskaper summen av et partall og et oddetall har. Mot slutten vil jeg at eleven skal forklare hva slags egenskaper summen av to oddetall har. Her vil jeg at elevene skal se om summen til forskjellige kombinasjoner med partall og oddetall blir til.

Utdrag fra økten med Matteo:

1. *Lærer: Kan du fortelle meg litt om egenskapen til oddetall?*
2. *Matteo: Det går ikke an å deles på to med mindre du tar desimaltall.*
3. *Lærer: Og ...*
4. *Matteo: Det er alltid en ener for seg selv hvis du deler dem opp i grupper.*
   […]
5. *Lærer: Kan du vise meg at det ikke er et partall, men et oddetall? (Peker på brikkene.)*
6. *Matteo: (Viser med brikkene.)*
   […]
7. *Lærer: Så hvis jeg da har summen mellom et partall og et oddetall ... Hva slags svar tror du jeg alltid vil få?*
8. *Matteo: Du vil alltid få et oddetall til svar hvis du plusser et oddetall og et partall sammen. For da blir det en til overs. Hvis vi tar to, og så to, så er det alltid én igjen, siden det er et oddetall. (Viser med brikkene.)*
9. *Lærer: Hva om vi har to oddetall som vi plusser sammen? Hva kan vi si om svaret til ...*
10. *Matteo: Da blir det alltid et partall.*
11. *Lærer: Hvorfor blir det alltid et partall?*
12. *Matteo: For da har du to, to, to sånne fra alle sammen. (Flytter på brikkene.) Og så har du det ene fra hvert eneste tall, så du setter sammen til én til overs med toere.*

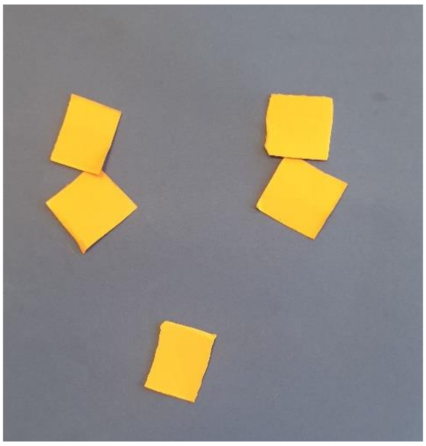
Først forklarer Matteo definisjonen av et oddetall, og det gjør eleven i linje 2 og 4. Eleven får i oppgave å vise forskjellen mellom et partall og et oddetall og det gjør han i linje 6 ved å vise med brikkene. I linje 8 forklarer eleven at summen mellom et oddetall og et partall alltid ender opp i et oddetall, og i linje 12 viser han til hvorfor summen av to oddetall blir et partall.

Figur 4.18 Viser 5 + 3 og summen som er 8.

Det første kriteriet i arbeid med bevis finner vi i linje 2. Eleven definerer oddetall som er grunnleggende og kjent for klassen. Linje 10 sier eleven at summen av to oddetall alltid er et partall, og forklarer videre i linje 12 at det er slik fordi tallene som er til overs danner et par (Figur 4 18). Her definerer han ikke partall, fordi det er forventet av oss i klassen å forstå.

Det andre kriteriet finner vi i linje 8 og 12. I linje 8 forklarer han ved å gruppere brikkene i to og to, der alle par er et partall og at det ender med et enkelttall til overs som ikke kan grupperes i samme mengde som de andre gruppene. I linje 12 tar eleven i bruk den samme metoden til å argumentere ved å ta støtte i konkretene for å forklare at brikkene fra to oddetall som ikke kan deles på to går sammen og danner et par, og dette er innenfor den konseptuelle rekkevidden til klassen.

Figur 4.19 Viser tallet 5.



Det tredje kriteriet følges ved at det brukes visuelle hjelpemidler for å illustrere og understøtte mitt og elevens matematiske resonnement. Dette kan vi se i linje 5 og 6 der jeg ber eleven ta i bruk brikkene for å vise at tallmengden i (Figur 4.9) ikke er et partall, men et oddetall fordi det er en brikke til overs. Eleven viser det ved å dele brikkene i to grupper der en heltallsbrikke er til overs.

4.3.3 Bevisføringer med oddetall i multiplikasjon

I dette kapittelet viser jeg til hvordan eleven anvender sine tidligere bevis til å bevisføre teoremet til produktet av to oddetall faktorer. Dette utdraget er tatt mot slutten av samtalen med eleven, etter at vi har gått gjennom og funnet ut at produktet av to oddetallfaktorer gir et oddetallssvar. Jeg valgte dette utdraget for å vise elevens forståelse av hvorfor produktet ender opp som et oddetall, og hvordan eleven kan forklare meg på en måte som regnes som bevis.

Utdrag fra økten til Matteo:

1. L*ærer: Kan du nå forklare meg hvorfor tre ganger fem også ender opp som et oddetall?*
2. *Matteo: For da har du ganget et oddetall med et oddetall.*
3. *Lærer: Ja. Kan du vise det med de brikkene?*
4. *Matteo: Du kan ta tre ganger fem. Så da kan du ta én ... to ... og tre grupper. Og så, hvis ellers så kan du ta det i treergrupper. (Flytter på brikkene)*

5. *Lærer: Hvor mange grupper har du da?*
6. *Matteo: Fem.*
7. *Lærer: Hvordan kan du da se at disse fem gruppene vil ende opp som et oddetall?*
8. *Matteo: Fordi det er fem som er et oddetall, ganget med tre som også er et oddetall.*
9. *Lærer: Hvis du hadde sett disse brikkene, da. (Peker på gruppene.) Hvordan kan du nå se at svaret kommer til å ende opp som et oddetall?*
10. *Matteo: Da har du fem oddetallgrupper.*
11. *Lærer: Hvordan kan du vite nå at ...*
12. *Matteo: At svaret blir et oddetall?*
13. *Lærer: Fordi ... Hva skjer når du tar to oddetallgrupper sammen?*
14. *Matteo: Det dobbelte.*
15. *Lærer: Ja. Og blir til et partall?*
16. *Matteo: Ja.*
17. *Lærer: Ikke sant? Så kan du forklare nærmere hva som skjer når du tar et oddetall ganger med et oddetall.*

    […]
18. *Lærer: Kunne du ha forklart det én gang til hvis vi hadde tatt tre ganger ... Tre ganger syv?*
19. *Matteo: Ja.*
20. *Lærer: Kan du forklare fra start hvordan disse her ender opp som oddetall? Hvordan vet du at tre ganger syv vil gi et oddetall som svar, ved å bruke de brikkene og brettet og dele opp i grupper?*

    […]
21. *Matteo: Da kan vi få tre syv-grupper. De to syv-gruppene kan man gjøre om til én fjorten-gruppe. Gruppe på fjorten. Og da har du igjen én syv-gruppe her på sida. (Peker på brikkene.)*
22. *Lærer: Det betyr at når du tar to oddetall og ganger dem sammen, så vil det alltid være en oddetallsgruppe som er alene. Og de andre oddetallgruppene vil alltid finne seg en ...*
23. *Matteo: Finne seg en partner.*
24. *Lærer: Da har vi bevist tidligere at to oddetallgrupper til sammen blir ...*
25. *Matteo: Ett partall.*

I samtalen spør jeg Matteo hvorfor produktet av tallene 3 og 5 ender opp som et oddetall. Jeg får som svar i linje 2 at det er fordi begge faktorene er et oddetall. Jeg etterspør en videre forklaring ved hjelp av brikkene, og eleven organiserer brikkene i tre grupper av fem (linje 4 og 5). Jeg utfordrer eleven til å observere og konkludere om det totale antallet basert på gruppene han har laget. Matteo prøver å gi en forklaring i linje 10 ved å si at, siden alle gruppene er et oddetall så vil svaret bli et oddetall. Jeg veileder eleven videre ved å forklare at når du tar to oddetallgrupper sammen får du en stor gruppe som ender opp som et partall, og prøver igjen å be eleven forklare produktet av $3 * 7$. I linje 21 forklarer eleven at det $3 * 7$ danner tre syv-grupper og to av dem sammen gir en partallgruppe og det blir en gruppe på syv til overs. Etter gir jeg en tolkning på hva eleven sier og prøver å få en bekreftelse fra eleven på at jeg har forstått elevens forklaring.

Aksepterte påstander som er det første kriteriet, finner vi i samtalen der jeg og Matteo anerkjenner at to produktet av to oddetall er et oddetall. Dette er den aksepterte påstanden som danner grunnlaget for vår diskusjon, men er ennå ikke bevist. Denne påstanden synes å være anerkjent innen klassefellesskapet, ettersom den ikke blir utfordret av meg fordi vi har regnet lignende oppgaver tidligere. Eleven bruker påstanden som basis for videre forklaring.

Angående argumentasjonsmåter, som er det andre kriteriet, bruker eleven deduktiv argumentasjon ved å forklare at multiplikasjon av oddetall fører til et oddetallsvar ved å bruke spesifikke eksempler som $3 * 5$ og $3 * 7$. Han grupperer brikkene og viser hvordan antallet grupper, som selv er oddetall, resulterer i et oddetall når de kombineres.

Det siste kriteriet, som er representasjonsformer, finner vi i samtalen der jeg og eleven bruker de fysiske heltallsbrikkene som en representasjonsform for å demonstrere hvordan multiplikasjon av oddetall fungerer. For eksempel i linje 4 sier Matteo, «Du kan ta tre ganger fem. Så da kan du ta én ... to ... og tre grupper.» Her bruker han de fysiske representasjoner for å gjøre det abstrakte konseptet om multiplikasjon mer konkret og forståelig.

5 Diskusjon

Aller først vil jeg forklare mitt syn må MR, siden begrepet er det viktigste i hele problemstillingen og fordi argumentasjon og bevis er prosesser innen validering i MR ifølge rammeverket til Jeannotte og Kieran (2017, s. 12). I mitt syn på MR, basert på teoriene ovenfor, anser jeg det som en dynamisk og kommunikativ prosess hvor kjente matematiske prinsipper brukes for å utlede ny kunnskap. Dette innebærer ikke bare å anvende velkjente metoder og teknikker, men også å utforske og utfordre dem gjennom innovativ tenkning. Denne prosessen, som både er individuell og kollektiv, er grunnlaget for matematisk utvikling og forståelse. Den epistemiske verdien av en matematisk påstand er essensiell for å bedømme påliteligheten og sannheten i denne nye kunnskapen. For eksempel, når vi betrakter påstanden «Summen av to partall er alltid et partall», må vi evaluere dens sannhet gjennom både teoretisk bevis og praktisk anvendelse.

Ved å sikre at resonneringen er basert på et solid matematisk fundament og klart kommunisert, kan vi oppnå en høy epistemisk verdi. Dette betyr at påstanden ikke bare er sann, men også pålitelig i en bredere matematisk kontekst. Dette harmonerer med Duval (1995, sitert i Jeannotte & Kieran, 2017, s. 2) sin definisjon av MR, som fokuserer på å forandre den epistemiske verdien av en matematisk påstand. Basert på Jeannotte og Kieran (2017, s. 7) sin tilnærming vil jeg inkludere kommunikasjon i arbeid med MR for å understreke hvor viktig det er at matematiske argumenter er forståelige og overbevisende. Dette er kritisk, ikke bare for teoretisk analyse, men også for pedagogisk praksis, hvor formidling av komplekse ideer må være tilgjengelige og engasjerende for alle elever.

Når jeg definerer MR legger jeg derfor vekt på en prosess hvor det å anvende og utvide eksisterende kunnskap ikke bare handler om å finne 'det riktige svaret', men også om å bygge en dypere og mer robust forståelse av matematiske konsepter. Gjennom denne linsen kan vi bedre forstå og vurdere den epistemiske verdien av matematiske påstander, noe som er avgjørende for både akademisk fremgang og praktisk anvendelse i matematikkens verden. Ved å integrere Jeannotte og Kieran (2017) sine teorier i min forståelse av MR, understreker jeg hvordan en dyptgående analyse og klart kommuniserte argumenter er essensielle for å utvikle og validere matematisk kunnskap. Noe som igjen resonnerer med mitt syn på viktigheten av både teoretisk grundighet og pedagogisk klarhet i matematikken.

I begynnelsen av masteroppgaven kom jeg med en problemstilling som lød slik: «Hvordan kan arbeid med Heltallsbrikketeori fremme mellomtrinnselevers matematiske resonnering, argumentasjon og bevis?» Fra problemstillingen kom jeg med tre forskningsspørsmål som skulle hjelpe meg med å besvare problemstillingen:

1. «På hvilke måter bidrar undervisning i heltallsbrikketeori til å fremme mellomtrinnselevers evne til prosessen søk etter likheter og ulikheter?»
2. «Hvordan elevenes bruk av heltallsbrikketeori som representasjonsform bidrar til deres evne til å argumentere i matematikk?»
3. «Hvordan støtter heltallsbrikketeori elevenes bevisføring av kunnskap på nye matematiske områder?»

I dette kapittelet skal jeg ved hjelp av teorien drøfte det som kom frem i analysen, ved å drøfte de tre forskningsspørsmålene hver for seg. Slutten av drøftingen vil jeg legge inn en egen del om sluttrefleksjoner.

5.1 Elevenes søk etter likheter og ulikheter

Under arbeidet med de tre regneartene ga elevene innsiktsfulle refleksjoner og viste hvordan elementene fra HBT kunne bistå dem i å forstå grunnleggende matematikk. Reid og Vallejo Vargas (2019, s. 810) fremhever at arbeid med matematiske konsepter gjennom heltallsbrikker krever aktive handlinger på disse objektene. Semadeni (1984, s. 379) introduserer begrepet konkretiseringsskjema for å binde abstrakte ideer til fysiske objekter. I artikkelen bruker han steiner som konkreter for å vise hele tall og skiller mellom positive og negative tall ved hjelp av forskjellige farger (Semadeni, 1984, s. 391). Inspirert av Reid og Vallejo Vargas (2019) jobber elevene med heltallsbrikker som representerer heltall, der en oransje brikke representerer en positiv enhet og en svart brikke representerer en negativ enhet. Dette fører til at elevene kan skille mellom positive og negative enheter og gi dem fysiske representasjoner.

I oppgavene kunne elevene lett telle opp summen ved å telle antall brikker som var synlig for dem på matta, noe som hjalp dem med å bekrefte svaret sitt ved hjelp av fysiske mengder. HBT sine brikker fungerer som eksemplifisering for støtte av matematiske resonneringsprosesser for søk etter likheter og ulikheter (Jeannotte & Kieran, 2017, s. 14). Disse prosessene er generalisere, forme hypotese, sammenligning, identifisere mønster og klassifisere (Jeannotte & Kieran, 2017, s. 9).

5.1.1 Resonneringer i addisjon og subtraksjon

I undervisningen viste elevene en forståelse av generalisering ved å forstå at matematiske egenskaper ikke bare gjelder de spesifikke tallene de bruker der og da, men at disse egenskapene gjelder for alle heltall. Generalisering i argumentasjonsprosesser muliggjør utvidelsen til større sett og forsterker troen på matematiske konklusjoner ved å vise hvordan spesifikke eksempler tilhører en større sammenheng (Pedemonte (2002), referert i Jeannotte & Kieran, 2017). I undervisningen viser elevene sin forståelse av egenskapene til partall og oddetall ved å bevise hvorfor alle heltall har enten partall- eller oddetallsegenskaper. Å argumentere for generalisering i HBT viser at elevene forstår at tallene har felles egenskaper og at dette kan formidles. Dette betyr at de kan se på et konkret eksempel og identifisere egenskaper som gjør eksemplet generisk (Rowland, 1998, s. 67). Fra resultatene kan vi se at bruken av heltallsbrikker gjør det synlig for elevene å gjenkjenne disse egenskapene. I stedet for å se på egenskapene algebraisk, gir brikkene en mer visuell forståelse (North, 2023, s. 6). De kan se at heltall med oddetallegenskaper har en brikke til overs, mens tall med partallegenskaper danner par med alle brikkene. De kan da bruke denne kunnskapen til å skape ny forståelse, som for eksempel hvorfor summen av to oddetall alltid er et partall.

En del av MR er å kunne forutsi hva de tror et svar kan være før de regner, eller finner det ut på andre måter. I denne oppgaven bruker jeg Skott og Valenta (2022, s. 64) sin definisjon av hypoteser, som vil si alle forslag av svar på matematiske oppgaver. De sier at hypoteser kan sees på som narrativer som sannsynligvis er sanne, men som krever videre undersøkelser og validering av klassen. Resultatet fra analysen viser at elevene kan se brikkene på matta og gjøre visse kalkulasjoner der de kommer med hypoteser som reflekterer brikkene på matta. Ved å sammenligne tallene til to regnestykker kan elevene lage hypoteser basert på det de observerer. Elevene observerte to regnestykker bestående av de samme to tallene, men med tallene byttet om, og kom med en hypotese om at begge regnestykkene ville gi samme svar. Dette viser elevenes forståelse av teoremet om den kommutative lov i addisjon, som sier at rekkefølgen på leddene ikke forandrer svaret.

Pedemonte (2002), referert i Jeannotte og Kieran (2017, s. 11), sier at det kreves sammenligning for å danne hypoteser som ikke bare er ren formodning uten grunnlag. Sammenligning er ifølge Jeannotte og Kieran (2017, s. 11) en MR-prosess som gjennom å identifisere likheter og ulikheter utvikler en narrativ om matematiske objekter og deres relasjoner. Definisjonen av sammenligning omhandler en metode i matematikk der man undersøker hvordan matematiske objekter er like eller ulike for å forstå og forklare deres egenskaper og hvordan de forholder seg til hverandre. Denne prosessen hjelper til med å trekke logiske slutninger og bygge en klar narrativ om disse objektene og relasjonene mellom dem. Elevene utforske i en oppgave rekkefølgen av operasjoner gjennom å demonstrere at i addisjon, påvirker ikke rekkefølgen resultatet. Summen forblir uendret uavhengig av hvordan leddene er arrangert. Dette prinsippet, kjent som den kommutative lov for addisjon, blir illustrert ved å sammenligne to regnestykker med ombyttede ledd og at disse gir samme resultat. I motsetning til dette, blir det oppdaget at rekkefølgen på leddene i subtraksjon har betydning for resultatet, noe som markerer en viktig forskjell mellom addisjon og subtraksjon og understreker at den kommutative lov ikke gjelder for subtraksjon. Analysen viser til at elevene sammenligner om den kommutative lov gjelder både for addisjon og subtraksjon, og finner ut at det ikke stemmer ved å se at i subtraksjon får regnestykkene forskjellige svar når leddene byttes om.

I MR og i dannelse av hypoteser er det viktig å kunne identifisere mønstre som oppstår i matematiske oppgaver (Stylianides, 2008, s. 47). Å identifisere et mønster innebærer at man aktivt leter etter og finner gjentakende trekk eller forhold mellom tall eller andre matematiske elementer (Jeannotte & Kieran, 2017, s. 10). Videre sier de at i stedet for bare å se på mønster, må man grave dypere for å forstå hvordan og hvorfor det oppstår, og koble det til bestemte matematiske regler eller prinsipper. Resultatet viser at når elevene jobber med partall, viser HBT at for hvert tall er det mulig å pare opp brikker uten å etterlate noen alene. Dette gir en umiddelbar, visuell bekreftelse på at et partall kan deles likt i to, noe som er kjernen i definisjonen av et partall. Denne metoden understreker ideen om paring og likhet, som er lett å forstå og identifisere (North, 2023, s. 8).

For oddetall illustrerer elevene at det alltid vil være en brikke som ikke finner en partner, den såkalte «left out». Dette hjelper elevene å se at oddetall ikke kan deles likt i to uten å etterlate en rest. Ved å legge til eller fjerne brikker kan elevene eksperimentere og se effekten av å legge sammen eller trekke fra partall og oddetall, og hvordan dette påvirker muligheten for å danne par. Denne praktiske tilnærmingen hjelper elevene ikke bare med å klassifisere og forstå forskjellen mellom partall og oddetall, men gir også en dypere forståelse av tallenes grunnleggende egenskaper (Reid & Vallejo Vargas, 2019, s. 811). Det oppmuntrer til eksperimentering og selvoppdagelse, som er viktige elementer i læringsprosessen. Ved å manipulere brikker og bruke dem som representasjoner av matematiske objekter, kan elevene utvikle en intuitiv følelse av tallenes natur, noe som er avgjørende for en solid matematisk forståelse (North, 2023, s. 8).

I andre tilfeller kan elevene lage en hypotese basert på overslag av det de observerer på brettet, og dette gjør de ved hjelp av sammenligning. Når det ligger brikker på matta kan elevene gjøre en antagelse på at svaret deres skal være høyt eller lavt basert på antall brikker som er på brettet. Av å kunne se to forskjellige mengder på matta er de i stand til å gi en rask hypotese om mengdene er like store, eller om hvilken side som antageligvis gir et større svar. Dette gjør det synlig og sammenligning av to mengder og trener elever til å gi hypoteser som er i nærheten av svaret. I samme dialog viser eleven at hun ikke blir forvirret av den totale mengden som vises på matta. Selv om det ligger to like store mengder på en matta, der den ene mengden er på negativ sone, blir ikke elevene forvirret til å legge begge mengdene sammen og gi en hypotese der svaret blir et stort svar, men er i stand til å skille dem fra hverandre. Dette fører til en hypotese der de kan gi en god og nøyaktig hypotese når svaret er lite nok eller nær null, enten på den negative eller positive siden. Selv om dette er sagt har det kommet tilfeller der de ikke har resonnert riktig på mengder som vises på matta. De gangene det oppsto gjorde elevene antagelser uten å studere matta, men ga en hypotese på bakgrunn av hva de trodde i det spørsmålene ble presentert.

Klassifisering i matematikken innebærer å gruppere objekter eller tall basert på bestemte egenskaper eller definisjoner (Jeannotte & Kieran, 2017, s. 11). Dette innebærer at klassifisering hjelper til med å gruppere matematiske objekter basert på felles egenskaper og forskjeller. Prosessen inkluderer en detaljert undersøkelse og sammenligning av objektenes egenskaper, som størrelse, form eller antall sider. Ved å forstå og anvende disse egenskapene og definisjonene, utvikler vi en forklaring eller et narrativ for hver gruppe eller klasse av objekter. Sammenfattende bidrar klassifisering til å organisere matematiske objekter i grupper som deler lignende trekk, basert på klare regler og definisjoner. Dette konseptet kan illustreres gjennom å se tilbake på hvordan elevene kategoriser tall som partall eller oddetall, basert på deres evne til å danne par. Elevenes påstander om partall karakteriseres ved at de kan deles jevnt i par, uten rest, mens oddetall har en ekstra enhet som ikke passer inn i et par, ofte beskrevet som «left out» eller overskuddsenhet. Samtidig definerer elevene at når to oddetall legges sammen, kombineres deres overskuddsenheter og danner et nytt par, noe som resulterer i et partall. Denne prosessen henger tett sammen med andre matematiske prosesser som sammenligning, forme hypotese og generalisering, og er avgjørende for en bredere matematisk forståelse (Jeannotte & Kieran, 2017, s. 11).

5.1.2 Resonneringer i multiplikasjon

Da jeg hadde lært elevene hvordan de skulle representere regnestykker i multiplikasjon, la elevene merke til at både regnestykket og svaret vises på samme måte, og når brikkene ble plassert i det rektangulære mønsteret visste elevene at vi jobbet med multiplikasjon. En av definisjonen til multiplikasjon i HBT er at produktet av to faktorer danner et rektangel der den ene faktoren er lengden og den andre faktoren er bredden av rektangelet (Reid & Vallejo Vargas, 2019, s. 813). Et eksempel kan være regnestykket $3 * 2$, der elevene kan se regnestykket ved å se en lengde på tre brikker og en bredde på to brikker. Bare dette alene viser elevenes evne til å gjenkjenne og identifisere mønstre som oppsto i arbeid med HBT. Dette gjør det lett for elevene at når de ser at brikkene er plassert i rektangulære mønstre kan de klassifisere dem som multiplikasjonsstykker. Disse skiller seg fra addisjonsstykker og subtraksjonsstykker, der addisjonstykker vises ved å gruppere brikkene i flere ledd, mens subtraksjonsstykker også har brikker i negative soner. Dette gjør det tydelig for elevene å sammenligne og skille mellom regneartene.

Under arbeidet med multiplikasjon viser elevene gjennom bruk av HBT sin forståelse for sammenhengen mellom addisjon og multiplikasjon. Gjennom spesifikke eksempler kan de sammenligne for eksempel $4 + 4 + 4$ og $3 * 4$. Da kan de visuelt se sammenhengen mellom de to definisjonene til multiplikasjon der: (1) Multiplikasjon er gjentatt addisjon og (2) Multiplikasjon er laging av rektangler (Reid & Vallejo Vargas, 2019, s. 813). HBT blir her en støtte for elevene i å kunne se at et rektangel dannet av $3 * 4$ også kan splittes opp i tre grupper med fire brikker i hver. Dette gjør at elevene kan sammenligne begge regnestykkene og finne likheter som begge deler med hverandre. Dette er et eksempel på et mønster og relasjon som elevene kan utforske ved hjelp av HBTs visuelle natur.

Senere i arbeidet med multiplikasjon bruker elevene HBT til å identifisere kvadrattall ved å arrangere brikkene i kvadratiske mønstre. Når eleven organiserer brikker i et kvadrat, hvor antallet brikker langs hver side er likt, viser dette direkte hva et kvadrattall er: et tall som kan uttrykkes som produktet av et heltall multiplisert med seg selv (Vatne, 2023a). For eksempel, ved å legge fire brikker langs hver av de fire sidene i et kvadrat, viser eleven at 16 (4x4) er et kvadrattall. Denne metoden hjelper eleven å se og forstå at kvadrattallene representerer arealer av kvadrater med sider av lik lengde, og at kvadrattallene følger et spesielt mønster i tallrekken (1, 4, 9, 16, og så videre).

5.2 Elevenes argumentasjoner

5.2.1 Gester som kobling mellom HBT og argumenter

I metodeanalysen viste jeg til hvordan jeg brukte gesturer til å finne ut hvordan elevene brukte HBT som støtte til argumentene sine. Gester er bevegelser med armer og hender, som elevene bruker til å vise mentale aspekter til andre (Hiis, 2024; Radford, 2009, s. 113). Jeg finner eksempler på gesturer hele veien når elevene argumenterer, og de gjør det gjerne i form for å peke, eller bevege på brikkene for å støtte opp mot deres argumentasjoner. I analysen har jeg satt opp en samtale der eleven bruker gester til å vise meg hvordan brikkene legges som støtte for sine argumenter. Eleven argumenter for at differansen av 4 – 3 blir en, og støtter det med å vise operasjonen på matta. Å bruke konkreter, sånn som brikker på en matte i HBT, til validering og støtte for sine argumentasjoner, er innenfor en av prosessene til Jeannotte og Kieran (2017, s. 14) nemlig eksemplifisering. Gestene er ikke i seg selv en del av prosessene i MR, men de er relevante i prosessen fordi de viser meg hvordan elevene bruker representasjoner, som HBT, til støtte for argumentene sine. Denne måten å bruke gester og representasjoner på kan vi finne eksempler av gjennom hele analysen. Elevenes argumentasjoner er ofte god nok til å forstå på egen hånd, men de styrker den ytterligere ved å bruke brikkene som støtte.

Et eksempel der heltallsbrikker blir brukt som støtte har vi fra 4.1.2 Forme en hypotese. Her er et eksempel der elevene får i oppgave å utforske den kommutative lov. I HBT ligger en evne til å konkretisere og støtte elevene til å visualisere. Et eksempel er oppgaven om addisjonsregnestykket $4 + 3$, og her svarer eleven i linje 8: «*Fordi 4 pluss 3, hvis man teller 3 og plusser det på 4, det blir 7 (viser med brikkene). Men hvis man plusser 4 med 3, det blir også 7 (viser med brikkene).*» Her bruker eleven brikkene som visualisert støtte til argumentet hans, der han viser hvordan summen mellom fire og tre blir sju ved å telle. Brikkene blir brukt som representasjoner for tallene 4, 3 og 7, og brikkene fungerer dermed som semiotiske representasjoner. Det vil si at elevene visualiserer regnestykket de har i hodet til oss og det tankene blir til fysiske representasjoner (Duval, 2017, s. 97). Dette vil både hjelpe den som argumenterer til å utrykke seg på en lettere måte og gjøre seg forstått, og i tillegg styrke argumentasjonen.

En annen måte elevene brukte HBT i sine argumentasjoner var når heltallsbrikkene blir en del av deres argumentasjon, hvilket betyr at den verbale argumentasjonen alene ikke er nok til å gjøre dem forstått. I samtale med en elev spør jeg hvorfor 4 – 3 og 3 – 4 ikke er like. Da sier eleven at: «*Og du mener det er fordi denne, for dette er 4, så jeg har 4. (Peker på brikkene på høyre matte.) Jeg kan ta bort 3 hvis jeg har 4. Men jeg kan ikke ta bort 4 hvis jeg har 3. (Flytter på brikkene på venstre matte.)*» Selv om det eleven sier er korrekt, har han ikke forklart hvorfor påstanden stemmer. For å forstå forklaringen trenger vi mer informasjon. Dette løser elevene ved å peke på og flytte rundt på brikkene mens han gir sin forklaring. Brikkene viser oss at når han flytter dem, gir 4 - 3 én brikke på matta, mens ved 3 - 4 kan han bare fjerne tre brikker. Elever bruker ofte gester før de har utviklet et verbalt språk for de aktuelle begrepene og prosessene og fungerer som en bro mellom handling og verbal diskurs (Roth, 2002, s. 538). Gester kan likevel også tydeliggjøre kommunikasjonen, også om eleven har godt språk.

5.2.2 Argumentasjonsformer

Først vil jeg si at i undervisningen med HBT oppsto det ikke situasjoner der elevene brukte empiriske argumentasjoner. Empirisk argument er argumenter som ikke er godkjent som bevis ifølge Stylianides (2008, s. 12), og argumentene prøver å trekke fram en konklusjon der det kun er en delmengde av alle utfall er testet. En grunn for dette er at jeg jobbet aktivt med bevisføring, og instruerte elevene tidlig i hva slags argumenter og bevisføring som var godkjent i undervisningen. Elevene fikk instruksjoner på at de konkrete eksemplene elevene jobbet med kan ses på som generiske så lenge de kan argumentere for det. Dette er i tråd med hvordan Reid og Vallejo Vargas (2019, s. 811) bruker HBT i deres forskning og undervisning. En annen grunn var at elevene selv sjelden tok initiativ til å prøve og bevise deres funn eller påstandene de kom med. Jeg, som lærer, måtte ofte stille en del spørsmål for å grave fram argumenter hos elevene. Argumentene som oppsto i undervisningen tilhører redegjørelse, generaliserende argumenter og generiske slutninger.

Når det gjelder bruken av redegjørelse har det kommet noen tilfeller der denne argumentasjonsformen oppsto. Redegjørelse er argumenter for eller imot matematiske påstander, men som likevel ikke nødvendigvis er formelle bevis (Stylianides, 2008, s. 12). Redegjørelser bruker eksempler eller generell formulering for å gjøre abstrakte matematiske ideer forståelige, spesielt gjennom representasjoner som heltallsbrikker. Fra analysen forklarer en elev hvorfor summen av to oddetall alltid blir et partall ved å bruke heltallsbrikker til å illustrere tankeprosessen sin. Hun viser at i et partall har alle brikkene en partner, mens i et oddetall er det alltid en brikke som er "left out" som da er en enkeltstående brikke. Når to oddetall legges sammen, finner de enkeltstående brikkene hverandre og danner et par, slik at svaret blir et partall. Denne forklaringen viser hvordan HBT støtter elevens forståelse. Elevens bruk av konkreter som heltallsbrikker for å forklare matematiske konsepter gjør abstrakte ideer mer forståelige og styrker argumentasjoner og bevis.

I arbeid med bevisføringer lærer elevene hvordan de bruker heltallsbrikker for å utforske egenskapene til partall og oddetall, og spesielt hvordan de oppfører seg i addisjon og multiplikasjon. For at bevisføringer skal være gyldige må de følge deduktive argumentasjonsformer (Stylianides, 2008, s. 11). Deduktive argumenter er når du har gitte premisser, og om disse premissene er sanne er du i stand til å trekke en sikker konklusjon basert på de gitte premissene (Morris, 2002, s. 80).

I deduktive argumentasjoner bruker elevene eksisterende matematiske regler og prinsipper, som definisjonene av oddetall og partall, til å trekke spesifikke konklusjoner om resultatene av deres operasjoner, for eksempel at multiplikasjon av to oddetall alltid gir et oddetall. Gjennom å gruppere brikker, demonstrerer elevene deduktivt hvordan disse egenskapene kan forutsi resultatet av matematiske operasjoner.

Resultatene gjennom hele analysen viser til at elevene klarer å bruke enkelte eksempler og gjøre dem til generiske eksempler ved å utheve egenskapene til de gitte eksemplene. Et generisk eksempel er et spesifikt eksempel som viser et generelt prinsipp ved å fremheve de allmenne egenskapene i situasjonen det beskriver (Rowland, 1998, s. 67). Elevene demonstrerer multiplikasjonens kommutative egenskap ved å vise at rekkefølgen av faktorene ikke påvirker produktet. Når de arrangerer brikkene på forskjellige måter, viser de at resultatet forblir det samme uansett rekkefølgen på faktorene.

Dette kan formuleres som modus ponens der en elev får i oppgave å forklare hvorfor 2 * 3 og 3 * 2 gir samme produkt. Eleven selv har ikke lært om modus ponens, men gjør dette naturlig med å komme med en hypotese som eleven dermed beviser og gir en konklusjon. Modus ponens starter med en påstand hvis P så Q, og hvis vi finner en påstand P som stemmer, får vi konklusjonen at Q er sant (Briseid, 2022).

- Premiss 1: Hvis multiplikasjon er kommutativ (P), så vil rekkefølgen av faktorene ikke påvirke produktet (Q).
- Premiss 2: Multiplikasjon er kommutativt (P). Dette gjøres ved å argumentere og utføre operasjoner som vises til at det stemmer.
- Konklusjon: Derfor vil rekkefølgen av faktorene ikke påvirke produktet (Q).

I dette tilfellet viser elevene at siden multiplikasjon er kommutativt, vil både 3 x 2 og 2 x 3 alltid gi samme produkt, nemlig 6. Dette resonnementet følger strukturen til modus ponens ved å starte med en generell regel og anvende den for å trekke en konklusjon om spesifikke tilfeller.

5.3 Elevenes bevisføringer

Bruken av HBT hjelper elevene til å konkretisere og visualisere matematiske prosesser, noe som kan gjøre abstrakte ideer mer forståelige og innenfor elevenes konseptuelle rekkevidde, noe som er viktig for elevenes arbeid med bevis (Stylianides, 2007, s. 291). Gjennom å ha lest flere artiklene av Andreas J. Stylianides forstår jeg at deres bruk av elevens konseptuelle rekkevidde i skolematematikken handler om elevens evne til å forstå matematiske konsepter. Det som er innenfor den konseptuelle rekkevidden, kan elevene forstå og hvis et matematisk konsept er utenfor er det vanskelig for elevene å forstå. Han sier videre at for å holde seg innenfor den konseptuelle rekkevidden må vi unngå bruk av symboler og algebraiske notasjoner, som er vanskelig for elever på barneskolen å forstå (Stylianides, 2007, s. 296). Dette passer med bruken av HBT som kan erstatte symbolbruk og algebraiske notasjoner med fysiske brikker.

Generiske eksempler og generelle logiske slutninger er innenfor den konseptuelle rekkevidden til elevene på barneskolen, og gjennom dem vil elevene komme med deduktive argumentasjonsformer (Stylianides, 2016, s. 17). På bakgrunn av dette kan elevene jobbe med bevisføring basert på Andreas J. Stylianides (2007, s. 291) sine tre kriterier for gyldig bevis. Bevis er for han matematiske argumenter som inkluderer ulike synspunkter for og imot en gitt matematisk påstand (Stylianides, 2007, s. 291). Analysen viser til hvordan HBT støtter elevene til å lære nye matematiske teoremer og konsepter, ved å jobbe systematisk med å bevisføre et matematisk konsept til et annet.

5.3.1 Første kriterium: Aksepterte påstander

Stylianides (2007, s. 291) sitt første kriterium i arbeid med bevis er påstander som er akseptert av klassefellesskapet. Dette vil si utsagn som er grunnleggende for klassen og ikke trenger videre forklaringer. Det kan være aksiomer, teoremer og definisjoner som er godkjente og klare for bruk. Jeg tenkte at elevene hadde en forståelse for alle aksiomene som blir presentert i undervisningen, men siden vi jobbet med bevisføring tenkte jeg at elevene like godt kunne bevise alle aksiomene som blir brukt, sånn at alle hadde samme forståelse. Dette støtter opp med det Stylianides (2008, s. 11) sier om at ikke alle i fellesskapet forstår begrepene på samme måte.

Fra analysen tvinger jeg fram definisjonen og bevisføring for alle aksiomer første gang elevene bruker dem. Etter at aksiomene er bevist og anerkjent som teoremer er eleven i stand til å bruke de fritt til senere bevisføring av andre teoremer. HBT støtter ikke elevene til å bruke aksiomer, men er heller til visuell støtte når elevene skal vise fram egenskapene til aksiomene. Et eksempel er når 5.trinnseleven Matteo skal fortelle om egenskapene til et partall, at det er tall som kan dele seg i to uten å få rest. Dette visualiserer eleven ved å dele tallet i to like store grupper.

Mot slutten av bevisføringen ga jeg han oppgaver og prøvde å få eleven til å bevise produktet av to oddetall. Eleven svarer at svaret blir et oddetall uten videre forklaring. Her ser vi en situasjon der jeg og han som gruppe har en enighet om at påstanden er kjent for vårt klassefellesskap. Men fra erfaringer med de andre elevene fra 6.trinn kan jeg si at dette ikke er nødvendig var akseptert av klassefellesskapet hvis vi hadde vært i en større gruppe.

5.3.2 Andre kriterium: Argumentasjonsformer

Det andre kriteriet for bevisføring er bruk av argumentasjonsformer som er gyldige og innenfor elevens konseptuelle rekkevidde (Stylianides, 2007, s. 291). Argumentasjonsformen som er godkjent er av deduktiv natur, fordi det trekker konklusjoner gjennom premisser (Stylianides, 2007, s. 292). Resultatene fra bevisføringen er lik resultatet fra kapittel 5.2 der HBT støtter argumentasjonene ved å enten være en del av argumentasjonen, eller validerer argumentasjonen. Dette gjør at elevene kan argumentere i deduktiv form, uten at elevens muntlige ferdigheter skal være til hindring for å gjøre seg forstått.

Selv om arbeid med deduktive argumenter er viktig, må vi passe på at dette ikke overskygger det egentlige arbeidet som er at elevene skal tilegne seg matematiske kunnskaper og forståelse. For mye fokus på å gjennomføre den deduktive formen, kan forvirre elever som ikke behersker matematikkfaget ennå (Hanna, 1990, s. 12). Det er derfor viktig å lære dem å forstå matematikk, mer enn regler og prosedyrer. Hun sier at arbeidet med bevis må være forklarende for at elevene skal ha utbytte av bevisføringen.

Dette kan vi se i arbeidet med bevisføring av definisjonen av partall. Matteo viser til definisjonen av partall ved å dele opp et antall brikker i to like deler. Videre kobler eleven dette til definisjonen, som sier at når et heltall kan deles i to like deler er det et partall. Dette gjør eleven deduktivt ved å generalisere de spesifikke eksemplene til generiske eksempler.

Her jobbes det deduktivt på en forklarende måte der elevene kan se definisjonen utfolde seg med fysiske heltallsbrikker.

Merk at denne Matteo har brukt en annen måte å illustrere definisjonen av partall på enn de andre elevene. Fra analysen har de andre elevene vist at et partall er når du danner to og to brikker i par uten å ha noe i rest. Dette har vært felles for de fire andre elevene, og grunnen kan ha vært inspirert av undervisningen om nullpar. Nullpar er når du har en positiv brikke og en negativ brikke som danner et par som representerer summen 0 (Reid & Vallejo Vargas, 2019, s. 816). Siden de har blitt vant til å sortere brikkene i nullpar, kan det ha påvirket elevene fra gruppeøkten til å dele opp brikkene på denne måten. Selv om det ikke forandrer på funnet om å finne partall, kan vi si at eleven som ikke har vært med i gruppeøkten har en forklaring som ligger nærmere den vanlige definisjonen av partall som er: «Partall er alle heltall som kan deles på 2. For eksempel er tallene –4, –2, 6, 14 og 34 partall» (Vatne, 2022).

5.3.3 Tredje kriterium: Representasjonsformer

Det siste kriteriet fokuserer på hvilke representasjonsformer som er til støtte for argumenter, og som er passende og kjent for klassefellesskapet (Stylianides, 2007, s. 291). Disse fremstillingene kan være algebraiske eller verbale uttrykk, diagrammer eller fysiske konkreter (Stylianides, 2007, s. 292). I denne masteroppgaven tar vi i bruk HBT som inneholder fysiske konkreter og er da godkjent som representasjonsform ifølge det tredje kriteriet. Heltallsbrikker blir brukt i alle oppgaver, og fungerer da som eksempler som kan brukes til å formulere eller verifisere en hypotese som er prosessen eksemplifisering (Jeannotte & Kieran, 2017, s. 14). Nedenfor vil jeg vise et eksempel på hvordan HBT blir brukt til eksemplifisering for å forme et nytt teorem om produktet til to oddetall.

Fra resultatet ser vi aktiv bruk av eksempler for å støtte elevene i forming og validering av hypoteser. Fra siste bevisføring skal eleven bevisføre produktet av to oddetall, og han formulerer en hypotese etter å ha sett på rektangelet begge oddetallene har laget. Etter det får han i oppgave å forklare hvorfor hypotesen kan valideres, og det gjør han ved å dele opp rektangelet i kolonner med oddetallgrupper. Eleven sier at gruppene kan danne gruppepar og siden hver gruppe er oddetallsgrupper blir de til en stor partallsgruppe når de går sammen.

Dette forklarer han ved å si at tallet dobles. Tidligere har eleven bevisført at summen av to oddetall er et partall, sånn at det ikke er nødvendig for eleven å validere hvorfor det er slik. Han viser til at lengden er et oddetall derfor vil gruppene være oddetall og det er en gruppe som ikke finner en gruppepartner. Siden gruppen består av oddetallsbrikker, vil produktet være et oddetall. Han får flere eksempler av meg for å forklare, og de viser de samme egenskapene og eleven generaliserer siste eksempel ved å si at alle oddetall har den samme egenskapen med en brikke til overs.

5.4 Sluttrefleksjoner

Selv om heltallsbrikker er et effektivt verktøy for å visualisere matematiske konsepter, er en svakhet ved metoden at elevene ikke alltid ser de konkrete eksemplene som generiske. Dette betyr at de kan ha vanskeligheter med å identifisere mønstre eller sammenhenger i tallene. Elevene kan fokusere for mye på de spesifikke tallene de jobber med, i stedet for å forstå de underliggende matematiske egenskapene som gjelder for alle heltall. For å sikre at elevene ser eksemplene generisk, er det viktig å stille spørsmål som hjelper dem med å identifisere mønstre eller sammenhenger. For eksempel kan man spørre: "Hva skjer med summen når vi legger sammen to oddetall?" eller "Kan du se et mønster i hvordan partallene og oddetallene oppfører seg?" Disse spørsmålene kan hjelpe elevene å abstrahere fra de konkrete eksemplene og forstå de generelle prinsippene.

En utfordring jeg som lærer ofte står overfor, er at jeg glemmer å stille disse spørsmålene og i stedet antar at elevene har forstått konseptene generisk. Dette kan føre til at de ikke utvikler en dypere forståelse av de matematiske sammenhengene. Det er derfor viktig å være bevisst på å stille spørsmål som oppfordrer til refleksjon og generalisering, slik at elevene kan utvikle en robust forståelse av matematiske konsepter. I kapittel 4.1.1 Generalisere jobber Selma med å se likheten mellom 4 + 4 + 4 og 3 * 4. Her viser eleven at hun forstår at multiplikasjon er gjentatt addisjon ved å si i linje 5: *«Å gange. Til å kopiere dem på masse mer enn en gang.»* Jeg spør henne rett etter om hun mener at det å addere samme tall flere ganger tilsvarer multiplikasjon, og hun er enig. Selv om jeg kunne ha bedt henne om å demonstrere for å gi en bedre forklaring, virket det som hun forsto konseptet, så jeg gikk videre. Dette er en svakhet i min datainnsamling, der jeg som lærer kunne ha gjort en bedre jobb med å få fram en mer tydelig forklaring.

Som vi har sett er HBT et godt verktøy til å konkretisere og være en visuell støtte for elevenes resonnement og argumentasjoner, men for enkelte elever kan det bli et slags skjulested. Eleven som omtales som Reina er en faglig sterk matteelev fra 6.trinn. Jeg hadde forventet å kunne høre noen spennende resonnementer fra henne, men dessverre henfalt hun nesten kun til å vise meningene sine via manipulering av brikkene samt fysiske gester. Transkriberingen bærer derfor preg av at jeg prøver å grave ut utsagn fra henne. Jeg tror likevel at HBT kan ha vært et godt redskap for å styrke hennes forståelse. Jeg hadde bare også håpet at det også kunne ha bidratt til å styrke hennes muntlighet i matematikkfaget.

6 Konklusjon

Denne masteroppgaven har undersøkt hvordan bruk av HBT kan fremme MR, argumentasjon og bevisføring blant elever på mellomtrinnet. Gjennom en kvalitativ studie med deltagende observasjon av fem elever fra femte og sjette trinn, har vi sett hvordan HBT som konkretiserende verktøy kan bidra til å styrke elevenes forståelse av matematiske konsepter og deres evne til å formulere og teste hypoteser.

Elevene viste forbedret evne til å resonnere matematiske konsepter gjennom HBT. De utviklet ferdigheter i å identifisere mønstre, sammenligne matematiske objekter og klassifisere tall og operasjoner. Dette indikerer at HBT kan være et effektivt verktøy for å fremme dypere matematisk forståelse og resonnering. Bruken av HBT som representasjonsform bidro også til å styrke elevenes evne til å formulere og presentere logiske resonnementer. Elevene brukte de konkrete brikkene til å visualisere og støtte sine argumenter, noe som hjalp dem med å utvikle og kommunisere sine matematiske påstander mer effektivt. Videre støttet HBT elevenes bevisføringsprosesser ved å gi dem et konkret verktøy for å utforske og bevise matematiske påstander. Elevene var, med støtte fra lærer, i stand til å bruke brikkene til å demonstrere og validere sine hypoteser, noe som styrket deres evne til å bevise nye matematiske konsepter.

HBT har vist seg å være et verdifullt verktøy i matematikkundervisningen på mellomtrinnet. Ved å integrere HBT i undervisningen kan lærere hjelpe elever med å utvikle viktige ferdigheter i matematisk resonnering, argumentasjon og bevisføring. Dette kan føre til en dypere forståelse av matematiske prinsipper og øke elevenes evne til å anvende matematikk i nye og komplekse sammenhenger.

Studien har imidlertid noen svakheter. For det første er utvalget begrenset til fem elever, noe som kan påvirke overførbarheten av funnene. Dette begrenser muligheten for å generalisere resultatene til en bredere elevpopulasjon. Videre var det situasjoner hvor jeg som lærer ikke fulgte opp med tilstrekkelige spørsmål for å utdype elevenes forståelse, noe som kan ha påvirket datainnsamlingens dybde. Til tross for disse svakhetene gir studien verdifulle innsikter som kan anvendes i videre forskning. Funnene indikerer at HBT har potensial til å fremme matematisk resonnering, argumentasjon og bevisføring i ulike undervisningskontekster. Videre forskning kan bygge på disse funnene ved å inkludere større og mer mangfoldige utvalg av elever, samt undersøke effekten av HBT i ulike skolemiljøer og med ulike matematiske konsepter.

Litteraturliste

Anker, T. (2020). *Analyse i praksis : en håndbok for masterstudenter* (1. utgave, 1. opplag. utg.). Cappelen Damm akademisk.

Bartolini, M. G. & Martignone, F. (2014). Manipulatives in Mathematics Education. I (s. 365-372). Dordrecht: Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8_93

Bratbergsengen, K. (2020, 22.01). *Heltall (IT)*. Store norske leksikon. https://snl.no/heltall_-_IT

Briseid, E. M. (2017, 19.09). *Modus Tollens*. Store norske leksikon. https://snl.no/modus_tollens_-_logikk

Briseid, E. M. (2022, 04.04). *Modus ponens*. Store norske leksikon. https://snl.no/modus_ponens_-_logikk

Briseid, E. M. (2024, 16.04). *Aksiom*. Store norske leksikon. https://snl.no/aksiom_-_matematikk

Carpenter, T. P., Franke, M. L. & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Dalland, C. & Andersson-Bakken, E. (2021). *Metoder i klasseromsforskning : forskningsdesign, datainnsamling og analyse*. Universitetsforlaget.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*(1), 103-131.

Duval, R. (2017). *Understanding the Mathematical Way of Thinking - the Registers of Semiotic Representations* (1. utg.). Cham: Springer International Publishing AG. https://doi.org/10.1007/978-3-319-56910-9

Freedman, N. (1977). Hands, words, and mind: On the structuralization of body movements during discourse and the capacity for verbal representation. I *Communicative structures and psychic structures: A psychoanalytic interpretation of communication* (s. 109-132). Springer.

Goldin, G. A. (2000). A Scientific Perspective on Structured, Task-Based Interviews in Mathematics Education Research. I (s. 517-546). Routledge. https://doi.org/10.4324/9781410602725-28

Hana, G. M. (2013). *Matematiske byggesteiner*. Caspar.

Hanna, G. (1990). Some pedagogical aspects of proof. *Interchange (Toronto. 1984)*, *21*(1), 6-13. https://doi.org/10.1007/BF01809605

Hanna, G. (2016). Reflections on proof as explanation. I *Advances in mathematics education research on proof and proving* (s. 3-18). Springer.

Hiis, H. (2024, 22.02). *Gest*. Store norske leksikon. https://snl.no/.versionview/2222384

Holmen, H. A. (2024, 04.01). *Deduktive slutninger*. Store norske leksikon. https://snl.no/deduktive_slutninger

Jeannotte, D. & Kieran, C. (2017). A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *96*(1), 1-16. https://doi.org/10.1007/s10649-017-9761-8

Krogh Arnesen, K. (2022). Generiske eksempler som argumentasjon. *Tangenten - tidsskrift for matematikkundervisning*, *33-(1)*, 2-8.

Kunnskapsdepartementet. (2019). *Læreplan i matematikk 1.-10. trinn* ([MAT01-05]). https://data.udir.no/kl06/v201906/laereplaner-lk20/MAT01-05.pdf?lang=nob

Lithner, J. (2008). A research framework for creative and imitative reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, *67*, 255-276.

Mason, J. (2001). Questions about mathematical reasoning and proof in schools. Reasoning, explanation and proof in school mathematics and their place in the intended curriculum: Proceedings of the QCA International Seminar. London: QCA. http://xtec. cat/centres/a8005072/articles/proof_and_reasoning. pdf,

Mason, J. & Pimm, D. (1984). Generic examples: Seeing the general in the particular. *Educational Studies in Mathematics*, *15*, 277-289.
Morris, A. K. (2002). Mathematical Reasoning: Adults' Ability to Make the Inductive-Deductive Distinction. *Cognition and instruction*, *20*(1), 79-118. https://doi.org/10.1207/S1532690XCI2001_4
Mæhlum, L. (2024). *Rekursjon*. https://snl.no/rekursjon
Nes, A. (2023, 14.06). *Semiotikk*. Store norske leksikon. https://snl.no/semiotikk
North, M. (2023). Algebra with algebra tiles: What's the point? *Mathematics Teaching*, (288), 6-11.
Nyeng, F. (2012). *N?kkelbegreper i forskningsmetode og vitenskapsteori*. Fagbokforl.
Radford, L. (2009). Why Do Gestures Matter? Sensuous Cognition and the Palpability of Mathematical Meanings. *Educational Studies in Mathematics*, *70*(2), 111-126. https://doi.org/10.1007/s10649-008-9127-3
Reid, D. A. (2002). Conjectures and Refutations in Grade 5 Mathematics. *Journal for research in mathematics education*, *33*(1), 5-29. https://doi.org/10.2307/749867
Reid, D. A. & Vallejo Vargas, E. A. (2019). Evidence and argument in a proof based teaching theory. *Zdm*, *51*, 807-823.
Roth, W.-M. (2002). From action to discourse: The bridging function of gestures. *Cognitive systems research*, *3*(3), 535-554. https://doi.org/10.1016/S1389-0417(02)00056-6
Rowland, T. (1998). Conviction, explanation and generic examples. *ISSN ISSN-0771-100X PUB DATE 1998-00-00 NOTE 366p.; For volumes 1-3, see SE 062 271-273; for the 1998*, 78.
Rø, K. & Arnesen, K. K. (2020). The opaque nature of generic examples: The structure of student teachers' arguments in multiplicative reasoning. *The Journal of Mathematical Behavior*, *58*, 1-15.
Semadeni, Z. (1984). A principle of concretization permanence for the formation of arithmetical concepts. *Educational Studies in Mathematics*, *15*(4), 379-395.
Sfard, A. (2007). When the Rules of Discourse Change, but Nobody Tells You: Making Sense of Mathematics Learning From a Commognitive Standpoint. *The Journal of the learning sciences*, *16*(4), 565-613. https://doi.org/10.1080/10508400701525253
Skott, E. L. B. & Valenta, A. (2022). Kommunikasjonsmønster under arbeid med matematiske resonnering. *Nordisk Tidsskrift for Utdanning og Praksis = Nordic journal of education and practice*, *16*(2), 61-82. https://doi.org/10.23865/up.v16.3518
Staksrud, E., Kolstad, I., Bang, K. J., Bomann-Larsen, L., Fretheim, K., Granaas, R. C., Harpviken, K. B., Haugen, H. Ø., Jakobsen, K. A. & Johnsen, R. (2021). Forskningsetiske retningslinjer for samfunnsvitenskap og humaniora. https://www.forskningsetikk.no/retningslinjer/hum-sam/forskningsetiske-retningslinjer-for-samfunnsvitenskap-og-humaniora/
Stylianides, A. J. (2007). Proof and proving in school mathematics. *Journal for research in mathematics education*, *38*(3), 289-321.
Stylianides, A. J. (2016). *Proving in the elementary mathematics classroom*. Oxford University Press.
Stylianides, G. J. (2008). An Analytic Framework of Reasoning-and-Proving. *For the Learning of Mathematics*, *28*(1), 9-16. https://flm-journal-org.ezproxy2.usn.no/Articles/308086F06226BBFBA6966CF21B6EC.pdf
Tjora, A. H. (2021). *Kvalitative forskningsmetoder i praksis* (4. utgave. utg.). Gyldendal.
Utdanningsdirektoratet. (2023). *Læreplan i matematikk 1.-10.trinn (MAT01-05)*. https://www.udir.no/lk20/overordnet-del/opplaringens-verdigrunnlag/1.3-kritisk-tenkning-og-etisk-bevissthet/
Vatne, J. E. (2022, 15.08). *Partall*. Store norske leksikon. https://snl.no/partall
Vatne, J. E. (2023a, 06.03). *Kvadrattall*. Store norske leksikon. https://snl.no/kvadrattall
Vatne, J. E. (2023b, 06.03). *Naturlige tall*. Store norske leksikon. https://snl.no/naturlige_tall
Vatne, J. E. (2023c, 07.03). *Oddetall*. Store norske leksikon. https://snl.no/oddetall

Yackel, E. & Hanna, G. (2003). Reasoning and proof. *A research companion to principles and standards for school mathematics*, 227-236.

Vedlegg 1: Samtykkeskjema

Vil du delta i forskningsprosjektet
Argumentasjon, resonnering og bevis i bevisbasert undervisning

Formålet med prosjektet
Dette er et spørsmål til deg om du vil delta i et forskningsprosjekt hvor formålet er finne ut om arbeid med bevisbasert læring kan styrke elevenes dybdeforståelse i diverse tema i matematikk. Dette gjøres i arbeid med å styrke elevenes argumentasjon, resonnering og bevis i visse tema som skal undervises i en matematikktime. Problemstillingen for tema er **«Hvordan kan bruken av heltallsbrikketeori i undervisningen hjelpe elever på 7 trinn å utvikle sine evner til å resonnere, argumentere og bevise gjennom arbeid med å utvikle dybdeforståelse om heltall?"**
Dette er en masteroppgave i et 5-årig masterutdanning for å bli lektor/lærer. Det blir ikke brukt personopplysninger i selve oppgaven og all underskrift som jeg får av foresatte vil bli makulert etter oppgaven er levert som er den 3.juni 2024.

Hvorfor får du spørsmål om å delta?
Du får denne forespørselen fordi ditt barn er valgt ut for å være med i en masteroppgave der jeg tester ut undervisningsopplegg som jeg tenker vil styrke eleven deres i matematikk. Jeg kommer til å spørre alle i trinnet til ditt barn, men kommer kun til å velge ut seks elever til oppgaven. Dette er for å spare tid for å kunne skrive oppgaven selv om dere samtykker så er det ikke sikker at deres barn blir plukket ut.
Jeg har valgt ditt barn fordi jeg er kjent med klassen fra før som vikarlærer tidligere og har jobbet i mange år sammen med deres kontaktlærer. Jeg ønsker at ditt barn skal ha det trygt og ha god læring som støtter kompetansemålet i den lille perioden de skal undervises av meg.

Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?
Universitetet i Sørøst Norge er ansvarlig for personopplysningene som behandles i prosjektet. Dette inkluderer jeg; Toan Gjøystdal Ngo og min veileder; Andrea Hofmann.

Det er frivillig å delta
Det er frivillig å delta i prosjektet. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for deg hvis du ikke vil delta eller senere velger å trekke deg.

Hva innebærer det for deg å delta?
Hvis du godkjenner at eleven deltar i prosjektet, innebærer det at eleven skal delta i arbeid med matematikkoppgaver, som er utviklet spesielt for dette prosjektet, i grupper på 2 elever. Under arbeidet med oppgavene, vil elevene få mulighet til å komme med egne løsninger, samarbeide med medelevene og svare på spørsmål knyttet til oppgavene, fra meg (masterstudent). Samtalen og arbeidet med oppgavene vil bli tatt lydopptak av. I tillegg vil elevenes notater og/eller tegninger bli samlet inn. Prosjektet vil bli gjennomført i elevenes skoletid, i løpet av November/desember 2024. Hvis ønskelig kan foresatte få se oppgavene på forhånd, ved å ta kontakt med meg, Toan Gjøystdal Ngo

Kort om personvern
Vi vil bare bruke opplysningene om deg til formålene vi har fortalt om i dette skrivet. Vi behandler personopplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket. Du kan lese mer om personvern under.

Med vennlig hilsen

Toan Gjøystdal Ngo	Andrea Hofmann
Epost: toan1804@osloskolen.no	Epost: Andrea.Hofmann@usn.no
Telefon: 41158520	
(Masterstudent)	(Veileder)

- Du kan lese mer om personvern på neste side.

Utdypende om personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker dine opplysninger
Deltagernes personopplysninger som lydopptak vil bli lagret i et eksternt minnebrikke og ikke lagret på noen andre måter. Det er kun jeg som har adgang til denne minnebrikken. Det vil ikke bli lagret noen form for personopplysninger, det eneste som kommer til å skje er at jeg vil gi deltagerne et eget nummer som jeg bruker i masteroppgaven. Hvis elevene sier navnet til hverandre vil dette ikke være med i selve oppgaven. Jeg vil bytte det ut med deltagersnummer som jeg har gitt ved oppstart. Deltakerne vil ikke kunne gjenkjennes i publikasjon.

Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om deg?
Vi behandler opplysninger om deg basert på ditt samtykke.

På oppdrag fra Universitetet i Sørøst-Norge har personverntjenestene ved Sikt – Kunnskapssektorens tjenesteleverandør, vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Dine rettigheter
Så lenge du kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:

- å be om innsyn i hvilke opplysninger vi behandler om deg, og få utlevert en kopi av opplysningene,
- å få rettet opplysninger om deg som er feil eller misvisende,
- å få slettet personopplysninger om deg,
- å sende klage til Datatilsynet om behandlingen av dine personopplysninger.

Vi vil gi deg en begrunnelse hvis vi mener at du ikke kan identifiseres, eller at rettighetene ikke kan utøves.

Hva skjer med personopplysningene dine når forskningsprosjektet avsluttes?
Prosjektet vil etter planen avsluttes 1.juni 2024. Opplysningene vil da bli slettet.

Spørsmål
Hvis du har spørsmål eller vil utøve dine rettigheter, ta kontakt med:

- USN ved Toan Gjøystdal Ngo, toan1804@osloskolen.no eller Andrea Hofmann, Andrea.Hofmann@usn.no
- Vårt personvernombud: Paal Andre Solberg personvernombud@usn.no

Hvis du har spørsmål knyttet til Sikts vurdering av prosjektet, kan du ta kontakt på e-post: personverntjenester@sikt.no, eller på telefon: 73 98 40 40.

Samtykkeerklæring

Jeg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet [sett inn tittel], og har fått anledning til å stille spørsmål. Jeg samtykker til:

- ☐ å delta i undervisning med lydopptak
- ☐ levre inn skriftlig elevarbeid fra undervisningen
- ☐ å delta i intervju i etterkant av undervisningen
- ☐ å kunne trekke tilbake samtykket og all informasjon som jeg har gitt

Jeg samtykker til at mine opplysninger behandles frem til prosjektet er avsluttet

---

(Signert av deltagers foresatt(e), dato)

Leveres tilbake på skolen innen ………………………………………

Vedlegg 2: Sikt

Sikt | Norsk | Toan Gjøystdal Ngo

Meldeskjema / Argumentasjon, resonnering og bevis i bevisbasert læring / Vurdering

Vurdering av behandling av personopplysninger

Skriv ut | 22.09.2023

Referansenummer	Vurderingstype	Dato
905958	Standard	22.09.2023

Tittel
Argumentasjon, resonnering og bevis i bevisbasert læring

Behandlingsansvarlig institusjon
Universitetet i Sørøst-Norge / Fakultet for humaniora, idrett- og utdanningsvitenskap / Institutt for matematikk og naturfag

Prosjektansvarlig
Andrea Hofmann

Student
Toan Gjøystdal Ngo

Prosjektperiode
01.10.2023 - 01.06.2024

Kategorier personopplysninger
Alminnelige

Lovlig grunnlag
Samtykke (Personvernforordningen art. 6 nr. 1 bokstav a)

Behandlingen av personopplysningene er lovlig så fremt den gjennomføres som oppgitt i meldeskjemaet. Det lovlige grunnlaget gjelder til 01.06.2024.

Meldeskjema

Kommentar

OM VURDERINGEN
Sikt har en avtale med institusjonen du forsker eller studerer ved. Denne avtalen innebærer at vi skal gi deg råd slik at behandlingen av personopplysninger i prosjektet ditt er lovlig etter personvernregelverket.

LOVLIG GRUNNLAG
Lovlig grunnlag for behandlingen av personopplysninger vil være den registrertes samtykke, jf. personvernforordningen art. 6 nr. 1 a). Prosjektet vil innhente samtykke fra foresatte til behandlingen av personopplysninger om barna.

KOMMENTARER TIL INFORMASJONSSKRIVET
I samtykkedelen i informasjonsskrivet står det kun at de samtykker til å bli tatt lydopptak av. Du bør ha en egen avkrysningsboks for at de også kan samtykke til at du får tilgang til notater/tegninger. Du trenger ikke å laste opp den oppdaterte versjonen i meldeskjemaet.

FØLG DIN INSTITUSJONS RETNINGSLINJER
Vi har vurdert at du har lovlig grunnlag til å behandle personopplysningene, men husk at det er institusjonen du er ansatt/student ved som avgjør hvilke databehandlere du kan bruke og hvordan du må lagre og sikre data i ditt prosjekt. Husk å bruke leverandører som din institusjon har avtale med (f.eks. ved skylagring, nettspørreskjema, videosamtale el.)

Personverntjenester legger til grunn at behandlingen oppfyller kravene i personvernforordningen om riktighet (art. 5.1 d), integritet og konfidensialitet (art. 5.1. f) og sikkerhet (art. 32).

MELD VESENTLIGE ENDRINGER
Dersom det skjer vesentlige endringer i behandlingen av personopplysninger, kan det være nødvendig å melde dette til oss ved å oppdatere meldeskjemaet. Se våre nettsider om hvilke endringer du må melde: https://sikt.no/melde-endringar-i-meldeskjema

OPPFØLGING AV PROSJEKTET
Vi vil følge opp ved planlagt avslutning for å avklare om behandlingen av personopplysningene er avsluttet.

Lykke til med prosjektet!

b0e5a9825