Universitetet i Sørøst-Norge
Fakultet for humaniora, idretts- og utdanningsvitenskap
–

Mastergradsavhandling
Studieprogram: MG2MA7
Vår 2023

John Anders Stavnes

Utviklingen av resonnering i norske matematiske læreverk

Hvilke muligheter blir gitt før og etter Fagfornyelsen?

Universitetet i Sørøst-Norge
Fakultet for humaniora, idretts- og utdanningsvitenskap
Institutt for matematikk og naturfag
Postboks 235
3603 Kongsberg

http://www.usn.no

Denne avhandlingen representerer 45 studiepoeng

Sammendrag

Jeg vil i denne masteroppgaven ta for meg matematisk resonnering og dets økte fokus for matematisk kunnskapslæring og forståelse i forskningsmiljøet samt styrende dokumenter (Kunnskapsdepartementet, 2019: Reid, 2002). Med Fagfornyelsen i Norge har det skapt til en rekke endringer i fokusområder på veien til kunnskap og læring, med blant annet et økt fokus på resonnering, som da skal gjenspeile seg i nyere læreverk skapt til denne. Jeg tar derfor for meg to ulike lærerveiledninger for å se hvilke muligheter disse skaper for matematisk resonnering. Fokuset vil ligge på om det har vært noen endringer på dette området før og etter Fagfornyelsen, samt hvilke prosesser som forskningen viser at må skapes en mulighet for å utføre matematisk resonnering. Forskningen som her er gjennomført er en kvalitativ dokumentanalyse med Jeanotte og Kieran (2017) sitt teoretiske rammeverk til grunn for matematisk resonnering. Denne oppgaven vil ta for seg denne analysen i lys av tidligere teorier og forskningen på feltet for så å diskutere og sammenligne disse.

Tidligere forskning i andre land viser at det ofte er tilfelle at det ved slike endringer i styrende dokumenter viser seg å være minimale endringer i praksis (Jacobs et al., 2006). Selv med en økt enighet i forskningsmiljøet på dette feltet om at matematisk resonnering kan være nøkkelen til kunnskapslæring i matematikk viser forskningen at dette er noe de fleste elever på ulike trinn sliter med å utføre (Thompson et al., 2012: Stylianides, 2009). Videre viser Stylianides (2009) til læreverk sin viktige rolle i hva, når og hvilke elementer som inkluderes i undervisningen ved at lærere ofte tar disse beslutningene basert på hva som formidles i læreverk. For å få til en forståelse av hvordan å utøve bevis er det helt essensielt at det skapes muligheter for de ulike prosessene som inngår i matematisk resonnering (Stylianides, 2009: Thompson et al., 2012). Blir disse mulighetene gitt i lærerveiledninger? Denne oppgaven vil forsøke å svare på dette og andre spørsmål knyttet til hvilke muligheter som blir gitt for matematisk resonnering i lærerveiledninger.

I lys av min undersøkelse kommer det frem at lærerveiledningene både før og etter Fagfornyelsen gir liten mulighet for matematisk resonnering i de nummererte og mest vanlige oppgavene i sine bøker. Matematisk resonnering frem til bevisføring er fortsatt en sjelden mulighet som blir gitt, men med en markant prosentvis økning etter Fagfornyelsen. I de fleste tilfeller hvor matematisk resonnering blir gitt som en mulighet er det i from av andre alternative aktiviteter, oppstartsspørsmål, undringer og generelt oppgaver som ikke er nummererte. I analysen kommer det frem at det er identifisering av mønstre, antakelse, sammenligning og eksemplifisering som er de gjennomgående og mest hyppige prosessene som det blir gitt muligheter for.

Abstract

In this master's thesis, I will deal with mathematical reasoning and its increased focus for mathematical knowledge learning and understanding in the research environment as well as governing documents (Kunnskapsdepartementet, 2019: Reid, 2002). With the subject renewal in Norway, it has created a number of changes in focus areas on the way to knowledge and learning, with, among other things, an increased focus on reasoning, which then should be reflected in newer teaching books created for this. I therefore consider two different teacher guides to see what opportunities these create for mathematical reasoning. The focus will be on whether there have been any changes in this area before and after the subject renewal, as well as which processes that the research shows must be created to enable mathematical reasoning. The research carried out here is a qualitative document analysis with Jeanotte and Kieran's (2017) theoretical framework as the basis for mathematical reasoning. This thesis will deal with this analysis in the light of previous theories and research in the field and then discuss and compare these.

Previous research in other countries shows that it is often the case that such changes in governing documents turn out to be minimal changes in practice (Jacobs et al., 2006). Even with an increased agreement in the research environment in this field that mathematical reasoning can be the key to knowledge learning in mathematics, the research shows that this is something that most students at various levels struggle to perform (Thompson et al., 2012: Stylianides, 2009). Furthermore, Stylianides (2009) shows that textbooks play an important role in what, when and which elements are included in the teaching by the fact that teachers often make these decisions based on what is conveyed in textbooks. In order to gain an understanding of how to exercise proof, it is absolutely essential that opportunities are created for the various processes that are part of mathematical reasoning (Stylianides, 2009: Thompson et al., 2012). Are these possibilities provided in teacher guides? This thesis will try to answer this and other questions related to what opportunities that are given for mathematical reasoning in teacher guides.

In the light of my investigation, it appears that the teacher's guides both before and after the subject renewal provide little opportunity for mathematical reasoning in the numbered and most common tasks in their books. Mathematical reasoning up to proof is still a rare opportunity that is given, but with a marked percentage increase after the subject renewal. In most cases where mathematical reasoning is given as an option, it is in addition to other alternative activities, starter questions, questions and generally tasks that are not numbered. In the analysis, it emerges that identification, conjecturing, comparing and exemplification are the consistent and most frequent opportunities.

Innholdsfortegnelse

Forord

Denne masteroppgaven er for meg verken slutten eller begynnelsen på nye kapitler og endringer i livet. Jeg har tidligere utdannet meg som adjunkt og jobbet som matematikklærer på ungdomsskolen de siste 4 årene, noe det vil jeg fortsette med i lang tid. Oppgaven har derimot vært et viktig bidrag for meg og mine kollegaer til ettertanke og refleksjon i vårt daglige arbeid og alle endringer som følger av Fagfornyelsen.

Jeg vil trekke frem at jeg i arbeid med denne oppgaven har fått en ekstra øyeåpner på hvilke muligheter vi lærere blir servert gjennom utarbeidet læreverk, og hvilke muligheter vi selv må bygge videre på for oppnå visjonen til Fagfornyelsen, samt hvilke muligheter som er helt avhengig av våre forkunnskaper, gjennomtenkte- og profesjonsfaglige planlegginger, gjennomføringer og vurderinger.

Jeg vil med dette takke for muligheten USN og kommunen har gitt meg i arbeid med denne studien til å videreutvikle meg og min profesjon. Selv om det nå blir noen år med pause fra videreutdanning og andre studier, vil jeg fortsette og hele tiden utvikle meg i min jobb og mitt profesjonsfaglige yrke. Takk for meg og denne flotte muligheten, god lesing.

<Båtsfjord, 26.05.23>
<John Anders Stavnes>

1 Innledning

1.1 Oversettelse

I prosessen med denne oppgaven har det dukket opp en rekke ulike begreper i de engelske artiklene som danner store deler av grunnlaget for denne studien. Jeg vil derfor starte med en kort forklaring av oversettelsene av disse begrepene som er blitt gjort i denne oppgaven.

Reasoning – resonnering
Generalizing – generalisering
Conjecturing – antakelse
Identifying a pattern – identifisere et mønster
Comparing – sammenligne
Classifying – klassifisere
Justifying – rettferdiggjøre
Proving – bevise
Formal proving – formelt bevise

De fleste av disse begrepene vil kunne sies og ha en helt naturlig oversettelse til norsk, uten noen store problemstillinger eller vurderinger av dets mening. To av begrepene vil jeg trekke frem, da de har bydd på flere utfordringer i oversettelsen, *conjecturing* og *justifying.*

Conjecturing kan ved oversettelse bety flere ting, både gjetning og antakelse dukket opp i min søken på en oversettelse. Som vi vil se senere i oppgaven vil oversettelsen til gjetning by på litt ulike problemer, da forklaringen på dette begrepet går ut på å lage en fortelling eller historie som bygger på kunnskaper eller gitt informasjon. Gjetning tenker jeg i den forstand kan som en konsekvens forenkle begrepet til en mer tilfeldig prosess og på den måten endre begrepets betydning. Videre har jeg også sett at en tidligere masteroppgave har oversatt begrepet til hypotesesetting (Halsne, 2022). Noe jeg fant passende, men samtidig følte jeg denne oversettelsen bidrar til en komplisering av begrepet, ved å gjøre denne prosessen mer høytidelig enn den trenger å være. Min oppfatning av begrepet hypotesesetting gjør at jeg tenker på en mer formell prosess som i den forstand ofte må være skriftlig. Valget falt derfor på antakelse som begrep i denne oppgaven, ettersom dette kan dekke samme forståelsen som hypotesesetting, men samtidig et mer vanlig begrep i det norske språk som.

Justifying kan også bety flere ting ved en oversettelse til norsk. Begrepene jeg fant relevante på norsk var rettferdiggjørelse og begrunnelse, hvor sistnevnte ble brukt av Halsne (2022) i sin masteroppgave. Argument ville også vært et alternativ ved en oversettelse til norsk, men dette hadde skapt stor forvirring ved at det engelske begrepet *argument* også er ofte å finne i artikler på engelsk. Valget falt etter nøye vurderinger på rettferdiggjørelse ettersom jeg følte dette kan skape en forståelse av at denne prosessen sitt mål om å rettferdiggjøre sine argumenter, antakelser, utsagn med mer er en essensiell del, heller enn å bare begrunne disse. Begrepet vil med denne oversettelsen kunne skape en følelse av en prosess som det stilles mer krav til.

Begrepene kunne også fått andre oversettelser, men jeg har valgt å inkludere begrunnelsene for hvorfor noen av de mulige oversettelsene her ble utelatt og bakgrunnen for de valgte oversettelsene i håp om å skape en transparens i denne oversettelsesprosessen.

1.2 Bakgrunn for studien

I Fagfornyelsen under kjerneelementer for matematikk står det følgende om resonnering:

> ***«Resonnering og argumentasjon***
> *Resonnering i matematikk handler om å kunne følge, vurdere og forstå matematiske tankerekker. Det innebærer at elevene skal forstå at matematiske regler og resultater ikke er tilfeldige, men har klare begrunnelser. Elevene skal utforme egne resonnementer både for å forstå og for å løse problemer. Argumentasjon i matematikk handler om at elevene begrunner framgangsmåter, resonnementer og løsninger og beviser at disse er gyldige.»*
> (Kunnskapsdepartementet, 2019, s. 3)

Slik argumentasjon her blir beskrevet vil vi se videre i oppgaven at litteraturen og forskningen referer til som en del av matematisk resonnering. Det samme gjelder generalisering som står som et eget kjerneelement sammen med abstraksjon (Kunnskapsdepartementet, 2019). Om dette er uvitenhet eller for å understreke generalisering og argumentasjon som andre viktige punkter er vanskelig å si noe om, men dette understreker viktigheten og ønsket økt søkelys på matematisk resonnering for alle elever på grunnskolen, samtidig som det bidrar til å belyse utydeligheten og kompleksiteten bak begrepet matematisk resonnering.

I artikkelen «A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics” fra 2017 refererer Jeanotte og Kieran til Yackel og Hanna (2003, s. 228) når de skriver:

«Tekster skrevet om resonnering i matematikk er komplisert med bakgrunn i at resonnering, på samme måte som forståelse, blir brukt bredt med en implisitt antakelse om at det er en universal forståelse av dets mening. Noe en dyp undersøkelse av forskningslitteraturen antyder tydelig at denne antagelsen ikke holder mål.» (s. 2)

Til tross for bred enighet om at aktiviteten med å resonnere-og-bevise bør være sentral i alle elevers matematiske erfaringer, møter mange elever alvorlige vanskeligheter med denne aktiviteten. Lærebøker i matematikk kan spille en viktig rolle i elevenes muligheter til å engasjere seg i resonnement og bevis: forskning tyder på at mange beslutninger som lærere tar om hvilke oppgaver de skal inkludere i klasserommet og når og hvordan de skal implementeres, formidles av lærebøkene de bruker. Likevel er lite kjent om hvordan resonnering og bevis fremmes i lærebøker om matematikk på skolen. (Stylianides, 2009, s.258)

I National Council of Teachers of Mathematics (2009) oppsummerende artikkel om fokus i matematikk på «high school» med spesielt søkelys på resonnering og forståelse, trekkes formelle resonneringer som noe som vektlegges ofte i geometri, men studentene opplever med mindre sannsynlighet resonneringer på andre områder av læreplanen. Det trekkes frem at ved å tilføre resonnering og forståelse overalt i læreplanen vil en la elevene oppdage sammenhenger på tvers av matematikk og på den måten hjelpe dem å se hvordan nye konsepter kobles sammen med eksisterende kunnskap. Selv om resonnering ikke bør sees på som et sett med nye emner, men snarere en holdning til matematikklæring, vil et søkelys på resonnering og meningsskaping uunngåelig kreve tid til instruksjoner. (National Council of Teachers of Mathematics, 2009)

Stylianides (2009) referrer til TIMSS (Third International Mathematics and Science Study, 1999), Hiebert et al. (2003) og Manaster (1998) hvor han skriver at studier i mange land indikerer at matematiske instruksjoner som er ment å fostre resonnering-og-bevis skiller seg fra normen. Dette skriver Stylianides (2009) videre at er problematisk hvor han referer til Yackel og Hanna (2003), med bakgrunn i at det vil være urealistisk å forvente at elever vil utvikle ferdigheter i resonnering-og-bevis med mindre denne aktiviteten får systematisk oppmerksomhet i matematiske instruksjoner. Det samme trekker Berqvist og Lithner (2012) frem hvor de referer til en rekke andre kilder som er på å understreke enigheten i det matematikkdidaktiske samfunnet om denne problematikken:

> "One of the main causes of difficulties in learning mathematics is that mathematics is often reduced to a large set of isolated, incomprehensible facts and procedures to be memorized

and recalled for written tests (Hiebert, 2003; Tall, 1996; Tirosh & Graeber, 1990; White & Mitchelmore, 1996)." (Bergqvist & Lithner, 2012, s. 252)

I tillegg til å «dekke» matematiske emner, må videregående skole matematikkprogrammene gi oppmerksomhet til utvikling i disse resonneringsvanene på en kontinuerlig basis og ikke som et sett av nye emner som skal undervises, men som en integrert del av læreplanen (National Council of Teachers of Mathematics, 2009). Stylianides (2009) trekker frem at det er nettopp dette som har vært i tilfelle ved bevisføring i matematikkundervisningen og at det ofte kommer inn under temaet geometri, noe også artikkelen til National Council of Teachers of Mathematics (2009) påpeker er tilfelle ved resonnering. Stylianides (2009) fremhever at for en matematiker vil strukturen på en vanlig praksis ved å komme til et bevis innebære å utforske matematiske sammenhenger for å identifisere og ordne viktige fakta i meningsfulle mønstre, for så å bruke mønstrene til å formulere antakelser, teste antakelsene mot nye bevis og revidere antakelsene for så å formulere nye antakelser som samsvarer med bevisene og gi uformelle argumenter som demonstrerer levedyktigheten til antakelsene. Det er altså dette Stylianides (2009) trekker frem som essensielle aktiviteter for å hjelpe matematikere med å forstå sammenhenger og bygge et grunnlag for å utvikle et bevis. Med dette i bakhodet vil elevene derfor kunne bli fratatt viktige byggesteiner i forsøk på å prøve å forstå og etablere matematisk kunnskap når bevis i skolematematikken behandles isolert fra andre aktiviteter som støtter utviklingen. Stylianides (2009) bruker derfor begrepet resonnering-og-bevis (rp, reasoning-and-prove) for å beskrive aktiviteten som tar for seg disse hovedaktivitetene som involverte prosesser med å forstå og etablere matematisk kunnskap; identifisere mønstre, lage antakelser, gi ikke-bevis argumenter og fremlegge bevis. For å hjelpe elevene sin fremgang til høyere nivåer av resonnering, må lærere fornuftig velge oppgaver som krever at de finner ut av ting av seg selv og stille inngående spørsmål (National Council of Teachers of Mathematics, 2009).

Med bakgrunn i dette økte fokuset på matematisk resonnering på grunnskolen, både i forskningen og Fagfornyelsen gjorde at jeg fikk lyst til å undersøke dette nærmere. Ved at flere forskningsartikler skrevet innen dette feltet trekker frem både kompleksiteten ved begrepet resonnering, samt elever på alle trinn sinn utfordring med utøvelse av resonnering frem til bevis gjør at jeg føler denne studien vil kunne være et hensiktsmessig bidrag til det samfunnsdidaktiske forskningsmiljøet på dette feltet. Med Jeanotte og Kieran (2017) sin uttalelse om at det ikke stemmer at det er en universal forståelse av matematisk resonnering, samt det Stylianides (2009) skriver om at lærebøker i matematikk kan i stor grad styre elevenes mulighet for å engasjere seg i matematisk resonnering ved at lærere ofte lar seg styre av lærebøkene, gjør at jeg her ønsker å bidra til en økning av forskningen på dette feltet i form av min masteroppgave. Bakgrunn for valg av datamaterialet i form av læreverk ble gjort på bakgrunn av at det her vil kunne være mulig å undersøke om det har vært en endring i fokuset på matematisk resonnering før og etter Fagfornyelsen, samtidig som det er flere forskningsartikler som trekker lærerbøker frem som en mulighet for videre forskning på feltet. Valget på lærerveiledninger heller enn lærebøker ble gjort med bakgrunn i en tidligere masteroppgave jeg har kommet over, som forsket på hvilke kjennetegn det var i innhold i lærerveiledninger for matematisk resonnering for 2. klasse på grunnskolen (Halsne, 2022). Dette skapte en interesse for meg om matematisk resonnering og det vil være mulig å få et større innblikk i forfatternes mening bak læreverket i en lærerveiledning, med tilhørende tips og forklaringer til innhold som blir gitt i lærebøkene. Mitt ønske med denne studien vil derfor være å skape et bidrag i forskningsmiljøet som kan skape en økt bevisstgjøring rundt hvilke muligheter for matematisk resonnering som blir gitt i disse lærerveiledningene for både forskere og matematikklærere, samtidig som dette kan bidra til å forenkle og bevisstgjøre matematikklærere i prosessen med å tilrettelegge for muligheter for matematisk resonnering i sin undervisning.

1.3 Studiens forskningsspørsmål og avgrensinger

Forskningsspørsmålet som ligger til grunn for denne studien og som skal besvares i denne oppgaven er:

> Hvilke muligheter for matematisk resonnering blir gitt i innhold presentert i lærerveiledninger før og etter Fagfornyelsen?

For å besvare dette spørsmålet og holde meg innen et omfang av en studie passende til en masteroppgave, har jeg her valgt å forholde meg til to lærerveiledninger fra samme forlag med samme forfattere. Ettersom dette gjør at endringen fra før og etter Fagfornyelsen blir mer tydelig, da det er de samme personene som har skapt verkene, og den eneste faktoren som har blitt endret for utgangspunktet til disse dokumentene er Fagfornyelsen. Valget falt på Cappelen Damm sine to nyeste verker, da disse er et veletablert forlag i Norge, samt at jeg som matematikklærer de siste 4 årene har jobbet på en skole hvor Cappelen Damm sine verk har vært i bruk. I lærerveiledningen før Fagfornyelsen står det: «Faktor dekker alle målene i Kunnskapsløftet etter revidert plan 2013 i faget matematikk og er lagd til bruk på grunnskolens ungdomstrinn.» (Hjardar & Pedersen, 2015, s. 349) Tilsvarende setning står i Cappelen Damm sin nyeste lærerveiledning: «Matematikk 10 Lærerens bok fra Cappelen Damm er lagd til Fagfornyelsen i faget matematikk og er til bruk på grunnskolens ungdomstrinn.» (Hjardar & Pedersen, 2022, s. 2) Disse uttalelsene gjør at de hevder å være tilpasset endringene som er kommet med Fagfornyelsen, samt tilpasset den reviderte planen i Kunnskapsløftet i den tidligere utgaven, slik at rammene ligger til rette for å utføre en undersøkelse på disse for å besvare mitt forskningsspørsmål.

Videre har jeg ønsket å ta for meg så store deler av disse kapitelene som mulig for å få et helhetsbilde i min datainnsamling før videre analyse. Jeg har valgt å forholde meg til lærerveiledningene. Henvisninger til oppgavebok eller alternativoppgavebok er derfor ikke tatt med her i min datainnsamling. I nest siste del av hvert kapitel tar de for seg noe de kaller «Prøv deg selv» (Faktor 10) og «Underveisvurdering» (Matematikk 10) som jeg har valgt å ekskludere i min analyse. Eter nøye vurderinger ser jeg at disse er bare en form for repetisjon av det elevene og læreren skal ha vært igjennom tidligere i kapittelet i form av en egentest. Noe som dessverre også må ha utgått på bakgrunn av mangel på lisenser og tilgang er det bøkene kaller «Kopieringsoriginaler», ettersom disse krever en egen lisens til deres nettressurs. Jeg har likevel fått utført en analyse av disse tilhørende Faktor 10, da jeg har tilgang til disse via min jobb. Etter en lang prosess og korrespondanse med Cappelen Damm, så jeg meg allikevel nødt til å utelate disse da jeg ikke fikk lisens til «kopieringsoriginalene» tilhørende Matematikk 10. For å få et så likt helhetsbilde av disse to bøkene, har jeg derfor valgt å utelate dette datamaterialet fra begge to, men en vertikal analyse av «kopieringsoriginalene» til Faktor 10 kan ses i vedlegg. For mer om valg av datamaterialet se *3.3 Utvalg*.

1.4 Studiens vitenskapsteoretiske forankring

Nyeng (2012) påpeker at ved vitenskap eller forskning vil det være måten vi søker etter sannheten som skiller dette fra andre kunnskapskilder. Metoden vi bruker i en slik prosess har sin forankring i et vitenskapsteoretisk perspektiv, som legger grunnlaget for hvordan forskeren går frem i sin studie. Jeg vil derfor klargjøre kort mitt vitenskapsteoretiske perspektiv i arbeid med denne oppgaven og bakgrunnen for dette.

Ved at jeg her har utført en dokumentanalyse, følte jeg at en positivistisk forankring her ville være passende. Nyeng (2012) trekker frem logisk positivisme som det første synet på positivismen gjennom tidene, hvor målet er å komme frem til en objektiv og universell sannhet som gjenspeiler en realistisk og bevisstuavhengig verden. Videre trekker han frem at det i dag er få som står inne for den logiske positivismen fullt ut innenfor samfunnsvitenskapen, men at det fortsatt finnes spor etter den (Nyeng, 2012). Det er dagens positivisme som denne studien har sin forankring i ved at jeg her har samlet inn et datamateriale som allerede ligger tilgjengelig og vil kunne analyseres uten noen sosial eller direkte påvirkning fra meg. Det vil likevel være viktig å påpeke at det ved en dokumentanalyse helt klart vil bære preg av mine personlige tolkninger og forståelser, både i analysen og utvelgelsen av datamaterialet (Johannessen et al., 2021). Dette forklarer Nyeng (2012) er slik positivismen blir sett på i dag innenfor samfunnsvitenskapen, ved at målet blir å oppdage hvordan noe fremtrer ved å studere det så objektivt som mulig. Den vitenskapsteoretiske forankringen i denne studien vil derfor være det Nyeng (2012) kaller dagens positivisme, hvor ønske er å stå på en trygg empirisk grunn, uten å hevde eller konkludere med mer enn det som faktisk kan bevises i form av nøyaktige observasjoner.

1.5 Oppgavens struktur

Kapittel 1: Innledning
Kapittel 2: Ulike teoretiske synspunkt og tidligere forskning på dette feltet, samt valg av teoretisk rammeverk. Det er her lagt vekt på de ulike tilnærmingene på tidligere forskningen innenfor matematisk resonnering og viktige begreper. Jeanotte og Kierans (2017) sin modell for matematisk resonnering blir viktig del av teorien da dette legges til grunn for videre analyse av datamaterialet.
Kapittel 3: Metode. I denne oppgaven er det utført en dokumentanalyse, metoden vil her bli gjort rede for.
Kapittel 4: Resultater. Her blir mine funn kort oppsummert før en rekke eksempler for å illustrere og argumentere bakgrunnen for mine resultater av analysen. De ulike eksemplene blir delt inn i underkategorier ut ifra funn, noe en vil se igjen i diskusjonen.
Kapittel 5: Diskusjon. Her blir de ulike funnene delt opp i ulike temaer og drøftet opp mot tidligere forskning og teori innenfor feltet, som tidligere er oppgitt i oppgaven. Her vil de ulike elementene flettes sammen og resultatene vil bli belyst ut ifra allerede eksisterende forskning på feltet. Avslutningsvis diskuteres studiens begrensninger, implikasjoner og muligheter for videre forskning.
Kapittel 6: Konklusjon. En oppsummerende tekst av hva denne studien har undersøkt med svar på forskningsspørsmålet, samt en oppfordring avslutningsvis.
Kapittel 7: Referanser/litteraturliste
Kapittel 8: Vedlegg

2 Teori

Kaarstein, Radišić, Lehre, Nilsen & Bergem (2020) skriver i sin kortrapport av TIMSS 2019 følgende om det kognitive området «å resonnere»:

> «Å resonnere innebærer å tenke logisk, analysere situasjoner og sammenhenger, generalisere resultater, kombinere informasjon, begrunne påstander og løse problemer som ikke er rutinepreget.» (Kaarstein et al., 2020, s. 59)

2.1 Tidligere forskning og teoretiske synspunkt på matematisk resonnering

I artikkelen til Reid fra 2002 skriver han om hvor stort fokus det i dag er på matematisk resonnering i skolen og dets viktighet for læring i matematikk. Han forsker derfor på både hvilke trekk som kan være til stede i matematisk resonnering, men også i hvilken grad de er til stede, på en gruppe i 5. klasse som er blitt observert i arbeid med oppgaver. Mønsteret i matematisk resonnering innebærer ifølge Reid (2002) å anta en generell regel, teste den regelen, og deretter enten bruke den til videre utforskning, avvisning eller modifisering av den.

Videre i sin artikkel skriver Reid (2002) om de ulike måtene mønsteret i matematisk resonnering kan utspille seg ut ifra de observasjonene som er blitt gjort. De ulike elementet kan nemlig dukke opp i en rekke ulike mønster (se figur 1).

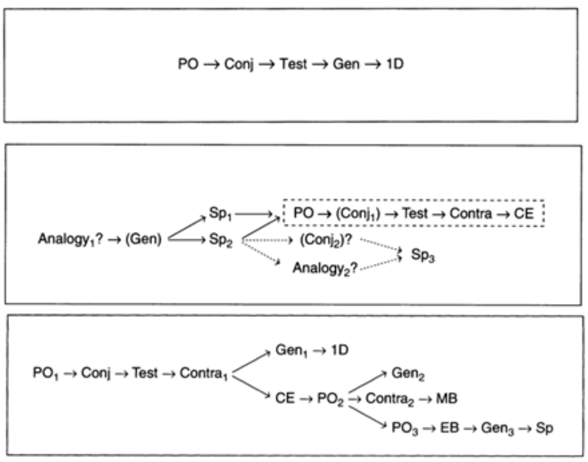


Fig.1: 3 ulike mønstre i en matematisk resonneringsprosess av Reid (2002, s. 12, 15 og 19)

Som en ser av figur 1 er det en rekke ulike veier og prosesser som dukker opp i de tre ulike observasjonene av elevenes arbeid som Reid (2002) her fremstiller. Felles for dem alle er observasjonen av et mønster (PO), anta at mønsteret fungerer generelt (Conj), teste antakelsen (Test) og generalisere antakelsen (Gen). Som vi ser i teorien er alle disse begreper og prosesser som går igjen når en snakker om matematisk resonnering.

I artikkelen til Thompson, Senk & Johnson (2012) "Opportunities to Learn Reasoning and Proof in High School Mathematics Textbooks", analyserer de 20 ulike læreverk på «High school – nivå», etter muligheter for det de kaller bevis-relatert resonnering innenfor emnene eksponenter, logaritmer og polynomer. De tar for seg både tekst og oppgaver i disse bøkene for å på den måten se hvilke muligheter elever får til å utføre bevis-relatert resonnering. Her referer de også til viktigheten av antakelser og bevis, men de ønsker å trekke inn noen andre faktorer de argumenterer for at er viktige i prosessen for at elever skal få muligheten til å utføre formelle bevis. Thompson et al. (2012) forklarer blant annet at det å finne moteksempler eller lage og undersøke antakelser også kan være viktige inngangsporter til bevis-relatert resonnering. Videre trekkes også rettferdiggjørelse inn i artikkelen til Thompson et al. (2012) som en viktig kategori. Thompson et al. (2012) forklarer at deres hensikt med bruken av dette begrepet er for å ta for seg all form for begrunnelser eller argumenter for å forklare hvorfor et matematisk utsagn gir mening. Begrepet rettferdiggjørelse deles så videre opp i underkategorier, hvor den ene er det Thompson et al. (2012) forklarer alle matematiker eller matematikklærere ville kalt et bevis, ved at det tar utgangspunkt i det generelle – dette kalles i artikkelen for generelt argument. Den andre underkategorien er det de kaller spesifikt argument, hvor «beviset» blir utført i forhold til et spesifikt eksempel. Dette er altså noe en matematiker ikke ville kalt et bevis ifølge Thompson et al. (2012), men at det vil være mulig å se det generelle beviset via dette, ettersom det ikke er noe spesifikt fra «saken» som entrer beviset. Thompson et al. (2012) sin studie viser at selv om litteraturen og forskningen er enige om at resonnering og bevis er helt avgjørende for elevers læring i matematikk, så gav et fåtall av deres analyserte datamaterialet muligheter for formelle bevis (5,4%). De henviser også til Stylianides (2008) sin studie «Connected Mathematics Project» hvor temaene som ble inkludert var algebra, tallteori og geometrienheter innenfor ungdomsskolens læreplan materialer, som resulterte i at omtrent 5% av oppgavene som ble analysert ble kodet som «bevisoppgaver». Dette kan tenkes å være med på å forsterke uttalelsen til både Thompson et al. (2012) og Stylianides (2009) om at selv om det er en økning i en enighet om at resonnering-og-bevis eller bevis-relatert resonnering er en viktig del av kunnskapslæring i matematikk, viser en stor del av forskningen at elever i ulike land sliter med de ulike delene som inngår i nettopp dette, spesielt utviklingen av bevis.

Bergqvist & Lithner (2012) sin artikkel «Mathematical reasoning in teachers' presentations» tar for seg en studie av mulighetene som elever tilbys som tillater dem å lære ulike typer matematisk resonnering inn under lærernes ordinære oppgaveløsningspresentasjoner. Her samlet de inn data fra flere ulike nivåer i skolesystemet i Sverige. De tok for seg undervisninger på ungdomsskolen, videregående og universitet. Hovedhensikten med denne studien er å finne kvalitativ informasjon som indikerer hvordan lærerne presenterer forskjellig typer resonnement (Bergqvist & Lithner, 2012). I denne forskningen delte Bergqvist & Lithner (2012) resonnering inn i to ulike former, det de kaller algoritmisk resonnering og kreativ matematisk resonnering. Den sistnevnte kan tenkes å være en form av matematisk resonnering som oppfyller alle prosessaspektene til Jeanotte og Kieran (2017) for matematisk resonnering, se *2.1.2.2 prosessaspektet for matematisk resonnering*. Denne formen for matematisk resonnering fant Bergqvist & Lithner (2012) lite av i sin forskning, og de fleste tilfellene falt derfor på algoritmisk resonnering, noe vi ser igjen av i forskningen på dette feltet. Det vil være viktig å få frem at Bergqvist & Lithner (2012) spesifiserer at de ikke får innsyn i alt som foregår i undervisningen av matematikk og det kan foreligge andre plasser med det de kaller kreativ matematisk resonnering, som f.eks. lærebøkene deres.

I artikkelen til Lithner (2004) forklarer han at målet med oppgaven er å studere noen av strategiene som er mulig å bruke for å løse øvelsene i lærebøker for grunnutdanning. Her utfører Lithner (2004) først en kvalitativ undersøkelse på en lærerbok ved å ta for seg hvordan type resonnering som trengs å tas i bruk av elevene for løse oppgavene. Rammeverket han tar i bruk her er en 4 stegs-modell:

> (1) En problematisk situasjon møtes der det ikke er åpenbart hvordan man skal gå frem.
> (2) Strategivalg: Prøv å velge (i vid forstand: velge, huske, konstruere, oppdage osv.) en strategi som kan løse vanskeligheten. Dette valget kan støttes av prediktiv argumentasjon: Vil strategien løse vanskeligheten?
> (3) Strategiimplementering: Dette kan støttes av verifikativ argumentasjon: Løste strategien vanskeligheten?
> (4) Konklusjon: Et resultat er oppnådd.
> (Lithner, 2004)

Videre deler Lithner (2004) resonnering opp i to ulike former, nemlig «matematisk velbegrunnet resonnering» og «overfladisk resonnering». Disser deler han så opp i noen underkategorier for resonnering.

Matematisk velbegrunnet resonnering:
En versjon av resonneringsstrukturen (1–4) kalles plausibel resonnering (**PR**) hvis argumentasjonen:

(i) er basert på iboende matematiske egenskaper til komponentene som er involvert i resonneringen, og

(ii) er ment å veilede mot det som sannsynligvis er sannheten, uten nødvendigvis å være fullstendig eller riktig

(Lithner, 2004)

Overfladisk resonnering:
Gjentatt algoritme resonnering (**RAR**):

(i) Det generelle strategivalget er å gjentatte ganger bruke algoritmer, der hvert lokale strategivalg er basert på å huske at en bestemt algoritme vil løse en bestemt oppgavetype. Algoritmene velges fra et sett med tilgjengelige algoritmer som er relatert til oppgavetype, kun etter overflateegenskaper.

(ii) Strategiimplementeringen gjennomføres ved å følge algoritmene. Det kreves ingen bekreftende argumentasjon. Hvis en implementert algoritme stopper eller ikke fører til en rimelig konklusjon, så blir ikke implementeringen evaluert, men bare avsluttet og en ny algoritme er valgt.

(Lithner, 2004)

Resonnering basert på etablerte erfaringer (**EE**), hvor argumentasjonen:

(i) er basert på forestillinger og prosedyrer etablert på grunnlag av den enkeltes tidligere erfaringer fra læringsmiljøet, og

(ii) er ment å veilede mot det som sannsynligvis er sannheten, uten nødvendigvis å være fullstendig eller riktig.

(Lithner, 2004)

I sin kvantitative forskning finner Lithner (2004) at det er tre ulike resonneringsmuligheter for elever å løse disse oppgavene på; identifikasjon av likheter (IS), lokal plausibel resonnering (LPR) og global plausibel resonnering (GPR).

Identifikasjon av likheter (IS): resonneringen må oppfylle begge av følgende to betingelser:

(i) Strategivalget er basert på å identifisere lignende overflateegenskaper i et eksempel, regel, definisjon, teorem, eller en annen situasjon som er beskrevet tidligere i teksten.

(ii) Strategiimplementeringen gjennomføres ved å kopiere prosedyren fra den identifiserte situasjonen

(Lithner, 2004)

Lokalt plausibelt resonnement (LPR): må skille seg fra IS på minst én av følgende to måter:

(i) Strategivalget er basert på å identifisere likheter mellom komponenter i øvelsen og komponenter i en situasjon i teksten, men disse komponentene er forskjellige i en eller noen få lokale deler og plausibel resonnering brukes for å avgjøre om prosedyren kan kopieres for å løse oppgaven eller ikke.

(ii) Strategiimplementeringen er hovedsakelig basert på å kopiere løsningsprosedyren fra de identifiserte situasjon, men ett eller noen få lokale trinn i denne prosedyren er modifisert av konstruktiv plausibel resonnering.

(Lithner, 2004)

Globalt plausibelt resonnement (GPR): minst ett av følgende vilkår må være oppfylt:

(i) Strategivalget er hovedsakelig basert på å analysere og vurdere de iboende matematiske egenskapene til komponentene i øvelsen. En løsningsidé er konstruert og støttet av plausibel resonnering.

(ii) Strategiimplementeringen støttes hovedsakelig av plausibel resonnering basert på iboende matematisk egenskaper.

(Lithner, 2004)

Disse tre ulike formene for resonnering sjekker Lithner (2004) så i en kvantitativ forskning opp mot 3 ulike lærebøker og 598 oppgaver for å se hvor ofte disse vil få en mulighet å inntreffe for elevene.

Lithner (2004) sine funn viser at det er ca 90% av alle oppgavene i hans undersøkelse som kan løses ved det han kaller IS eller LPR og bare noen få oppgaver i form av «challenging problems» er av typen GPR, som vil si at det for det meste holder med en metode hvor en leter etter passende strategier til å løse en oppgave i boken. I tilfeller der hvor boken ikke er tilgjengelig som ved eksamen eller andre aktiviteter, blir utfordring for elevene å huske disse passende strategiene de antar at sannsynlig vil gi dem det rette svaret. Til slutt påpeker Lithner (2004) en ekstra utfordring med GPR ved at den både skal konstrueres og ikke bare kopieres fra andre, men også at det må være basert på iboende matematiske egenskaper til de involverte komponentene. Denne doble vanskeligheten i GPR-øvelser forklarer Lithner (2004) at kan føre til at de blir mye vanskeligere sammenlignet med IS- og LPR-øvelser enn det var ment av lærebokforfatter eller en lærer som anbefaler disse øvelsene til elevene.

I artikkelen til Jacobs, Hiebert, Givvin, Hollingsworth, Garnier & Wearne (2006) "Does Eighth-Grade Mathematics Teaching in the United States Align With the NCTM Standards? Results From the TIMSS 1995 and 1999 Video Studies" undersøker de som tittel tilsier hvorvidt undervisningen i matematikk for 8. klasse i USA gjenspeiler med NCTM standerne som er satt med bakgrunn i resultatene fra TIMSS i 1995 og 1999. Artikkelen deres bygger på data samlet inn i USA for videodelene av TIMSS 1995- og TIMSS 1999-studiene. I denne artikkelen presenterer Jacobs et al. (2006) nye analyser som setter søkelys på leksjonene i USA og som søker etter endringer i undervisningspraksis fra midten til slutten av 1990-tallet.

Resultatene Jacobs et al. (2006) fikk om elevenes engasjement i matematisk resonnering forklarer de at kan indikere at spesielle former for matematisk resonnering ikke forekom i leksjonene i USA. Videre skriver Jacobs et al. (2006) at ingen matematikkproblemer i noen av leksjonene involverte bevis. De fleste spesielle formene for resonnering var altså fraværende. Basert på disse funnene argumenterer Jacobs et al. (2006) at det er usannsynlig at den typen matematisk resonnering som er anbefalt i prinsipper og standarder for 6.-8. klasse forekommer i typiske matematiske klasserom i åttende klasse i USA. Jacobs et al. (2006) tolker sine funn til å antyde at endringene er minimale og matematisk tenkning og resonnering, samt det konseptuelle matematiske arbeidet ikke forblir i tråd med intensjonen av prinsipper og standarder.

De ulike studiene gjort innen dette feltet viser kompleksiteten i begrepet og utførelsen av matematisk resonnering for elever på skolen, samt minimalt med endringer etter nye nasjonale fokusområder på nettopp matematisk resonnering. Læreverk trekkes også frem i forskningsartikler som en viktig del i implementeringen av matematisk resonnering, både ved læreverks tendens til å styre undervisningen, men også manglende innsikt i hvilke muligheter som blir gitt for matematisk resonnering i disse.

2.1.1 Resonnering i samhandling med andre

Ifølge Yackel og Cobb (1996) er en grunnleggende antakelse i det som kalles interaksjonismen at kulturelle og sosiale prosesser er en integrert del av matematisk aktivitet og dette synet aksepteres i økende grad av matematikkundervisningsmiljøet hvor de referer til en rekke andre kilder (Voigt, 1995; Cobb, 1990; Eisenhart, 1988; Greeno, 1991; Resnick, 1989; Richards, 1991). Med bakgrunn i dette argumenterer Yackel og Cobb (1996) for at utviklingen av personers resonnering- og meningsdannelse prosesser derfor ikke kan skilles fra deres deltakelse i interaktive samtaler og sosiale kontekster innenfor matematikk. Videre referer Yackel og Cobb (1996) til Voigt (1992) som hevder at av de ulike teoretiske tilnærmingene til sosial interaksjon, så er den interaksjonistiske tilnærmingen spesielt nyttig når en studerer barns læring i undervisning i matematikk, ettersom den vektlegger individets meningsskapende prosesser så vel som de sosiale prosessene. Enkeltpersoner er derfor sett til å utvikle sin personlige forståelse når de deltar i å forhandle klasseromnormer, inkludert de som er spesifikke for matematikk.

Conner, Singletary, Smith, Wagner og Francisco (2014) skriver i sin artikkel "Identifying Kinds of Reasoning in Collective Argumentation" om hvordan argumentasjon er en del av matematisk resonnering. Om en elev utfører resonnering vil en prosessere et argument, men også når en elev argumenterer så er dette et resultat av matematisk resonnering. Videre i sin forskning av ulike kollektive matematiske argumentasjoner i et klasserom ser Conner et al. (2014) hvordan disse utspiller seg i ulike former for resonnering og hvordan disse kan identifiseres. Conner et al. (2014) har kombinert Peirce's (matematisk resonnering, 1956) og Toulmin's (argumentasjon, 1958/2003) ulike perspektiver på argumentasjon og resonnering, se figur 2.

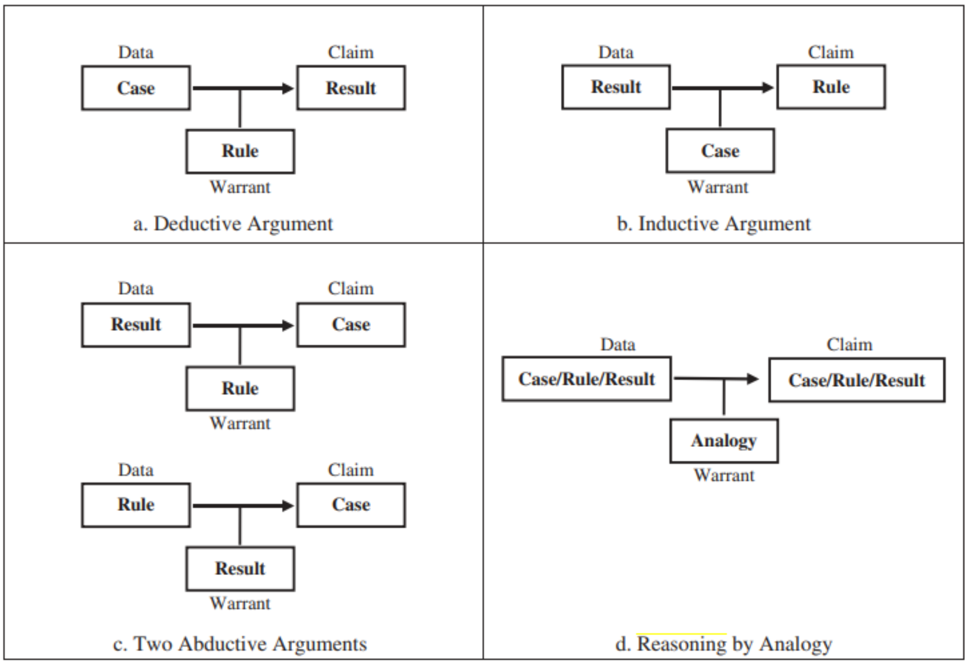


Fig.2: Toulmin inspirerte diagrammer for ulike argumentasjoner med en gjenspeiling av ulike typer resonneringer, av Connor et. al (2014, s. 186)

Conner et. al (2014) konkluderer sin artikkel med at denne modellen vil åpne flere muligheter for forskere og matematikklærere å få en innsikt i hvordan deres elever resonnerer og hvordan de ikke gjør det, for å på den måten kunne ta deres forkunnskaper om matematisk resonnering i bruk i veien videre for å utføre en mer «avansert» form for resonnering. Som Conner et. al (2014) uttaler er det kun en deduktiv form som vil kunne føre til bevis, og videre påpeker de hvordan tidligere forskning viser at dette er noe alle elever på ulike trinn sliter med å utføre.

Eriksson og Sumpter (2021) skriver i sin artikkel "Algebraic and fractional thinking in collective mathematical reasoning" om hvorvidt algebraisk- og brøk-tekning i kollektiv matematisk resonnering utarter seg i arbeid med en oppgave for en 3., 4. og 5. klasse. Her ser vi igjen Lithner (2004) sin 4 stegs-modell ved at Eriksson og Sumpter (2021) organiserer matematisk resonnering ut ifra Lithner (2008, 2017) i form av en prosess som inkluderer fire trinn:

1. en (del)oppgave utforskes (TS)
2. det tas et strategivalg (SC)
3. strategien er implementert (SI)
4. en konklusjon er foreslått (C)

De kobler så de 3 siste stegene på argumenter til valgene som er gjort, her henviser de videre til Hedefalk og Sumpter (2017) som har identifisert disse 3 typene for argumenter, se figur 3. Den første er altså *forutsigbarhetsargument* som sikter på å svare på spørsmålet med bruk av passende strategivalg. Spørsmålet, «Hvorfor vil strategien løse oppgaven?», blir her stilt. Det andre argumentet er *verifiseringsargumenter* som sikter på å besvare spørsmålet, «Hvorfor løste strategien oppgaven?». Det tredje og siste argumentet er *vurderingsargumenter,* som knyttes til konklusjonen og sikter på å besvare spørsmålet, «Hvordan svarer konklusjonen på spørsmålet for (del)oppgaven som ble utforsket?» (Eriksson og Sumpter, 2021) Eriksson og Sumpter (2021) trekker frem at en analyse av argumenter og deres matematiske egenskaper vil kunne være en måte å studere matematisk resonnering på.

Reasoning steps	Arguments	Mathematical properties	Fraction schemes	Algebraic reasoning
TS				
SC	Predicting			
SI	Verifying			
C	Evaluating			

Fig.3: Eriksson og Sumpter (2021, s. 480) sin analytiske struktur

I sin forskning finner Eriksson og Sumpter (2021) at *forutsigbarhetsargument* og *verifiseringsargument* begge var basert på enten brøktekning eller algebraisktekning, mens ved *vurderingsargumenter* ble de ulike tankemåtene sammenflettet. Med et slikt fokus argumenterer Eriksson og Sumpter (2021) for at et bredere spekter av matematiske egenskaper dermed blir sett på som iboende og på den måten også relevant, ettersom fokuset her ikke blir å lete etter et spesifikt strategivalg. Dette fører også Eriksson og Sumpter (2021) inn på et nytt funn av argumenter, som de forklarer at aldri har blitt funnet før, nemlig *identifiseringsargumenter*. Hvor både lærer og elever stiller spørsmålet, «Hva er det oppgaven virkelig handler om?». Identifiseringsargumenter sikter på å svare på dette spørsmålet, ved å se på hva av de iboende matematiske egenskapene i oppgaven som er relevant. Dette forklarer Eriksson og Sumpter (2021) kan tyde på at en bedre forståelse av hvilke type spørsmål som stimulerer kreativ matematisk resonnering vil kunne være en viktig pekepinn for både lærere og de som utdanner lærere i deres diskusjoner om kollektiv matematisk resonnering. Eriksson og Sumpter (2021) avslutter derfor sin artikkel med flere behov for videre forskning hvor de blant annet nevner behovet for ytterligere forskning på forholdet mellom nøkkelspørsmål og matematisk resonnering for å på den måten forstå hvorfor enkelte spørsmål stimulerer til visse argumenter.

2.1.2 Jeanotte og Kierans modell for matematisk resonnering

I sin studie på tidligere litteratur på feltet i et forsøk på å danne en modell for matematisk resonnering, finner Jeanotte og Kieran (2017) fire elementer som viser seg å være helt essensielle i å avklare en felles forståelse av begrepet matematisk resonnering: aktiviteten/produktet dikotomi, den inferensielle naturen til matematisk resonnering, målet og funksjonen til matematisk resonnering og strukturelle- og prosess aspekter (Jeanotte og Kieran, 2017). Videre skriver Jeanotte og Kieran (2017) at en innenfor de strukturelle- og prosess aspektene vil komme innen under alle de fire elementene som kom frem fra litteraturen. De påpeker også viktigheten av å forstå at disse to aspektene er ulike måter og se på resonnering, men at de også hele tiden vil foregå på tvers av hverandre. Altså strukturer er en del av prosess aspektet innenfor matematisk resonnering og prosesser bidrar til konstruksjonen av disse strukturene. (Jeanotte og Kieran, 2017)

2.1.2.1 Strukturelt aspekt for matematisk resonnering

Det strukturelle aspektet av matematisk resonnering referer generelt til et mer statisk aspekt som er relatert til en form for en gitt del av matematisk resonnering. Altså det strukturelle aspektet referer til måten diskursive elementer kombineres i et ordnet system som beskriver både elementene og deres relasjon til hverandre. De mer siterte formene er deduksjon, induksjon og abduksjon. Hvert steg er komponert med minimalt av data, påstander og garantier. Det deduktive, induktive og det abduktive utleder hver sin ulike konklusjon. (Jeanotte og Kieran, 2017)

2.1.2.1.1 Deduktivt steg

Det mest brukte steget i litteraturen som er knyttet til matematisk resonnering er det deduktive. Som et strukturelt aspekt utleder det deduktive steget en påstand fra data og garantier. Den deduktive formen for resonnering spiller en viktig rolle i prosesser av bevis og formelt bevis, hvor begge krever deduktiv rekonstruksjon, se tabell 3. (Jeanotte og Kieran, 2017)

2.1.2.1.2 Induktivt steg

Nest mest brukte steget i litteraturen som er knyttet til matematisk resonnering er det induktive steget. Det blir definert inkonsekvent, delvis på grunn av at det referer til all resonnering som ikke er deduktiv. (Jeanotte og Kieran, 2017) I modellen til Jeanotte og Kieran (2017) referer det induktive steget til å utlede en garanti fra dataen og påstanden om dataen. Den epistemiske verdien som er tillat i henhold til konklusjonen av det induktive steget er mest sannsynlig, eller sannsynligvis. Induktiv resonnering kan kobles til generalisering ved at denne prosessen kan bli strukturert induktivt, se tabell 3. (Jeanotte og Kieran, 2017)

2.1.2.1.3 Abduktivt steg

I følge Jeanotte og Kieran (2017) er det forskere som er interessert i studier av utforskningsaktiviteter, som Reid (2003) og Pedemonte (2002), som introduserte det abduktive steget. Jeanotte og Kieran (2017) referer til Pierce som argumenterer for at det abduktive steget utleder elementer som kan forklare påstanden. Den abduktive resonneringsstrukturen kan altså være et element i hver prosess av matematisk resonnering, se tabell 3. (Jeanotte og Kieran, 2017)

2.1.2.2 Prosessaspektet for matematisk resonnering

Matematiske resonneringsprosesser er kommunikative prosesser som er meta-diskursive, som utleder fortellinger om objekter eller relasjoner ved å utforske relasjonene mellom objektene. (Jeanotte og Kieran, 2017) I prosessaspektet deler Jeanotte og Kieran (2017) inn i tre ulike hoveddeler ved dette aspektet: leting etter likheter og ulikheter, validering og eksemplifisering. Under hver av disse systematiserer de så en rekke ulike prosessere. Under prosessene som vil være relatert til leting etter likheter og ulikheter trekke Jeanotte og Kieran (2017) frem det å generalisere, antakelse, identifisere et mønster, sammenligne og klassifisere. Videre i matematisk resonnering vil det være mulig og hensiktsmessig og validere. Under prosesser relatert til validering trekker Jeanotte og Kieran (2017) frem det å rettferdiggjøre, bevise og formelt bevise. Den siste delen ved prosessaspektet til Jeanotte og Kieran (2017) for matematisk resonnering – eksemplifisering, finner vi prosessen å eksemplifisere som en støtte i arbeid med de andre prosessene. Det vil være viktig å påpeke at Jeanotte og Kieran (2017) spesifisere at selv om disse prosessene her blir separert og satt i hver sin bås, vil de absolutt være samvirkende prosesser som stimulerer og påvirker hverandre. Under kommer en mer utdypende men kort forklaring på de ulike prosessene, se tabell 3 for en kort og systematisk inndeling av disse.

2.1.2.2.1 Prosesser relatert til leting etter likheter og ulikheter

Generalisere: en prosess som utleder fortellinger om et sett av matematiske objekter eller en relasjon mellom objekter av settet fra en delmengde av dette settet. Fra et kommunikativt synspunkt kan vi koble generalisering til matematisk resonnering på grunn av at prosessen tydelig blir forbundet med slutning og diskurs, uten og nødvendigvis skape en ny uforenelig diskurs. (Jeanotte og Kieran, 2017)

Antakelse: en matematisk resonneringsprosess som ved søken på likheter og ulikheter utleder en fortelling om noe regelmessighet med en sannsynlig epistemisk verdi og som har potensiale for matematisk teoretisering. Fra et kommunikativt synspunkt leder antakelse til en utvidelse av diskursen ved å bygge sannsynlige fortellinger, basert på søken etter likheter og ulikheter. (Jeanotte og Kieran, 2017)

Identifisere et mønster: en matematisk resonneringsprosess som ved søken på likheter og ulikheter utleder en fortelling om en tilbakevendende relasjon mellom matematiske objekter eller relasjoner. Denne prosessen fra et kommunikativt synspunkt skiller seg fra antakelse og generalisering ved at det er mulig å identifisere et mønster som er aktuelt for et bestemt sett uten å utvide det til et større sett. (Jeanotte og Kieran, 2017)

Sammenligne: en matematisk resonneringsprosess som ved søken på likheter og ulikheter utleder en fortelling om matematiske objekter eller relasjoner. Sammenligne kan ta plass sammen med en rekke andre matematiske resonneringsprosesser: generalisere, identifisere et mønster og validere. For eksempel, det å identifisere et mønster nødvendiggjør en sammenligning av hendelser eller eksempler for så å trekke frem mønsteret. Allikevel vil det å identifisere et mønster gå lenger enn sammenligning, fordi sammenligning bare utleder en fortelling om likheter og ulikheter. (Jeanotte og Kieran, 2017)

Klassifisere: en matematisk resonneringsprosess som ved søken på likheter og ulikheter mellom matematiske objekter, utleder en fortelling om en klasse av objekter basert på matematiske egenskaper og definisjoner. Klassifisering er en viktig prosess som tillater en objekt-nivå-utvikling ved å putte sammen eller dra fra hverandre ulike diskursive objekter, og på den måten strukturere en diskurs. Klassifisering kan bli assosiert med sammenligning, antakelse og generalisering. (Jeanotte og Kieran, 2017)

2.1.2.2.2 Prosesser relatert til validering

Validering er en matematisk resonneringsprosess som sikter på å endre den epistemiske verdien (sannsynligheten eller sannheten) av en matematisk fortelling. Til forskjell fra antakelse som utleder en fortelling som er sannsynlig, vil valideringsprosesser sikte å på en eller annen måte endre en fortellings epistemiske verdi. Inn under validering finner vi prosessene: rettferdiggjøring, bevise og formelt bevise. (Jeanotte og Kieran, 2017)

Rettferdiggjøre: en matematisk resonnering prosess ved å søke etter data, garanti og støtte, tillater en modifisering av epistemiske verdien av en fortelling. Som nevnt tidligere vil endring av epistemisk verdi ikke nødvendigvis gå fra sannsynlig til sant. Elementene som støtter prosessen, er begrenset av meta-diskursive regler innenfor et bestemt samfunn. For eksempel vil endringen fra sannsynlig til sant måtte være basert på en deduktiv struktur. På en annen side, ved å endre fra sannsynlig til mer sannsynlig, vil noen meta-regler begrense prosessen, men en deduktiv struktur vil ikke være nødvendig. (Jeanotte og Kieran, 2017)

Bevise og formelt bevise: en matematisk resonneringsprosess som ved å søke etter data, garanti og støtte modifiserer epistemisk verdi av en fortelling fra sannsynlig til sant. Denne prosessen samt formelt bevise har helt spesifikke begrensinger, se tabell 3. Skille mellom disse er likevel viktig å fremheve her. (Jeanotte og Kieran, 2017) Forskjellen er ifølge Jeanotte og Kieran (2017) at et bevis må være tilgjengelig uten ekstra rettferdiggjørelse, mens et formelt bevis må være systematisert i en matematisk teori. Det andre essensielle skille er at ved bevis så holder det at det er passende og kjent eller tilgjengelig for klassen, mens ved et formelt bevis må det også være formaliseres slik at det vil bli akseptert av det matematiske samfunnet. (Jeanotte og Kieran, 2017)

2.1.2.2.3 En støtte for andre prosesser ved matematisk resonnering

Eksemplifisere: en matematisk resonneringsprosess som støtter andre matematiske resonneringsprosesser ved å utlede eksempler som støtte i både «søken etter likheter og ulikheter» og i søken etter validering. Eksemplifisering legger til rette å utlede data om et problem. Denne dataen kan så bli gjenbrukt i søken på likheter og ulikheter i mønster og relasjoner, men også innenfor prosesser av validering. Eksemplifisering vil på den måten tilføre elementer som vil hjelpe til i prosesser i søken på likheter og ulikheter og til og med i validering. (Jeanotte og Kieran, 2017)

2.2 Bakgrunn for valg av teoretisk rammeverk

Jeg har i min analyse valgt å ta utgangspunktet Jeanotte og Kieran (2017) sitt teoretiske rammeverk for matematisk resonnering. Dette med utgangspunkt i at jeg på den måten vil få muligheten til å strukturere min datainnsamling systematisk etter de ulike prosessene Jeanotte og Kieran (2017) deler matematisk resonnering opp i, se tabell 3. Prosessene til Jeanotte og Kieran (2017) er også noe jeg har sett igjen i all teori på feltet og analysen min vil på den måten kunne omfavne så store deler av det komplekse begrepet som mulig. På denne måten vil jeg få en samlet oversikt over hvilke punkter i lærerveiledningene som inngår i det som defineres som en form for matematisk resonnering, samtidig som jeg får en oversikt over hvor mange prosesser de ulike oppgavene gir mulighet for under en matematisk resonneringsprosess.

Jeg tar som tidligere nevnt utgangspunkt i det teoretiske rammeverket til Jeanotte og Kieran (2017), men ser meg nødt til å gjøre noen tilpasninger for min analyse. Jeg har derfor valg tå utelukke det strukturelle aspektet i min analyse, ettersom jeg ikke ser det som relevant i et forsøk på å besvare mitt forskningsspørsmål. Jeg har likevel valgt å kort oppsummere Jeanotte og Kieran (2017) sin forklaring på dette aspektet, ettersom de påpeker viktigheten av at disse aspektene påvirker hverandre i begge retninger og jeg ser på dette som en essensiell informasjon for å få et helhetsbilde av deres teoretiske rammeverk for matematisk resonnering.

3 Metode

3.1 Kvalitativ metode

Forskningsspørsmålet for min studie er som tidligere nevnt:
Hvilke muligheter for matematisk resonnering blir gitt i innhold presentert i lærerveiledninger før og etter Fagfornyelsen?
Med dette i betraktning måtte jeg ta for meg en metode innenfor samfunnsvitenskapelig forskning. Det er ifølge Nyeng (2012) hovedsakelig to metoder – kvalitativ- og kvantitativ metode. Hovedskille mellom disse er hva en ønsker å svare på, altså forskningsspørsmålet og hvilken data som blir relevant for besvarelsen av dette spørsmålet. En kvantitativ metode ønsker å si lite om mye, mens en kvalitativ metode sikter på å si mye om lite. Ved kvalitativ metode vil en altså si noe om det generelle ved å belyse det spesielle. Nyeng (2012) spesifiserer videre at det ikke er noen metode som er bedre enn den andre eller på noen måte vanskeligere å utføre, men at det hele er avhengig av hvilke fenomener du ønsker å belyse og hvordan du best mulig kan ta i bruk en passende metode for å belyse dette. Det blir som Nyeng (2012) påpeker dumt å sammenligne disse metodene ut ifra hva som er best uavhengig av hva du skal forske på. Like dumt som på samme måte å skulle sammenligne en øks og sag uavhengig av hva du skal bruke den til. En kvantitativ metode tar for det meste for seg tallmateriale og tar dette i bruk for å belyse sitt forskningsspørsmål, mens en kvalitativ metode har en mer induktiv fremgangsmåte og vil belyse mangfoldet i data og avdekke summen av dets kvaliteter som samlet sett gjør et sosialt fenomen til det det er. (Nyeng, 2012)

Min metode blir en kvalitativ metode for å svare på mitt forskningsspørsmål. Ved at jeg ønsker å belyse det generelle (muligheter for matematisk resonnering før og etter Fagfornyelsen), ved å ta for meg det spesifikke (muligheter for matematisk resonnering i de to nyeste lærerveiledningene til Cappelen Damm). Jeg har i min analyse både gått i dybden på et lite stykke datamaterialet for å belyse det generelle, men også tatt i bruk nøyaktige tall og prosenter ut ifra min analyse. Jeg tolker allikevel at min metode her er en kvalitativ metode ettersom Nyeng (2012) skriver at det ikke er noe i veien for en stor variasjon i datamaterialet, men heller noe man ønsker. Nyeng (2012) påpeker at ved kvalitative studier utfører en intensive studier for å komme frem til en «best mulig» fremstilling av et sosialt fenomen. Med «best mulig» forklarer Nyeng (2012) han mener mest mulig detaljrik, nyansert og forståelsesskapende.

3.2 Dokumentanalyse

Dokumentanalyse omtales ifølge Johannessen, Tufte og Christoffersen (2021) ofte som en type kvalitativ innholdsanalyse der forskeren samler inn data som skal analyseres for å få frem viktige sammenhenger og relevant informasjon om forhold i samfunn en ønsker å studere. En dokumentanalyse kan være av en rekke ulike dokumenter som er offentlige i form av stortingsmeldinger, årsrapporter etc. og private dokumenter som brev, dagbøker etc. Det som gjør at noe kalles et dokument i forskningssammenheng er at dokumentet som analyseres ikke er produsert av forskeren selv, men er et overlevert materialet fra en situasjon i fortiden. Et dokument gir oss spesifikk informasjon om et saksforhold nedskrevet på et spesielt tidspunkt og sted, ofte med en tanke om spesifikke lesere. Dokumenter sier oss noe om forfatterne og deres virkelighetsbeskrivelser og meninger, samt deres faktabeskrivelser som blir presentert. Kort fortalt innebærer en dokumentanalyse overfladisk undersøkelse, grundig undersøkelse og tolkning. Denne prosessen kombinerer ulike elementer fra både innholdsanalyse og tematisk analyse. (Johannessen et al., 2021)

Videre referer Johannessen et al. (2021) til Grønmo (2004) når de skriver om innholdsanalyse av dokumenter og hvordan denne prosessen organiserer informasjon i kategorier knyttet til forskningens sentrale spørsmål og dets tre faser, se figur 4.

FASE	INNHOLD
1. Forberedelser	• Forskeren må utforme en problemstilling som bør inneholde en avklaring av hvilket tema og hvilke tekster som skal undersøkes. • Neste trinn er å finne tekster og gjøre et utvalg. • Det tredje trinnet er å avtale adgang til å bruke dokumenter og vurdere grad av åpenhet.
2. Datainnsamling	• Gjennomgå tekstene systematisk: - Foreta kildekritiske og kontekstuelle vurderinger. Det er spesielt fire forhold som må vurderes: kildens tilgjengelig-het, relevans, autentisitet og troverdighet (omtalt senere i dette kapitlet). - Velge ut og registrere relevant innhold. Det er studiens problemstilling som er grunnlaget for utvelgelse og registrering av relevant innhold. Selv om utvelgelsen skal basere seg på studiets problemstilling, vil kriteriene for utvelgelsen omvurderes eller nyanseres underveis i datainnsamlingen etter hvert som tekstene gjennomgås. - Kategorisere det relevante innholdet. Etter hvert som rele-vant innhold velges ut og registreres, vurderer og fortolker forskeren teksten inn i ulike kategorier. I denne fasen veksler forskeren mellom datainnsamling og dataanlyse.

	Grønmo (2004, 191) skriver: «Kategoriseringen er en del av datainnsamlingen og bidrar til at problemstillingen blir stadig bedre belyst.» • Velge ut andre relevante tekster og gjennomgå disse systematisk.
3. Analyse av inn-samlet data	• Analysen starter med en beskrivelse av materialet. Her dreier det seg om å få en oversikt over den innsamlede informasjonen. • Forskeren må deretter systematisere innholdet, det vil si forenkle og fremheve den informasjonen som er mest relevant eller interessant. Materialet organiseres i grupper (kategorier) slik at vi kan foreta sammenlikninger. Denne prosessen kalles kategoriseringsprosessen og består av fire faser: kondensering, koding, kategorisering og tematisering (se kapittel 10 om fenomenologi for en mer detaljert beskrivelse av prosessen).[21] Her kan forskeren bruke et manuelt analyseskjema for å få god systematikk i analysen eller bruke dataprogrammer som NVivo, som er en kompleks programvare for kvalitative forskere og brukes til å kode tekst, lyd, bilde og video. • Til slutt må forskeren tolke innholdet: Hva sier dataene, og hvilke svar gir de på problemstillingen?

Fig.4: Johannessen et al. (2021, s. 236-237) gjengivelse av Grønmo (2004) sin tabell for kvalitativ innholdsanalyse av dokumenter

Min studie vil videre bære et bevisst preg av fremgangsmåten beskrevet i de tre fasene i figur 4 i denne oppgaven. Ifølge Nyeng (2012) vil det være viktig at metoden gjenspeiler forskningsspørsmål og på den måten bidrar til et så godt svar som mulig. Jeg har derfor valgt å ta i bruk en dokumentanalyse her i min forskning av lærerveiledninger. Dette vil ifølge Johannessen et al. (2021) innebære både fordeler og begrensinger.

Fordelene med en dokumentanalyse vil være at det er en *effektiv metode, tilgjengelighet, kostnadseffektivt, ikke påtrengende eller reaktiv, stabilitet, nøyaktighet* og *dekning.* Dette utdyper Johannessen et al. (2021) med:

> *Effektiv metode*: en dokumentanalyse krever mindre tid og kan derfor være mer effektiv.
>
> *Tilgjengelighet*: mange dokumenter er ofte offentlig tilgjengelig.
>
> *Kostnadseffektivt*: ofte mindre kostbar enn andre metoder.
>
> *Ikke påtrengende eller reaktiv*: dokumenter er ikke påvirket av forskningsprosessen.
>
> *Stabilitet*: forskerens tilstedeværelse endrer ikke det som blir studert.
>
> *Nøyaktighet*: navn, referanser og detaljer om hendelser blir korrekt
>
> *Dekning*: dokumenter gir en bred dekning.

Begrensingene ved en dokumentanalyse vil være *utilstrekkelig detaljnivå, lav gjenfinnbarhet, partisk selektiv* og *forskeren selv*. Dette utdyper Johannessen et al. (2021) med:

> *Utilstrekkelig detaljnivå:* dokumenter er ofte ikke produsert med forskning som hensikt og det vil derfor ofte ikke inneholde alle detaljer som er nødvendig i besvarelsen på en problemstilling.
> *Lav gjenfinnbarhet:* på bakgrunn av sikkerhet personvern med mer kan det til tider være vanskelig å finne tilbake til dokumenter.
> *Partisk selektivitet:* det kan ligge en agenda bak hva som er tilgjengelig og ikke.
> *Forskeren selv:* det vil være en stor utfordring at det er forskeren selv som tolker og velger ut datamaterialet, som ut fra eget perspektiv kan påvirke dette.

Avslutningsvis vil det være viktig å påpeke at Johannessen et al. (2021) trekker frem at disse punktene er mer å se på som potensielle feil enn store ulemper. Det vil si at det for forskeren vil være viktig å være klar over disse fallgruvene ved en dokumentanalyse og på den måten vil fordelene ifølge Johannessen et al. (2021) veie opp for de potensielle ulempene.

En kommer heller ikke utenom kildekritikk ved dokumentanalyse ifølge Johannessen et al. (2021). De 4 hovedelementene de trekker frem ved å referere til Kjeldstadli (1999) og Grønmo (2004) er følgende:

1. Autensitet: Hva var formålet, opphavstidspunktet, hvilke motiver, hva var opphavssituasjonen og hvem var opphavspersonen?
2. Troverdighet: Er kilden relevant og konsistent? Er det feil eller faglige svakheter ved kilden? Hva er tendensen i kilden? Hvilke andre kilder kan brukes for å kontrastere kilden?
3. Representativitet: Er dokumentet dekkende og representativt for det en vil undersøke? Om det skiller seg ut, kan det være på bakgrunn av tilfeldigheter i utvalget? Er dokumentet forfattet fra en marginal synsvinkel i samtiden?
4. Tolkning/betydning: Hva forteller dokumentet, er det et skjult budskap? Er det spesielle språklige forhold som påvirker forståelsen av kilden? Finnes det spesielle fortolkningsregler som kan brukes for å forstå innholdet? (Johannessen et al., 2021)

Jeg vil i varierende grad ta for meg de ulike elementene for kildekritikk i neste del om utvalg.

3.3 Utvalg

I utvalg av analysematerialet i denne oppgaven, måtte jeg gjøre en rekke begrensinger på bakgrunn av omfang. Jeg gjør her rede for valg av avgrensinger som har oppstått underveis i denne forskningsprosessen. Jeg utdyper videre hvilke konsekvenser og begrensninger dette får for oppgaven under relabilitet og validitet.

Valget av klassetrinn ble gjort med både hensyn til relevans i mitt eget arbeid og at jeg finner det interessant å undersøke dette på grunnskolens siste år, hvor utfordringene og kravene til elevene er på det høyeste det kan stilles på grunnskolen ettersom dette er det siste året. Jeg har også funnet en tidligere masteroppgave som har undersøkt mye av dette samme, men på helt andre skalaen av trinn, nemlig for 2. klasse (Halsne, 2022). Disse faktorene gjorde at jeg fant det interessant for forskningsmiljøet på dette feltet og få et tilskudd med en oppgave som undersøker mye av det samme, men for et trinn som til motsetning nå er i sluttfasen av grunnskolen.

Med bakgrunn i omfanget av denne oppgaven så jeg med nødt til å begrense mitt forskningsspørsmål til å omhandle muligheter for matematisk resonnering innenfor et kapitel i bøkene. I de to ulike lærerveiledningene til Cappelen Damm er inndelingen av kapitler relativt likt ved at de tar for seg flere av de samme temaene i lik rekkefølge. Den store forskjellen er at de i den nyere boken, Matematikk 10, har bare 3 kapitler innenfor et matematisk tema etter fulgt av et generelt kapitel om utforskende arbeid, til kontrast i den eldre. I Faktor 10 er det hele 7 kapitler med ulike matematiske temaer. Dette kan tenkes å være på bakgrunn av endringene i Fagfornyelsen med et mye større fokus på dybdelæring (Utdanningsdirektoratet, 2018), ved at de i Matematikk 10 har færre kapitler som resulterer i større kapitler. I overordnet del i læreplanen står det, «Elevene skal få tid til å utforske dybden i ulike fagområder.» (Kunnskapsdepartementet, 2017, s. 16). Om dette er bakgrunnen for endringene eller ikke blir bare spekulasjoner fra min side, men det er likevel viktig å spesifisere ettersom dette gjør at første kapitel i Faktor 10 tar for seg temaet de kaller for «Tall og algebra», mens første kapitel i Matematikk 10 tar for seg temaet de har kalt «Algebra».
Begrensingen jeg ønsket å gjøre i denne oppgaven var å ta for meg første kapitel i disse to bøkene for å få et helhetsinntrykk av innholdet ved arbeid med et tema, fra start til slutt.

Begge lærerveiledningene til Cappelen Damm som her er undersøkt (Faktor 10 og Matematikk 10) har egne tilleggsbøker til elevene som kalles Oppgavebøker og Alternative oppgavebøker. Disse bøkene blir henvist til som passende oppgaver læreren kan gi til elevene uten noen videre utdypning. Jeg har derfor gjort en vurdering av hvorvidt disse skal inkluderes eller ikke i min analyse og har konkludert med å ekskludere disse da læreren gis ingen tips til hvordan dette skal legges frem og at min tidligere erfaring som lærer i grunnskolen (4 år) tilsier at disse oppgavene er repetitive oppgaver som gjenspeiler oppgavene gitt i elevenes Grunnbok, som en finner igjen i lærerveiledningene med ekstra tips og aktiviteter til læreren.

Begge lærerveiledningene referer også til kopieringsoriginaler, som er egne oppgaver eller aktiviteter elevene kan utføre, med tips til læreren om hvordan dette kan utføres. Dette har jeg dessverre sett meg nødt til å ekskludere da jeg bare har tilgang til disse kopieringsoriginalene til Faktor 10 via en lisens hos min kommune og ikke Cappelen Damms nyere utgave Matematikk 10 ettersom kommunen min nå har lisens hos et annet forlag. Jeg har etter dialog med Cappelen Damm ikke klart å få lisens til disse. På denne måten ble undersøkelsen gjennomførbar, ved at jeg fikk kuttet ned antall analysemateriale betraktelig, samtidig som oppgavens relabilitet og validitet ikke påvirkes like betraktelig da jeg holder meg innenfor et tema eller kapitel. Det vil likevel være viktig å være klar over at dette gjør at mine resultater her begrenses til et matematisk tema og ikke over hele lærerveiledningenes innhold.

En viktig ulikhet er de avsluttende temaene i hvert kapitel til de to lærerveiledningene. I Faktor 10 har de noe de har kalt for «Noe å lure på» med korte spørsmål som gir elevene mulighet til å anvende det de skal ha vært igjennom tidligere i kapitelet i nye kontekster. I Matematikk 10 er det siste temaet derimot noe de kaller «Tverrfaglig oppgave». Dette er et større prosjekt som gjør at elevene kan anvende både ulike matematiske ferdigheter innenfor temaet algebra, men går også under en rekke andre fag og temaer da dette er en ganske stor og åpen oppgave. Med bakgrunn i dette har jeg derfor valgt å utelate disse sidene av min analyse, men inkludere sidene til Faktor 10 sine «Noe å lure på»-spørsmål. For å spesifisere utgjør dette likevel en mindre del av Faktor 10 sine sider enn Matematikk 10 sine, ved at analysen i Faktor 10 tar for seg 30 sider, mens analysen i Matematikk 10 tar for seg 74 sider.

Jeg ønsket her å se om det hadde vært noen utvikling av søkelyset på resonnering med Fagfornyelsen, som en kunne se gjenspeile seg i lærerveiledningene som blir tatt i bruk i grunnskolene i dag. Det ble derfor naturlig å velge en lærerveiledning utgitt før og en etter Fagfornyelsen. Jeg konkluderte også med at det ville være viktig at disse kom fra samme forlag for å styrke forskningens validitet, som jeg kommer mer tilbake til i *3.6.2 Validitet*. Ved at begge disse bøkene kategoriserer seg som lærerveiledninger og ikke bare er fra samme forlag, men også skrevet av de samme forfatterne gjør at forskningen derfor kan få et mer ensidig resultat. Målet med dette blir å få en mer konsekvent vurdering av hvilke endringer forfatterne her har vurdert som nødvendige tilpasninger i forhold til muligheter for matematisk resonnering etter Fagfornyelsen og økt fokus på resonnering som en kjerneverdi i matematikk. At forlaget her ble Cappelen Damm er her helt enkelt fordi dette forlaget er et av flere anerkjent forlag i Norge.

3.4 Innsamling av datamaterialet

Målet med denne oppgaven er å få en oversikt over hvilke muligheter to ulike lærerveiledninger fra samme forlag før og etter Fagfornyelsen gir for matematisk resonnering i sitt innhold for 10.trinn. Jeg har derfor undersøkt andre studier på lærebøker i matematikk for å finne et passende utviklet rammeverk til min studie.

Jeg har her valgt å ta utgangspunkt i deler av Charalambous, Delaney, Hsu og Mesa (2010) sitt rammeverk i deres studie av ulike matematikkbøker på tvers av nasjoner. Dette er et ganske avansert rammeverk for å analysere og sammenligne ulike verk, som gjør at jeg ønsker å ta i bruk deler av dette i min systematiske innsamling av data. Charalambous et al. (2010) deler sitt rammeverk i to kategorier nemlig det de kaller en horisontal analyse og vertikal analyse, som de så deler inn i en rekke underkategorier, se figur 5. Den horisontale analysen er ment for å få et overblikk over innholdet i bøkene og bakgrunnen for produksjonen av boken, mens den vertikale analysen fokuserer på hvilke emner som blir presentert i boken og hvordan de er organisert. I følge Charalambous et al. (2010) er den horisontale analysen ment å gi leserne et blikk på om boken passer for et gitt klassetrinn, og om rekkefølgen på emnene, utviklingen og vektlegging stemmer overens med lærerens krav. Videre utdyper Charalambous et al. (2010) at denne analysen gir lite innblikk i den detaljerte informasjonen forfattere håndterer i innholdet. Dette sikter en vertikal analyse på å gjøre ved å tilby en dypere og mer fokusert analyse av det matematiske innholdet. Det vil også være viktig å påpeke at Charalambous et al. (2010) trekker frem viktigheten av at disse ses i sammenheng og styrker hverandre. Der en vertikal analyse har svakheter har en horisontal analyse styrker og omvendt.

Min bruk av dette rammeverket bærer en del preg av tilpasninger, samt nedskjæringer av analysen for å få et godt rammeverk som passer mitt forskningsspørsmål samtidig som det gjør det gjennomførbart, da dette er en studie av mye mindre omfang enn den som er utført av Charalambous et al. (2010).

HORIZONTAL ANALYSIS OF THE TEXTBOOK

Background Information	Overall Structure
• Title • Number of books • Pages (Number and Density) • Profile of authors and advisory committee • Publisher and year of publication • Accompanying materials (e.g., teachers' guides, resource materials)	• Number of units/lessons and average number of pages per unit/lesson • Structure of units/lessons • Topics covered • Sequencing of topics

VERTICAL ANALYSIS OF THE TEXTBOOK

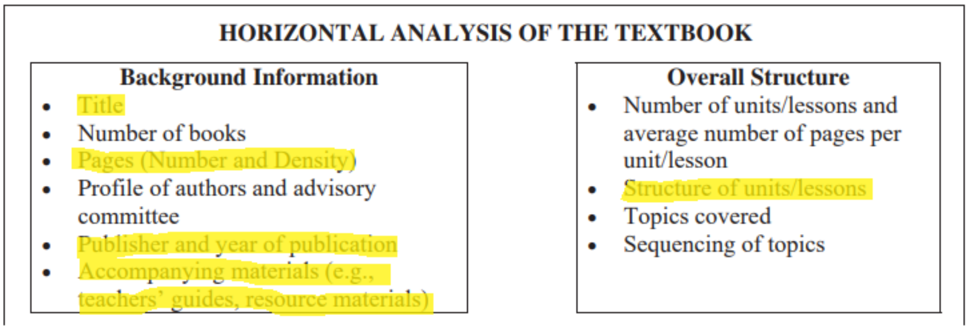
Communicated to Students	Required of Students	Connections
Mathematical Content • Topic-specific construct, structure etc. (e.g. part-whole, ratio, operator, quotient, measure fraction constructs) • Definitions, rules, conventions • Illustrations-representations (irrelevant, relevant to the context but not to the mathematics, supporting the mathematics) *Mathematical Practices* • Worked examples • Modeling thinking *Attitudes* • Equity • View of mathematics	• Potential Cognitive Demands (memorization, procedures with connections, procedures without connections, doing mathematics) • Type of Response (answer only, answer and mathematical sentence, explanation, justification)	• Connecting within and between strands • Classroom instruction - textbook connections • Connecting to situations outside of school

Key: Dimension: Uppercase letters; Categories: bold; Sub-categories: italicized; Criteria: bulleted points.

Fig.5: Rammeverket Charalambous et al. (2010, s. 123) brukte til å analysere matematiske bøker

3.4.1 Horisontal analyse

Jeg har valgt å utelate store deler av denne analysen da jeg mener flere av disse punktene ikke vil være relevant til å besvare mitt forskningsspørsmål. For å utdype dette, begrunner jeg dette med at jeg her ønsker å besvare hvilke muligheter for matematisk resonnering to ulike lærerveiledninger legger til rette for. En analyse som ifølge Charalambous et al. (2010) er ment for å gi et blikk på om boken passer for et gitt klassetrinn, og om rekkefølgen på emnene, utviklingen og vektlegging stemmer overens med lærerens krav blir et stykke vekk fra relevante punkter for å besvare mitt forskningsspørsmål. Med bakgrunn i det Charalambous et al. (2010) spesifiserer om at de to analysene må ses i sammenheng med hverandre og at de på den måten utfyller hverandre, så jeg ikke på en total utelatelse av en horisontal analyse som et alternativ. Fokuset blir derfor å få et overblikk over strukturen av innholdet og oppgaver i kapitelene i bøkene jeg analyserer, tittel, år, forlag de ble publisert av og tilleggsmaterialet til bøkene for å få en oversikt over hva som skulle vektlegges og på hvilken måte jeg skulle organisere den vertikale analysen. Jeg går derfor ikke inn på mer enn 4 av punktene til Charalambous et al. (2010) under horisontal analyse, se uthevninger i figur 6.



HORIZONTAL ANALYSIS OF THE TEXTBOOK

Background Information

- Title
- Number of books
- Pages (Number and Density)
- Profile of authors and advisory committee
- Publisher and year of publication
- Accompanying materials (e.g., teachers' guides, resource materials)

Overall Structure

- Number of units/lessons and average number of pages per unit/lesson
- Structure of units/lessons
- Topics covered
- Sequencing of topics

Fig.6: Horisontale analysedel av rammeverket brukt av Charalambous et al. (2010, s. 123) til å analysere matematiske bøker, med egne uthevinger

Innsamlingen av disse opplysningene ble gjort ved bruk av en tabell med svar på de punktvise spørsmålene som tittel m.m. for å få en oversikt på relevant bakgrunnsinformasjon (se tabell 1 og 2), samt en strukturell rekonstruksjon av innholdet og oppgaver på en dobbeltside for å få en oversikt over den generelle strukturen (se figur 7 og 8).

Horisontal analyse - Bakgrunnsinformasjon	
Tittel på bok	Faktor 10
Antall sider i boken	344
Tittel på kapittel	Tall og algebra
Antall sider i kapittelet	36
Forlag og år for utgivelse	Cappelen Damm, 2015
Tilleggsmateriale	Kopieringsoriginaler (forslag til aktiviteter), nettressurser, egen oppgavebok med differensierte oppgaver alternativ oppgavebok.

Tabell 1: Resultat av horisontal analyse av Faktor 10

Fig.7: Generell oppbygning av en dobbel side i Faktor 10

I Faktor 10 sin lærerveiledning er sidene bygget (se figur 7) opp på en måte som gjør at en får både en eksakt kopi av elevenes utgave plassert i midten (oransje feltet) på hver doble side i boken, med ekstra informasjon (bakgrunnsstoff, henvisning til oppgaver etc., se blått felt) og tips (ekstra oppgaver, mulige svar på frioppgaver, se det gule feltet), samt god plass til lærerens egne notater (det grønne feltet). Boken har også en rekke illustrasjoner som ofte er en del av oppgavene, hvis ikke er de relevante i form av at de illustrer eksempler på temaet sidene tar for seg. Plasseringen på disse opplysningene til læreren varierer fra side til side, og det er ikke alltid alle punktene er inkludert på en dobbeltside, men denne malen er kun laget for å få en systematisk oversikt over det generelle innholdet på sidene i bøkene og et forsøk på å få en god oversikt til videre bruk i analysen.

Horisontal analyse - Bakgrunnsinformasjon	
Tittel på bok	Matematikk 10
Antall sider i boken	356
Tittel på kapittel	Algebra
Antall sider i kapittelet	82
Forlag og år for utgivelse	Cappelen Damm, 2022
Tilleggsmateriale	Kopieringsoriginaler (forslag til aktiviteter), nettressurser, egen oppgavebok med differensierte oppgaver, alternativ oppgavebok.

Tabell 2: Resultat av horisontal analyse av Matematikk 10

Fig.8: Generell oppbygning av en dobbel side i Matematikk 10

Sidene i den nyere lærerveiledningen til Cappelen Damm, Matematikk 10 fra 2022, er bygget opp med en struktur hvor størsteparten av sidene er samme som elevene sin bok. Med en ekstra kolonne på hver side med alt fra tips, beskrivelser til oppstartsoppgaver og undringsoppgaver, begreper, henvisning til oppgaver i oppgavebok, aktiviteter på kopieringsoriginaler og plass til notater. Boka starter ofte et nytt tema med en overskrift etterfulgt av en forklarende tekst før en *Oppstartsoppgave* eller en *Undringsoppgave* (disse dukker også ofte opp før forklarende tekst og/eller eksempel) og deretter eksempler før noen oppgaver for elevene. Boken har også merket ut i en liten boks de har markert i egen farge med overskriften «Husk» med litt ekstra informasjon. Boken har også en rekke illustrasjoner som ofte er en del av oppgavene, hvis ikke er de relevante i form av at de illustrer eksempler på temaet sidene tar for seg. Plasseringen på disse opplysningene til læreren varierer fra side til side, og det er ikke alltid alle punktene er inkludert på en dobbeltside, men denne malen er kun laget for å få en systematisk oversikt over det generelle innholdet på sidene i bøkene og et forsøk på å få en god oversikt til videre bruk i analysen.

3.4.2 Vertikal analyse

VERTICAL ANALYSIS OF THE TEXTBOOK

Communicated to Students	Required of Students	Connections
Mathematical Content • Topic-specific construct, structure etc. (e.g. part-whole, ratio, operator, quotient, measure fraction constructs) • Definitions, rules, conventions • Illustrations-representations (irrelevant, relevant to the context but not to the mathematics, supporting the mathematics) *Mathematical Practices* • Worked examples • Modeling thinking *Attitudes* • Equity • View of mathematics	• Potential Cognitive Demands (memorization, procedures with connections, procedures without connections, doing mathematics) • Type of Response (answer only, answer and mathematical sentence, explanation, justification)	• Connecting within and between strands • Classroom instruction - textbook connections • Connecting to situations outside of school

Fig.9: Vertikale analysedel av rammeverket brukt av Charalambous et al. (2010, s. 123) til å analysere matematiske bøker, med egne uthevinger

Som vi ser av figur 9 har Charalambous et al. (2010) delt den vertikale analysen inn i tre underkategorier; kommunisert til elevene, forventet av elevene og sammenhenger. På grunn av oppgavens omfang og for å best mulig samle inn data for å besvare mitt forskningsspørsmål, har jeg også her måtte gjøre noen tilpasninger og forenklinger av modellen Charalambous et al. (2010) har tatt i bruk.

Kategorien Charalambous et al. (2010) har valgt å kalle *sammenhenger*, ser på sammenhenger mellom oppgaver i bøker og reelle situasjoner utenom klasserommet, sammenhenger mellom ulike matematiske temaer i en bok og sammenhenger mellom en bok og andre klasseromaktiviteter. Ettersom jeg ønsker å besvare hvilke muligheter som blir gitt i innhold i lærerveiledningene, har jeg valgt å utelukke denne delen på bakgrunn av dens manglende relevans for å besvare mitt forskningsspørsmål. Denne kategorien er derfor ikke markert med noen utheving, se figur 9.

Kategorien *kommunisert til elevene* (gul utheving, se figur 9) vurderte jeg som ikke relevant for min forskning, ettersom jeg her analyserer lærerveiledninger som er ment å kommunisere til lærere. Jeg endret derfor denne kategorien til *kommunisert til lærerne.* Her refereres det altså til de ulike kategoriene som blir presentert til lærerne i den generelle oppbygningen av bøkene, se figur 7 og 8. Jeg har i den vertikale analysen tatt for meg emner som på en eller annen måte skaper muligheter for elevene å utføre noen form for matematikk. Det vil si jeg har utelatt henvisninger, bakgrunnsstoff, begrepsforklaringer, generelle tips som ikke er tilknyttet en oppgave eller aktivitet elevene blir gitt mulighet til å jobbe med og plass til egne notater. Min analyse har tatt for seg det som blir kommunisert til lærerne av oppgaver og aktiviteter for elevene i sammenheng med forklaringer og løsningsforslag på disse som blir kommunisert til lærerne i bøkene.

Kategorien *kreves av elevene* (grønn utheving, se figur 9) ser på hva de ulike oppgavene som blir presentert for elevene krever av dem. Jeg så det her som en absolutt nødvendighet å endre begrepet *kreves av* til *muligheter for* med utgangspunkt i mitt forskningsspørsmål. Charalambous et al. (2010) referer nemlig til Stein, Smith, Henningsen, & Silver (2000) sin *Task Analysis Guide* når de setter denne kategorien i system i sin analyse. Fokuset her blir å plassere de matematiske oppgavene innen under ulike kognitive krav og hvilken type svar det kreves at elevene gir. Ved å heller ta for meg *muligheter for elevene* og plassere prosessaspektene til Jeanotte og Kieran (2017) under denne kategorien kunne jeg få et systematisk skjema (se figur 10) til bruk i min vertikale analyse som en del av prosessen for å besvare mitt forskningsspørsmål.

Vertikal analyse									
Navn på læreverk og kapittel									
Kommunisert til lærerne	**Muligheter for elevene**								
	Generalisere	Antakelse	Identifisere	Sammenligne	Klassifisere	Rettferdiggjøre	Bevise	Formelt bevise	Eksemplifisere

Fig.10: Min tilpasning av skjema for vertikal analyse (Charalambous et al., 2010)

Som tidligere nevnt tar kategorien *kommunisert til lærerne* for seg ulike punkter i de analyserte bøkene som legger opp til at elevene er nødt til å utføre en eller annen form for matematikk. Denne kategorien er derfor delt inn i det boken Faktor 10 kaller frioppgaver (F), aktiviteter (A) og det Matematikk 10 kaller oppstartsspørsmål (O) og undringer (U), samt oppgaver (OG) som er nummerert og likt utformet i elevenes bok og lærerveiledningen. Oppgaver er altså markert med OG etterfulgt av tilhørende oppgavenummer, som vil si *OG1.1* for oppgave 1.1. Frioppgaver, Aktiviteter, Oppstartsspørsmål og Undringsoppgaver er markert med første bokstav etterfulgt av nummeret på rekkefølgen de blir presentert i bøkene. Altså den første aktiviteten er markert med A1, etterfulgt av A2. Det samme for den første frioppgaven blir da F1 etterfulgt av F2 også videre. I siste del av kapittelet til Faktor 10 har de som tidligere nevnt en del de kaller «Noe å lure på» med 8 spørsmål (S), disse er markert etter samme system med nummer ut ifra rekkefølge i etterkant av en S for spørsmål, altså den første er markert som S1 og deretter S2 også videre. Dette kommer bedre frem i skjemaet brukt i analysen, som en kan se i figur 11.

Kategorien *muligheter for elevene* er som tidligere nevnt delt inn i underkategoriene til Jeanotte og Kierans (2017) prosessaspekter, hvor jeg har markert med en «x» under de ulike punktene som er kommunisert til læreren som jeg med bakgrunn i teori mener går under de ulike prosessaspektene ved matematisk resonnering. Finner jeg at et aspekt ikke er til stede er dette blitt markert med en strek (-). I denne prosessen har jeg tatt i bruk en tabell (se tabell 3) med alle prosessaspektene til Jeanotte og Kieran (2017) for å systematisk vurdere hvilke aspekter de ulike punktene går under. Se figur 11 for resultatet av vertikal analyse.

Prosessaspektet ved matematisk resonnering					
Søke etter likheter og ulikheter		**Validering**		**Eksemplifisere**	
Generalisere	En prosess som utleder fortellinger om et sett av matematiske objekter eller en relasjon mellom objekter av settet fra en delmengde av dette settet.	**Rettferdiggjøre**	En matematisk resonnering prosess ved å søke etter data, garanti og støtte, tillater en modifisering av epistemiske verdien av en fortelling.	**Eksemplifisere**	Utlede eksempler som støtte for andre matematiske resonnering prosesser. Denne dataen kan så bli gjenbrukt i søken på likheter og ulikheter i mønster og relasjoner, men også innenfor prosesser av validering. Eksemplifisering vil på den måten tilføre elementer som vil hjelpe til i generalisering, i gjetning og til og med i validering.
Antakelse	En matematisk resonnering prosess som ved søken på likheter og ulikheter utleder en fortelling om noe regelmessighet med en sannsynlig epistemisk verdi og som har potensiale for matematisk teoretisering.	**Bevise**	En matematisk resonnering prosess som ved å søke etter data, garanti og støtte modifiserer epistemisk verdi av en fortelling fra sannsynlig til sant. Denne prosessen er begrenset av: Fortellinger som er akseptert av klassefellesskapet (settet av aksepterte fortellinger) som er sant (fra synspunktet til en ekspert innenfor matematikk)		

<table>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>og tilgjengelig uten ekstra rettferdiggjørelse.
En siste rekonstruksjon som er deduktiv
Erkjennelsene som er passende og kjent eller tilgjengelige for klassen.</td></tr>
<tr><td>Identifisere</td><td>En matematisk resonnering prosess som ved søken på likheter og ulikheter utleder en fortelling om en tilbakevendende relasjon mellom matematiske objekter eller relasjoner.</td><td rowspan="2">Formelt bevise</td><td rowspan="2">En matematisk resonnering prosess som ved å søke etter data, garanti og støtte modifiserer epistemisk verdi av en fortelling fra sannsynlig til sant. Denne prosessen er begrenset av:
Fortellinger som er akseptert av klassefellesskapet (settet av aksepterte fortellinger) som er sant (fra synspunktet til en ekspert innenfor matematikk) og systematisert i en matematisk teori
En siste rekonstruksjon som er deduktiv
Erkjennelser som er formalisert og akseptert av klassen og det matematiske samfunnet.</td></tr>
<tr><td>Sammenligne</td><td>En matematisk resonnering prosess som ved søken på likheter og ulikheter utleder en fortelling om matematiske objekter eller relasjoner.</td></tr>
<tr><td>Klassifisere</td><td>En matematisk resonnering prosess som ved søken på likheter og ulikheter mellom matematiske objekter, utleder en fortelling om en klasse av objekter basert på matematiske egenskaper og definisjoner.</td><td></td><td></td></tr>
</table>

Tabell 3: Laget av artikkelen til Jeanotte og Kieran; *A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics* (2017)

Vertikal analyse

Faktor 10 – kap.: Tall og algebra

Kommunisert til lærerne	Muligheter for elevene								
	Generalisere	Antakelse	Identifisere	Sammenligne	Klassifisere	Rettferdiggjøre	Bevise	Formelt bevise	Eksemplifisere
OG1.1 -OG1.10	-	-	-	-	-	-	-	-	-
F1	-	x	-	x	-	-	-	-	x
OG1.11-OG1.13	-	-	-	-	-	-	-	-	-
OG1.14	x	x	x	x	x	x			x
F2	x	x	x	x	x	x	X	x	X
OG1.15-OG.120	-	-	-	-	-	-	-	-	-
F3	-	x	x	x	x	x	x	x	x
OG1.21-OG1.26	-	-	-	-	-	-	-	-	-
F4	-	-	-	-	-	-	-	-	-
OG1.27-OG1.30	-	-	-	-	-	-	-	-	-
F5	-	x	x	x	x	-	-	-	x
A1	-	x	x	x	x	-	-	-	x
OG1.31-OG1.35	-	-	-	-	-	-	-	-	-
A2	-	x	x	x	x	-	-	-	x
A3	-	x	-	x	-	x	x	x	x
OG1.36-OG1.43	-	-	-	-	-	-	-	-	-
OG1.44-OG1.47	-	-	-	-	-	-	-	-	-
F6	-	x	x	x	x	-	-	-	x
OG1.48-OG1.53	-	-	-	-	-	-	-	-	-
A4	-	x	x	x	x	-	-	-	x
S1	x	x	x	x	-	x	x	x	x
S2	-	x	x	x	-	-	-	-	x
S3	x	x	x	x	x	x	x	x	x
S4	-	x	-	x	-	x	-	-	x
S5	-	x	x	x	x	-	-	-	x
S6	-	-	-	-	-	-	-	-	-
S7	-	x	x	x	-	x	-	-	x
S8	-	x	x	x	-	-	x	x	x

Matematikk 10 – kap.: Algebra

Kommunisert til lærerne	Muligheter for elevene								
	Generalisere	Antakelse	Identifisere	Sammenligne	Klassifisere	Rettferdiggjøre	Bevise	Formelt bevise	Eksemplifisere
O1	-	x	x	x	-	-	-	-	x
U1	x	x	x	x	x	x	x	x	x
OG1.1-OG1.6	-	-	-	-	-	-	-	-	-
OG1.7-OG1.10	-	-	-	-	-	-	-	-	-
U2	-	-	-	-	-	-	-	-	-
OG1.11-OG1.15	-	-	-	-	-	-	-	-	-
U3	x	x	x	x	x	x	x	x	x
OG1.16-OG1.19	-	-	-	-	-	-	-	-	-
O2	-	x	x	x	x	x	x	x	x
U4	-	-	-	-	-	-	-	-	-
OG1.20-OG1.23	-	-	-	-	-	-	-	-	-
OG1.24	x	x	x	x	x	x	x	x	x
OG1.25-OG1.27	-	-	-	-	-	-	-	-	-
O3	-	X	x	x	x	x	x	x	x
U5	-	-	-	-	-	-	-	-	-
U6	-	-	-	-	-	-	-	-	-
OG1.28	-	-	-	-	-	-	-	-	-
OG1.29	-	-	-	-	-	-	-	-	-
OG1.30-OG1.31	-	-	-	-	-	-	-	-	-
OG1.32	x	x	x	x	x	x	x	x	x
OG1.33	-	-	-	-	-	-	-	-	-
O4	-	-	-	-	-	-	-	-	-
U7	x	x	x	x	x	x	x	x	x
U8	-	x	x	x	x	x	-	-	x
OG1.34-OG1.37	-	-	-	-	-	-	-	-	-
OG1.38-OG1.40	-	-	-	-	-	-	-	-	-
OG1.41	x	x	x	x	x	x	x	x	x
OG1.42-OG1.43	-	-	-	-	-	-	-	-	-
U9	x	x	x	x	x	x	x	x	x
OG1.44-OG1.48	-	-	-	-	-	-	-	-	-
OG1.49-OG1.52	-	-	-	-	-	-	-	-	-
O5	-	-	-	-	-	-	-	-	-
U10	-	x	x	x	-	-	-	-	x
U11	-	x	x	x	-	-	-	-	x
OG1.53-OG1.54	-	-	-	-	-	-	-	-	-
U12	-	x	x	x	-	-	-	-	x
OG1.55-OG1.57	-	-	-	-	-	-	-	-	-
U13	-	x	x	x	-	-	-	-	x
OG1.58-OG1.61	-	-	-	-	-	-	-	-	-
O6	x	x	x	x	x	x	x	x	x
OG1.62-OG1.63	-	-	-	-	-	-	-	-	-
OG1.64	-	x	-	x	-	x	x	x	x
OG1.65	-	-	-	-	-	-	-	-	-
OG1.66	-	-	-	-	-	-	-	-	-
OG1.67	X	X	X	X	X	X	X	X	X
U14	-	X	X	X	-	-	-	-	X
OG1.68-OG1.69	-	-	-	-	-	-	-	-	-
U15	-	x	x	x	x	x	x	x	-

Fig.11: Resultat av min vertikale analyse

3.5 GTM

GTM står for «The Grounded Theory Method» som er en veletablert metode tatt i bruk i kvalitativ forskning som ble dannet av Glaser og Strauss på midten av 1960-tallet. Denne metoden går originalt ut på at en skal ikke ha en rekke antakelser på forhånd for så å analysere etter disse og sjekke av allerede eksisterende kategorier fra teorien. En skal heller ha et åpent sinn hvor en skal gå frem og tilbake fra teori og til dataen som skal analyseres for å på den måten danne seg ulike kategorier og tilpasse disse hele veien ut ifra fra hverandre. Dette skal gjøre at en forskning blir mye mer åpen for materialet den undersøker og ikke innsnevrer dette til en enklere virkelighet hvor mindre deler av materialet blir analysert ut ifra et allerede eksisterende rammeverk. (Bryant og Charmaz, 2007) Dette skriver Bryant og Charmaz (2007) at ikke er helt tilfelle ved GTM lenger ved at poenget blir ikke å unngå antakelser eller allerede forutinntatte forståelser i forkant av en undersøkelse, men heller å sikre at det blir tatt i bruk velbegrunnede argumenter og bevis, som alltid legger opp til videre forskning, revisjon og tilbakevisning. Kategoriene som danner grunnlaget for analysen skal altså ikke være selvstendige uavhengige kategorier, men heller basert på kognitive modeller med mening. Med dette vil GTM som metode i utvelgelse av kategorier være viktig å være bevisst dets forhold til underliggende teorier og spørsmål. Det vil altså innenfor GTM være viktig å gjøre den underliggende teoretiske konteksten mer eksplisitt og ikke mindre. (Bryant og Charmaz, 2007)

Med denne forklaringen til Bryant og Charmaz (2007) for «The Grounded Theory Method» har jeg derfor valgt å legge min forskning på lærerveiledninger etter denne. Jeg har som en del av min prosess ved å komme frem til et veletablert teoretisk rammeverk, lagt et godt begrunnet og etablert teoretisk rammeverk fra Jeanotte og Kieran (2017, se tabell 3) til grunn for min kategorisering i min analyse samtidig som jeg har inkludert en rekke andre teoretiske artikler, forskninger og undersøkelser på beslektete undersøkelser i min teoridel. Dette er da for å oppnå kategorier i min analyse som har et veletablert grunnlag i tidligere teorier (prosessaspektet for matematisk resonnering), samtidig som jeg åpner opp for en bredere analyse av funn i min diskusjon og konklusjon ved å inkludere flere ulike teoretiske perspektiv for å på den måten ikke innsnevre mitt datamateriale til å kun omhandle en liten del av tidligere teorier som ligger til grunn. Dette kan i verste fall gjøre at jeg selv tillegger mer muligheter og tanker bak ulike oppgaver i lærerveiledningene enn hva forfatterne hadde tenkt eller mindre enn hva som var tanken bak. Jeg vil altså kunne styrke min objektivitet ved å tillegge disse kategoriene på bakgrunn av et allerede etablert teoretisk rammeverk, samtidig som jeg inkluderer andre teorier og forskningsbaserte funn ved at jeg selv ikke gjør opp meg noen meninger uten at det er gode argumenter basert på underliggende teoretiske kontekster og spørsmål. Samtidig vil jeg på denne måten måtte gå tilbake til min analyse og teori i min diskusjon og drøfting av funn. På den måten vil studien hele tiden tilpasse disse funnene og kategoriene de blir plassert i, ved at allerede underliggende teorier styrer forskningen i nye og åpnere retninger. (Bryant og Charmaz, 2007)

3.6 Studiens kvalitet

Ifølge Tjora (2021) vil det være viktig for en forsker å overbevise andre om kvalitet i egen forskning i form av begrunnelser for valg i sin metodebruk, ved å ta for seg kvalitetskriteriene, pålitelighet (relabilitet), gyldighet (validitet) og generaliserbarhet. Senere vil en høy karakter eller en publikasjon i et anerkjent tidsskrift eller lignende kunne være med på å styrke forskningens formale troverdighet. Ved en kvalitativ forskning referer Tjora (2021) til Thagaard (1998) som i en grad har snakket om troverdighet, bekreftbarhet og overførbarhet som de tre kvalitetskriteriene, noe Tjora (2021) trekker frem som ren unødvendighet ettersom vi allerede har tre vel etablerte begreper innenfor forskning generelt. Jeg vil derfor dele min presentasjon om kvalitetssikring av min forskning her inn i de tre kvalitetskriteriene Tjora (2021) her referer til. Jeg vil også presisere litt mer om de ulike forskjellige synene på troverdighet, generaliserbarhet og overførbarhet under *4.6.2 validitet*.

3.6.1 Relabilitet

Relabilitet eller pålitelighet handler om at undersøkelsen eller forskningen som er gjort, blir gjort på en etterrettelig måte. (Anker, 2020) Dette utdyper Anker (2020) med at fremstillingen av data må være godt gjennomført og ikke et resultat av juks eller slapt håndverk. Det vil her være viktig å være transparent og ta leseren med inn i hvilke valg av metodiske tilnærminger en har gjort og hvilke utfordringer og problemer en har møtt underveis i sin forskningsprosess. (Anker, 2020) Med transparent, så menes det å ta leseren med på deler av analysen ved å se på eksempler av materialet og beskrive analysen og argumenter, slik at leseren får en forståelse av hva du legger til grunn i dine funn. (Anker, 2020) Jeg har derfor valgt å ta med en rekke eksempler i min presentasjon av resultater, slik at min oppgave vil fremstå så transparent som mulig. Jeg har også argumentert for mine valg av metode, analyse og oversettelsesprosess i tidligere kapitler, dette for å skape en forståelse av mine valg og bakgrunnen for dem.

Johannessen et al. (2021) trekker frem interrelabilitet som et viktig begrep for å styrke relabiliteten i sin forskning ved undersøkelser på dokumenter. Dette går ut på at en forsker som vil undersøke noe i et dokument, slipper til en annen kompetent person for å på den måten se i hvor stor grad deres subjektive betraktninger av funn samsvarer. Dette vil så klart være viktig å være klar over i min forskning, da jeg har valgt å undersøke og analysere to lærerveiledninger etter muligheter for matematisk resonnering. Ved at jeg her analyserte mitt materiale alene, blir dette en svakhet i min relabilitet. Dette ved at det blir mine subjektive oppfatninger og antakelser som bestemmer i hvilken grad og hvilke av de ulike kategoriene presentert i lærerveiledningene som kan skape muligheter for matematisk resonnering. Jeg har derfor forsøkt å presentere gode begrunnelser for mine valg av materialer, metode og analyseprosessen i de foregående emnene under kapitelet, *3 metode,* for å på den måten øke oppgavens transparens. Det blir i tillegg viktig å nevne at jeg her har lagt prosessaspektene til Jeanotte og Kieran (2017) til grunn i min analyse for å på den måten få til en så objektiv og nøytral analyse som mulig, som også bygger på et godt begrunnet teoretisk rammeverk. Om mulig kunne jeg her fått en annen kompetent person for eksempel en medstudent til å utføre samme analyse som meg for å på den måten sjekke hvorvidt våre funn samsvarte, og på den måten økt oppgavens relabilitet ytterligere, om samsvaring var tilfelle.

Ifølge Tjora (2021) vil en teori kunne forme forskningen i en eller annen grad. Videre presiserer Tjora (2021) at det derfor blir viktig å redegjøre for hvordan teorier og ulike perspektiver har bidratt til å forme forskningsdesign og analyse. Tjora (2021) trekker frem utvelgelse, presentasjon eller utdrag av observasjoner og intervjuer som svært sårbare forhold i kvalitative studier. Han trekker riktignok frem intervjuer og observasjon frem som eksempel, men jeg tenker allikevel at utvelgelsen av dokumenter ved dokumentanalyse og hvilke eksempler fra disse som trekkes frem i presentasjon av resultater blir en særlig sårbar del i min forskning. Jeg har derfor forsøkt å forklare nøye utvelgelsen av lærerveiledninger og bakgrunnen for disse valgene i *3.3 utvalg*. I min presentasjon av resultater har jeg også prøvd å gi en dyp forklaring på bakgrunn av hvorfor nettopp disse trekkes frem, for å frem det generelle inntrykket av materialet som er analysert og begrunnelser for mine observasjoner med grunnlag i mitt teoretiske rammeverk. Dette vil kunne skape en forståelse av hva som ligger bak mine uttalelser av funn og bakgrunn for valg av materialet som ligger til grunn og på den måten kunne øke relabiliteten på min oppgave.

«Et vanlig mål på relabilitet er nettopp at uavhengig observasjoner av samme fenomen skal gi samme resultat.» (Nyeng, 2012, s. 106) Dette utsagnet fra Nyeng er med på å understreke det Johannessen et al. (2021) skriver om interrelabilitet, hvor en vil kunne styrke forskningens relabilitet ved å slippe til andre personer for å se om de får eksakt samme resultat. Videre skriver Nyeng (2012) selv om det viser seg at flere uavhengige observasjoner av samme fenomen gir det samme resultatet, er det ikke gitt at dette er korrekt. Det kan nemlig være tilfeller hvor begge parter har feil og på den måten kommer vi inn på det Nyeng (2012) kaller målefeil. I prinsippet som et ideal uttrykker Nyeng (2012) at disse feilene lar seg rydde av veien og på den måten åpner for sanne data. Det påpeker Nyeng (2012) likevel at vil kunne innvendes med at denne enkle formulering av teorien ikke skiller mellom tilfeldige og systematiske målefeil. Når målinger skiller mellom ulike respondenter på feil grunnlag vil dette være det Nyeng (2012) kaller systematiske feil, mens tilfeldige feil ikke vil følge noe spesifikt mønster. Jeg argumenterer derfor med at jeg ved bruk av et veletablert teoretisk rammeverk som Jeanotte og Kieran (2017) i min analyse, som jeg igjen viser til at støtter opp under flere teorier og artikler om matematisk resonnering, styrker min relabilitet på dette området (systematiske feil), ved at rammeverket for analysen legger grunnlaget for hva som blir kategorisert som muligheter for matematisk resonnering. Når vi kommer inn på tilfeldige feil kan ikke disse sikres ved å oppfylle kravene ved relabilitet, men vi kommer da over på validitet. (Nyeng, 2012)

3.6.2 Validitet

Med validitet eller gyldighet, så menes det hvorvidt forskningen som er utført svarer på forskningsspørsmålet. (Tjora, 2021) Det vil være denne utfordringen jeg skal utdype litt mer om her. Tjora (2021) trekker frem to ulike former for gyldighet, pragmatisk og kommunikativ. Kommunikativ gyldighet vil i praksis si at en bygger ny forskning på tidligere forskning gjort av en selv eller andre, og sammenlikner sine funn med andre tidligere funn fra annen liknende forskning og teori. (Tjora, 2021)

Det vil være helt essensielt å huske at forskningsspørsmålet veier tyngst gjennom hele prosessen med valg av metode, teori, analyse og drøfting. Det vil derfor være viktig for en forsker å være klar over de pragmatiske valg som blir gjort på grunn av rent praktiske grunner, og gode begrunnelser for bakgrunn av valg av metode vil derfor være en stor del av gyldigheten for et forskningsprosjekt eller liknende. (Tjora, 2021) Anker (2020) spesifiserer at validitet eller gyldighet handler om nettopp dette og ta i bruk riktig eller passende metode for å besvare sitt forskningsspørsmål. Som Anker (2020) nevner vil det være viktig å ta i bruk observasjon ved et forskningsspørsmål om hvordan en lærer utfører sin undervisning, heller enn intervjue av læreren selv eller dokumentanalyse av læreplaner, ettersom dette ikke vil gi svar på hvordan selve undervisningen er, men heller lærerens egne tanker og idéer.

Dette gjør at jeg i min forskning som tidligere nevnt har valgt dokumentanalyse, ved at jeg i mitt forskningsspørsmål ønsker å se på muligheter for matematisk resonnering i to ulike lærerveiledninger fra før og etter Fagfornyelsen. Dette vil kunne gi meg en innsikt i hvordan og i hvilken mengde disse dokumentene skaper ulike muligheter for nettopp dette. Jeg går på den måten direkte til kilden som mitt forskningsspørsmål dreier seg om og på den måten vil jeg kunne øke gyldigheten av mine funn i en slik forskningsprosess.

Intern validitet eller det Johannessen et al. (2021) kaller troverdighet i kvalitative undersøkelser «…dreier seg om i hvilken grad forskerens fremgangsmåter og funn på en riktig måte reflekterer formålet med studien og representerer virkeligheten.» (s. 256) Dette blir det samme som Anker (2020) og Tjora (2021) skriver om validitet i sine bøker hvor det er forskningsspørsmålet som må veie tyngst og styre fremgangsmåtene til forskeren på riktig vei. Johannessen et al. (2021) skriver videre om det de kaller overførbarhet eller ekstern validitet. Dette forklarer de går ut på mye av det samme som kalles generalisering ved kvantitative undersøkelser. Hvor forskere har som formål å få innsikt i en større del en det de undersøker. Dette er også tilfelle ved kvalitative undersøkelser, men en bruker da begrepet *overføring* av kunnskap ettersom generalisering gir assosiasjoner til kvantitative studier. Overførbarhet går ut på hvorvidt en undersøkelse lykkes med å etablere beskrivelser, begreper, fortolkninger og forklaringer som er nyttige på andre områder. Ettersom en kvalitativ studie er rettet mot en mindre gruppe eller spesifikke fenomen, altså dybde heller enn bredde, vil det styrke en slik studies overførbarhet ved å gi fyldige beskrivelser av sine funn og detaljer som inngår i disse. (Johannessen et al., 2021) Jeg har med bakgrunn i det Johannessen et al. (2021) her skriver om overførbarhet forsøkt å gi fyldige beskrivelser av en rekke ulike eksempler som ligger til grunn for mine resultater og funn i denne oppgaven, dette vil slik jeg tolker ekstern validitet kunne bidra til å øke min oppgaves validitet for videre forskning.

3.7 Etiske betraktninger

«Ansvaret for å ivareta forskningsetikken gjelder alle som utfører forskning, herunder studenter, ph.d.-kandidater og andre aktører. Forskere har en lovfestet aktsomhetsplikt som skal «sikre at all forskning skjer i henhold til anerkjente forskningsetiske normer.»… Forskningsetikkloven § 4.» (NESH, 2021, s.7)

Dette sitatet hentet fra NESH (Den nasjonale forskningsetiske komité for samfunnsvitenskap og humaniora, 2021) sin rapport trekker frem viktigheten av å inkludere *etiske betraktninger* som et tema her i min oppgave, ved at det er mitt hovedansvar å sørge for at forskningsetikken her ivaretas. Videre deler NESH (2021) sine retningslinjer for forskningsetikk inn i 5 deler; ***forskerfellesskapet***, *hensyn til personer, Grupper og institusjoner, oppdragsgivere, finansiører og samarbeidspartnere* og ***forskningsformidling.***

Jeg har her valgt å utheve det førstnevnte og sistnevnte begrepet ved retningslinjer for forskningsetikk fra NESH (2021) ettersom jeg her tolker det som at det er disse som blir aktuell for min forskning. Kort forklart skriver NESH (2021) at *hensyns til personer* handler om personvern, tillatelser til inkludering i forskningsprosjekt etc., noe som ikke vil være aktuelt i min forskning, da jeg her har utført en dokumentanalyse hvor personer ikke er inkludert i prosessen. *Grupper og institusjoner* handler om enkelte sårbare grupper eller kulturer det er viktig å vise hensyn til, noe som heller ikke vil være et aktuelt etisk tema i min dokumentanalyse. *Oppdragsgivere, finansiører og samarbeidspartnere* vil heller ikke være et aktuelt etisk tema i min forskning, da dette omhandler forpliktelser ovenfor oppdragsgivere, finansiører og samarbeidspartnere, noe denne oppgaven ikke bærer preg av. Jeg vil derfor fokusere her på etiske betraktninger ved min oppgave i forhold til *forskerfellesskapet* og *forskningsformidling*. (NESH, 2021). Forskerfellesskapet og forskningsformidling deles videre opp i en rekke underkategorier i NESH (2021). Jeg har her valgt å liste opp de aktuelle kategoriene for min oppgave for så å kommentere disse og hvordan jeg har tatt betraktninger for disse etiske retningslinjene i min oppgave (se vedlegg 1 og 2 for alle disse punktene).

Forskerfellesskapet:

2. ***Forskerfellesskapets forpliktelser***
   Forskere skal bidra til å bygge faglige fellesskap preget av åpenhet, saklighet og kollegialitet.
6. ***Åpenhet, etterprøving og kritikk***
   Forskningens materiale og resultater bør gjøres tilgjengelig for andre så åpent som mulig, for å legge til rette for læring, etterprøving og kritikk.
7. ***Vitenskapelig publisering***
   Vitenskapelig publisering og annen offentliggjøring er viktig for å sikre forskningens kvalitet og for å ivareta grunnleggende normer om originalitet, etterprøvbarhet og kritikk.
8. ***God henvisningsskikk***
   All forskning skal bygge på god henvisningsskikk. Anerkjennelse av andres arbeid er viktig for å opprettholde en kollegial kultur, og det er en forutsetning for etterprøvbarhet og kritikk.

10. Plagiat
Det er uforenelig med god vitenskapelig praksis å stjele andres arbeid og fremstille det som sitt eget.
11. Fabrikkering og forfalskning
Det er uforenelig med god vitenskapelig praksis å dikte opp eller forfalske forskningens materiale eller resultater.
12. Fordreining og fortielse
Det er uforenelig med god vitenskapelig praksis å fordreie eller fortie relevante tolkninger eller analyser.

(NESH, 2021, s. 10 – 15)

Forskningsformidling:

45. Formidling som samfunnsansvar
Forskningsformidling er en viktig del av forskeres samfunnsansvar.
50. Deltakelse i samfunnsdebatten
Forskere skal bringe vitenskapelige resultater, arbeidsmåter og holdninger inn i samfunnsdebatten.

(NESH, 2021, s. 35 – 37)

Med alle disse punktene i betraktning for min oppgaves forskningsetikk har jeg derfor forsøkt å ha en transparent og åpenhet om min fremgangsmåte hele veien i dette forskningsprosjektet fra start til presentasjon av funn, diskusjon og konklusjon, se punkt 2 og 6. Denne oppgaven vil også bli publisert for offentligheten så vidt meg bekjent slik at mine resultater, arbeidsmåter og holdninger får muligheten til komme frem i samfunnsdebatten, for å på den måten tillate innsyn fra andre som vil få muligheten til å stille kritiske spørsmål til min undersøkelse og etterprøve mine resultater, se punkt 7, 45 og 50. Samtidig har jeg i min presentasjon av denne oppgaven hele veien lagt ved kildehenvisninger til andre teoretikere, offentlige dokumenter og forskere på feltet, med en åpen tilnærming om hvordan analysen har blitt utført og en rekke eksempler på hva jeg legger til grunn for mine funn, se punkt 8, 10, 11 og 12. Med disse betraktningene i bakhodet vil jeg så godt som meg bekjent opprettholde god forskningsetikk i min undersøkelse, samt i min presentasjon av undersøkelsen i denne oppgaven.

4 Resultater

Jeg vil her presentere mine resultater i en lik oppdeling av de to lærerveiledningene (Faktor 10 og Matematikk 10), ved å ta for meg muligheter som blir gitt for matematisk resonnering i et forsøk på å besvare mitt forskningsspørsmål:

> *Hvilke muligheter for matematisk resonnering blir gitt i innhold presentert i lærerveiledninger før og etter Fagfornyelsen?*

Generelt viser min analyse av datamaterialet følgende tre funn:

1. Gjennomgående lite muligheter for matematiske resonneringsprosesser i de mest vanlige gitte oppgavene (*nummererte oppgaver*) i begge lærerveiledningene. Ved at 52 av 53 av disse oppgavene i Faktor 10 skaper null mulighet for matematisk resonnering, og 63 av 69 i Matematikk 10.
2. Muligheter for matematisk resonnering viser seg å ofte bli gitt ved andre *aktiviteter og oppgaver (*med dette mener jeg oppgaver som ikke er nummererte oppgaver, som blir gitt som noe alternativt/oppstart/til ettertanke eller en aktivitet som kun blir gitt til læreren i lærerveiledningene) hvor det er antakelse, identifisering, sammenligning og eksemplifisering som går igjen i begge lærerveiledninger. Ved at 16 av 18 andre aktiviteter og oppgaver i Faktor 10 gir mulighet for noen av prosessene ved prosessaspektet for matematisk resonnering og 15 av 21 i Matematikk 10.
3. Muligheter for å fullføre alle prosessene ved prosessaspektet for matematisk resonnering (*resonnering fullt ut*) er en sjelden mulighet som i de fleste tilfeller blir gitt ved andre aktiviteter og oppgaver i begge lærerveiledningene. Ved at 2 av 2 oppgaver som skaper mulighet for alle prosessene i prosessaspektet for matematisk resonnering blir gitt i form av andre aktiviteter og oppgaver i Faktor 10, og 5 av 8 i Matematikk 10. Mine resultater viser at mulighetene for matematisk resonnering fullt ut har en relativt stor prosentvis økning fra før og etter Fagfornyelsen.

For å presentere bakgrunnen for disse funnene, samt gå i dybden på hva jeg har vektlagt i min analyse, vil jeg her først ta for meg de generelle forskjellene og utdype litt om dette i form av prosenter og tall. Før jeg går mer i dybden på en rekke eksempler på de ulike funnene jeg har analysert meg frem til. Jeg henviser ofte til tabell 3 hvor prosessene ved prosessaspektet til Jeanotte og Kieran (2017) for matematisk resonnering er kort oppsummert, ettersom denne ligger til grunn for mine argumenter for de ulike resultatene av muligheter for resonnering. Etter en kort presentasjon av de generelle forskjellene, se 5.1, vil inndelingen videre i mine resultater bære preg av de tre funnene, med fokus på en lærerveiledning av gangen. Jeg vil ta for meg resultatene fra de to lærerveiledningene systematisk under den samme inndelingen; *Nummererte oppgaver*, *andre aktiviteter og oppgaver*, samt *matematisk resonnering fullt ut*. Dette for å få en klar forståelse av hvor likhetene og forskjellene ligger i de to lærerveiledningene, samt en oversikt over hvordan de ulike oppgavene elevene kan få mulighet til å utføre blir presentert til læreren. Denne inndelingen vil gjenspeile seg i min diskusjon for å på den måten få et klart bilde av mine funn knyttet opp mot tidligere teori og forskning, og hva dette kan innebære.

Eksemplene blir presentert i egne bokser, og illustrasjoner og design er derfor ikke det samme som i lærerveiledningene, men tekst og relevante figurer står nøyaktig slik som de er gitt i disse. Fargekodene på bakgrunnen av disse boksene er basert på deres plassering ut ifra om de er gitt til både lærer og elever eller bare i lærerveiledning, se figur 7 og 8 under *Horisontal analyse.* Det vil være viktig å spesifisere at arbeidet med de ulike oppgavene presentert i eksemplene her kan utspille seg på en rekke andre måter enn det som er illustrert. Situasjoner beskrevet her er bare eksempler på hvilke muligheter som kan utspille seg og i den forstand illustrere hvilke muligheter elevene kan få for matematisk resonnering. Mitt poeng er at min analyse viser at disse mulighetene blir gitt, men at det kan likevel kan oppstå færre muligheter og prosessene kan utspille seg i andre rekkefølger i praksis.

4.1 Generelle forskjeller

Av de to lærerveiledningene til Cappelen Damm (Faktor 10 og Matematikk 10) som er blitt inkludert i denne analysen viser resultatene noen gjennomgående forskjeller i forhold til muligheter disse gir for matematisk resonnering. Jeg vil her ta for meg litt ulike funn i form av antall og prosent for å illustrere disse generelle forskjellene. Jeg organiserte de ulike oppgavene etter de som gir mulighet for noen av prosessene i prosessaspektet til Jeanotte og Kieran (2017, se tabell 3) ved matematisk resonnering, de som ikke gir noen form for mulighet for matematisk resonnering og de som gir mulighet for matematisk resonnering fullt ut.

I Faktor 10 av totalt 71 analyserte oppgaver viser min analyse at 2 av disse legger til rette muligheter for elevene å utføre alle prosessene ved prosessaspektet til Jeanotte og Kieran (2017) for matematisk resonnering, se tabell 3. Dette utgjør 2,8 prosent av antall oppgaver. Til sammenligning viser min analyse at av totalt 90 analyserte oppgaver i Matematikk 10, legger 8 av disse til rette muligheter for elevene å utføre alle prosessene ved prosessaspektet til Jeanotte og Kieran (2017) for matematisk resonnering (se tabell 3), som utgjør 8,9 prosent (se tabell 4 for en systematisk oversikt).

Av oppgaver som ikke legger til rette noen mulighet for prosessene ved prosessaspektet til Jeanotte og Kieran (2017) for matematisk resonnering (se tabell 3), viser min analyse også en forskjell i både prosent og antall. Det er i Faktor 10 hele 54 av 71 analyserte oppgaver som ikke skaper mulighet for matematisk resonnering, mens det i Matematikk 10 er 70 av 90 analyserte oppgaver. Dette utgjør 76,1 prosent i Faktor 10, mens det i Matematikk 10 blir en prosentandel på 77,8 (se tabell 4).

Min analyse viser at det i Faktor 10 er 17 av 71 oppgaver som skaper en eller annen form for muligheter for matematisk resonnering innenfor prosessaspektet til Jeanotte og Kieran (2017), som utgjør 23,9 prosent, mens det til sammenligning er 20 av 90 som skaper disse mulighetene i Matematikk 10, som utgjør 22,2 prosent (se tabell 4).

	Faktor 10	Matematikk 10
Matematisk resonnering fullt ut	2,8%	8,9%
Ingen mulighet for matematisk resonnering	76,1%	77,8%
Mulighet for noen av prosessene ved matematisk resonnering	23,9%	22,2%

Tabell 4: Oversikt i prosent over mine generelle funn av muligheter for matematisk resonnering

Oppgavene som skaper muligheter for noen av prosessene ved prosessaspektet til Jeanotte og Kieran (2017) for matematisk resonnering (se tabell 3), varierer i både antall, prosent og gjennomgående prosesser. I Faktor 10 skaper 15 av 71 analyserte oppgaver muligheter for matematisk resonnering innenfor noen av prosessene ved prosessaspektet til Jeanotte og Kieran (2017) for matematisk resonnering, se tabell 3. De prosessene som alltid går igjen der det er mulighet for matematisk resonnering er antakelse og sammenligning med eksemplifisering som støtte i disse prosessene. Det kommer også frem av min analyse at identifisering av mønstre også er en gjennomgående prosess i Faktor 10, ved at 12 av 15 oppgaver som skaper muligheter for matematisk resonnering innenfor noen av prosessene ved prosessaspektet til Jeanotte og Kieran (2017), skaper en mulighet for denne prosessen. I Matematikk 10 skaper 14 av 90 analyserte oppgaver muligheter for matematisk resonnering innenfor noen av prosessene ved prosessaspektet til Jeanotte og Kieran (2017) for matematisk resonnering, se tabell 3. I min analyse kommer det frem en del likheter her i Matematikk 10 med Faktor 10, hvor også antakelse og sammenligning med eksemplifisering som støtte i disse prosessene alltid går igjen der det er mulighet for matematisk resonnering. I tillegg viser min analyse at det også her er en relativ stor andel av disse oppgavene som gjennomgående skaper mulighet for identifisering av mønstre, ved at 13 av disse 14 oppgavene skaper muligheter for denne prosessen.

4.2 Faktor 10

4.2.1 Nummererte oppgaver

I de nummererte oppgavene i Faktor 10 oppdaget jeg i min i analyse at alle bortsett fra en oppgave ikke gir muligheter for noen av prosessene til Jeanotte og Kieran (2017). Jeg forklarer dette dypere i de 2 eksemplene under. Eksemplene er tatt fra ulike deler av kapitelet for å illustrere den gjennomgående likheten i disse type oppgavene gjennom kapitelet.

Oppgave 1.22

Sara har 6000 kr i banken. Hun tar ut en tredel av pengene. Simen tar ut en firedel av de pengene han har i banken. De tar ut like mange kroner.

Sett opp en proporsjon, og regn ut hvor mange kroner Simen har i banken.

Eksempel 1.4

Onkel Jens tjener 40 000 kr per måned. Han sparer $\frac{1}{20}$ av lønna hver måned. Tante Monica sparer $\frac{1}{25}$ av sin lønn hver måned. De sparer like mange kroner.

Hvor mye tjener tante Monica per måned?

Løsning

Tante Monica tjener x kr.

Hun sparer $\frac{x\ kr}{25}$ per måned.

Onkel Jens sparer $\frac{40\,000\ kr}{20}$ per måned.

Proporsjonen blir:

$$\frac{x}{25} = \frac{40\,000}{20}$$

$\frac{x \cdot 25}{25} = \frac{40\,000 \cdot 25}{20}$ ← Vi multipliserer alle ledd med 25.

x = 50 000

<u>Tante Monica tjener 50 00 kr per måned.</u>

Eksempel 1: Hentet fra Faktor 10 (Hjardar & Pedersen, 2015, s. 21)

Dette eksempelet hentet fra temaet «proporsjoner» er en oppgave elevene får mulighet til å utføre i sin versjon, se eksempel 1. Her får elevene høre om Sara og Simen. Begge tar ut like mye penger fra sine kontoer. Simen tar bare ut en fjerdedel av hans penger på konto, mens Sara tar ut en tredel av sine 6000kr. Elevene blir så bedt om å sette opp en proporsjon, for så å regne ut hvor mye Simen har i banken. Denne oppgaven blir presentert for elevene like etter et eksempel på hvordan en slik oppgave skal utføres, se eksempel 1. Dette eksempelet følges av en forklaring på forrige side på hva proporsjoner er, og dette blir også forklart under «Bakgrunnsstoff» for læreren.

Ved at elevene her får forklart alt om hvilken matematisk fremgangsmåte de *kan* ta i bruk for å utføre denne oppgaven, forsvinner muligheten for identifisering av mønstre, klassifisering og sammenligning. Jeg setter *kan* i kursiv her ettersom elevene her ikke kan velge å utføre en annen fremgangsmåte for å komme frem til svaret eller får noen mulighet til å prøve ut andre metoder, ettersom oppgaven spesifisere at de skal sette opp en proporsjon. Videre vil det ikke være en mulighet for å elevene å generalisere noe her ved at de blir gitt den generelle formelen som de skal ta i bruk for å komme frem til et svar. Dette gjør at prosessene som inngår i søken på ulikheter og likheter i prosessaspektet til Jeanotte og Kieran (2017) for matematisk resonnering ikke blir gitt som en mulighet i denne oppgaven, og det blir derfor ikke noe for elevene å validere. Dette gjør at min analyse konkluderer med at denne oppgaven ikke gir noen mulighet for noen av prosessene i prosessaspektet for matematisk resonnering for elevene i arbeid med denne oppgaven (Jeanotte og Kieran, 2017), se tabell 3.

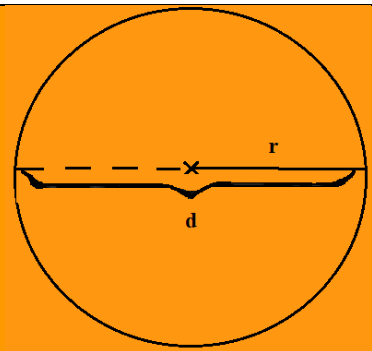
Oppgave 1.48

Formelen for omkretsen av en sirkel er O = πd

O står for omkretsen, og d står for diameteren i sirkelen.

Regn ut omkretsen når

a) d = 10,0 cm
b) d = 17,0 cm



Formelen for arealet av en sirkel er: A = πr^2

A står for arealet, og r står for radien i sirkelen.

Regn ut arealet når

c) r = 5,0 dm
d) r = 8,5 dm

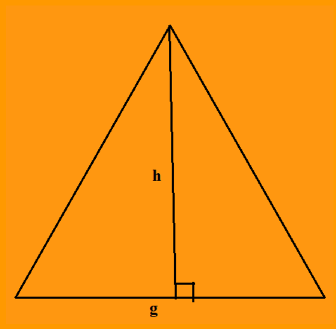
Forklaring

Formelen for arealet A av en trekant med grunnlinje g og høyde h er

A = $\frac{g \cdot h}{2}$

Hvis g = 8 cm og h = 9 cm, blir arealet

A = $\frac{8\,cm \cdot 9\,cm}{2} = 36cm^2$



Eksempel 2: Hentet fra Faktor 10 (Hjardar & Pedersen, 2015, s. 33 – 34)

Dette eksempelet er hentet fra temaet «regning med variabler», se eksempel 2. Her får elevene instruksjoner om å regne ut omkretsen og arealet av en sirkel når du får utgitt ulike mål på radius og diameter. I eksempel 2 ser vi en forklaring som blir gitt til elevene og læreren på den førgående siden i læreboken deres. Der blir det forklart steg for steg hvordan en setter inn tall som blir oppgitt inn i en formel, eneste forskjellen er typen figur og derfor også formlene. Med denne forklaringen og ved det at elevene her får oppgitt både formelen for omkrets og areal av en sirkel, samt forklaring på hva de ulike bokstavene står for og en illustrerende sirkel med radius og diameter markert på, gjør at muligheten for generalisering, identifisering av mønstre, sammenligning og klassifisering kan se ut til å bli fratatt dem. Det vil si at alle prosessene som går under det Jeanotte og Kieran (2017) kaller søken på likheter og ulikheter ikke blir gitt som en mulighet for elevene i arbeid med denne oppgaven, se tabell 3. På denne måten blir det heller ikke noe for elevene å validere og muligheten for bevisføring, rettferdiggjøring og formelt bevise er heller ikke til stede, se tabell 3. Eksemplifisering som støtte i disse prosessene er da heller ikke en mulighet og jeg ser derfor at ingen av prosessene til Jeanotte og Kieran (2017) for matematisk resonnering blir gitt som en mulighet i arbeid med denne oppgaven, se tabell 3.

4.2.2 Andre aktiviteter og oppgaver

I min analyse av aktiviteter og det de kaller «Frioppgaver» i Faktor 10 sin lærerveiledning har jeg funnet varierende muligheter for de ulike prosessene i prosessaspektet til Jeanotte og Kieran (2017) for matematisk resonnering, se tabell 3. Som en kan se ut ifra min vertikale analyse, så gir alle disse en eller annen form for matematisk resonnering, og dette varierer alt fra muligheter til noen få prosesser til muligheter for alle prosessene til Jeanotte og Kieran (2017), se tabell 3. For å illustrere og gå mer i dybden i de ulike gradene disse legger til rette muligheter for matematisk resonnering tar jeg for meg noen eksempler på dette her. Eksemplene er også her tatt fra ulike deler av kapitelet.

F3

En flaggermus spiste totalt over 1000 mygg i løpet av fire påfølgende netter. Hver natt spiste den 25 flere mygg enn natten før.

Hvor mange mygg kan den ha spist den første natten?

F3

Her bør elevene få jobbe sammen to og to, slik at de kan diskutere seg fram til en løsning.

Her kan elevene prøve seg fram. Noen vil kanskje dividere 1000 på 4, mens andre vil begynne med 1000.

250 = 250
250 + 25 = 275
275 + 25 = 300
300 + 25 = 325
Totalt: = 1150

1000 = 1000
1000 + 25 = 1025
1025 + 25 = 1050
1050 + 25 = 1075
Totalt: = 4150

Utfordre så elevene til å la flaggermusen spise totalt 1000 mygg på fire netter!

213 = 213
213 + 25 = 238
238 + 25 = 263
263 + 25 = 288
Totalt: = 1002

Noen vil kanskje begynne med 212,5 for å få nøyaktig 1000. Dette kan jo være et fint utgangspunkt for å snakke med elevene om 0,5 mygg, 0,5 barn osv.

Eksempel 3: Hentet fra Faktor 10 (Hjardar & Pedersen, 2015, s. 17)

Dette eksempelet er tatt fra temaet «problemløsing», se eksempel 3. Her får elevene et spørsmål om hvor mange mygg en flaggermus kan ha spist den første natten om den totalt har spist over 1000 mygg i løpet av fire netter og spiser 25 flere mygg hver natt enn natten før, se eksempel 3. Læreren på sin side blir tipset om å la elevene jobbe med denne oppgaven i par for å kunne diskutere og prøve seg frem til en løsning, etterfulgt av 2 eksempler på løsninger elevene kan komme med, se eksempel 3. Her skaper oppgaven flere muligheter for ulike prosesser i prosessaspektet til Jeanotte og Kieran (2017) for matematisk resonnering.

Ved at elevene får et relativt åpent spørsmål uten noen føringer om hvordan dette skal utføres, samtidig som læreren blir tipset om å la elevene prøve seg frem og diskutere ulike løsninger får elevene her en mulighet til å utføre en antakelse om en mulig løsning og svar på oppgaven. Om dette ikke blir sett på som en umiddelbar sannhet for elevene, vil det måtte testes. Elevene får da mulighet til å sammenligne deres løsninger med det oppgaven spør om og på den måten se om løsningen og svaret oppfyller alle kravene som må være til stede ved å klassifisere de like løsningene ut ifra deres matematiske egenskaper, og da også identifisere et mønster i mulige løsninger. Videre vil de få muligheten til å rettferdiggjøre deres løsning og svar ovenfor hverandre i et forsøk på å endre den epistemiske verdien til mer sann (her kan det være flere riktige svar og elevene får derfor muligheten til å rettferdiggjøre de ulike svarene ovenfor hverandre, selv om kanskje alle svarene er riktig er det ikke sikkert dette blir sett på som en umiddelbar sannhet for alle), se tabell 3. Alt dette vil de kunne gjøre med eksempler som støtte i prosessene. Elevene vil derimot ikke få noen mulighet for noen av de andre prosessene da dette ikke er en situasjon det vil være mulig å generalisere og dermed forsvinner også muligheten for bevisføring, se tabell 3.

Ved at læreren blir tipset om å spørre elevene om en mulig løsning på dette spørsmålet om flaggermusen skal ha spist nøyaktig 1000 mygg på 4 døgn i lærerveiledningen, skaper dette en mulighet for flere av prosessene i prosessaspektet til Jeanotte og Kieran (2017) ved matematisk resonnering. Prosessene vil få muligheten til å komme frem for elevene på samme måte som den første delen av spørsmålet, men ettersom det her bare er en løsning vil elevene også få muligheten til å bevise eller formelt bevise dette. I den forstand at de kan motbevise påstanden om at flaggermusen har spist 1000 mygg på 4 netter. Som en ser av forklaringen i eksempel 3 vil flaggermusen måtte spise 215,5 mygg den første natten for å få til en mulig løsning. Dette vil la seg bevise matematisk, men vil ikke fungere i praksis. Oppgavene her vil på den måten legge til rette en mulighet for alle prosessene i prosessaspektet til Jeanotte og Kieran (2017) ved matematisk resonnering, bortsett fra generalisering, da dette ikke er en situasjon det er mulig å generalisere.

A3

En Åpen oppgave kan være:

Lag et algebraisk uttrykk hvor svaret blir 4x.

Bruk elevenes svar som utgangspunkt for samtale om ulike løsninger og eventuelle feilkilder.

Svarene kan ofte deles inn tre grupper:

- Vanlig svar: $4x + 4 - 4$
- Mer avansert svar: $3 - 2x - (-6x + 3)$
- «Lurt» svar: $x \cdot 4$

Eksempel 4: Hentet fra Faktor 10 (Hjardar & Pedersen, 2015, s. 28)

Aktiviteten i eksempel 4 er hentet fra den delen som kun står i læreren sin del av lærerveiledningen under temaet «regning med variabler» og det er ikke noe spor til denne aktiviteten i elevenes lærebok. Elevene får i eksempel 4 mulighet til å først lage en rekke ulike antakelser om algebraiske uttrykk de mener tilsvarer 4x. Ved at læreren så blir tipset om å ta noen av disse svarene frem for en samtale, får elevene muligheter her til å sammenligne og rettferdiggjøre disse for å endre den epistemiske verdien fra sannsynlig til mer sannsynlig eller mindre sannsynlig. Deretter vil de også få muligheten til å ta dette videre ved å bevise og/eller motbevise de ulike antakelsene læreren presenterer for dem. Dette kan også trekkes helt frem til et formelt bevis som kan utføres. De får derimot ikke muligheten til å generalisere noe her, ettersom det ikke er noe generelt som alltid vil bli 4x, men en rekke ulike bevis kan utføres for å bevise at et uttrykk er lik 4x. Alt dette vil skape en mulighet for utførelse med eksempler som støtte i prosessene, se tabell 3.

4.2.3 Matematisk resonnering fullt ut

Oppgavene som oppfyller alle prosessene til Jeanotte og Kieran (2017) i prosessaspektet for matematisk resonnering holder seg hovedsakelig til de siste spørsmålene i kapitelet kalt «noe å lure på». Her tilbyr boken en rekke med relativt åpne spørsmål som holder seg innenfor temaene elevene skal ha vært igjennom tidligere i kapitelet, med ingen form for instruksjoner eller tips til læreren. Det som blir oppgitt i lærerveiledningen er fasit til spørsmålene elevene blir gitt (se eksempel 5) og ellers står læreren og elevene selv helt fritt til valg av arbeidsmetoder og fremgangsmåte for å komme frem til disse svarene. Jeg tar her for meg et eksempel innunder dette temaet og går i dybden på hvilke argumenter jeg har for at dette eksempelet skaper en mulighet for matematisk resonnering innenfor alle prosessene i prosessaspektet til Jeanotte og Kieran (2017), se tabell 3.

S3

Du kjenner aldersforskjellen mellom to mennesker.

Hvordan kan du på grunnlag av dette alltid finne ut når den ene var, eller blir dobbelt så gammel som den andre?

S3

Aldersforskjellen multiplisert med 2 gir alderen til den eldste når denne er dobbelt så gammel som den yngste.

Eksempel 5: Hentet fra Faktor 10 (Hjardar & Pedersen, 2015, s. 38)

I eksempel 5 blir elevene spurt om hvordan de alltid kan finne ut når en person er dobbelt så gammel som en annen om du kjenner aldersforskjellen mellom disse. Videre gir boken ingen andre føringer for hvordan elevene kan gå frem for å besvare dette spørsmålet. Dette gir elevene en mulighet til å prøve seg frem med ulike løsninger. Deretter vil de kunne få muligheten til å identifisere et mønster på veien til passende løsninger og løsninger som ikke passer ved å se etter en tilbakevendende relasjon mellom deres løsning og kriteriene i spørsmålet. I denne prosessen vil elevene altså få muligheten til å klassifisere løsningene som går overens med spørsmålets kriterier og ikke. Om en elev her kommer med en antakelse om en mulig generalisering, slik som blir oppgitt i fasiten for læreren (se eksempel 5), vil det videre skape mulighet for elevene å rettferdiggjøre sin antakelse ved å søke etter matematiske metoder som støtte. Her vil elevene da få en mulighet til å kunne bevise og formelt bevise dette ved å søke etter å endre den epistemiske verdien fra sannsynlig til sann. Alle prosessene vil skape en mulighet for elevene å utføre med eksempler som støtte. (se tabell 3, Jeanotte og Kieran, 2017)

4.3 Matematikk 10

4.3.1 Nummererte oppgaver

I Matematikk 10 sin lærerveiledning viser min analyse at det er varierende i hvilken grad disse oppgavene legger til rette muligheter for matematisk resonnering. Noen av disse oppgavene oppfyller ikke noen av kravene til prosessene i prosessaspektet til Jeanotte og Kieran (2017) for matematisk resonnering, mens andre oppfyller alle. For å illustrere denne forskjellen og argumentere for bakgrunnen av denne uttalelsen har jeg lagt ved to ulike eksempler her. Disse eksemplene varierer fra null mulighet for matematisk resonnering til noen av prosessene. Eksempel på oppgaver som gir mulighet for alle prosessene ved prosessaspektet for matematisk resonnering til Jeanotte og Kieran kommer under *4.3.3 Matematisk resonnering fullt ut.*

Oppgave 1.2

Faktoriser uttrykkene.

● a) 10xy c) $24ab^3$

b) 15ab d) $32xy^2$

● ● a) $24x^2y^2$ c) $81a^2b^2$

b) $45x^3$y d) $120xy^2$z

● ● ● a) $100x^2$ c) $200a^2b^3c^2$

b) $124x^3y^3$ d) $720x^3$y

Eksempel 1.1

Faktoriser uttrykkene.

a) $30x^2$y

b) $4x^2$ – 10x

Løsning

a) $30x^2$y = $\underline{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot x \cdot x \cdot y}$

b) $4x^2$ – 10x

= $2 \cdot 2 \cdot x \cdot x - 2 \cdot 5 \cdot x$ ← $2x$ er felles faktorer i begge ledd.

= $\underline{2x(2x\text{-}5)}$

Eksempel 6: Hentet fra Matematikk 10 (Hjardar & Pedersen, 2022, s. 10 – 11)

I eksempel 6 ser vi en oppgave elevene får utdelt i sin lærebok, hvor de blir bedt om å faktorisere en rekke algebraiske uttrykk av ulik vanskelighetsgrad. Videre i eksempel 6 blir elevene og læreren presentert et eksempel på hvordan slike uttrykk kan faktoriseres. Dette gjør at elevene får presentert en nøyaktig fremgangsmåte på en mulig løsning av oppgaven uten noen videre forklaring på hvorfor dette er tilfelle og hva slags matematisk begrunnelse som ligger bak. Eksempel 6 er derfor et resultat i min analyse på en oppgave som ikke gir noen mulighet for matematisk resonnering, ved at de her ikke får mulighet til å utføre noen av prosessene i prosessaspektet til Jeanotte og Kieran (2017) for matematisk resonnering, se tabell 3.

Oppgave 1.64

Hanna, Herman og Sara diskuterer hvor mye penger de har igjen etter ferien i Tyrkia. Hanna har dobbelt så mye som Sara, og Herman har tre ganger så mye som Sara. De har 180 kr igjen til sammen. Hvor mange kroner har hver av dem igjen etter ferien?

Eksempel 7: Hentet fra Matematikk 10 (Hjardar & Pedersen, 2022, s. 76)

Eksempel 1.18

Jon Morten kjøpte 3 kinobilletter, og godteri for 60 kr.

Han betalte 420 kr til sammen.

Hvor mye kostet én kinobillett?

Løsning

Én kinobillett koster x kr. Da koster 3 billetter 3x kr. I tillegg betalte han 60 kr for godteriet. Da får vi denne likningen:

$3x + 60 = 420$

Vi løser likningen.

$$3x + 60 = 420$$

$$3x + 60 - 60 = 420 - 60 \quad \leftarrow \text{Vi trekker fra 60 på begge sider.}$$

$$3x = 360$$

$$\frac{\cancel{3}x}{\cancel{3}} = \frac{360}{3} \quad \leftarrow \text{Vi dividerer alle ledd med 3 og forkorter.}$$

$$x = 120$$

Én kinobillett koster 120 kr.

Eksempel 7: Hentet fra Matematikk 10 (Hjardar & Pedersen, 2022, s. 73)

Tips

Et tips til elevene når det gjelder oppgave 1.64 og liknende oppgaver, er å sette opp en likning for å finne svaret. Og da er det lurt i dette tilfellet å først finne ut hvem av personene som har minst penger igjen, og så sette dette beløpet lik x. Da blir det lettere å finne et uttrykk for de andre beløpene og deretter sette opp en likning.

Eksempel 7: Hentet fra Matematikk 10 (Hjardar & Pedersen, 2022, s. 76)

Oppgaven i eksempel 7 er hentet fra temaet «utforskning og problemløsning», hvor oppgaven og eksempel 1.18 i eksempel 7 er å finne i både lærerveiledningen og elevenes lærebok, mens tipset er i margen som kun er synlig for læreren i lærerveiledningen. I eksempel 7 får elevene presentert en oppgave hvor tre personer lurer på hvor mye de har igjen etter en ferie. Oppgaveteksten informerer om at Hanna har dobbelt så mye som Sara, Herman han har tre ganger så mye som Sara, og til sammen har de 180kr. Spørsmålet er da hvor mye hver av dem har igjen. Ved at oppgaven i seg selv ikke legger noen føringer for hvilken fremgangsmåte elevene skal utføre vil det skape muligheter for noen av prosessene i prosessaspektet for matematisk resonnering, se tabell 3. Om vi ser på eksempelet som blir presentert i læreboken samt tipset til læreren i lærerveiledningen i eksempel 7, ser vi at elevene allikevel får en del føringer på hvordan dette kan utføres. Eksempelet som blir presentert i eksempel 7 er en tilnærmet lik oppgave slik som oppgave 1.64 (se eksempel 7), men situasjonen er ulik og uttrykket som elevene må komme frem til blir derfor ikke automatisk gitt til dem via dette eksempelet. Tipset i eksempel 7, gir derimot elevene litt mer føringer på hvordan de kan gå frem i akkurat denne oppgaven på samme måte som i eksempel 1.18 (se eksempel 7) for å komme frem til et riktig svar. Ved at læreren blir presentert et slikt tips fjernes muligheten for en del av prosessene i prosessaspektet for matematisk resonnering, som blant annet klassifisering og identifisering av mønster. Ettersom elevene blir gitt den matematiske egenskapen ved en mulig x-verdi på forhånd vil en tilbakevendende relasjon allerede være gitt til dem.

Videre vil elevene kunne få muligheten til å utføre en antakelse. Om en elev skulle komme med følgende antakelse: «Sara må jo ha 30 kr», vil eleven her få mulighet til å bevise og/eller formelt bevise dette så lenge klassen anerkjenner elevens bevis som en sannhet og det matematiske samfunnet ved et formelt bevis. Her kan vi tenke oss at eleven forklarer at: «Jo fordi Sara er x, da er Hanna 2x og Herman 3x. Det blir 6x=180. Deler vi 180 på 6 får vi x=30, så Sara har jo 30kr. Om dette ikke blir anerkjent av klassen som en umiddelbar sannhet vil eleven få muligheten til å rettferdiggjøre dette i et forsøk på å validere sin antakelse. Her kan eleven for eksempel ta i bruk et eksempel for å illustrere hvorfor han/hun mener sin antakelse er bevist og korrekt ved å sammenligne hans besvarelse med ukjente variabler og faktiske tall i denne situasjonen: «Om Sara har 30kr, så vil Hanna som har dobbelt så mye ha, 30kr*2, som er 60kr og Herman som har tre ganger så mye vil ha, 30kr*3, som er 90kr. 30kr+60kr+90kr=180kr, og derfor stemmer min antakelse». Elevene vil ikke få muligheten til å utføre noen form for generalisering, da dette tilfelle alltid vil være lik 180kr og derfor vil situasjonen og tallene være de samme, som gjør at det i dette tilfelle ikke vil være noe å generalisere. På denne måten vil elevene få muligheten til å komme innom en rekke av prosessaspektene til Jeanotte og Kieran (2017), men ikke alle, se tabell 3.

4.3.2 Andre aktiviteter og oppgaver

I de andre oppgavene i Matematikk 10 har jeg i min analyse funnet ulik grad av matematisk resonnering. Flere av disse gir mulighet for noen av prosessene i prosessaspektet til Jeanotte og Kieran (2017) ved matematisk resonnering, og en god del gir ikke mulighet for noen av disse prosessene. Det er også noen som viser seg å gi mulighet for alle prosessene i prosessaspektet til Jeanotte og Kieran (2017) for matematisk resonnering, men det argumenterer jeg for og gir eksempler på lenger ned i kapitelet, se *4.3.3 Matematisk resonnering fullt ut*. Jeg går her i dybden på to ulike oppgaver («Undringsoppgaver» og «Oppstartsspørsmål») i form av to eksempler, som begge er innom noen av prosessene i prosessaspektet til Jeanotte og Kieran (2017) for matematisk resonnering.

U8

Begrunn hvorfor en av likningene ikke passer inn.

2x = 12	x + 2 = 8	x – 4 = 2	x = 3x – 6

U8

La elevene arbeide sammen i mindre grupper og diskutere seg fram til forskjellige løsninger. Ett opplagt svar er at x = 3x – 6 ikke passer inn fordi svaret på denne likningen skiller seg ut fra de andre.

Den kan jo også skille seg ut ved at det er et variabelledd på høyre side.

Hva kan eventuelt begrunnelsen være for at den første likningen skiller seg ut fra de andre?

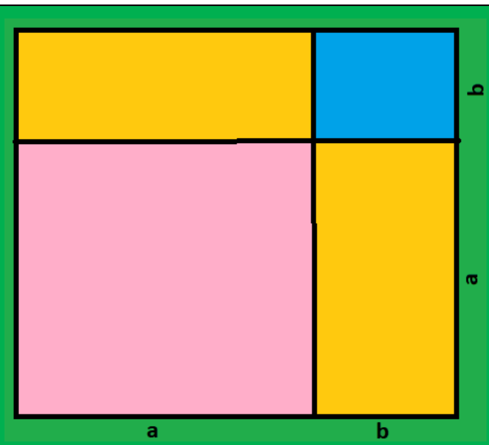
Er det enda flere løsninger?

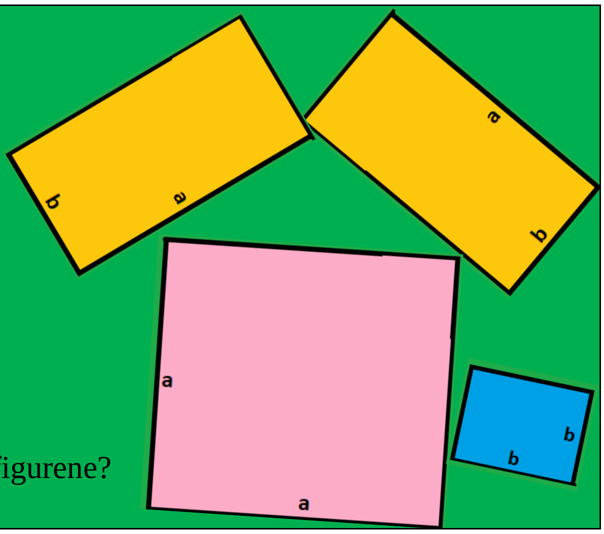
Eksempel 8: Hentet fra Matematikk 10 (Hjardar & Pedersen, 2022, s. 40)

Her får elevene presentert en «Undringsoppgave», hvor de blir bedt om å begrunne hvorfor en av fire likninger ikke passer inn med resten, se eksempel 8. I lærerveiledningen blir læreren tipset om å la elevene arbeide i mindre grupper for å diskutere seg frem til svaret. Videre får læreren tips om en mulig begrunnelse for hvorfor x=3x-6 skiller seg ut fra resten. Til slutt får læreren presentert et spørsmål om en mulig begrunnelse for hvorfor akkurat den første likningen skiller seg ut og om det kan være enda flere løsninger. Disse tipsene sammen med det åpne spørsmålet elevene får presentert er med på å spesifisere at det her kan være flere ulike svar, så lenge elevene finner noen begrunnelser for sine løsninger.

På denne måten får elevene her muligheten til å uttale en antakelse om hvilken likning de mener skiller seg ut fra resten, se tabell 3. Dette gjør at elevene også får muligheten til klassifisere de ulike likningene etter matematiske egenskaper, samtidig som de må identifisere et mønster for så finne ut hvilken av likningene som skiller seg ut fra dette mønstret. De får dermed muligheten til å sammenligne de matematiske objektene og relasjonene mellom disse, se tabell 3. Om de ulike løsningene ikke blir sett på som noe umiddelbar sannhet eller sannsynlighet for de andre, vil en i denne prosessen ved bruk av eksempler få muligheten til å rettferdiggjøre sin antakelse for resten av elevgruppa, se tabell 3. Videre vil denne oppgaven ikke skape noen mulighet for bevis eller formelt bevis ettersom det her vil være en rekke ulike løsninger som ikke lar seg generalisere eller bevise i den forstand.

O3





Hvordan vil dere uttrykke arealet til de forskjellige figurene?

O3

Ta utgangspunkt i spørsmålet og tegningen. Her kan det også vurderes om elevene skal tegne figuren selv og så klippe den ut. På neste side gjennomgår vi skritt for skritt sammenhengen mellom geometrisk og algebraisk løsning på første kvadratsetning. Vurder om dette er en fin intro, eller om oppgaven passer bedre på side 31.
La elevene få et ruteark, tre ulike farger og en saks. For at alle figurene skal bli like, kan det være lurt å gi instruksjonene i centimeter eller antall ruter.

Instruksjon:

1. Tegn et stort kvadrat med sider på 10 cm.
2. Del to sider som står vinkelrett på hverandre, inn i a og b, hvor a = 7 cm og b = 3 cm.
3. Trekk to linjestykker slik at figuren blir delt inn i to kvadrater med areal a^2 og b^2, og to rektangler med areal ab.
4. Fargelegg like store figurer likt, og klipp dem ut.

La elevene så svare på spørsmålet:
Hvordan er sammenhengen mellom uttrykket (a + b) (a + b) og a^2 + 2ab + b^2?

Eksempel 9: Hentet fra Matematikk 10 (Hjardar & Pedersen, 2022, s. 30)

Oppstartsoppgaven til temaet «kvadratsetningene» i Matematikk 10 skiller seg ut ved at den skaper mulighet for alle punktene under prosessaspektet ved matematisk resonnering til Jeanotte og Kieran (2017) bortsett fra generalisering, se tabell 3. Dette argumenterer jeg ved at elevene her blir spurt om hvordan de vil uttrykke arealet til de forskjellige figurene som er illustrert, se eksempel 9. I lærerveiledningen kommer det i tillegg en forklaring til oppgaven (se eksempel 9) om at elevene her skal tegne opp og fargelegge disse figurene, som for øvrig danner figuren brukt til å forklare første kvadratsetning geometrisk. Tilslutt blir læreren bedt om å spørre om sammenhengen mellom utrykket (a+b)(a+b) og a^2+2ab+b^2.

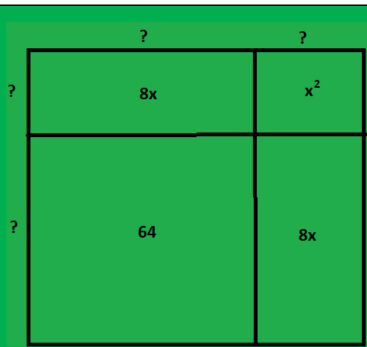
På denne måten gir oppgaven elevene en mulighet til å komme med antakelser om ulike potensielle uttrykk for arealet av figurene, for så å sammenligne disse. Videre kan de også forsøke å finne et areal for hele figuren om de setter den sammen og sammenligner ulike svar i søken på ulikheter og likheter, for å på den måten kunne klassifisere de ulike forslagene og identifisere et mønster, ut ifra sammenhengen mellom figurene og utrykkene. Hvis vi tar høyde for at elevene da kommer med en rekke ulike antakelser, men også at noen av disse er (a+b)(a+b) og a^2+2ab+b^2 vil elevene også få en mulighet til å rettferdiggjøre og bevise eller formelt bevise disse. Alt dette vil kunne bli gjort med eksempler som støtte i prosessen. Årsaken til at jeg tolker det dit hen at muligheten for generalisering her ikke er til stede er på bakgrunn av at variablene og figurene elevene jobber med her allerede er en generalisering og på den måten vil de få muligheten til å gå så langt som å formelt bevise dette, men ikke generalisere noe som allerede er generelt. Altså oppgaven inneholder ikke et sett av matematiske objekter som det vil være mulig å utlede en fortelling om, men heller et sett av matematiske generelle objekter (Jeanotte og Kieran, 2017), se tabell 3.

4.3.3 Matematisk resonnering fullt ut

I Matematikk 10 viser min analyse en del ulike oppgaver som skaper muligheter for elever å utføre alle prosessene i prosessaspektet til Jeanotte og Kieran (2017) for matematisk resonnering. Jeg vil her presentere mine funn i form av tre ulike eksempler hvor det er et fra hver av de ulike formene oppgavene blir presentert i lærerveiledningen («Undringsoppgaver», «Oppstartsspørsmål» og nummererte oppgaver).

Oppgave 1.32

Figuren viser et kvadrat som er delt opp i to kongruente rektangler og to mindre kvadrater.



a) Hva blir arealet av det minste kvadratet hvis x = 6?

b) Hva blir omkretsen av det minste kvadratet hvis x = 6?

a) Hvor lange er sidene i det nederste kvadratet?

b) Hva blir arealet av ett rektangel hvis x = 6?

a) Finn et uttrykk for omkretsen av hele figuren.

b) Finn to uttrykk for arealet av hele figuren.

Eksempel 10: Hentet fra Matematikk 10 (Hjardar & Pedersen, 2022, s. 36)

I denne oppgaven blir elevene og læreren presentert en oppgave hvor elevene skal finne ulike uttrykk og gjøre ulike utregninger ut ifra en figur, se figuren i eksempel 10. Her får læreren ikke noen videre tips, forklaringer eller liknende i sin lærerveiledning. De ulike prikkene på venstre side av deloppgavene illustrer den satte vanskelighetsgraden i oppgavene, se eksempel 10. Vis vi nå ser spesielt på deloppgaven a) med to prikker til venstre, se eksempel 10. Her spør oppgaven om hvor lange sidene er i det nederste når arealet er 64. Her vil elevene få en mulighet til å komme med en antakelse om hvilke lengder som vil være mulig å ha i dette kvadratet. Ved å måtte rettferdiggjøre denne antakelsen vil elevene få muligheten til videre sammenligning av sin antakelse og premissene i oppgaven, for og på den måten identifisere et mønster mellom disse. På den måten vil de kunne kvalifisere hvilke løsninger de etter hvert da kan se på som sannsynlige. Dette vil de videre få muligheten til å generalisere i prosessen ved å validere sin antakelse. Om en elev kommer med ulike besvarelser som: «16 og 4 eller 8 og 8», vil en etter de første prosessene kunne se at 8 og 8 oppfyller alle primnissene ettersom dette er et kvadrat og denne antakelsen kan på den måten kunne bli sett på som sannsynlig. Ved å videre forsøke å rettferdiggjøre denne antakelsen vil en kunne illustrere sin løsning i form av et eksempel ved å vise at 8*8=64, altså må lengdene være 8. Eller en kan gå rett over på å bevise eller formelt bevise dette ved å forsøke seg på en generalisering, ved at en danner uttrykket for formelen av et kvadrat som er 64=s^2. Deretter vil en få muligheten til å løse denne likningen og ender opp med s=$\sqrt{64}$ eller s=8. Dette kan så generaliseres ved bruk av variabler for å forklare dette: s=$\sqrt{A}$.

På denne måten vil denne oppgaven kunne skape en mulighet for alle prosessene ved prosessaspektet til Jeanotte og Kieran (2017) for matematisk resonnering. Her vil det være viktig å nevne at en helt lik oppgave kommer i form av et «Oppstartsspørsmål» senere i kapittelet, men denne er merket som en oppgave som ikke skaper noe mulighet for noen av prosessene i prosessaspektet til Jeanotte og Kieran (2017) for matematisk resonnering i min vertikale analyse. På bakgrunn av at den blir forklart steg for steg i form av en forklarende tekst like under. Jeg har likevel merket denne som en oppgave som skaper mulighet for matematisk resonnering ettersom denne blir presentert på side 36 i boken og forklaringen jeg sikter til her ikke blir presentert før på side 60.

U1

Forklar forskjellen på partall, oddetall, primtall og sammensatte tall.

U1

La elevene jobbe sammen to og to med spørsmålet og diskuter forklaringene i klasserommet.

Tilleggsspørsmål/ oppgaver kan være

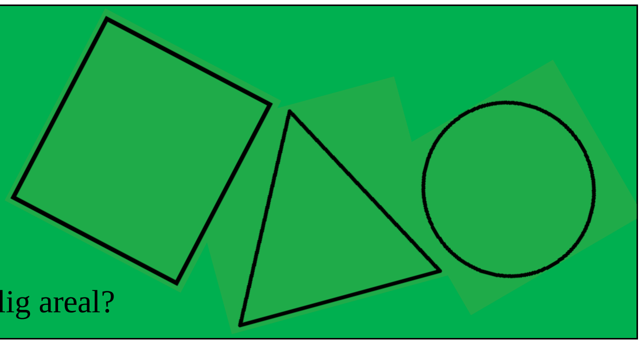
- Er det slik at alle primtall er oddetall?
- Hvorfor er det slik at to primtall ikke kan rett etter hverandre?
- Hvilket primtall er også et partall?
- Hvorfor må alle primtall over 10 ende på 1, 3, 7 eller 9?

Eksempel 11: Hentet fra Matematikk 10 (Hjardar & Pedersen, 2022, s. 9)

I «Undringsoppgaven» under temaet «algebraiske uttrykk» som for øvrig er den andre siden i kapittelet i Matematikk 10, kommer vi allerede inn på en oppgave som kan gi muligheter for alle prosessene i prosessaspektet til Jeanotte og Kieran (2017) for matematisk resonnering, se tabell 3. I denne oppgaven blir elevene bedt om å forklare forskjellen på partall, primtall og sammensatte tall, uten noen form for introduksjon på de ulike tallene på forrige side, se eksempel 11. Læreren på sin side blir tipset om å la elevene jobbe sammen to og to for så å diskutere forklaringene deres i plenum i klasserommet senere. I tillegg får læreren noen tips om tilleggsspørsmål til elevene, se eksempel 11.

Her vil altså elevene få en mulighet til å tilnærme seg oppgaven litt som de selv vil. De får blant annet muligheten til å starte med ulike antakelser på ulike forklaringer, ved bruk av eksempler som støtte til antakelsene de kommer opp med. Deretter kan de gå videre å sammenligne de ulike antakelsene i søken på ulikheter og likheter i premissene for hva et oddetall, primtall og sammensatt tall er, for så å klassifisere og indentifisere et mønster i de ulike antakelsene ut fra hva som fortsatt er gyldig og ikke i et forsøk på å generalisere noen ulike forklaringer. Da vil elevene også få muligheten til å rettferdiggjøre forklaringene deres for så å bevise eller formelt bevise disse antakelsene. Elevene får på denne måten muligheten til å fullføre hele prosessaspektet til Jeanotte og Kieran (2017), se tabell 3.

06



Hvilke former bør dere vurdere for å få størst mulig areal?

O6

Diskuter først med elevene hva som menes med spørsmålet. Hvorfor er det tegnet tre geometriske figurer med ulike form?

Poenget her er å ta utgangspunkt i inngjerding av et område med en begrenset lengde på et gjerde som skal brukes til inngjerdingen.

Diskuter med elevene om det har noe å si for arealet om vi lager et rektangulært område, et kvadratisk område, et trekantet område eller et sirkulært område.

Eksempel 12: Hentet fra Matematikk 10 (Hjardar & Pedersen, 2022, s. 72)

I dette «Oppstartsspørsmålet» i eksempel 12 blir elevene og læreren presentert et spørsmål om hvilke former en bør vurdere for å få et størst mulig areal. Like over spørsmålet er det tegnet et rektangel, en sirkel og en trekant, se eksempel 12. Læreren får også en ekstra tekst i lærerveiledningen med tips om å diskutere dette spørsmålet sammen med klassen, og ta for seg spørsmålet med konteksten av at en har en gitt lengde på et gjerde en skal bruke for å inngjerde et område i et forsøk på å få størst mulig areal. Til slutt spesifiseres det at det skal diskuteres med elevene om det spiller noen rolle hvilken figur (sirkel, rektangel, kvadrat eller trekant) en tar i bruk.

Disse åpne spørsmålene uten noen føringer på matematiske løsninger, gjør at elevene her først får muligheten til å komme med en rekke antakelser om hva de tror kan være en mulig løsning. Videre ved å skulle begrunne dette vil elevene få muligheten til å sammenligne hverandres ulike antakelser for å se hva som utgjør størst areal. Dette skaper en mulighet til å klassifisere disse antakelsene ut ifra sine matematiske egenskaper og på den måten identifisere et mønster for å kunne se hvilken figur de mener mest sannsynlig vil danne størst mulig areal. Videre i prosessen ved å rettferdiggjøre dette, må elevene generalisere sin antakelse for å endre den epistemiske verdien fra sannsynlig til mer sannsynlig. Til slutt skapes muligheten for å bevise eller formelt bevise denne ved å endre den epistemiske verdien til sann. Disse prosessene vil få muligheten til å utføres med eksempler som støtte. På denne måten vil spørsmålet i eksempel 12 kunne skape en mulighet for alle prosessene i prosessaspektet til Jeanotte og Kieran (2017) for matematisk resonnering, se tabell 3.

5 Diskusjon

Jeg vil her diskutere mine ulike funn som ble presentert i kapitel 6 *Resultater*. I et forsøk på å belyse mitt forskningsspørsmål vil jeg sette mine funn opp mot tidligere forskning og teori som er presentert tidligere i denne avhandlingen.

> *Hvilke muligheter for matematisk resonnering blir gitt i innhold presentert i lærerveiledninger før og etter Fagfornyelsen?*

Jeg har valgt å dele diskusjonen inn i ulike deler med først en drøfting av mine funn, før jeg tar for meg studiens begrensninger og kritikk, samt studiens implikasjoner og videre forskning.

5.1 Drøfting av funn

Jeg vil her trekke frem mine funn og se dem i sammenheng med tidligere forskning og teori for å på den måten få frem et bedre resultat og forståelse av hva disse funnene kan indikere av muligheter for matematisk resonnering, hvilke endringer som fremgår og hvilke eventuelle konsekvenser dette kan føre til for kunnskapslæring av matematikk og undervisningen på dette området. Jeg har her valgt å dele min drøfting inn i 4 ulike kategorier på samme måte som i min presentasjon av resultater. Dette for å skape en systematisk fremstilling og inndeling av de ulike resultatene og hvordan disse blir i sammenheng med den tidligere forskningen og teorien på dette feltet.

5.1.1 Generelle forskjeller

Som en ser ut fra tabell 4, vil det være fort å anta at forskjellene på muligheter for matematisk resonnering i de to lærerveiledningene fremstår litt sporadiske og tilfeldig. Dette kan så klart være tilfelle. En annen tanke bak dette er at forfatterne her har hatt et økt fokus på matematisk resonnering i andre alternative aktiviteter og oppgaver hvor elevene får mulighet til å samarbeide og interagere med hverandre og læreren. Med Yackel og Cobb (1996) sine argumenter for viktigheten av å se interaksjonismen til elever innenfor matematiske emner i sammenheng med deres prosesser i resonneringsdannelsen deres. Conner et. al (2014) sine argumenter for at elevers ulike argumentasjoner vil være viktig for å kartlegge elevers måter å resonnere på, for å på den måten få en oversikt over deres forkunnskaper om dette og videre kunne ta dette i bruk i prosessen ved å utføre en mer «avansert» form for resonnering. På bakgrunn av hva tidligere forskning og teori har sagt på feltet kan dette i den forstand se ut til å gjenspeile det økte fokuset på matematisk resonnering vi ser i kjerneelementene for matematikk på grunnskolen (Kunnskapsdepartementet, 2019).

På en annen side fremstår forskjellene i tabell 4 som det har vært lite økt fokus på muligheter for matematisk resonnering i den nye lærerveiledningen ved at både oppgaver som skaper muligheter for noen av prosessene ved matematisk resonnering har minket fra Faktor 10 til Matematikk, samt at oppgaver som skaper ingen mulighet for matematisk resonnering har økt fra Faktor 10 til Matematikk 10 i prosent. Dette vil kunne tyde på at den systematiske oppmerksomheten Stylianides (2009) trekker fram at resonnering som en aktivitet trenger for å bli implementert ikke vil bli gitt til elevene i lærerveiledningen til Cappelen Damm verken før eller etter Fagfornyelsen.

5.1.2 Marginal mulighet for resonnering ved nummererte oppgaver

Et av mine funn i denne oppgaven var at det var en liten del av de nummererte oppgavene som skapte muligheter for matematisk resonnering i lærerveiledningen før og etter Fagfornyelsen. I datamaterialet analysert i Faktor 10 gav bare en av oppgavene mulighet for matematisk resonnering og i Matematikk 10 var det 6 oppgaver. Med et økt søkelys på resonnering i den nye lærerplanen med resonnering som et av kjerneelementene i matematikk (Kunnskapsdepartementet, 2019) vil det være rimelig å tenke at dette skal gjenspeile seg i læremidlene i skolen. Samtidig viser tidligere forskning og teori at lærere lar seg styre av læreverk til planlegging av tema, metoder og fremgangsmåter (Stylianides, 2009). Med Stylianides (2009) sin uttalelse og mine funn kan det tyde på at elevene nå vil få en litt større mulighet for å utføre matematisk resonnering i arbeid med de nummererte oppgavene, men andelen er fortsatt absolutt i mindretall. Hvordan dette er i forhold til hensikten med å belyse viktigheten av resonnering som et kjerneelement i matematikk vil være vanskelig å si noe helt konkret om. Teorien peker i retning av at matematisk resonnering må innarbeides som en teknikk elevene tar i bruk i arbeid med oppgaver heller enn en separat avskilt prosess fra resten av matematikken uavhengig av tema (National Council of Teachers of Mathematics, 2009). Stylianides (2009) trekker frem viktigheten av en systematisk oppmerksomhet på resonnering som en aktivitet, og ved et absolutt mindretall av nummererte oppgaver (som er de mest vanlige oppgavene i lærerbøkene) som skaper muligheter for matematisk resonnering, kan det se ut til at denne systematiske oppmerksomheten ikke er til stede verken før eller etter Fagfornyelsen.

I Jacobs et al. (2006) sin undersøkelse på hvorvidt undervisningen i matematikk for 8. klasse i USA gjenspeiler med NCTM standerne som er satt med bakgrunn i resultatene fra TIMSS i 1995 og 1999 viser resultatene at spesielle former for matematisk resonnering ikke forekom og dette tolker de som at endringene er minimale og matematisk tenkning og resonnering, samt det konseptuelle matematiske arbeidet ikke forblir i tråd med intensjonen av prinsipper og standarder. Dette kan det også argumenteres for at ser ut til å gjenspeile seg her i min forskning av muligheter for matematisk resonnering i lærerveiledninger før og etter Fagfornyelsen, ved at det er liten endring i antall nummererte oppgaver som skaper muligheter for matematisk resonnering i de to lærerveiledningene.

Et annet viktig argument å få frem er Lithner (2004) sine to former av matematisk resonnering, nemlig «matematisk velbegrunnet resonnering» og «overfladisk resonnering». En type for overfladisk resonnering kaller Linther (2004) for RAR for hvor elevene her kun er avhengige av å huske hvilke algoritmer de kan ta i bruk for å utføre en gitt oppgave. Om den prøvde algoritmen ikke fungerer stopper prosessen uten noen videre evaluering av dette og en velger en ny algoritme. Dette kan tenkes å være det samme som Bergqvist & Lithner (2012) kaller algoritmisk resonnering. Vis vi nå ser på eksempel 1, 2 og 6 under resultater vil det tenkes at disse kommer under de to første stegene til Eriksson og Sumpter (2021), hvor oppgaven utforskes og et strategivalg blir tatt, hvor elevene får muligheten til å komme med et forutsigbarhetsargument hvor spørsmålet, «Hvorfor vil strategien løse oppgaven?» skal besvares. På den måten vil en kunne tenke seg at disse nummererte oppgavene går under det Linther (2004) her kaller for overfladisk resonnering eller Bergqvist & Lithner (2012) kaller algoritmisk resonnering. På denne måten kan det tenkes at en rekke av de nummererte oppgavene skaper muligheter for denne typen resonnering og en systematisk oppmerksomhet på resonnering som en aktivitet kan på den måten sies og være opprettholdt. Elevene vil da få muligheten til å utføre 2 av de tre ulike resonneringsmulighetene Linther (2004) fant i sin forskning, nemlig identifikasjon av mønstre og lokalt plausibelt resonnement. Dette vil igjen forsterke problematikken med det å lære matematikk for elever ifølge det Berqvist og Lithner (2012) trekker frem, ved at matematikken blir redusert til å omhandle en rekke isolerte sett som baserer seg på uforståelige fakta og algoritmer og fremgangsmåter som må huskes og gjenbrukes.

5.1.3 Muligheter for matematisk resonnering blir ofte gitt som noe alternativt

Når lærerveiledningene skaper muligheter for noen av prosessene ved prosessaspektet til Jeanotte og Kieran (2017) for matematisk resonnering, viser mine resultater at dette ofte er tilfelle ved andre oppgaver eller aktiviteter. Dette kan gjøre at den systematiske oppmerksomheten som Stylianides (2009) mener må være til stede for matematisk resonnering som en aktivitet ikke blir tilstrekkelig, ved at det er relativt få oppgaver i begge lærerveiledningene som skaper muligheter for matematisk resonnering. Ved at antall slike typer oppgaver hvor muligheten for matematisk resonnering ofte blir gitt, har økt fra Faktor 10 til Matematikk 10, vil det kunne tenkes at dette er på bakgrunn av det økte fokuset i Fagfornyelsen på matematisk resonnering. Om vi ser på tallene har dette i så tilfelle ikke resultert i en økt mulighet, da 15 slike oppgaver skaper mulighet for matematisk resonnering i Matematikk 10, mens 16 av disse oppgavene skaper muligheter for matematisk resonnering i Faktor 10. Som vi har sett av Stylianides (2009) lar lærere seg styre av læreverk i beslutninger om hvilke oppgaver som skal legges frem og hvor og når de skal implementeres. Dette kan føre til at intensjonen fraskriver fra Fagfornyelsens ønsket fokus på matematisk resonnering i grunnskolen. Dette ser vi igjen i Jacobs et al. (2006) sin uttalelse om at det i USA er minimale endringer i utøvende praksis for matematisk resonnering og derfor ikke i tråd med NCTM-standardene.

Ved at de fleste oppgaver som skaper mulighet for matematisk resonnering er i form av andre aktiviteter, «Oppstartsspørsmål», «Undringsoppgaver», «Frioppgaver» og «Noe å lure på»-spørsmål kan det medvirke til at lærerveiledningene styrker matematisk resonnering som en separat prosess. At resonnering blir sett på som et sett med nye emner er noe en helst bør unngå trekker National Council of Teachers of Mathematics (2009) frem i sin artikkel, men at det også helt uunngåelig vil kreve tid til instruksjoner i prosessen med å sette et søkelys på matematisk resonnering. Ved at disse oppgavene ofte har ekstra tips og tilhørende forklaringer på ulike fremgangsmåter til læreren i lærerveiledningene kan det tyde på at dette er et svar på nettopp dette. Stylianides (2009) skriver videre at en del av problematikken med å innføre resonnering på skolen i dag viser seg i forskningen å være at instruksjoner fra lærere nettopp skiller seg fra normen om hva forskningen viser at vil være hensiktsmessig for å fostre resonnering-og-bevis.

Hvis vi nå ser på eksempel 3, 4, 8 og 9 vil vi se at alle disse oppgavene tipser om å utføres i grupper eller par, noe Yackel og Cobb (1996) anbefaler som en nødvendig strategi i arbeid med resonering, nemlig interaksjon. Dette kan også tenkes å støtte opp under Conner et al. (2014) og Eriksson og Sumpter (2021) sine artikler om argumentasjon og dens direkte tilknytning til resonnering. På den måten vil både lærerveiledningen Faktor 10 og Matematikk 10 tenkes å skape muligheter for matematisk resonnering for elevene på en måte som skaper gode instruksjoner for dem i forkant av arbeidet og med økt mulighet til å komme med argumenter ovenfor hverandre ved at de her blir bedt om å arbeide med disse oppgavene sammen. Dette på bakgrunn Stylianides (2009) sin uttalelse om at forskning tyder på at lærere lar seg styre av lærebøker ved beslutninger om både hvilke oppgaver de skal inkludere, men også når og hvordan de skal implementeres. Ulempen med et å sette et fokus på matematisk resonnering i andre alternative oppgaver og aktiviteter og et minimalt fokus i de nummererte og mest vanlige oppgavene for elevene slik som min analyse viser, vil kunne sies å være at den systematiske oppmerksomheten som Stylianides (2009) fremhever som viktig for å få resonnering som en matematisk aktivitet implementert, ikke blir gitt som en mulighet.

I de tilfeller hvor oppgaver skaper muligheter for matematisk resonnering er det noen spesifikke av prosessene ved prosessaspektet til Jeanotte og Kieran (2017) min analyse viser at går igjen. Det er identifisering av mønstre, sammenligning, antakelse og eksemplifisering som støtte, se tabell 3. De tre førstnevnte prosessene innen under prosessaspektet til Jeanotte og Kieran (2017) for matematisk resonnering, ser vi igjen i Stylianides (2009) sin artikkel hvor det skrives at det å se sammenhenger, identifisere og ordne fakta i mønstre, for så å bruke disse mønstrene til å formulere antakelser, er de første prosessene for en matematikers praksis ved å formulere bevis. Dette ser vi igjen i Reid (2002) sine tre ulike modeller matematisk resonneringsprosess (se figur 1) hvor de ulike prosessene viser seg å kunne utspille seg i en rekke ulike mønstre og rekkefølger. Observere et mønster, anta at mønsteret fungerer generelt, teste antakelsen og generalisere antakelsen er de prosessene som går igjen i alle de tre mønstrene. Her kan det tenkes at det Reid (2002) kaller «å observere et mønster» går under det Stylianides (2009) kaller «å se sammenhenger og identifisere og ordne fakta i mønstre» som den første prosessen for å utføre et bevis. Videre i prosessene forklarer Stylianides (2009) at det vil være naturlig å «å bruke disse mønstrene til å formulere antakelser», som kan se ut til å passe under det Reid (2002) kaller «anta at mønsteret fungerer generelt» og «teste antakelsen». Stylianides (2009) skriver videre i sin artikkel at det er dette som må til for å gi elevene en mulighet til å resonnere seg frem til bevis, noe de blir fratatt muligheten til ved å arbeide med matematikk som blir isolert fra andre aktiviteter som støtter utviklingen.

Som en ser av min analyse gis ikke muligheten i de fleste oppgavene for videre resonnering helt frem til bevis eller formelt bevis, selv om disse prosessene Stylianides (2009) trekker frem som essensielle for å skape denne muligheten er til stede. Dette kan tenkes å komme av at generalisering ofte ikke er til stede, noe Stylianides (2009) også trekker frem som en viktig prosess i arbeidet mot et bevis og oppgavene blir på den måten gitt som et sett isolerte hendelser, og på den måten fjernes videre muligheter for elevene i arbeid med disse oppgavene. Vi ser også av min analyse at disse prosessene ikke nødvendigvis blir gitt i et fast mønster slik som Stylianides (2009) her argumenterer for i sin artikkel, men det skapes muligheter for elever å utføre matematisk resonnering ut ifra disse prosessene i en rekke ulike mønstre slik som Reid (2002) fremstiller i sine tre ulike modeller (se figur 1). Jeg skriver her *en rekke ulike* mønstre og henviser videre til Reid sine tre ulike mønstre, da min analyse bare har tatt for seg hvilke muligheter disse lærerveiledningene gir for arbeid med matematisk resonnering, og har derfor ikke tatt for meg hvilke mønstre dette kan utspille seg i nøyaktighet. Dette gjør at jeg her ikke vil komme med et spesifikt antall på noen mønstre, men heller henvise til Reid (2002) sin forskning på dette feltet for å understreke at dette ser det ut til at min analyse her støtter ved at det ikke alltid er tilfelle at en prosess kommer før en annen slik Stylianides (2009) argumenterer for i sin artikkel.

5.1.4 Stor økning i muligheter for matematisk resonnering fullt ut

I min analyse kommer det frem at det er en stor prosentvis økning fra før og etter Fagfornyelsen av oppgaver som skaper mulighet for matematisk resonnering fullt ut (se tabell 4), og med dette mener jeg en mulighet for alle prosessene ved prosessaspektet til Jeanotte og Kieran (2017), se tabell 3. Dette vil på en side kunne sies å føre til det ønskede økte fokuset på resonnering i matematikk som følger med kjerneelementene for matematikk ved Fagfornyelsen (Kunnskapsdepartementet, 2019). På en slik måte at den nyere lærerveiledningen til Cappelen Damm, Matematikk 10, her skaper en rekke flere muligheter for alle prosessene i prosessaspektet til Jeanotte og Kieran (2017) for matematisk resonnering som kan tyde på at elevene vil få flere muligheter til å utføre det Bergqvist & Lithner (2012) kaller kreativ matematisk resonnering, Stylianides (2009) kaller rp (resonnering-og-bevis) og det Thompson, Senk & Johnson (2012) kaller bevis-relatert resonnering. Noe både Stylianides (2009) og Thompson, Senk og Johnson (2012) forklarer at er prosesser forskningen på feltet viser at elever sliter med, da spesielt bevisgjøring.

Bergqvist & Lithner (2012) på sin side viser til sine lave funn av kreativ resonnering, og forklarer at dette er noe vi ser går igjen i forskningen på dette feltet. På en side vil dette kunne skape et økt fokus på nettopp prosessene frem til et bevis og hvordan en utfører et bevis for elevene ved at Matematikk 10 tilbyr flere muligheter for dette i sin lærerveiledning. Samtidig ser vi av min analyse at det er 8,9% (se tabell 4) av oppgavene som tilbyr dette og i artikkelen til Thompson, Senk og Johnson (2012) henviser til sine funn i deres undersøkelse som viser at 5,4% av de analyserte oppgavene ble kodet som formelle bevis. Denne undersøkelsen er av større omfang enn min, samtidig som at prosentforskjellen på 3,9% utgjør en relativ liten økning, gjør at det blir vanskelig å dra noen store sammenhenger ved at dette kan skyldes en tilfeldighet av mitt analyserte datamateriale. Det som likevel blir viktig å påpeke her er at selv om det kommer frem av min analyse at det er en prosentvis økning, er den fortsatt relativ liten og derfor kan det også tenkes at problematikken Thompson, Senk og Johnson (2012) og Stylianides (2009) trekker frem om få muligheter for slike typer oppgaver for elever i skolen også er å se igjen her i min analyse. Selv om det vil være vanskelig å si noe konkret om denne økningen av muligheter gitt i de to lærerveiledningen, vil det være naturlig å anta at en økning fra 2,8% til 8,9% (se tabell 4) tyder på en gjenspeiling av det økte fokuset på matematisk resonnering, som har kommet med Fagfornyelsen (Kunnskapsdepartementet, 2019).

På en annen side kommer det også frem av min analyse at de aller fleste av oppgavene som skaper muligheter for alle disse prosessene i prosessaspektet til Jeanotte og Kiearan (2017) for matematisk resonnering blir gitt i form av andre alternative oppgaver og aktiviteter som kan føre til at den systematiske oppmerksomheten resonnering som en aktivitet er avhengig av ifølge Stylianides (2009) ikke blir gitt elevene verken i Faktor 10 eller Matematikk 10. Som vi ser av min analyse kommer mesteparten av den store prosentvise økning av oppgaver som skaper muligheter for matematisk resonnering fullt ut (se tabell 4) av disse alternative oppgavene, som kan tyde på at forfatterne her har hatt økt fokus på matematisk resonnering som noe i oppstarten av et nytt tema og som noen ekstra undringsoppgaver. Dette vil på en måte kunne tenkes å underbygge det National Council of Teachers of Mathematics (2009) skriver om at selv om matematisk resonnering ikke bør bli sett på som et sett nye emner vil det definitivt trenge ekstra fokus og instruksjoner for å få dette implementert til å bli en holdning i matematikken.

5.2 Studiens begrensninger og metodekritikk

Denne studien har hatt en kvalitativ tilnærming, som medfører noen begrensninger. Jeg her har tatt for meg de to første kapitlene i de to siste lærerveiledningene til Cappelen Damm, en før og en etter Fagfornyelsen, som er et anerkjent forlag i Norge. Dette gjør det til en relevant undersøkelse, men å trekke noen generaliseringer videre fra dette vil ikke være mulig (Johannessen et al., 2021). Både ved at datamaterialet fra lærerveiledningene ikke tar for seg hele innholdet i lærerveiledningene og tilhørende eksterne materialer som internettressurser, alternative oppgavebøker og lignende som nevnt i 3.3 utvalg, men også ved at lærerveiledninger fra andre læreverk i norsk skole ikke er inkludert. Ved å ta for seg et større omfang av datamaterialet av både innholdet i de to lærerveiledningene som her er blitt undersøkt og inkludere andre lærerveiledninger vil kunne sørge for en større mulighet for en generalisering enn det som er mulig her i min kvalitative studie. Min studie er dermed begrenset til det å oppnå det Johannessen et al. (2921) kaller overførbarhet. Jeg har her forsøkt å etablere et grunnlag for videre forskning på dette feltet med fyldige beskrivelser av mine resultater og forklaringer, ettersom min studie har fokusert på å gå i dybden.

Videre vil en begrensning med denne studien være at ved en kvalitativ dokumentanalyse velger ut relevant materialet og sammenhenger om forhold i samfunnet for det en ønsker å undersøke (Johannessen et al., 2021). Noe som her kan medføre at min undersøkelse får frem hvilke føringer dokumenter, i dette tilfelle lærerveiledninger, skaper for muligheter for matematisk resonnering, men får ikke frem den faktiske sammenhengen om hvordan dette utarter seg i praksis i et klasserom. Vi vet fra Stylianides (2009) at lærere lar seg styre av når og hvordan ulike emner og oppgaver skal implementeres i et klasserom av læreverk, men denne studien viser ingenting om hvilken grad lærere tar i bruk lærerveiledninger eller om de bruker samme lærebøker som elevene selv. Dette vil i så fall tyde på at mulighetene som skapes i et klasserom vil kunne utarte seg ganske annerledes enn hva som kommer frem av min studie, ved at flere av oppgavene inneholder tips og forklaringer i lærerveiledningene som styrker deres mulighet for å skape en tilnærming som går under nettopp matematisk resonnering. Om lærere heller bruker de samme lærebøkene som elevene og er lærebokstyrt slik som Stylianides (2009) uttaler, vil dette fjerne flere av disse mulighetene. En studie som tar for seg hvilke materialer lærere bruker i sin forberedelse og planlegging av undervisning ville derfor kunne være med på å styrke min studie mer praksisrettet og da hvordan det relevante materialet blir i sammenheng med forhold i samfunnet.

Om vi videre tar høyde for at disse lærerveiledningene blir brukt av lærere vil dette gjøre at studien viser en god gjenspeiling av muligheter som blir gitt til elevene i praksis med bakgrunn i Stylianides (2009) sin uttalelse om at lærere er lærebokstyrt, men hva da med lærerens forkunnskaper. Dette vil også tydelig kunne påvirke hvilke muligheter som faktisk blir gitt til elevene. Ved at alle lærere har ulike forkunnskaper og på den måten ikke vil fremme alle emner og oppgaver på lik måte, selv om de tar i bruk lærerveiledningene og er lærebokstyrt slik som Stylianides (2009) trekker frem. Dette vil altså ikke komme frem av min studie, noe en forskning på læreres presentasjoner slik som Bergqvist & Lithner (2012) utførte i sin studie kunne bidratt til. For å på den måten få et bredere bilde på hvilke muligheter som blir gitt til elevene nå etter Fagfornyelsen, eller en tidligere studie på dette for å få et bilde av hvilke muligheter som ble gitt før.

Videre vil det kunne være en begrensing i denne studien at jeg her ikke går inn på videre forskning ved bruk av annet innsamlet materialet i from av observasjoner og intervjuer. Ved å utføre intervju av matematikklærere på 10.trinn som har jobbet med dette før og etter Fagfornyelsen ville en kunne fått et mer nyansert bilde av hvordan og hvilke muligheter som kommer frem av lærerveiledningene i praksis. For å få et mer nøytralt bilde på det hele uavhengig av lærernes egne meninger ville observasjon av ulike matematikkundervisningstimer kunne bidratt til å få et mer helhetsbilde på hvilke muligheter som faktisk kommer frem av lærerveiledningene i praksis, heller enn bare antakelser og tolkninger basert på tidligere forskning og teori i form av en dokumentanalyse av lærerveiledningene, som denne studien har bestått av. (Nyeng, 2012) Slik som Bergqvist & Lithner (2012) spesifiserer i sin artikkel om at de ikke får innsyn i andre relevante faktorer, som for eksempel lærebøkene, vil det også være viktig for meg å presisere at denne studien ikke får innsyn i hvilke muligheter som blir gitt til elevene i praksis. Ved en studie av et større omfang hvor en kunne inkludert både intervjue av matematikklærere og observasjon av matematikkundervisningstimer, ville en kunne økt studiens «best mulig» fremstilling av fenomenet (Nyeng, 2012).

Kort oppsummert bærer denne studien preg av begrensninger som gjør at det på bakgrunn av mine funn ikke vil være mulig å antyde hvordan dette utøver seg i praksis eller det fulle potensialet av hvilke muligheter for matematisk resonnering som blir gitt til elever, men en oversikt over hvilke muligheter for matematisk resonnering det kan se ut til blir gitt i lærerveiledninger før og etter Fagfornyelsen.

5.3 Studiens implikasjoner og videre forskning

I denne oppgaven har jeg tatt for meg hvilke muligheter for matematisk resonnering som blir gitt i lærerveiledningene til Cappelen Damm før og etter Fagfornyelsen. Matematisk resonnering er blitt et fenomen de fleste forskere er enige i at er en viktig faktor i elevers kunnskapslæring av matematikk og Fagfornyelsen har økt fokuset på resonnering ved tilføringen av kjerneelementer. Dette gjør at jeg føler min studie her bidrar forskningsmiljøet og undervisningen med en økt innsikt i hvilke muligheter som skapes for matematisk resonnering. Dette gjør jeg både i den nyeste lærerveiledningen til Cappelen Damm (Matematikk 10), som settes opp mot hvilke muligheter som ble gitt før Fagfornyelsen (Faktor 10). (Kunnskapsdepartementet, 2019; Stylianides, 2009; Thompson et al., 2012)

Bergqvist og Lithner (2012) trekker frem lærebøker som viktig for videre forskning på dette feltet ved at de i sin studie av læreres presentasjoner ikke får full innsikt i de potensielle mulighetene for matematiske resonnering. Denne studien vil kunne tenkes å styrke forskningen på dette feltet i forhold til en økt innsikt i muligheter skapt for matematisk resonnering i lærerveiledninger som også inneholder læreboken for elevene med bare flere faktorer som nevnt tidligere i metode. Videre vil mine resultater og drøftinger i denne oppgaven sammen med andre forskningsartikler på dette feltet kunne bidra til en økt bevissthet på begrepet matematisk resonnering og hva dette innebærer og hvilke faktorer som vil være viktige for å få dette som en implementert del av elevenes opplæring. Som Jeanotte og Kieran (2017) skriver er det en implisitt antakelse om at begrepet resonnering har en universal forståelse av dets mening. Dette har vi sett av teorien at er et ganske komplisert begrep med en rekke ulike prosesser, instruksjoner og fremgangsmåter som må til for at dette skal skapes en mulighet for. Bergqvist og Lithner (2012) og Stylianides (2009) skriver om at tidligere studier viser at læreres instruksjoner skiller seg fra det forskningen sier vil være viktige faktorer for å implementere matematisk resonnering og vi ser derfor at elever på alle trinn sliter med aktiviteten resonnering-og-bevis. Jeg håper derfor at min studie vil på samme måte som artikkelen til Jeanotte og Kieran (2017) kunne bidra til å forenkle det kompliserte begrepet matematisk resonnering og få et klart bilde av hvilke muligheter som skapes for dette i lærerveiledninger, slik at lærere blir mer bevisst sine instruksjoner og planlegging av undervisning for å skape disse mulighetene i praksis.

Som tidligere nevnt i 5.2 vil denne studien kunne være et utgangspunkt for en rekke videre studier på dette feltet. Det vil her kunne være interessant å utføre en lignende analyse i større skala og omfang for å på den måten kunne generalisere funnene for å få et tydeligere bilde på hvilke endringer som er blitt gjort og hvilke muligheter for matematisk resonnering som blir gitt i lærerveiledninger på grunnskolen i Norge etter Fagfornyelsen for 10.klasse i matematikk. Videre vil det kunne være et viktig bidrag å koble denne studien på andre datainnsamlinger i from av intervju og observasjon, for å på den måten skape et mer helhetsinntrykk av hvilke muligheter for matematisk resonnering som kommer helt frem til elevene.

6 Konklusjon

Jeg har i denne oppgaven forsøkt å besvare forskningsspørsmålet:

> *Hvilke muligheter for matematisk resonnering blir gitt i innhold presentert i lærerveiledninger før og etter Fagfornyelsen?*

Dette har jeg belyst ved å ta for meg offentlige dokument på dette området, samt tidligere teori og forskning på feltet, før jeg har utført min egen analyse. Ved å knytte mine funn og resultater opp mot tidligere forskning og teori på feltet har jeg her kommet frem til en konklusjon, som det absolutt vil være interessant om noen bygger videre på eller stiller kritiske spørsmål til.

Matematisk resonnering i lærerveiledninger før og etter Fagfornyelsen ser ut til å ofte bli gitt i form av andre oppgaver og aktiviteter hvor elevene får muligheten til å utføre matematisk resonnering fullt ut (noe som kommer frem som en sjelden mulighet). Her får lærere ekstra informasjon i form av tips til utførelse, instruksjoner og løsningsforslag. Videre er det gjennomgående identifisering av mønstre, antakelse, sammenligning og eksemplifisering som går igjen av mulige prosesser i arbeid med oppgaver som skaper muligheter for matematisk resonnering i både lærerveiledningen før og etter Fagfornyelsen. Min studie viser også en relativt stor prosentvis økning av oppgaver som skaper muligheter for alle prosessene i prosessaspektet til Jeanotte og Kieran (2017) ved matematisk resonnering etter Fagfornyelsen kontra den tidligere lærerveiledningen. Dette økte fokuset ser ut til å ha kommet på bekostning av oppgaver som skaper mulighet for noen av prosessene i prosessaspektet til Jeanotte og Kieran (2017) ved matematisk resonnering, når disse type mulighetene har hatt en prosentvis nedgang fra lærerveiledningen før og etter Fagfornyelsen. Dette kan tyde på et økt fokus på matematisk resonnering i gitte tilfeller, men at det ikke er blitt en gjennomgående og implementert del av mulighetene for oppgaveløsning i lærerveiledningen etter Fagfornyelsen.

Med dette vil jeg oppfordre til et økt fokus hos matematikklærere i sine instruksjoner av oppgaver og planlegging av undervisning på hvilke muligheter som blir servert til dem i form av lærerveiledninger. Slik at vi sammen kan tilpasse undervisningen på en måte som skaper de muligheter for matematisk resonnering som blir gitt oss i disse, men også øker vår bevissthet på implementering av dette i flere plan av vår undervisning.

Referanser/litteraturliste

- Anker, T. (2020). Analyse i praksis: en håndbok for masterstudenter (1. utg.). Cappelen Damm akademisk.

- Bergqvist, T., & Lithner, J. (2012). Mathematical reasoning in teachers' presentations. The Journal of Mathematical Behavior, 31(2), 252–269. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2011.12.002

- Bryant, A., & Charmaz, K. (2007). The SAGE handbook of grounded theory. SAGE.

- Charalambous, C. Y., Delaney, S., Hsu, H. Y., & Mesa, V. (2010). A comparative analysis of the addition and subtraction of fractions in textbooks from three countries. *Mathematical thinking and learning*, *12*(2), 117-151.

- Conner, A., Singletary, L. M., Smith, R. C., Wagner, P. A., & Francisco, R. T. (2014). Identifying Kinds of Reasoning in Collective Argumentation. Mathematical Thinking and Learning, 16(3), 181–200. https://doi.org/10.1080/10986065.2014.921131

- Eriksson, H., & Sumpter, L. (2021). Algebraic and fractional thinking in collective mathematical reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, *108*(3), 473–491. https://doi.org/10.1007/s10649-021-10044-1

- Halsne, J. (2022). *Matematisk resonnering i lærerveiledninger* (Master's thesis, NTNU). Hentet fra: no.ntnu:inspera:107175740:37468598.pdf

- Hjardar, E. & Pedersen J. – E. (2015). *Faktor 10:* Lærerens bok (1.utg.). Cappelen Damm.

- Hjardar, E. & Pedersen J. – E. (2022). *Matematikk 10:* Lærerens bok (1.utg.). Cappelen Damm.

- Jacobs, J. K., Hiebert, J., Givvin, K. B., Hollingsworth, H., Garnier, H., & Wearne, D. (2006). Does Eighth-Grade Mathematics Teaching in the United States Align with the NCTM Standards? Results from the TIMSS 1995 and 1999 Video Studies. Journal for Research in Mathematics Education, 37(1), 5–32. https://doi.org/10.2307/30035050

- Jeannotte, & Kieran, C. (2017). A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. Educational Studies in Mathematics, 96(1), 1–16. https://doi.org/10.1007/s10649-017-9761-8

- Johannessen, A., Christoffersen, L., & Tufte, P. A. (2021). Introduksjon til samfunnsvitenskapelig metode (6. utgave.). Abstrakt forlag.

- Kaarstein, H., Radišić, J., Lehre, A.C., Nilsen, T. & Bergem, O.K. (2020). TIMSS 2019. Kortrapport. Institutt for lærerutdanning og skoleforskning, Universitetet i Oslo.

- Kunnskapsdepartementet. (2017). Overordnet del – verdier og prinsipper for grunnopplæringen. Fastsatt som forskrift ved kongelig resolusjon. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020. https://www.regjeringen.no/no/dokumenter/verdier-og-prinsipper-for-grunnopplaringen/id2570003/

- Kunnskapsdepartementet. (2019). Læreplan i matematikk 1.–10. trinn (MAT01-05). Fastsatt som forskrift. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020. Læreplan i matematikk 1.–10. trinn (MAT01-05) (udir.no)

- Lithner, J. (2004). Mathematical reasoning in calculus textbook exercises. The Journal of Mathematical Behavior., 23(4), 405–427. https://doi.org/info:doi/

- National Council of Teachers of Mathematics. (2009). Executive summary Focus in high school mathematics: Reasoning and sense making. FHSM Executive Summay.pdf (nctm.org)

- NESH. (2021). *Forskningsetiske retningslinjer for samfunnsvitenskap og humaniora* (5. utg.). Hentet fra: forskningsetiske-retningslinjer-for-samfunnsvitenskap-og-humaniora.pdf (unit.no)

- Nyeng, F. (2012). *Nøkkelbegreper i forskningsmetode og vitenskapsteori* (1. utg.). Fagbokforlaget.

- Reid, D. A. (2002). Conjectures and refutations in grade 5 mathematics. *Journal for research in mathematics education*, *33*(1), 5-29.

- Stylianides. (2009). Reasoning-and-Proving in School Mathematics Textbooks. Mathematical Thinking and Learning, 11(4), 258–288. https://doi.org/10.1080/10986060903253954

- Thompson, Senk, S. L., & Johnson, G. J. (2012). Opportunities to Learn Reasoning and Proof in High School Mathematics Textbooks. Journal for Research in Mathematics Education, 43(3), 253–295. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.43.3.0253

- Tjora, A. H. (2021). Kvalitative forskningsmetoder i praksis (4. utgave.). Gyldendal.

- Utdanningsdirektoratet. (2018, 29. oktober). Film: Dybdelæring. I utdanningsdirektoratet. Hentet 16. mai 2023 fra https://www.udir.no/laring-og-trivsel/lareplanverket/stottemateriell-til-overordnet-del/film-dybdelaring/

- Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for research in mathematics education*, *27*(4), 458-477.

Vedlegg

1. Etiske retningslinjer for kategoriene under forskerfellesskapet (2 sider)
2. Etiske retningslinjer for kategoriene under forskningsformidling
3. Resultat for analysen av kopieringsoriginaler i Faktor 10

Vedlegg 1: <NESH, 2021, s. 10 – 16>

1. **Fri og uavhengig forskning**

Forskere skal ha individuell frihet og reell uavhengighet. Institusjonell autonomi skal være forskningsetisk forsvarlig og kan ikke bryte med normer for god vitenskapelig praksis.

2. **Forskerfellesskapets forpliktelser**

Forskere skal bidra til å bygge faglige fellesskap preget av åpenhet, saklighet og kollegialitet.

3. **Faglig bedømmelse**

Forskere må være åpne om rolle- og interessekonflikter ved faglige bedømmelser.

4. **Veileder og prosjektleders ansvar**

Veiledere og prosjektledere har et overordnet og helhetlig ansvar for forskningsetikken i prosjektet.

5. **Veilederforholdet**

Veiledere og studenter/ph.d.-kandidater skal behandle hverandre med respekt. Veiledere skal ikke misbruke sin posisjon til egen fordel. Det gjelder både i faglige og i personlige forhold.

6. **Åpenhet, etterprøving og kritikk**

Forskningens materiale og resultater bør gjøres tilgjengelig for andre så åpent som mulig, for å legge til rette for læring, etterprøving og kritikk.

7. **Vitenskapelig publisering**

Vitenskapelig publisering og annen offentliggjøring er viktig for å sikre forskningens kvalitet og for å ivareta grunnleggende normer om originalitet, etterprøvbarhet og kritikk.

8. **God henvisningsskikk**

All forskning skal bygge på god henvisningsskikk. Anerkjennelse av andres arbeid er viktig for å opprettholde en kollegial kultur, og det er en forutsetning for etterprøvbarhet og kritikk.

9. **Medforfatterskap**

Forskere skal respektere andres bidrag og følge anerkjente normer for medforfatterskap og samarbeid.

10. **Plagiat**

Det er uforenelig med god vitenskapelig praksis å stjele andres arbeid og fremstille det som sitt eget.

11. **Fabrikkering og forfalskning**

Det er uforenelig med god vitenskapelig praksis å dikte opp eller forfalske forskningens materiale eller resultater.

12. Fordreining og fortielse

Det er uforenelig med god vitenskapelig praksis å fordreie eller fortie relevante tolkninger eller analyser.

13. Sikkerhet og beredskap

Forskere har ansvar for løpende å vurdere egen og andres sikkerhet. Forskningsinstitusjoner bør ha rutiner for å håndtere risiko og beredskap.

14. Internasjonalt samarbeid

Forskere ved institusjoner i Norge er forpliktet til å følge norske regler og retningslinjer også i andre land.

Vedlegg 2: <NESH, 2021, s. 35 – 37>

45. Formidling som samfunnsansvar

Forskningsformidling er en viktig del av forskeres samfunnsansvar

46. Formidling og institusjonenes ansvar

Forskningsinstitusjonene skal legge til rette for forskningsformidling og andre former for dialog og samspill.

47. Formidling og etterrettelighet

Kravet om etterrettelighet er det samme ved forskningsformidling som ved vitenskapelig publisering.

48. Formidling og saklighet

Kravet om saklighet er det samme ved forskningsformidling som ved vitenskapelig publisering.

49. Deltakelse i tverrfaglig dialog

Forskere bør formidle kunnskap på tvers av spesialiserte fagområder.

50. Deltakelse i samfunnsdebatten

Forskere skal bringe vitenskapelige resultater, arbeidsmåter og holdninger inn i samfunnsdebatten.

Vedlegg 3: <Vertikal analyse av kopieringsoriginaler i Faktor 10>

Vertikal analyse									
Faktor 10 – kap.: Tall og algebra									
Kommunisert til lærerne	**Muligheter for elevene**								
	Generalisere	Antakelse	Identifisere	Sammenligne	Klassifisere	Rettferdiggjøre	Bevise	Formelt bevise	Eksemplifisere
k.1.1	-	x	-	x	x	x	-	-	x
K.1.2	x	x	x	x	x	x	-	-	x
K.1.3	-	-	-	-	-	-	-	-	-
K.1.4	-	x	x	x	x	-	-	-	x
K.1.5	-	-	-	-	-	-	-	-	-
K.1.6	-	x	x	x	x	-	x	x	x
k.1.7	-	-	-	-	-	-	-	-	-
k.1.8	-	-	-	-	-	-	-	-	-