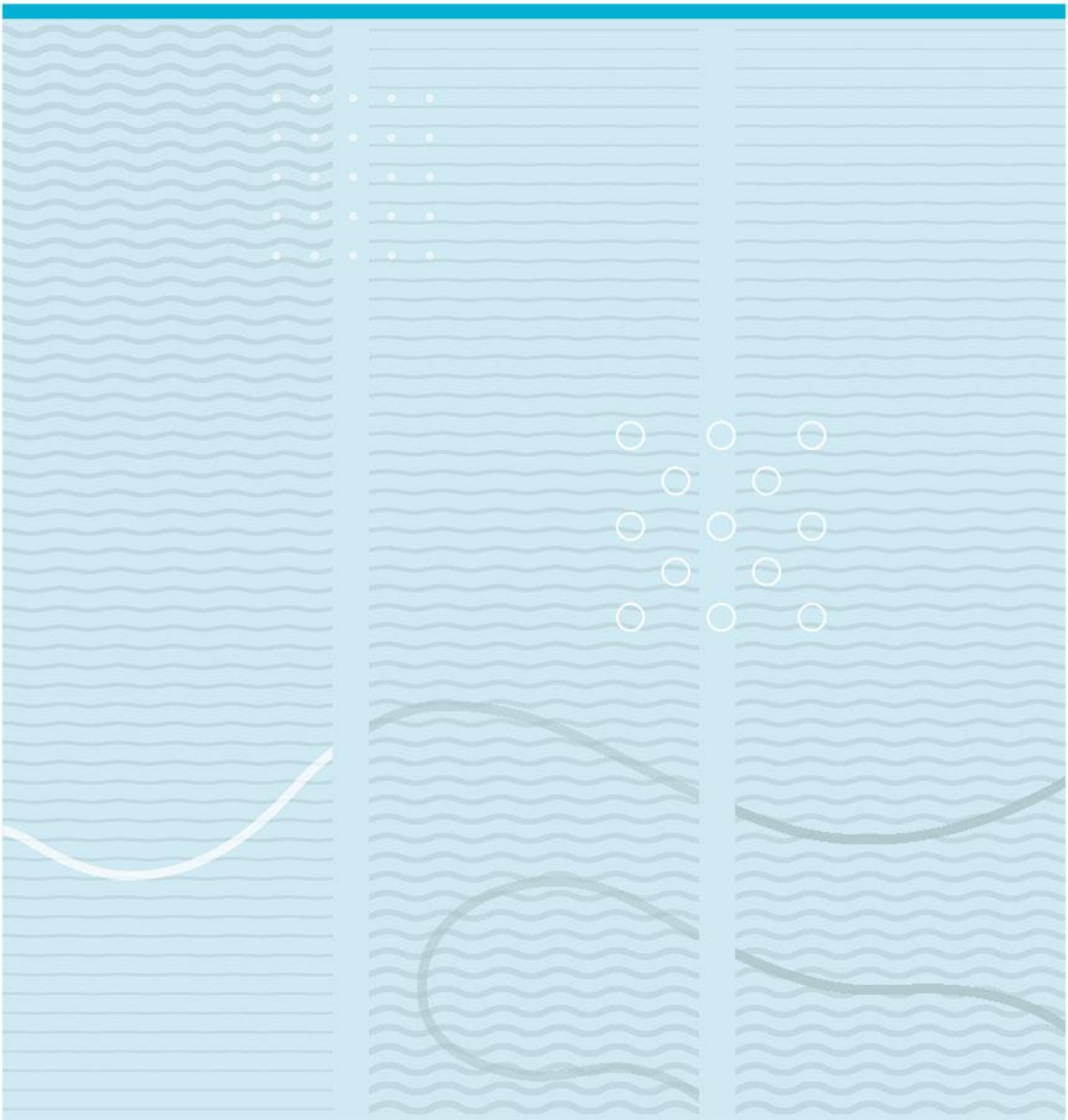
Universitetet i Sørøst-Norge
Fakultet for humaniora, idretts- og utdanningsvitenskap
-
Mastergradsavhandling
Studieprogram: Grunnskolelærerutdanning 5-10.trinn
Vår/høst 2021/2022

Emilie Langåker & Marcus Haugland

«Da var det de *n*-greiene igjen da»

En kvalitativ studie om hva som kjennetegner elevers matematiske diskurs i overgangen mellom aritmetikk og algebra.



Universitetet i Sørøst-Norge
Fakultet for humaniora, idretts- og utdanningsvitenskap
Institutt for pedagogikk
Postboks 235
3603 Kongsberg

http://www.usn.no

Denne avhandlingen representerer 45 studiepoeng

Sammendrag

Denne studien har undersøkt elevers arbeid med problemløsingsoppgaver i algebra, og hensikten har vært å få innsikt i elevers diskurs. Innsikten i elevenes arbeid har blitt brukt til å finne ut hva som kjennetegner en gruppe elever på 9.trinns diskurs. Forskningen har blitt brukt som kilde til refleksjon rundt utfordringene elevene møter på, og videre muligheter. Problemstillingen i oppgaven er:

Hva kjennetegner en gruppe 9. trinns elevers deltakelse i en matematisk diskurs i arbeid med problemløsing innen algebra?

Vi har benyttet oss av kvalitative metoder i studien. Det har blitt brukt videoobservasjon som primærmetode, og observasjon og elevbesvarelser som sekundærmetode. To grupper med elever har blitt observert, en gruppe på tre elever og en gruppe på fire elever. Elevene arbeidet alene med minimal støtte fra lærere, elevene var i forkant forberedt på at det ville være algebraiske oppgaver i problemløsing. Datamaterialet i studien er analysert med induktiv og deduktiv metode for analyse, hvor vi på forkant hadde klar kodene til datamateriale og undervegs utarbeidet nye koder. Datamateriale ble analysert på bakgrunn av det teoretiske overordnede rammeverket kommognisjon. Studien belyser hvordan elevers diskurs kan kjennetegnes i arbeid med problemløsingsoppgaver i algebra og dette kan gi informasjon til videre refleksjon. Resultatene viser at avslutningsbetingelsene på den gitte oppgaven påvirker hvorvidt elevene jobber rituelt eller utforskende. Videre ser vi at elevene avslutter oppgavene ved å skrive ned svaret i boken sin, og deretter gå videre til neste oppgave. Dette gjelder i nesten alle tilfeller, utenom når narrativet blir underbygget på bakgrunn av oppklaring rundt prosedyren, eller ved at lærer endrer betingelsene. Elever som viser seg å være på et høyere nivå i den algebraiske diskursen enn de andre deltakerne på gruppen styrer som regel avslutningsbetingelsene til gruppen. Studien viser at en problemløsende diskurs kjennetegnes ved diskusjon om hvilken heuristisk tilnærming elevene skal ta i bruk, og ved usikkerhet. Om diskursen oppleves som problemløsende er avhengig av hver enkelt deltaker i diskursen. Det samme gjelder når alle elevene er på ulikt nivå i den algebraiske diskursen. Studien viser at anvendbarhetsbetingelsene for deltakerne er å gå rett til tekst som er markert med «Oppgave», og det er dette som er viktig i et gitt oppgavehefte. Videre viser studien at anvendbarhet er avgjørende for valg av type heuristikker.

Nøkkelord: kommognisjon, matematisk diskurs, rutiner, problemløsing, algebra, aritmetisk og algebraisk diskurs

Abstract

This study has examined students work with problem-solving tasks in algebra, and the purpose has been to gain insight into students' discourse. The insight into the students' work has been used to find out what characterizes a group of students in 9th grade discourse. The research has been used as a source of reflection on the challenges students face, and further opportunities. The research question in this master's thesis is:

What are the characteristics of a group of 9th grade students' participation in a mathematical discourse in work with problems solving in algebra?

We have used qualitative methods in the study. Video observation has been used as the primary method, and observation and written students responses as the secondary method. Two groups of students have been observed. The students worked in groups with minimal support from teachers, the students were prepared in advance that there would be algebraic problems. The data material in the study was analyzed using inductive and deductive methods for analysis, where we had prepared the codes for data material in advance and prepared new codes along the way. Data material was analyzed based on commognition. This study sheds light on how students' discourse can be characterized in work with problem-solving tasks in algebra and this can provide information for further reflection. The results show that the closing conditions for the given task affect whether the students work ritually or exploratory. Furthermore, we see that the students complete the tasks by writing down the answer in their book, and the move on to the next task. This applies in almost all cases, except when the narrative is substantiated based on clarification of the procedure, or by the teacher changing the closing conditions. Students who turn out to be at a higher level in the algebraic discourse than the other participants in the group usually control the closing conditions of the group. This study shows that a problem-solving discourse is characterized by discussion about which heuristic approach the students should use, and by uncertainty. Whether the discourse is perceived as problem-solving depends on each individual participant in the discourse. The same applies when all the students are at different levels in the algebraic discourse. The study shows that the applicability conditions for the participants are to go straight to the text marked "Task", and this is what is important in a given assignment. Furthermore, the study shows that the applicability conditions is crucial for the choice of type of heuristics.

Keywords: Commognition, mathematical discourse, routines, problem-solving, algebra, arithmetical and algebraic discourse

Innholdsfortegnelse

Forord

Etter fem år som fulltidsstudenter står vi endelig ved veis ende. Som avslutning på grunnskolelærerutdanningen leverer vi fra oss denne masteroppgaven, gjennomført i studieåret 2021/2022. Det har vært en utfordrende, men lærerik prosess å skrive mastergrad. Studietiden har vært preget av Covid-19, noe som skapte utfordringer for gjennomføringen av studien. Selv med utfordringer klarte vi det, og vi fikk til slutt gjennomført det vi ønsket å studere. Vi har vært heldige å fått utdypet en kompetanse for et svært aktuelt tema, som vi senere vil ta med oss i arbeidslivet som pedagoger.

Vi vil takke vår veileder Elise Klaveness. Takk for konstruktive, gode og veiledende tilbakemeldinger. Din veiledning har hjulpet oss til å stille spørsmål, tenke annerledes og reflektert. Ditt engasjement for masteroppgaven vår har vært en stor inspirasjonskilde for oss gjennom studien.

Til slutt vil vi takke våre nærmeste for å ha støttet oss gjennom oppturer og nedturer. Det ville ikke vært mulig å fullføre denne mastergraden uten dere.

Karmøy, mai 2022
Emilie Langåker & Marcus Haugland

1 Innledning

«Samarbeid og problemløsing sammen med andre, vil prege elevenes fremtidige arbeids- og samfunnsliv. Den teknologiske utviklingen endrer kommunikasjonen i samfunnet og utfordrer vår evne til sosial samhandling» (Meld. St. 28 (2015-2016), s. 22).

Problemløsing og samarbeid fremheves som viktig i styringsdokumenter, det samme gjøres av FN, OECD, UNESCO og World Economic Forum (Rasmussen et al., 2020). Organisasjonene understreker at problemløsing og samarbeid er avgjørende faktorer for demokratiutvikling og økonomisk stabilitet i verden (Rasmussen, et al., 2020). Det hevdes at det å kunne løse problemer og samarbeide med andre er en av de mest sentrale ferdighetene i fremtidens skole- og arbeidsliv (Grefsgård, 2020). Stortingsmeldingen «Fag-Fordypning-Forståelse» understreker at elever skal kunne overføre det de har lært fra en situasjon til en annen, og bruke denne kunnskapen og ferdigheter til problemløsing i både kjente, ukjente og nye situasjoner. Kritisk tenkning og problemløsing er viktig i skolefagene, samt at evnen til innovasjon og nyskaping er viktig for fremtidens samfunns- og arbeidsliv (Meld. St. 28 (2015-2016), s. 33). Skolen og lærere skal i dag få elevene til å utvikle kunnskap, faglig dyktighet og holdninger for å kunne mestre livene sine til å delta i arbeid og fellesskap i samfunnet (Kunnskapsdepartementet, 2017). For å kunne løse problemer og samarbeide, er vi avhengige av hverandre, informasjonen som er tilgjengelig og de ressursene vi har. Dette fører til at individets sosiale og kognitive ferdigheter utfordres. Ved å se på viktigheten av å løse problem sammen, er det bemerkelsesverdig at utviklingen av disse ferdighetene ofte ses på noe som mennesker utvikler av seg selv, og som derfor de ikke trenger å lære på skolen (Rasmussen et al., 2020).

Christiansen (2020) understreker at lærere har vært opptatt av å pugge regler for ulike matematiske problemer. Flere lærere har blitt utdannet hvor kalkulering og pugging av regler stod sentralt i utdanningstradisjonen. Leder for det regjeringsinitierte Matematikksenteret, Kjærsti Wæge, påpeker mangel på kompetanse: «Matematikkundervisningen dreier seg ofte om at elevene lærer seg regneregler – og kommer frem til et svar. Det er en utfordring at mange norske lærere hverken har den matematikk-faglige kompetansen eller den matematikk-didaktiske kompetansen som skal til» (Ertesvåg, 2015, 8. avsnitt).

Pisa[1] og TIMSS[2] er to internasjonale kartleggingsstudier som viser at norske elevers algebraferdigheter ligger under gjennomsnittet for OECD-land, og langt bak for eksempel finnene (Jakobsen, 2012). Helgesen og Grønmo (2018) poengterer at Norge er verdensledende i nedprioritering av algebra. Flere norske elever ser på grunnleggende algebra som utfordrende. TIMSS 2015 belyser at det norske avviket mellom totalscore og score i algebra er det største avviket som opptrer for noe emneområde, for noen land (Helgesen & Grønmo, 2018). Grønmo (2013) understreker i sin artikkel i tidsskriftet Bedre skole at algebra og tall er motoren i matematikk. Videre kritiserer hun den norske skole for å ikke legge opp til nok læring av basisferdighetene i algebra: «Det ser ut til at grunnskolen både i Norge, Sverige og Finland legger for stor vekt på anvendt matematikk i dagliglivet, og ikke tar på alvor ansvaret for å gi elevene de basisferdighetene i algebra som mange av dem vil trenge for videre utdanning og yrker» (Grønmo, 2013, s. 22).

Algebra er et kraftig verktøy for all videre læring og bruk av matematikk (Grønmo, 2013, s. 17). God kunnskap innenfor tall og tallregning trenger alle i dagens samfunn, likevel trenger en stor del av befolkningen gode grunnleggende kunnskaper innen algebra. Vi utdanner elever til å bli ingeniører eller økonomer, eller innen IKT, naturvitenskap og matematikk, noe som krever en god forståelse innen grunnleggende algebra (Grønmo, 2013). Videre poengteres det at den norske skole nesten lurer elever ved å lage kampanjer og rekruttere elever til realfaglige utdannelser og profesjoner, når skolen ikke legger opp til den basiskunnskapen elevene trenger. Det er et samfunnsansvar å gi elever denne type kunnskap i skolen, noe som er viktig for hver enkelt elev og for samfunnet som trenger personer i disse yrkene.

1.1 Problemstilling

Hensikten med denne masteroppgaven er å rette fokuset mot og øke kunnskapen om grunnskoleelevers arbeid med problemløsing innen algebra. Våre erfaringer gjennom lærerstudiet er at skoler ikke har et fremtredende fokus på problemløsing i matematikkundervisning, samt at algebraundervisning er rettet mot pugging av regler. Vår plikt som kommende matematikklærere er å få elever til å mestre livene sine til å delta i arbeid og fellesskap i samfunnet. Problemløsing og samarbeid er avgjørende for fremtidige yrker, nyskaping, demokratiutvikling og økonomisk

[1] Programme for International Student Assessement er en internasjon studie som måler 15-åringers kompetanse i lesing, matematikk og naturfag (Utdanningsdirektoratet, 2020)
[2] TIMMS er en internasjonal undersøkelse som måler elevers kompetanse i matematikk og naturfag på 5. og 9. trinn.

stabilitet, samt at algebra er et kraftig verktøy som blir nedprioritert. Vår studie bidrar til økt fokus på det kommognitive rammeverket innenfor matematikkdidaktikken. For å bidra til kunnskap om elevers arbeid med problemløsing knyttet til algebra fra et kommognitivt perspektiv har vi lagt følgende problemstilling:

«Hva kjennetegner en gruppe 9. trinns elevers deltakelse i en matematisk diskurs i arbeid med problemløsing innen algebra?»

På bakgrunn av vi skal se på den matematiske diskursen, velger vi også å fokusere på elevenes rutiner. Vi vil fokusere på rutinenes metaregler, samt om de deltar rituelt eller utforskende i arbeidet med problemløsingsoppgaver innen algebra. Rutinens metaregler, rituelt og utforskende er begreper vi vil komme med dypere forklaring på i teoridelen.

1.2 Oppbygging av studien

Denne masteroppgaven er bygd opp av seks ulike kapitler. I kapittel 2 tar vi for oss det teoretiske rammeverket i studien. Vi starter med å presentere det kommognitive rammeverket, hvor tar for oss rutinene i en diskurs og presenterer ulike relevante begreper. Videre presenterer vi problemløsing. Her tar vi for oss en felles definisjon for studien og problemløsingens rutiner. Avslutningsvis presenterer vi hva vi legger i begrepet algebra og algebraisk diskurs. I kapittel 3 presenterer vi vår valgte metodologi. Her går vi inn på hvilken metode som er tatt i bruk. Vi beskriver utvalget i studien, oppgavene som er gitt, gjennomføringen og hvordan datamaterialet er analysert. I kapittel 4 presenterer vi funnene og analysen for vår studie. I kapittel 5 diskuterer vi funnene fra studien. Avslutningsvis, i kapittel 6, presenteres det vi trakk frem i innledning, sett sammen med funnene i studien. Vi vil også avslutte studien ved å trekke en kort oppsummering av funnene i studien, og hvordan vår forskning vil være et bidrag til videre forskning innenfor kommognisjon.

2 Teori

I denne studien undersøker vi elevers deltagelse i en matematisk diskurs i arbeid med problemløsing innen algebra. På bakgrunn av vår problemstilling og forskningsspørsmål er sentrale begreper i denne studien matematisk diskurs, problemløsing og algebra. I dette kapitlet vil vi starte med å gjøre rede for vårt overordnede teoretiske rammeverk, kommognisjon (Sfard, 2008), og gjennom dette definere matematiske diskurser, ritualer og utforskende deltakelse. Videre vil vi presentere relevant teori for å klargjøre hvordan vi forstår begrepene problemløsing og algebra.

2.1 Kommognitiv teori

Som et overordnet teoretisk rammeverk for denne masteroppgaven har vi valgt Sfard (2008) sitt rammeverk om kommognisjon (eng: commognition). Kommognisjon omfatter tenkning og kommunikasjon som to deler av samme enhet (Sfard, 2008, s. 302). På bakgrunn av samspillet mellom kognisjon og kommunikasjon, er kommognisjon utarbeidet. I dette rammeverket bli kommunikasjon definert som en kollektiv mønsterstyrt aktivitet der handling A til et individ etterfølges av handling B til et annet individ, slik at:

1) A tilhører et visst veldefinert repertoar av handlinger innenfor kommunikasjon, og
2) handling B tilhører et repertoar av repetisjoner som passer til A, handlinger som gjentatte ganger blir observert i forbindelse med A.

   Repertoaret avhenger av flere faktorer, som for eksempel identiteten til individene, situasjonen de står i og tidligere hendelser (Sfard, 2008, s. 86-87).

Videre defineres tenkning som en individualisert form for kommunikasjon, hvor det å tenke er å kommunisere med seg selv (Sfard, 2008, s. 81).

Sfard sin ide til kommognisjon er påvirket av Wittgensteins og Vygotsky sine teorier. Sfard (2008) understreker at for Wittgenstein er mening et aspekt ved en menneskelig diskursiv aktivitet som er fullt ut etterforskbar. Det innebærer at folk ikke bare bruker ord for å reflektere rundt verdenen, men også for å skape meninger gjennom språk med logiske strukturer. Dermed kan en observere hvordan mennesker bruker ord, og diskursens regler kan bli utformet etter hva de gjør. Lignende uttrykk trekkes også frem i Vygotskys arbeid. Vygotsky (1987, s. 45, referert i Sfard, 2008, s. 98) trekker frem at å studere tenkning ved å ta hensyn til ord og tanker som separate enheter, vil være som å prøve å finne ut egenskapene til vann ved å se på hydrogen og oksygen. Vygotsky understreker også at kunnskap og høyere mental funksjon er kulturelt produsert, og disse elementene gjennomgår stadige modifikasjoner på grunn av kollektiv menneskelig innsats. Sammentrekningen av Wittgensteins og Vygotskys teorier påpeker at læring av matematikk kan forenkles av betydninger og språk i folks, eller i vårt tilfelle, elever sin diskurs.

Sfard (2008) trekker frem at man kun kan se på hvordan mennesker samhandler, noe som gjør kommognisjon godt egnet til å analysere diskursen innad i en gruppe. En lærer eller observatør vil derimot kun ha tilgang til det som foregår verbalt og visuelt i klasserommet, det som skjer mellom lærer-elev og/eller elev-elev. Observatører har ikke mulighet å få en direkte tilgang på den tenkningen og kommunikasjonen som er i elevene. Derfor er det viktig at vårt fokus som forskere bør være på det som er observerbart, og det som foregår mellom lærer-elev og elev-elev. Sfard (2008) understreker likevel at det er mulighet for elevene å sette ord på tanker og de innvendige prosessene, men dette gir et svakt bilde av elevenes innvendige handlinger. På bakgrunn av at vi kan observere hvordan elever kommuniserer i en gitt diskurs og reflektere rundt måten de handler på, har vi valgt å falle på det kommognitive rammeverket som vårt teoretiske rammeverk i denne oppgaven.

2.2 Matematisk diskurs

Begrepet diskurs brukes om en sammenhengende rekke med språklige enheter som blir ytret i en gitt kontekst (Grue, 2021). Diskurs kan også bety samtale, vidløftig drøftelse eller disputt. Diskurs er et viktig begrep innenfor det kommognitive rammeverket: «The different types of communication, and thus of commognition, that draw some individuals together while excluding some others will be called discourses» (Sfard, 2008, s. 91). Det at diskurser kan virke både inkluderende og ekskluderende kan bli sett på som et slags spill. Akkurat som spill krever ulike verktøy og spilleregler, så kan enkeltpersoner være i stand til å delta i visse typer kommunikasjonsaktiviteter, og være ute av stand til å ta del i noen andre (Sfard, 2007, s. 571).

På bakgrunn av definisjonen til kommognisjon, kan matematisk tenkning, eller ganske enkelt matematikk, bli sett på som en diskurs, hvor dette referer til en spesifikk type kommunikasjon (Sfard, 2012, s. 2). En matematisk diskurs skilles ut av en rekke sammenhengende trekk, hvor det er fire egenskaper som anses som å være kritiske for å avgjøre om den gitte forekomsten av diskurs kan telle som matematisk (Sfard, 2007, s. 571, 2008, s. 133): *ordbruk, narrativer, visuelle mediatorer* og *rutiner*.

Ordbruk i en diskurs kan regnes som matematiske ord, for eksempel ord som relaterer til mengder og former (for eksempel likebeint heksagon)
Flere form- og tallrelaterte ord kan forekomme i dagligdagse diskurser, derimot krever den litterære matematiske diskursen som blir praktisert i skolen eller i akademia, en mer disiplinert bruk av disse ordene (Sfard, 2008, s. 133).

Narrativer er enhver sekvens av ytringer som enten er skriftlige eller muntlige. Ytringene er innrammet som en beskrivelse av objekter, forholdet mellom objekter eller prosesser med eller av objekter. Ytringene blir enten godkjent (eng. Endorsed) eller avvist (eng. Rejected) ved hjelp av diskursspesifikke begrunnelsesprosedyrer, det vil si at de blir regnet som sanne eller usanne. (Sfard, 2008, s. 134). Kriteriene for å godkjenne ytringene kan variere fra diskurs til diskurs, og ofte vil maktforholdet mellom samtalepartnere spille en stor rolle. En matematisk diskurs skal ideelt sett ikke ta hensyn til noe annet enn rent deduktive forhold mellom narrativer, selv om i virkeligheten kan det være ganske annerledes (Sfard, 2007, s. 572, 2008, s. 134). Godkjente/sanne narrativer er for eksempel teoremer eller bevis, og prosessen for å godkjenne et teorem kalles å bevise. I matematikken kan en produsere nye matematiske narrativer, eller gjenkalle tidligere matematiske teoremer. Vi kan se på matematiske narrativer på et objektnivå (for eksempel: x kilogram er 1000 • x gram), og narrativer om den matematiske diskursen. Det vil si hvordan man utfører matematikken (metanivå: for eksempel: for å finne volumet av en kube må man multiplisere lengden, bredden og høyden) (Sfard, 2007, 2008).

Visuelle mediatorer er synlige representasjoner som brukes som en del av kommunikasjonsprosessen. Det kan være bilder av materielle ting som eksisterer uavhengig av diskursen, det vil si av konkrete objekter som pekes på med substantiv som faktisk kan sees eller forestilles. Matematiske diskurser inneholder ofte visuelle mediatorer i form av symbolske artefakter, skapt spesielt for denne kommunikasjonsformen, som matematisk algebraisk notasjon (Sfard, 2007, 2008). Sfard (2008) beskriver fire visuelle mediatorer:

- Symbolske mediatorer – For eksempel aritmetisk og algebraiske notasjoner
- Ikoniske mediatorer – For eksempel grafer, diagrammer, tegninger og bilder
- Konkrete mediatorer – For eksempel tredimensjonale romfigurer, fyrstikker

- Gester – håndbevegelse, peking, nikking

Rutiner er repeterende mønstre som karakteriseres av den gitte diskursen. Konkret kan dette dreie seg om prosedyrer eller å komme frem til regler om ulike matematiske objekter (Sfard, 2008, s. 134-135). I studien vår har vi valgt å fokusere på rutiner når vi ser på den matematiske diskursen, på bakgrunn av dette blir rutiner presentert grundig i neste delkapittel.

Som nevnt tidligere understreker Sfard (2008, 2012) at læring er en type utvikling, hvor utvikling er en endring i deltagelse innen diskurser. Utviklingsprosessen deles inn i to hovedkategorier: utvikling på objektnivå og utvikling på metanivå. En som utrykker seg om det som allerede er kjent av matematiske objekter, har en *Utvikling på objektnivå*. Innenfor det kommognitive rammeverket vil det bety å kunne utforske objekter for å formulere og godkjenne nye narrativer om dem. Sfard (2012) poengterer at vekst på objektnivå er derfor akkumulerende. Godkjenning av et matematisk narrativ som en matematisk fortelling, for eksempel: «Summen av vinklene i en polygon med n sider er lik (n-2) • 180°,» er for eksempel utvikling på objektnivå (Sfard, 2008, s. 201). I motsetning til dette er utvikling på metanivå de som endrer spillereglene. Denne formen for utvikling vil si hvordan et individ opptrer under en metadiskursiv endring. En metadiskursiv endring er ifølge Sfard (2012) en utvidelse av diskursen hvor økningen i dens kompleksitet er ledsaget, for eksempel av en lærer, dersom den ikke er direkte betinget. Endringen kan også foregå på to måter, vertikalt og horisontalt. Vertikal endring på metanivå representerer prosessen hvor en matematisk diskurs blir alliert med sin egen metadiskurs. Sfard (2012) belyser et eksempel hvor vertikal endring på metanivå er etableringen av at den algebraiske diskursen blir slått sammen med den aritmetiske og mønstrene i denne diskursen. Det vil si at for eksempel noen av reglene for hvordan vi utfører aritmetikk er en metadiskurs innen den aritmetiske diskursen, men kan skrives på objektnivå innen den algebraiske. Dette kalles ofte for generalisert aritmetikk. Horisontal endring understreker en prosess hvor flere diskurser som tidligere er blitt sett på som helt ulike, plutselig gir mening. Dette gir en ny overordnet diskurs. Et eksempel på horisontal endring er etableringen av en matematisk diskurs knyttet til funksjoner, som blir meningsfull på bakgrunn av diskursene knyttet til algebraiske uttrykk, grafer og fysiske prosesser (Sfard, 2008).

2.3 Rutiner

Rutiner defineres som et sett av metaregler som beskriver en repeterende diskursiv handling (Sfard, 2008, s. 208). Metareglene brukes for å legge føringer for rutinene, men elever følger ikke reglene bevisst. Observatører beskriver det som mønstre i elevenes handlinger. Metaregler er en bemerkelse av hva elevene har gjennomført og ikke av hva de vil gjennomføre. Simultant forventes det at elever vil gjenta dette, dermed defineres en rutine som en gjentagende diskursiv handling.

Metareglene som utgjør en rutine kan deles inn i to underkategorier, the how (hvordan) og the when (når) (Sfard, 2008, s. 208). The how, er et sett med metaregler som bestemmer, eller begrenser, hvilke handlinger som aktiveres og the when er en samling av metaregler som bestemmer i hvilke kontekster handlingene skal utføres. Metareglene kan videre bli delt inn i tre delmengder, derav to tilhører rutinens the how og en the when:

1. *Anvendbarhetsbestingelser* (eng: routine applicability conditions) Regler som enten bestemmer eller avgrenser hvilke omstendigheter en person antagelig vil utføre rutinen
2. *Prosedyre* (eng: routine procedure): Sett med regler som bestemmer eller avgrenser hvordan rutinen kan gjennomføres.
3. *Avslutningsbetingelser* (eng: routine closing conditions): Sett med regler som definerer omstendigheter en person vil oppleve som en avslutning av rutinen.

Rutinens how blir som regel individualisert før rutinenes når (Sfard, 2007, 2008). Når lærere og forskere skal vurdere en matematisk diskurs, er elevenes evne til å utføre en gitt prosedyre ennå ikke er en garanti for at elevene vil velge denne handlingen når dette valget ville virke riktig for enhver erfaren matematiker. Prosedyrene handler om hvordan en rutine kan utføres. Et eksempel kan være å se en andregradslikning, $x^2 - 3x + 5$, så tar de i bruk den kvadratiske formelen (abc-formelen). Elever kan ta i bruk denne formelen, selv om en erfaren matematiker ikke ser på denne løsningsformelen som en passende prosedyre (Sfard, 2008).

Sfard (2008) legger stor vekt på rutinens når, the when. Rutinens når inneholder anvendbarhetsbetingelser og avslutningsbetingelser. Anvendbarhetsbetingelsene settes i gang når du for eksempel skal løse en andregradslikning. Når du skal løse oppgaven, ser du hvilken kontekst det er satt i og hvilke betingelser som er gitt, og deretter kan du utføre prosedyren, altså rutinens hvordan. Avslutningsbetingelsene er når personen vil oppleve at handlingsrekken er over, rutinen er utført. For noen elever vil et tilstrekkelig stoppsignal være når for eksempel «x=tall» i likningsløsing (Sfard, 2008, s. 214). Dette gjelder ikke for alle. Noen vil ikke si seg fornøyd før de er overbevist om at de har funnet alle mulige løsninger. Et eksempel kan være dersom noen ser likningen $x^2 = 25$ som løst når de har fått $x = \sqrt{25} = 5$, mens andre er ikke fornøyd før de i dette tilfellet også ser $x = -5$. Videre deler Sfard (2008) rutiner opp i *utforskning* (exploration), *gjerninger* (deeds) og *ritualer* (rituals). *Gjerninger* er en rutine som endrer fysiske eller matematiske objekter (Sfard, 2008). Det kan være når elever bruker konkreter i for å gjøre utregninger, hvor avslutningsbetingelsene ikke innebærer å konstruere et narrativ, men å gjøre noe som endrer konkretene. På bakgrunn av studiens avgrensninger har vi valgt å fokusere ritualer og utforskning, og utelukket gjerninger. Videre presenterer vi utforskende og rituelle rutiner.

2.3.1 Utforskende rutiner

Resultatet til en utforskende rutine er å konstruere en ny mening som er matematisk sann og kan bevises. Sfard (2008, s. 224) belyser at en rutine vil bli kalt utforskning dersom implementeringen av den bidrar til en matematisk teori, med andre ord er hovedmålet er å produsere et godkjent narrativ. Dersom et narrativ skal bli godkjent, må det oppfylle de allment aksepterte reglene for godkjenning og kan med dette telles som godkjent av hele matematikksamfunnet. Utforskende rutiner kan deles inn i tre typer (Sfard, 2008):

- *Konstruksjon* (construction), en diskursiv prosess som resulterer i nye anerkjente narrativer,
- *Underbyggelse* (substantiation), handlingen som hjelper matematikere med å avgjøre om narrativene skal godkjennes, og
- *Gjenkalling* (recall), som er prosessen man utfører for å fremkalle et tidligere godkjent narrativ.

I denne masteroppgaven er fokuset å se på hva som kjennetegner elevers deltakelse i en matematisk diskurs knyttet til problemløsingsoppgaver innen algebra. En rutine vil da vurderes som utforskende om elevene diskuterer, beviser eller gjenkaller tidligere godkjente narrativer, for å produsere nye godkjente narrativer (Sfard, 2008). Sfard (2008) påstår som nevnt tidligere at læring skjer gjennom endring i diskursen, det kan være et resultat av nye godkjente narrativer som er lagt til i diskursen knyttet til tidligere narrativer. Dersom elever skal legge til nye godkjente narrativer til sin matematiske diskurs, er det viktig at det er en kontinuerlig flyt i diskursen og at den ikke hemmes av misoppfatninger. Misoppfatninger elever kan ha, kan ligge i ordene som blir brukt og hvordan de oppfattes, som for eksempel i arbeid med figurtall, hvor den symbolske mediatoren *n* kan oppfattes som en ukjent og en variabel. Når det oppstår en situasjon hvor kommunikasjonen skjer på tvers av forskjellige diskurser, innenfor den samme diskursen, hvor for eksempel en elev er i en algebraisk diskurs og en elev er i en aritmetisk diskurs og de prøver å kommunisere med hverandre, kan det oppstå en kommognitiv konflikt (Sfard, 2008, s. 296). Elever som er nye i en matematisk diskurs vil alltid ha misoppfatninger, og kommognitive konflikter kan føre til nye godkjente narrativer til diskursen (Sfard, 2008).

2.3.2 Rituelle rutiner

For en elev som utfører en rituell rutine er hovedfokuset å være en del av fellesskapet i klasserommet, hvor det primære målet, altså avslutningsbetingelsen, er å skape, opprettholde, styrke og forbedre sosiale relasjoner. Sfard (2008) poengterer at det ikke handler om å vite, men om å prestere og opptre for deltakerne i den gitte diskursen. Elever som opptrer rituelt blir fornøyd hvis de svarer riktig eller får positiv tilbakemelding fra lærer eller medelever, noe som fører til at elever konsekvent vil gjøre det de tenker er forventet. Elever som utfører oppgaver rituelt spør ikke seg selv hva de ønsker å oppnå med denne oppgaven, noe som gjerne gjort av de som er involvert i utforskende rutiner. De spør heller seg selv om hvordan de kan gå frem for å løse oppgaven (Lavie, Steiner & Sfard, 2018, s. 166). Rituelle rutiner kan fremstå hverdagslige og ikke føre rett til ny kunnskap, likevel spiller de en stor rolle hvor de kan bidra til å skape et grunnlag for utviklingen av utforskende rutiner.

I forsøket på å skille rituelle rutiner fra utforskende rutiner må vi huske at forskjellene i avslutningsbetingelsene er ulike ved gjennomføringen av rutinen. Tabell 1 oppsummerer noen av disse forskjellene (Sfard, 2008). Særtrekkene til rituelle rutiner er det sosiale båndet det viktigste for ritualenes utøvere, konstruert og opprettholdt ved å gjøre nøyaktig det andre mennesker gjør. Som oftest blir ritualer utført sammen med andre, for deres skyld, og tar de andre utøvernes regler i betraktning. Sfard (2008) poengter også at ritualer kan vendes mot seg selv, altså at en elev utvikler private ritualer som kan praktiseres uten deltakelse fra andre. Hovedegenskapen til denne typen ritualer vil likevel være den samme som blir implementert i en gruppe.

Anvendbarhetsbetingelsene i en rituell rutine er mye mer restriktive enn en utforskende rutine. Kravet for anvendelse av en utforskende rutine er om denne handlingen vil føre til riktig type narrativ, og avgjørelsen om å ta i bruk en gitt prosedyre er ikke avhengig av noen andre (Sfard, 2008). Ritualer er derfor i motsetning til utforskende rutiner assosiert med oppfordringer, som er veldig spesifikke, noe som fører til at de også er begrensende. Et eksempel kan være at elever ved oppgaveløsning noterer «Oppgave 1» og under «a)» for så å notere et svar som eleven har hørt eller sett noen andre svare. Ritualer skiller seg også ut blant de tre ulike typene rutiner ved de er rigide, på bakgrunn av mangelen på tillatte variasjoner. Ritualer oppnår selve målet sitt gjennom utførelsen, og ingen del av utføringen er viktigere enn noen annen. Hele poenget med den rituelle handlingen er at den er strengt definert og fulgt nøyaktig med på, slik at forskjellige elever kan utføre den på en identisk måte, eventuelt sammen i grupper. Eleven i eksempelet gjør antagelig det hen gjør fordi det oppfattes at det er forventet av medelever og lærere. I motsetning til når det gjelder utforskning, kan ikke forskjellige rituelle utføringer sees på som utskiftbare bare fordi de utvikler det samme sluttproduktet. Sfard (2008, s. 244) oppsummerer rutiner med egne ord:

> *"To sum up, in rituals, the name of the game is high-fidelity reproduction, constancy, and homogeneity – the exact opposite of the innovation, variation, and diversity that characterize genuine explorative behaviour."*

	RITUELL	**UTFORSKENDE**
AVSLUTNINGSBETINGELSER	Målet er å opprettholde forholdet mellom de andre, styrke den sosiale posisjonene sin	Målet er å produsere et nytt godkjent narrativ for verden
HVEM RUTINEN UTFØRES AV	Med andre	Ingen behov for andre, kan utføres individuelt
HVEM RUTINEN UTFØRES FOR	Andre (autoritativ diskurs)	Andre og seg selv (internt overbevisende diskurs)
ANVENDBARHET (ENDRE *THE WHEN*, HOLDER *THE HOW* KONSTANT)	Begrenset, prosedyren er situert	Prosedyren er anvendelig i et bredt spekter av situasjoner
FLEKSIBILITET (ENDRE *THE HOW*, HOLDER *THE WHEN* KONSTANT)	Nesten ingen frihet i handlingsforløpet	Prosedyren er en hel mengde av ekvivalens av ulike handlingsforløp
KORRIGERBARHET	Kan ikke korrigeres på et enkelt steg, må gjenta hele handlingen	Deler av steg kan korrigeres med en tilsvarende subrutine
AKSEPTABILITETSBETINGELSER	Aktiviteten må følge strenge regler som definerer rutineprosedyren – aksepten avhenger av andre personer	Narrativene som blir produsert i utførelsen må underbygges på en måte at aksepten er uavhengig av andre mennesker
BRUK AV ORD OG MEDIATORER	Frasedrevet bruk av nøkkelord – som beskrivelser av ekstradiskursive mediatorer	Objektivisert bruk av nøkkelord – som betegnende objekter

Tabell 1: En sammenligning av kjennetegn på rituell og utforskende rutiner (vår oversettelse) (Sfard, 2008, s. 243)

2.3.3 Fra rituelt til utforskende

De fleste matematikklærere ønsker at elevene skal utvikle utforskende rutiner i matematikken, men likevel er rituelle rutiner nødvendig i prosessen med individualisering (Lavie, Steiner & Sfard, 2018). Når elevene møter nye diskurser er det ingen annen måte å starte prosessen med individualiseringen på enn å ta det som et ritual. For eksempel når elever møter tegnet x for første gang vil eleven forsøke å herme etter hvordan lærere, og andre eksperter innen algebraisk diskurs, benytter og omtaler dette tegnet. Situasjonen kan bli problematisk hvis oppgaven som rutinen skal lages for, blir presentert på et språk med nye matematiske objekter som elever møter for første gang (Lavie, Steiner & Sfard, 2018). Dette viser at rituelle rutiner utgjør en stor del for nye diskurser og er uunngåelige i et klasserom. Noen rutiner er også bestemt til å forbli ritualer for alltid, som for eksempel hilserutinen, som per definisjon er sosialt orientert og målet oppnås ved selve ytelsen. Sfard, Steiner og Lavie (2018, s. 167) understreker at situasjonen er annerledes for matematiske rutiner, som for å være nyttige må utvikle seg til utforskende rutiner.

Prosessen med å de-ritualisere rutiner, det vil si å transformere rituelle rutiner til utforskende rutiner, kan være sakte og gradvis og altfor ofte vil ikke dette bli fullført på skolen (Lavie, Steiner & Sfard, 2018). I de-ritualiseringsprosessen ønsker vi å se en endring hos elever i form av styrkning av en eller flere av rutinens ønskelige kjennetegn: *fleksibilitet* (eng: flexibility), *binding* (eng: bondedness), *anvendbarhet* (eng: applicability), utøverens avhengighet/uavhengighet (eng: performer's agentivity), *objektivisering av diskursen* (eng: objectification of the discourse) og *begrunnelse* (eng: substantiability).

Styrkningen i *fleksibiliteten* innebærer at eleven viser tegn på ha flere enn én måte å utføre oppgaven på. I dette tilfellet kan prosedyren sies å ha utviklet seg til flere alternative veier. Dette skjer når elever innser at andre prosedyrer kan brukes for å utføre samme oppgave. For eksempel hvis vi har andregradslikningen $x^2 – 4x – 5 = 0$ så kan vi løse den på flere måter:

- Vi kan ta i bruk den kvadratiske formelen (abc-formelen): $\mathbf{x} = \frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\bullet1\bullet(-5)}}{2\bullet1}$
- Tegne grafen til $y = x^2 – 4x – 5$, og se hvilke verdier av x som gir $y = 0$
- Vi kan utføre polynomdivisjon på bakgrunn av at $x = -1$ gir $y=0$, som betyr at $(x – (-1)) = (x + 1)$ er en faktor. Deretter utfører vi polynomdivisjon, og finner ut at $y= x^2 – 4x – 5 = (x+1)(x-5)$
- En annen algebraisk løsning kan være å utvide likningen og bruke kvadratsetningene

En endring som dette er helt klart et trekk mot utforskende rutiner (Lavie, Steiner & Sfard, 2018).

Det tas i bruk metaforen *binding* som er hentet fra kjemi som innebærer at hvis utgangen fra et gitt trinn i en prosedyre brukes som input i de siste trinnene for oppgaven, hvor ønsket sluttprodukt ikke er oppnådd, da kaller vi rutinen bundet (Lavie, Steiner & Sfard, 2018). Dette er en nødvendig egenskap for en utforskende rutine, der hvor hvert trekk er rettet mot et visst sluttresultat. Når en elev imiterer en annens persons prestasjoner og utførelser, er elevene uvitende om sammenhengen mellom de ulike trinnene. Selv om elever klarer å gjenskape alle trinnene, er det ikke sikkert at de faktisk binder dem sammen. Dersom en elev utvikler seg fra en rutine hvor en løs binding av trinn blir gjennomført, til en mer sammensatt rutine, så er dette et tegn på de-ritualisering. Dette vises for eksempel når en elev kan forklare hvordan det neste trinnet i en rutine henger sammen med det forrige eller kan bytte rutine midt i en rutine fordi eleven ser det som mer hensiktsmessig. For eksempel at eleven som skal løse annengradslikningen over forklarer at siden hen ser at x=1 må være en løsning, så kan en løsning være å utføre polynomdivisjon.

Rutinens *anvendbarhet* snakker vi om når vi vurderer spekteret av oppgavesituasjonen der rutinen kan utføres. Dersom en elev deltar rituelt vil rommet med mulige valg være begrenset. Dette er på bakgrunn av at ritualer ikke fokuserer på det selvopprettholdende produktet, men som en måte å tilbringe tid innenfor et bestemt menneskelig og fysisk miljø (Lavie, Steiner & Sfard, 2018, s. 169). I ritualer hvor den nøyaktige utførelsen av en prosedyre utgjør oppgaven, står ikke elever fritt til å bestemme hva som skal gjøres og når det skal gjøres.

Elever er *avhengige* av andre mennesker og tilstedeværelsen av en annen person, enten fysisk eller bare forestilt, er nødvendig i hver fase av den rituelle utførelsen. Elever som deltar rituelt er avhengig av andre personer for å sette i gang prosedyrer, for å ta beslutninger som er nødvendige for å fortsette, for å vite når de skal fortsette og når de skal stoppe og for å evaluere valgene som er tatt. Elever utfører ritualer for å passe inn med andre mennesker. På bakgrunn av utviklingen av prosedyrer er en typisk endring som skjer i prosessen med å transformere rituelle rutiner til utforskende rutiner, uttrykker de-ritualiseringen seg blant annet i et økende antall avgjørelser elever er i stand til å ta uten å bli hjulpet av en annen person (Lavie, Steiner & Sfard, 2018). Et godt tegn på at elevers rutiner har blitt utforskende er at elever ikke trenger en annen persons invitasjon til å engasjere seg i utførelsen av rutinen. Elever vil altså være i stand til å sette oppgavesituasjonen for seg selv på bakgrunn av sine egne behov (Lavie, Steiner & Sfard, 2018).

Når elever tilbakekaller (recall) tidligere hendelser, er det en implisitt historie de forteller seg selv om den tidligere hendelsen, i stedet for å tilbakekalle hendelsen som den egentlig huskes. Ettersom tiden går og erfaringen med rutinen vokser, vil historien bli mer og mer abstrakt. Det kan for eksempel være å gå fra konkrete objekter som klosser, over til å huske det som heltall. Abstrakte objekter introduseres til elever for å knytte sammen urelaterte rutiner og for å redegjøre ekvivalensen av prosedyrene deres. Når den abstrakte enheten er formet, trenger ikke elever som står ovenfor en oppgavesituasjon som involverer et tidligere objekt å tilbakekalle den tidligere hendelsen som involverte det konkrete objektet. I stedet kan elever utlede den nødvendige prosedyren fra egenskapene til det matematiske objektet. Disse objektene er trossalt utformet av tidligere prosedyrer. *Objektiviseringen* av språket er enda en indikasjon på fremdriften av de-ritualisering (Lavie, Steiner & Sfard, 2018). Det betyr for eksempel at et objekt som en variabel uttrykt symbolsk ved x for eksempel blir behandlet som et objekt og ikke som utløsende for en prosess.

Underbygging (eng: substantiability) dreier seg om hvordan elevene deltar i diskursen med begrunnelser knyttet til narrativer. Det innebærer å forklare hvorfor, vise hvorfor og uttrykke forståelse, uten å henvise til prosessen (Sfard, 2008). Begrunnelsene av et narrativ er en prosess der matematikere blir overbevist om at narrativet kan godkjennes. Et eksempel knyttet til dette kan være i arbeid med løsning av likninger, hvor lærer spør hvorfor x = -1 er et riktig svar. En elev som deltar rituelt, kan svare: «fordi jeg satt inn i formelen og fant svaret». En elev som deltar utforskende, kan svare «Fordi likningen er oppfylt dersom jeg setter inn for x = -1».

Ved å ta i bruk disse kjennetegnene for de-ritualiseringsprosessen i analysen vår kan vi analysere i hvilken grad elevenes diskurs er rituell eller utforskende. Selv om problemstillingen vår påpeker at vi skal se på en gruppe 9. trinn elevers deltakelse i en matematisk diskurs, velger vi også å trekke frem hvordan enkeltelever deltar i diskursen. Dette er på bakgrunn av at vi ikke kan se på en samlet gruppe når det kommer til disse kjennetegnene, men på enkeltelever. Videre i oppgaven presenterer vi vår definisjon på problemløsing og problemløsingens rutiner.

2.4 Problemløsing

Problemløsing er et tema som er forsket lenge på, og det er et begrep som blir forstått på ulike måter. Sfard (2008) trekker frem at en bør ha være tydelig på hvordan man selv forstår ordene en bruker i forskning, derfor skal vi i dette kapitlet skal problemløsing bli definert og forklart, samt som vi tar for oss problemløsingenes rutiner.

Tradisjonelt har problemer i skolematematikken ofte blitt identifisert med matematiske oppgaver som skal utføres (Schoenfeld, 1992; Björkqvist, 2003, s. 54). Dette innebærer blant annet at oppgaver som har hensikt å gi trening i en viss løsningsteknikk, har også blitt regnet som problemer. I tillegg til dette poengterer Björkqvist (2003) at det ofte har vært forutsatt at et problem er en tekstoppgave, noe som har ført til at ordene problem og tekstoppgave av og til blir brukt synonymt. Videre presenteres ulike definisjoner om hva problemløsing er, for så å komme frem til hvordan vi vil benytte begrepet i vår forskning.

Polya (2004) trekker frem at problemløsing er en praktisk ferdighet, likt som for eksempel sykling. Videre hevder han at problemløsingsferdighetene oppnås og videreutvikles gjennom imitasjon og praksis. Det innebærer at en elev som ønsker å lære å løse problemer må observere og imitere hva andre problemløsere gjør, og etter hvert vil eleven klare å løse problemer på egenhånd. Det innebærer at elevene vil gå fra rituelle rutiner til utforskende rutiner (Sfard, 2008). Polya (1981) definerer et problem slik:

«to search consciously for some action appropriate to attain a clearly conceived, but not immediately attainable, aim" (Polya, 1981, s. 117).

Det er ikke et problem dersom problemløseren ser for seg målet, avslutningsbetingelsen, med engang.

Schoenfeld (1993) sin definisjon om hva som et matematisk problem for en elev er inneholder to kriterier:

"For any student, a mathematical problem is a task

a. in which the student is interested and engaged and for which he wishes to obtain a resolution, and

b. for which the student does not have a readily accessible mathematical means by which to achieve that resolution." (Schoenfeld, 1993, s. 71).

Schoenfeld understreker at definisjonen er enkel, men inneholder noen konsekvenser. Det trekkes frem at engasjementet spiller en viktig rolle i problemløsing, en oppgave er ikke et problem for en elev før eleven har gjort det til sitt eget. Problemløsingsoppgaver er heller ikke universelle, det vil si at elevens oppfatning om oppgaven spiller en stor rolle, det som anses å være et problem for en elever, trenger ikke å være et problem for en annen. Schoenfeld trekker også fram begrepet øvelse (eng: excercise), og poengterer at de fleste lærebøkene og leksene som tildeles elever ikke er et matematisk problem i henhold til definisjonen, men øvelser. For eksempel en oppgave hvor du skal finne den generelle formelen for trekanttallene, dette vil ikke være et matematisk problem dersom læreren nettopp har gjennomgått formelen og hvordan du finner den. Et problem konfronterer elevene med en vanskelighet, elevene vet hva problemer er og hvordan de vil avslutte oppgaven, men de har ingen klar løsningsmetode for å komme dit (Schoenfeld, 1993, s. 72).

Björkqvist (2003) trekker frem at det nå er vanligere å definere et matematisk problem så nært ordet problem i hverdagsspråket som mulig. Björkqvist definerer et problem som en matematisk oppgave som skal utføres, hvor kravet er at i den innledende fasen skal ikke problemløseren kjenne til hvilke løsningsmetoder som kan brukes. Derfor er et matematisk problem individrelatert, noe som innebærer at en oppgave som er et problem for en elev, trenger ikke å være det for en annen elev. Björkqvist understreker et viktig aspekt rundt definisjonen, og det er at elever opplever problemet som sitt eget. Opplever en oppgave som sin egen, mener Björkqvist (2003) at det vil garantere en viss utgangsmotivasjon og automatisk koble tidligere erfaringen opp mot oppgaven. På bakgrunn av dette presenterer han en videre definisjon om at en oppgave er først et problem når eleven opplever den som sitt eget, hvor tillegget til definisjonen er hentet fra Mason og Davis (1991, s. 4), og forklarer det slik:

> *«Fra flere synsvinkler ser det altså ut til å være ønskelig at problemer oppleves som elevenes/problemløsernes egne, og som Mason og Davis (1991, s. 4) kan man ta dette med i definisjonen, slik at en oppgave er et problem først når den oppleves som egen (og at man ikke vet hvordan man skal gå fram)» (Björqkvist, 2003, s. 55).*

Boesen (2006) definerer et problem på følgende måte:

> *"a task in which he or she doesn't know how to proceed and no complete known solution procedure can be used" (Boesen, 2006, s. 31)*

For å løse et problem, må eleven konstruere noe nytt og bruke deres kunnskap til en ny situasjon. Om en oppgave skal oppfattes som et problem er avhengig av oppgaven og eleven. Hva som oppfattes som et problem for en elev, behøver ikke å oppfattes som et problem for en annen. Problemløsing er løsning av et problem.

De ulike definisjonene rundt problem og problemløsing oppfattes som veldig like. Definisjonene trekker frem at et problem er avhengig av oppgaven og personen som skal gjennomføre det, noe som Yan og Lianghuo (2006, s. 612) også poengterer, at et problem er subjektivt, på bakgrunn av at det avhenger i stor grad av eleven som håndterer situasjonen. Polya og Schoenfeld understreker at problemløserens ønske om å finne en løsning i definisjonene sine, det innebærer at et problem er ikke et problem for eleven dersom han ikke gjør det til sitt eget. Schoenfeld mener også at elevenes engasjement og interesse spiller en rolle. På bakgrunn av dette har Polya og Schoenfeld flere affektive faktorer i definisjonene sine. Björqkvist sin definisjon som bygger på Mason og Davis sitt tillegg er også etter vår mening lik Polya og Schoenfeld sin definisjon på bakgrunn av den også trekker inn den affektive faktoren om at elevene skal oppleve problemet som sitt eget. I denne masteroppgaven velger vi å benytte Boesen (2006) sin definisjon av et problem. Det vil si at et problem er en oppgave hvor problemløseren ikke vet hvordan han skal komme seg videre i løsningsprosessen, og ingen kjent løsningsmetode kan brukes, derfor må en benytte seg av eksisterende kunnskap (Boesen, 2006). Vi valgte denne definisjonen på bakgrunn av vår problemstilling, hvor vi skal se på den matematiske diskursen i arbeid med problemløsingsoppgaver. Ut fra denne definisjonen kan vi observere om elevene oppfatter oppgaven som et problem, og om deltar rituelt eller utforskende hvor de må bruke eksisterende kunnskap for å produsere nye narrativer.

2.4.1 Problemløsing og rutiner

I vår studie ønsker vi å se på om elever deltar rituelt eller utforskende i arbeid med problemløsingsoppgaver knyttet til algebra, og hva som kjennetegner dette. I dette delkapitlet skal vi se på problemløsingens rutiner, hva som kjennetegner en utforskende og rituell deltakelse knyttet til problemløsingsoppgaver og elevenes metaregler knyttet til rutinene deres i arbeid med problemløsing. Det innebærer rutinens hvordan (eng: the how) og rutinens når (eng: the when) (Sfard, 2008).

Dersom elever arbeider med et matematisk problem hvor målet er å finne den rette, og ofte den eneste, løsningen (Moursund, 1996, referert i Kolovou et al., 2009, s. 34), vil dette være en rituell deltakelse. Målet er å bli ferdig med oppgaven, ikke å finne ut noe eller tilføye nye godkjente narrativer til den matematiske diskursen. Archarya (2017) poengterer at elever kan ha vanskelig for å lære matematikk på bakgrunn av at de ikke bygger sin egen kunnskap om matematiske begreper, de utfører et puggeritual fordi de vet at det er forventet at de memorerer visse ord. Dette kan medføre at når elever løser matematiske problemer, blir det ofte gjort feil og de vil ofte ikke finne en tilfredsstillende løsningsmetode. Elever som deltar rituelt i arbeid med problemløsingsoppgaver vil hovedsakelig gjøre dette for å tilfredsstille lærere eller medelever, hvor målet er å få positive tilbakemelding og unngå konsekvenser. Elevene vil ikke resonnere over hva de ønsker å oppnå med problemene, derimot har de kun mål om å finne en tilfredsstillende løsningsmetode. I denne oppgaven er problemløsing knyttet til algebra, det innebærer at elever som deltar rituelt ikke klarer å følge den algebraiske diskursen, derimot vil de forsøke å innordne seg og finne ut hvilke regler som gjelder. De vil lytte til de andre medlemmene, imitere og spille med. Dette gjør de for å opprettholde sosial status og tilfredsstille læreren.

Utforskende deltagelse i arbeid med problemløsing innebærer at eleven må konstruere et nytt narrativ (Boesen, 2006; Polya, 2004). Eleven utforsker, prøver forskjellige løsningsmetoder og kan oppnå nye godkjente narrativer innen diskursen (Polya, 2004). Utforskende rutiner kan deles inn i tre forskjellige kategorier: konstruksjon (eng: construction), underbyggelse (eng: substantiation) og gjenkalling (eng: recall) (Sfard, 2008). Elever som arbeider utforskende kan for eksempel omformulere et problem til et ekvivalent problem for å hjelpe med å avgjøre om det nye narrativet skal godkjennes, eller løse et lignende, kjent problem for å fremkalle et tidligere godkjent narrativ, for å jobbe seg videre med nåværende problem. Dette gjelder også innenfor Boesen (2006) sin definisjon, hvor han trekker frem at en må bruke tidligere kunnskap for å kunne konstruere ny kunnskap.

Problemløsingens hvordan (eng: the how), det vil si prosedyren (eng: the procedure), innebærer noen heuristiske tilnærmingsmåter. Oppgavene som blir presentert i kapittel 3.4 innebærer geometriske mønster. Det er mange heuristiske tilnærmingsmåter når det kommer til matematiske problem, men vil presentere dem som er mest relevant for vårt tilfelle. Björkqvist (2003, s. 67) lister opp noen av disse tilnærmingsmåtene:

- Let etter et mønster
- Konstruer en tabell

- Sett opp en liste over alle muligheter
- Tegn en tegning, figur eller graf
- Gjett og kontroller
- Omformuler problemet til et ekvivalent problem
- Løs et enklere (eller lignende problem)
- Løs et vanligere problem som det aktuelle utgjør et spesialtilfelle av
- Se på problemet fra en annen synsvinkel

Problemløsingens når (eng: the when) inneholder som nevnt tidligere anvendbarhetsbetingelser (eng: applicability conditions) og avslutningsbetingelser (eng: closing conditions). Anvendbarhetsbetingelsene innebærer hva som gjør at de velger de strategiene de velger, hvordan påvirker oppgavene valgene de tar og hvilke strategier de benytter seg av. Schoenfeld (1993) trekker frem seks faser som han deler problemløsingsprosessen inn i:

1. lese
2. analysere
3. utforske
4. planlegge
5. gjennomføre
6. sjekke

Schoenfeld sin problemløsingsmodell er delt inn i seks faser, hvor Polya (1957) sin problemløsingsmodell er delt inn i fire faser:

1. Å forstå problemet
2. Å utarbeide en plan
1. Å gjennomføre planen
2. Å se tilbake

De tre første fasene i Schoenfeld sin problemløsingsmodell er det samme som Polya sin første fase. De fire første fasene i Schoenfeld sin modell og de to første fasene i Polya sin modell innebærer anvendbarhetsbetingelsene, det vil si at du leser en gitt oppgave, analyserer og utforsker den for så å planlegge hvilke strategier du skal bruke og hvorfor. Fase fem hos Schoenfeld og fase tre hos Polya er gjennomføringen, og innebærer hvordan (eng: the how), altså prosedyren. Fase seks og fire inneholder avslutningsbetingelsene, når, hvor det å sjekke, og for eksempel sette to streker under svaret, oppfyller avslutningsbetingelsen. PISA-rammeverket har utarbeidet en tabell for å trekke frem ulike ferdigheter som elever krever i samarbeid med problemløsing (Fiore et al., 2017). Tabellen er presentert nedenfor, se tabell 2.

	(1) Etablere og opprettholde felles forståelse	(2) Iverksette passende tiltak for å løse problemet	(3) Etablere og vedlikeholde samarbeidet
(1) Utforske og forstå	(A1) Oppdage perspektiver og evner til deltagerne i gruppen	(A2) Oppdage samarbeidende interaksjon for å løse problemet, sammen med mål	(A3) Forstå rollene for å løse problemet
(2) Representere og formulere	(B1) Utarbeide en felles representasjon og diskutere meningen med problemet (felles grunnlag)	(B2) Identifisere og beskrive oppgaver som skal fullføres	(B3) Beskrive roller og organiseringen i gruppen (kommunikasjonsprotokoll / engasjementsregler)
(3) Planlegging og gjennomføring	(C1) Kommunisere med de andre deltagerne om handlingene som skal utføres	(C2) Vedta planer	(C3) Følge engasjementsregler (for eksempel be de andre deltagerne om å utføre oppgavene sine)
(4) Kontrollere og reflektere	(D1) Kontrollere og rette opp i den delte forståelsen	(D2) Kontrollere resultatene og evaluere suksessen i å løse problemet	(D3) Kontrollere, gi tilbakemeldinger og tilpasse gruppeorganisering og de ulike rollene

Tabell 2: Samarbeidende problemløsing ferdigheter (Fiore et al., 2017, s. 15)

Tabellen ovenfor er en veiledende vurdering av samarbeidsferdigheter engasjert under problemløsing. Ferdighetene vurderes av handlingene som blir utført av elevene, som for eksempel å ta en beslutning, mens andre ferdigheter krever kommunikasjonshandlingen, for eksempel ved å stille spørsmål til andre deltagere i diskursen. Venstre siden av tabellen representerer det samme som Polya og Schoenfeld trekker frem i sine problemløsingsprosesser. Videre i neste kapittel presenterer vi algebra, hvor vi ser på definisjoner, den algebraiske diskursen, samt overgangen fra aritmetisk til algebraisk diskurs, og avslutningsvis trekker vi frem diskursen om mønstergeneralisering.

2.5 Algebra

Historisk pekes det på ulike tolkninger av begrepet algebra, og at det derfor ansees som vanskelig å enes om en passende definisjon til begrepet. En kan for eksempel se på algebra som et firdelt begrep bestående av operasjonell symbolisme, en tankemåte, generalisert aritmetikk eller strukturer (Kongelf, 2015). *Operasjonell symbolisme* handler om hvordan algebra har blitt notert gjennom historien, og deles ofte inn i de tre ulike representasjonsformene retorisk, synkopert og symbolsk algebra (Kongelf, 2015). Algebra som *tankemåte* handler om generaliseringen i algebra. For eksempel det å kjenne igjen likheter, mønster, kategorisering og klassifisering (Mason, 1996). Algebra som *generalisert aritmetikk* deles inn i abstraksjon og generalisering og er en del av undervisning av elementær algebra. *Abstrakt algebra*, *strukturer* i algebra, er den delen hvor en ikke bare tar utgangspunktet i generaliseringen av algebraen, men også ser på strukturelle likheter (Kongelf, 2015).

Ettersom det ikke enes om en felles definisjon på begrepet algebra, har vi valgt å se nærme på den delen av algebrabegrepet vi ser som hensiktsmessig for problemstillingen til vår studie. Studien vår handler om elevers diskurs knyttet til algebra i skolen, og det vil derfor være naturlig for oss å trekke inn algebra i skolen. Det er elevenes diskurs som skal analyseres i oppgaven, og derfor har vi videre et delkapittel hvor vi drøfter begrepet algebraisk diskurs. Algebradiskursen bygger på og utvider den aritmetiske diskursen, og derfor skal vi presentere hva som kjennetegner en overgang mellom den aritmetiske og algebraiske diskursen (Kieran, 2007). Avslutningsvis vil vi trekke frem diskursen om mønstergeneralisering, da oppgavene vi har valgt å gi elevene er oppgaver som innebærer generalisering av ulike mønstre.

2.5.1 Algebra i skolen

Algebra er et kjent begrep i skolen, og en kan tilnærme seg begrepet på ulike måter. Historisk har algebra blitt sett på som noe som skal læres etter aritmetikken, og det har blitt trukket frem av flere ulike forskere at algebra oppleves som utfordrende for barn (Kieran, 2007). Ideen om tidlig algebra i skolen, eller pre-algebra ble derfor introdusert. Denne ideen handler om å introdusere elevene for algebra tidligere i skolen i håp om å redusere elevers utfordrende relasjon til algebrabegrepet (Kieran, 2004). Det har som tidligere nevnt vært usikkerhet i hva algebra begrepet innebærer, og vi skal derfor i dette kapittelet se nærmere på tilnærminger til algebrabegrepet i skolen.

En måte å tilnærme seg algebrabegrepet i skolen er ved GTG- modellen (Kieran, 2004). GTG-modellen er en modell som tar utgangspunktet i aktivitetene til elevene. Aktivitetene deles inn i genererende aktiviteter, transformasjoner og globale aktiviteter på meta-nivå.

De *genererende aktivitetene* innebærer å regne med de algebraiske objektene i algebra, for eksempel gjennom å uttrykke en likning eller ved mønstergeneralisering. En stor del av forståelsen for de algebraiske objektene utvikles gjennom arbeid med genererende aktiviteter (Kieran, 2004).

Den andre aktiviteten, *transformasjoner* omtales også som regler (Kieran, 2004). Reglene innebærer en beherskelse av utførelsen av faktorisering, utviding, regning med polynomuttrykk, eksponentinering med polynomer, likninger, forkorting og forenkling av uttrykk, arbeid med ekvivalente uttrykk og lignende (Kieran, 2004, s.142). Transformasjonsaktiviteten er derfor de aktivitetene hvor en endrer uttrykk eller likninger samtidig som at uttrykket eller likningen skal uttrykke det samme være (Kieran, 2004, s.142). Altså behandlinger innenfor samme representasjonssystem (Duval, 2006).

Den siste aktiviteten som trekkes frem under aktivitetene som knyttes til definisjon på algebra i skolen er de *globale aktivitetene på meta-nivå*. Aktiviteter på meta-nivå er aktiviteter hvor algebra blitt brukt som et verktøy, men hvor algebraen ikke sees på som eksklusiv (Kieran, 2004, s.142). Det er derfor mulig å arbeide med algebraiske aktiviteter hvor hovedfokuset i oppgaven ikke er rettet mot det algebraiske, men at algebraiske objekter brukes dersom det er nødvendig. Det betyr at det er aktiviteter som kan bli brukt uten å bruke algebra i det hele tatt, som for eksempel, problemløsing, modellering, se strukturer, studering av endring, generalisering, analysering av forhold i bevis. Kieran (2004, s.142) omtaler de også som aktiviteter hvor det anbefales å bruke generelle matematiske prosesser. Selv om aktivitetene ansees å være aktiviteter som kan gjennomføres uten algebra hevder hun at dersom en prøver å skille aktiviteter på meta-nivå fra algebra vil en fjerne alt behovet en har for å bruke algebra, og meta-nivå aktiviteter er essensielle for meningsbygging av det algebraiske begrepet. Basert på modellen med de tre aktivitetene som har blitt presentert har Kieran utformet en definisjon på algebraisk tenkning (Kieran, 1996, 2004, s.149):

> *«Algebraic thinking in the early grades involves the development of ways of thinking within activities for which letter-symbolic algebra can be used as a tool but which are not exclusive to algebra and which could be engaged in without using any letter-symbolic algebra at all, such as, analyzing relationships between quantities, noticing structure, studying change, generalizing, problem solving, modeling, justifying, proving, and predicting" (Kieran, 2004, s.149).*

Den algebraiske tenkningen skilles fra begrepet algebra ved at algebraisk tenkning inneholder tankeprosessene i algebra, og ikke bare de matematiske uttrykkene som for eksempel symbolske uttrykk og variabler (Kieran, 2004). Tankeprosessene i algebra kan være med på å endre tankegangen til hvorfor vi bruker algebra, og se nytten av den (Kriegler, 2008, s. 4). Algebraisk tenkning er med å utvikle elevers kvantitative resonnement innenfor en algebraisk ramme (Kieran & Chalouh, 1993, referert i Kriegler, 2008, s. 3).

En annen måte å se på skolealgebra, er ut fra hvordan elevene tenker algebraisk (Kaput, 2008):
- Algebraen i skolen som en samling bestående av strukturer og systemer som er hentet fra beregninger og relasjoner som oppstår, og som i tillegg inkluderer generalisert aritmetikk samt kvantitative resonnement.
- Algebra som funksjonstenkning, altså tenkning som innebærer sammenheng mellom variable
- Algebra som en samling av språk som kan brukes for å modellere en situasjon

Det første punktet bygger på generaliseringen av aritmetiske operasjoner, deres egenskaper og resonnement om mer generelle relasjoner, for eksempel kommutativitet, a • b=b • a. Det er den generaliserte aritmetikken, og den innebærer å bygge den symbolske delen av algebra fra strukturen til aritmetikk. Den generaliserte aritmetikken, er en utvidelse av den aritmetiske
Det vil si å bygge den grunnleggende ideen om at et uttrykk kan erstattes med et tilsvarende uttrykk og fortsatt være ekvivalent, som også kan anses som tidligere nevnt transformasjoner (Kaput, 2008; Kieran, 2004). Et eksempel på tilsvarende regning er
4 • 14 = 4 • (10+4) = 4 • 10 + 4 • 4. Det betyr også at en må se på aritmetiske uttrykk på en ny måte, hvor det er uttrykkets form som er viktig i stedet for verdien når de beregnes. En annen

grunnleggende faktor er det eksplisitte uttrykket for en beregningsstrategi. For eksempel en kompensasjonsstrategi, en strategi hvor vi har muligheten til å legge til en addisjon og senere trekke den fra totalen for å forenkle en beregning. Har vi det numeriske uttrykket 197 + 391, hvor vi legger til + 3 på 197 og får 200. Videre adderes 200 + 391 = 591, og trekker – 3 fra summen, 591 – 3 = 588. Med algebraiske symboler kan dette skrives a+b=(a+c)+b+c, og er et eksempel på algebraisk tenkning der det ikke må utrykkes med symbolsk representasjon.

De to ulike fremstillingene på algebra i skolen deler flere av de samme tilnærmingene til algebrabegrepet som for eksempel hvordan generaliseringen er en del av algebrabegrepet, og at begge definisjonene har med algebraisk tenkning som en del av algebra i skolen.

Delkapittelet har sammenfattet ulike tilnærminger til algebra i skolen. De ulike tilnærmingene trekker frem flere felles aspekter ved drøftingen av algebra i skolen, for eksempel generalisering og algebraisk tenkning. I vår studie er det den algebraiske diskursen vi skal se på og det vil derfor være naturlig for oss å forholde oss til Caspi & Sfards definisjon om at algebra kan sees på som en diskurs, som vi videre i neste kapittel kommer til å se nærmere på (Caspi & Sfard, 2012).

2.5.2 Algebraisk diskurs

En siste tilnærming som vi har valgt å trekke frem er algebra som diskurs. Ideen om at algebra er et språk bevares, i tillegg overfører denne definisjonen også tanken om at algebra ikke bare er et passivt verktøy for menneskelige aktiviteter. Symbolske mediatorer er en del av den algebraiske diskursen, og presenteres for eksempel i form av identiteter, for eksempel a(b + c)=ab + ac. Dette symbolske mønsteret har også en meta-aritmetisk fortelling som kalles generalisering. Den aritmetiske fortellingen til det gitte symbolske mønsteret er: «For å multiplisere et tall med summen av to andre tall, kan du første multiplisere hvert av de to andre tallene med det første og deretter legge til resultatet» (Caspi & Sfard, 2012, s. 2, vår oversettelse). Den andre typen oppgaver en møter på i algebraisk diskurs er spørsmål om ukjente mengder som er involvert i beregninger, hvor resultatet er gitt, for eksempel 2x + 2 = 14, altså likninger.

Algebraisk tenkning vil oppstå hver gang man utforsker numeriske relasjoner og prosesser i jakten etter generalisering eller i et forsøk på å finne en ukjent (Caspi & Sfard, 2012). Eksemplene ovenfor, som henviser to typiske algebraiske oppgaver, involverer en spesiell symbolsk notasjon som ofte blir sett på som kjennetegnet for algebra (Caspi & Sfard, 2012). Symbolske virkemidler er likevel ikke et nødvendig trekk ved narrativene som er involvert i disse meta-aritmetiske aktivitetene (Zazkis & Liljedahl, 2002; Caspi & Sfard, 2012). Selv om symboliseringen kan være det mest bemerkelsesverdige aspektet av utviklingen, er det bare en del av den mer generelle prosessen med formaliseringen av den algebraiske diskursen. Det overordnede målet for å maksimere effektiviteten av en meta-aritmetisk diskurs innebærer tre delmål: *Entydighet* (eng: disambiguation) som vil si å hindre muligheten for flere ulike tolkninger for de samme uttrykkene, dette er for å gjøre tolkningene mer klar og sikker. For eksempel 2+2n/n, betyr at bare det bakerste leddet skal deles på n, ellers må vi skrive (2+2n)/n som innebærer at hele uttrykket skal deles på n. Det samme uttrykket kan også skrives slik: $\frac{2+2n}{n}$. *Standardisering* vil sikre at alle innenfor diskursen følger de samme kommunikasjonsreglene. For å sikre standardiseringen må både metareglene for den algebraiske diskursen og det foreslåtte symbolsystemet være gitt av universell enighet innenfor det flerspråklige matematiske fellesskapet. Det er en fordel at alle tolker 2+2n/n på samme måte innenfor en diskurs. Her kan det ofte være folk som er uenige. Det siste delmålet, *komprimering*, som innebærer å gjøre lange uttrykk til presise og lett manipulerbare uttrykk. Det vil si at (2+2n)/n er et komprimert uttrykk, for «to pluss to ganger et vilkårlig tall og så deler du det hele på det vilkårlige tallet» (Caspi & Sfard, 2012).

Den algebraiske diskursen deles inn i den uformelle diskursen, og den formelle diskursen. Den uformelle diskursen kjennetegnes ved at det blir brukt og ord for å beskrive regnemåter, og for å forklare sammenhenger (retorisk algebra), mens i den uformelle diskursen brukes det symboler (symbolsk algebra), altså komprimert, men også entydig og standardisert (Caspi & Sfard, 2012, Kongelf, 2015). Dersom de tilsvarende nivåene av uformelle og formelle diskursene har blitt tilpasset hverandre, er det ikke på grunn av at de er utviklet samtidig, men fordi diskursen i høyre halvdel i tabell 3 kan sees på som den formelle versjonen av den til venstre. Hvis en kompleks uformell diskurs innen algebra er mulig, vil det ikke være behov for den formelle algebraen. Det er naturlige grenser for hvor langt elever kan gå i uformell algebra uten støtte fra det symbolske. Symbolsk algebra er også en diskurs, og alt som sies i symboler vil også ha et motstykke i et ikke-symbolsk språk (Caspi & Sfard, 2012). Et eksempel kan være:
$x \bullet y = y \bullet x \ \forall \ x,y \in \mathbb{R}$ som er en entyding, standardisert og komprimert (formell algebra) hvor motstykke innen uformell algebra kan være «Vi vil få det samme svaret om vi ganger sammen et

reelt tall med et annet som når vi bytter om rekkefølgen på tallene vi ganger. Dette gjelder for alle reelle tall bestandig».

Innenfor formell og uformell diskurs, kan den algebraiske diskursen videre deles inn i tre ulike nivå, nivå 1, nivå 2 og nivå 3 (Caspi & Sfad, 2012). Nivåene omtales også som det *prosessuelle nivået* (nivå 1), *det granulære nivået* (nivå 2) og *objektifiserende* nivået (nivå 3). I tilegg til de tre ulike nivåene deles den algebraiske diskursen inn i uformell og formell algebra (Caspi & Sfard, 2012). Den uformelle kolonnen i tabell 2 viser hvordan elever som ikke benytter seg av de formelle løsningsstrategiene i algebra kommer frem til et svar ved bruk av en uformell regnemetode. Nedenfor har vi lagt med en egen oversettelse av modellen med de tre ulike nivåene, se tabell 3. Vi har valgt å lage en oversettelse av den delen av den algebraiske diskursen som går på generalisering på bakgrunn av at de valgte oppgavene i vår studie inneholder generalisering og ikke likninger, som også er en del av Caspi og Sfard sin modell. Modellen viser hva som kan observeres innenfor de ulike nivåene i algebraisk diskurs, og viser hvordan kunnskapene i nivåene bygger på hverandre hvor nivå 1 er det laveste nivået og nivå 3 det høyeste nivået.

Nivå / oppgave	Uformell				Formell			
Nivå	Kjennetegn på objekter, og bruk av objekter		Rutiner		Kjennetegn på objekter, og bruk av objekter		Rutiner	
	Vanlige ord som beskriver en variabel	Visuelle mediatorer	Spørsmål	Prosedyre	Vanlige ord som beskriver en variabel	Visuelle mediatorer	Spørsmål	Prosedyre
Nivå 1 Prosessuelt nivå			Hvordan kan vi finne et element for dette mønsteret?	Regneoperasjoner med likhetstegnet brukt som en rekursiv beskrivelse	Bokstaven som er gitt i oppgaven	Bokstav brukt som parameter		
Nivå 2 Granulært nivå				Granulære beskrivelser av komplekse kalkulasjoner	Formel (uttrykk)	Bruker et komplekst uttrykk som beskrivelse for en gitt prosess		Bruker komplekse formler til å beskrive kalkulasjoner
Nivå 3 Objektivisering			Beskriver reglene for å produsere mønsteret	Leter etter en rekursiv beskrivelse		Bruker komplekse formler for å beskrive resultatet av kalkulasjoner	Modellerer fenomener, Utforskere fenomenet	Bruker komplekse formler som beskrivelse av resultatet av kalkulasjonene

Tabell 3: Nivåene over algebraisk diskurs (Caspi & Sfard, 2012)

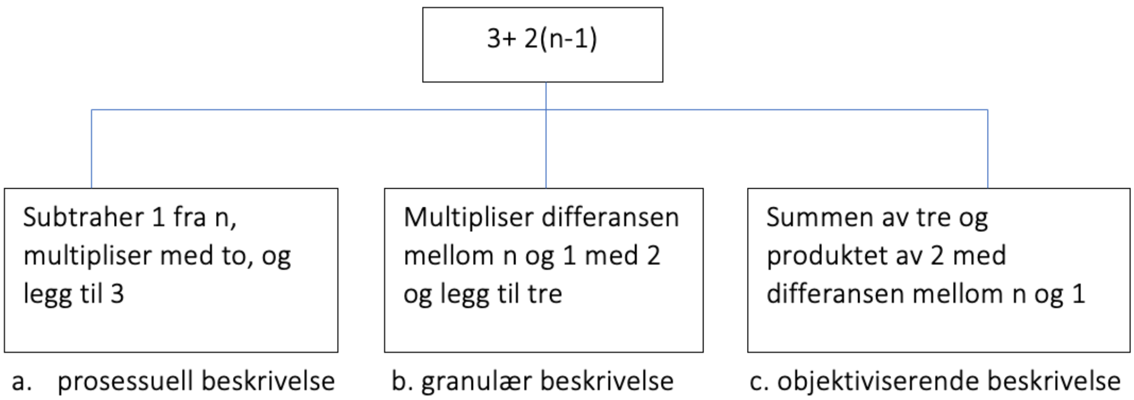
Tabellen ovenfor, tabell 3, sees på som en ressurs som viser hvordan diskursen kan analyseres for å fremme en mulig vekst i diskursen, eller for å forstå begrensningene i veksten. Det er viktig å presisere at den tabellen som presenteres her er en uferdig tabell, og at ved å benytte tabellen i analyse kan det legges til relevant informasjon fra forskning (Caspi & Sfard, 2012). De horisontale radene i modellen representerer de økende kompleksitetsnivåene. Overgangen fra et nivå til et annet kan bli sett på som utvikling i diskursen. Hvert nye nivå frembringer en endring i bruken av de eksisterende ordene, noe som kan endre enkelte meta-diskursive regler. De vertikale halvdelene av tabellen presenterer uformelle og formelle versjoner av diskursen.

Det prosessuelle nivået, nivå 1, er nivået hvor fokuset til elevene er ved beregninger. Elevenes beregninger og utregning skjer ved en lineær rekkefølge, dette vil si at selv om beregningene presenteres som ord eller symboler, vil regneoperasjonene i oppgaven utføres ved en lineær rekkefølge (Casp & Sfard, 2012). Nivået kjennetegnes ved at likhetstegnet ofte blir brukt som en «returknapp», og «gjør noe» signal (Caspi & Sfard, 2012, Kieran, 2007). Oppgaver med generalisering følger også en bestemt rekkefølge med regler for beregning av et mønster, for eksempel ved å stille følgende spørsmål: «Hvordan kan vi finne et vilkårlig element i tallrekken 3, 5, 7, 9?». En elev på det prosessuelle nivået kunne ha besvart oppgaven ved å for eksempel si: «Jeg ville brukt subtraksjon, og subtrahert 1 fra sifferet på plassen, multiplisert (resultatet) med 2 og lagt til 3 (til resultatet). Slike utregninger ansees som lineære, og viser til eksempelet som presenteres i figur 1.

Det granulære nivået, nivå 2, kjennetegnes også med beregninger. Forskjellen fra nivå 1 er at beskrivelsen av beregningene ikke lenger er avhengige av det som blir gjort, som for eksempel: legger til, multipliser osv. Elevene i dette nivået har et bredere vokabular og verbene i diskursen blir gjerne forandret til substantiv som for eksempel produkt, og sum, eller med adjektiv som for eksempel multiplisert (Caspi & Sfard, 2012). Der hvor verb er erstattet med et substantivledd kan betraktes som en snarvei av operasjonskjedene. Snarveiene kalles granulær og kan forstås som resultater av hjelpende beregninger. Dette kan føre til at uttrykket til en operasjonell kjede forkortes og kondenseres. Et uformelt eksempel av en slik kondensert sekvens kan være: «multipliser forskjellen mellom n og to og fem». I dette eksempelet setter verbet *multiplisere* fokuset på en numerisk operasjon, men substantivet *forskjell* lager en snarvei for prosessen med å subtrahere n og to (Caspi & Sfard, 2012). På grunn av endringen i formuleringene av de matematiske beregningene vil bli lest som et objekt og ikke en hendelse slik som det ville blitt lest ved prosessuelt nivå.

Det objektiviserende nivået, nivå 3, kjennetegnes ved at det praktiseres av fullverdige medlemmer av algebraisk diskurs. Det vil si alle med tilstrekkelig kunnskap for å kunne delta fullverdig i den algebraiske diskursen. Elevene som praktiserer et objektiviserende nivå ser sammenhengen mellom algebraiske uttrykk og at alle matematiske konstruksjoner kan være en del av en numerisk regneoperasjon og kan sees på som en erstatning for tall. Verbale eller symbolske uttrykk vil ikke bli brukt som en fremmed beskrivelse av relasjonen mellom objekter. Et eksempel på en objektiverende beskrivelse av et element i tallrekken kan være:
«Et produkt av en sum av to nummer og deres differanse er lik differansen mellom kvadratene av disse nummerne.»
Elever som mestrer dette nivået vil også ha en større mulighet for å delta utforskende, ettersom objektivisering av diskursen er en de-ritualiseringsprosess (Lavie, Steiner & Sfard, 2018).

For å få en større forståelse for de ulike nivåene, trekker vi frem et eksempel på hvordan de ulike nivåene vil se ut ved behandling av ett gitt uttrykk innen algebra.



Figur 1: De ulike nivåenes beregningsprosess i en diskurs (Caspi & Sfard, 2012)

Som vi ser i figur 1 viser alle nivåene til det samme uttrykket, men oppgaven behandles i tre ulike nivåer (Caspi & Sfard, 2012).

2.5.3 Overgangen mellom aritmetisk og algebraisk diskurs

Overgangen fra aritmetisk diskurs til algebraisk diskurs eller tankemåte krever en del justeringer. Justeringene vil også gjelde for de elevene som regnes som elever som presterer på høyt nivå innenfor aritmetikken (Kieran, 2004). Det kreves justeringer for utviklingen av en algebraisk tenkemåte som inkluderer, men likevel ikke begrenses av punktene nedenfor (Kieran, 2004)

1. Et skifte av fokus fra numeriske beregninger til relasjoner mellom tallene.
2. Se sammenhengen mellom operasjoner og prosesser, for eksempel forstå at multiplikasjon og divisjon er motsatte operasjoner.
3. Rette fokuset på å både representere og løse et problem i stedet for å bare løse det
4. Bruke tall og bokstaver, i stedet for tall alene. Dette inkluderer:
    i) Arbeide med bokstaver som til tider kan være ukjente, variabler eller parametere
    ii) Akseptere at et svar ikke nødvendigvis trenger å være et tall
    iii) Å sammenligne uttrykk på bakgrunn av ekvivalente egenskaper i stedet for på numerisk evaluering. For eksempel forstå at 6 • 5=5 • 6 på bakgrunn av egenskaper og ikke fordi det er lik 30.
5. En relasjonell forståelse av likhetstegnet (og ikke operasjonell)

Det vil være flere momenter som kan være problematisk i overgangen fra aritmetisk diskurs til algebraisk diskurs. En av årsakene til at det kan oppleves som utfordrende ved overgang er at diskursen ikke bestandig de samme reglene i aritmetikk som i algebra. I algebraen møter elevene på en generalisering av aritmetikken (Booth, 1998). Det vil derfor være sannsynlig at elever som ikke har tilstrekkelig med kunnskap om tallbegrepet vil møte på utfordringer når aritmetikken skal generaliseres (Kieran, 2004). Elevene møter også på det symbolske i den algebraiske diskursen, og det kan da være utfordrende å forstå meningen med å bruke symboler og ikke tall, som for eksempel ved møte med ukjente og variable (Caspi & Sfard, 2012).

De ulike nivåene i den algebraiske diskursen kan også være utfordrende ved overgang. De ulike nivåene i diskursen krever ulikt kunnskapsnivå, og en kan ikke forvente at ved en direkte overgang fra en aritmetisk diskurs vil elevene automatisk være på et objektiviserende nivå (nivå 3). Det objektiviserende nivået er gjerne nivået læreren befinner seg, noe som kan vanskeliggjøre kommunikasjonen mellom lærer og elev. Eleven kan derfor oppfatte at læreren prøver å kommunisere med et uforståelig språk dersom læreren ikke tilpasser seg elevens nivå i diskursen.

Det er ikke bare overgangen mellom de ulike nivåene i diskursen som kan virke utfordrende for elevene. Elevene møter også på utfordringer når de skal gå fra aritmetisk tankegang til algebraisk tankegang ved problemløsingsoppgaver. I aritmetikken regner en seg frem til et svar, og det er ofte lite fokus på forholdene mellom tallene i oppgavene (Kieran, 2004). Et eksempel kan være 9 + 4 = _ + 9 hvor de som har en operasjonell forståelse av likhetstegnet i dette tilfelle vil regne ut 9 + 4 = 13, og ikke regne seg frem til svaret 4. Grunnen til dette er at ved en operasjonell forståelse av likhetstegnet ser en likhetstegnet som et signal for å skrive svare, og ikke som en venstre til høyre regneoperasjon (Kieran, 2004). Dette kan bli utfordrende i møte med den algebraiske diskursen. Eksempelvis har vi det prosessuelle nivået i den algebraiske diskursen hvor likhetstegnet sees på som en «returknapp», og ikke lenger som et signal for å skrive svaret (Caspi & Sfard, 2012).

Elevene kan ha utfordringer med å finne det generelle aspektet ved regneoperasjonene og retter heller søkelys mot kalkuleringen. Eksempelvis: Ved å addere 3, fem ganger med et tilfeldig nummer blir summen 38. Eleven skal her finne nummeret. Elever som regner med aritmetisk tankegang kan her benytte seg av subtraksjon og subtrahere 3 fra 38 og deretter dele på 5 (Kieran, 2004).
For å kunne komme over i den algebraiske diskursen blir en nødt til å utforske relasjonene mellom de ulike aspektene ved regneoperasjoner og generalisering, og dersom elevene bare konsentrerer seg om kalkuleringen kan overgangen til den algebraiske diskursen være vanskelig (Kieran, 2004). Dersom vi ser på eksempel gitt ovenfor ville en elev ved algebraisk tenkemåte se på forholdet i oppgaven, og bruke de gitte faktaene som hentes ut fra oppgaven til å sette opp likningen 5x + 3 = 38 (Caspi & Sfard, 2012). I vår studie er oppgavene knyttet til figurtall og på bakgrunn av dette velger vi å presentere diskursen om mønstergeneralisering i neste delkapittel.

2.5.4 Diskursen om mønstergeneralisering

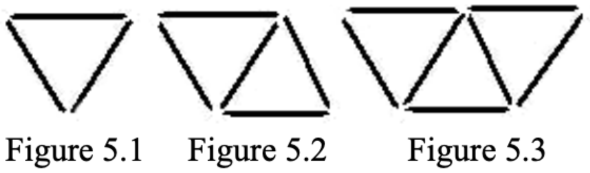
I skolematematikken representeres figurmønstre som geometriske konfigurasjoner som gjerne er oppstilt på en linje, utvikles og kan fortsette til det uendelige. Å generalisere et figurmønster algebraisk innebærer å finne et generelt uttrykk for antallet komponenter i figuren, uttrykt ved hjelp av figurens nummer, gjerne symbolisert ved den symbolske variabelen n.
Mønstergeneralisering i algebra, som i vår studie omhandler figurmønster må derimot ikke

forveksles med andre former for generalisering, dette på bakgrunn av at alle generaliseringer ikke er algebraiske (Radford, 2010). Radford (2010, s. 42) definerer mønstergeneralisering slik:

> *«Generalizing a pattern algebraically rests on the capability of grasping a commonality noticed on some elements of a sequence S, being aware that this commonality applies to all the terms of S and being able to use it to provide a direct expression of whatever term of S."*

Denne teoretiske tilnærming knyttet til mønstergeneralisering deles opp i to overordnede nivåer, aritmetiske- og algebraiske generaliseringer. Aritmetisk generalisering, går under ikke-algebraisk generalisering og uformell algebra. Her blir det i hovedsak arbeidet ved hjelp av praktiske løsningsmetoder, hvor elever klarer å se likheter og bygge neste figur gjennom konkreter eller tegninger som for eksempel å telle seg frem til neste figur (Radford, 2010, Caspi & Sfard, 2012). Dette kalles for naiv induksjon, hvor elever prøver og feiler gjennom gjetting, som igjen er en kjent heuristikk innen problemløsing (Radford, 2010, Björkqvist, 2003, s. 67).

Algebraisk generalisering kan deles inn i tre underkategorier: faktageneraliseringer (eng: factual generalization), kontekstuelle generaliseringer (eng: contextual generalization) og symbolsk generalisering (eng: symbolic generalization) (Radford, 2010). I arbeidet med algebraiske generaliseringer er målet at elever skal utarbeide regler for hvilket som helst antall i rekken av figurer. I den algebraiske diskursen vil de ulike nivåene ha betydning for hvordan elevene kommer frem til løsningen, og hvordan løsningen beskrives (Caspi & Sfard, 2012). Et eksempel kan være at en gruppe elever ser på et mønster med tannpirkere som vist i figur 2. Elevene oppfatter raskt at mønsteret øker med to tannpirkere på hver figur. Når elevene oppfatter dette er de innenfor aritmetisk generalisering, på bakgrunn av de har generalisert et lokalt fellestrekk som ble observert på noen figurer, men kan ikke bruke denne informasjonen til å gi et uttrykk for hvilken som helst figur i mønsteret. Ifølge modellen til Caspi og Sfard (2012) kan vi på bakgrunn av dette ikke plassere de på et nivå innenfor den algebraiske diskursen. En elev i gruppen ser på dette som upraktisk og kommer frem til en annen strategi, hvor fellesheten som knytter antall tannpirkere i en figur er summen av rekkene til to påfølgende figurer. Medeleven resonnerer seg da frem til at figur 25 må bestå av addisjonsstykket 25+26. På bakgrunn av denne ideen kommer de frem til et direkte uttrykk for verdien av figur 25, og har derfor gjort en algebraisk generalisering i kategorien faktageneralisering (Radford, 2010, s. 46-47). Ettersom eleven har funnet et element for mønsteret og setter i gang regneoperasjoner med likhetstegnet brukt som en rekursiv beskrivelse, kan dette plasseres innenfor et uformelt prosessuelt nivå i den algebraiske diskursen.



Figur 2: Figurmønster eksempel (Radford, 2010, s. 46)

Radford (2010) definerer det å uttrykke en generalisering gjennom alfanumeriske symboler, for eksempel 2n eller 2n-1, som symbolsk generalisering. Symbolsk generalisering er en kompleks prosess hvor elever må bestemme seg for betydningen av bokstaver (entydighet), begrunne regelen for mønsteret og konstante tall i formelen. I studien til Radford ser vi at tidlig i oppgaven brukte elevene uttrykket «tallet på figuren», altså en uformell algebraisk tilnærming til diskursen, og videreførte dette til bokstaven n, som er en formell tilnærming i diskursen. Det innebærer at den symbolske bokstaven n er en semiotisk sammentrekning (komprimering) av uttrykket «tallet på figuren» (Radford, 2010, s. 53). Videre i neste delkapittel gir vi en kort oppsummering av teorikapitlet som vi videre bruker i analysen vår.

2.6 Oppsummering av rammeverk

I teorikapittelet har vi trukket frem og sammenfattet det teoretiske rammeverket for undersøkelsen. Vi har valgt ut relevant teori på bakgrunn av problemstillingen, for å kunne undersøke hva som kjennetegner en gruppe 9.trinns elevers diskurs ved arbeid med problemløsingsoppgaver i algebra. I dette siste avsluttende kapittelet i teoridelen vil vi derfor oppsummere ulike begreper og i korte hovedtrekk rammeverket vi har valgt å bruke videre i studien.

Vi har valgt å bruke kommognisjon som overordnet rammeverk for studien (Sfard, 2008). Grunnen til at vi har valgt å bruke kommognisjon er at dette er et rammeverk som egner seg godt til å analysere diskursen innad i en gruppe. Det kommognitive rammeverket trekker frem flere ulike begreper. I vår studie kommer vi til å bruke begrepene narrativer, visuelle mediatorer og rutiner. Vi vil i hovedsak se nærmer på rutinene til elevene, metareglene, dette på bakgrunn av at det er metareglene som beskriver den diskursive handlingen til elevene. Metareglene deles inn i the how (hvordan) og the when (når) (Sfard, 2008). The how (hvordan) vil bli brukt til når vi skal analysere elevenes prosedyrer, og the when når vi skal analysere elevenes anvendbarhetsbetingelser, og avslutningsbetingelser. Rutinene deles inn i utforskende rutiner, og rituelle rutiner. Vi har valgt å ta med om elevene arbeider utforskende eller rituelt på bakgrunn av at vi ønsker å se hva som kjennetegner rutinene for diskursen deres. De-ritualiseringsprosess er et begrep vi trekker frem i teorien, og vi kommer til å se på de ulike rutinene for en de-ritualiseringsprosess, overgang fra rituelt til utforskende i elevenes diskurs (Sfard,2008).

Studien vår innebærer at elevene skal løse ulike problemløsingsoppgaver i algebra. Vi har sammenfattet ulike tilnærminger på problemløsing for å komme frem til en felles definisjon på problemløsing (Sfard, 2008). Et problem ifølge vår sammenfatning vil derfor være avhengig av oppgaven og personen som skal gjennomføre det. Det er altså ikke sikkert at elevene vil oppfatte oppgavene som problemløsingoppgaver (Björkqvist, 2003, Boesen, 2006, Polya 1981, Schoenfeld, 1993, Yan & Linghuo, 2006). Vi vil videre i studien bruke definisjonen til Boesen (2006) når vi ser på problemløsingsrutiner (Sfard, 2008).

Algebrakapittelet presenterte ulike tilnærminger til algebra i skolen, grunnen til at vi har tatt med de ulike tilnærmingene er for å trekke frem et overordnet bilde av hvordan algebra blir brukt i skolen, da vi i vår studie forsker på kjennetegn i skolealgebraen. Det er den algebraiske diskursen vi skal se nærmere på, og vi har derfor valgt å trekke frem de ulike nivåene i den algebraiske diskursen prosessuelt nivå (nivå 1), granulært nivå (nivå 2) og objektiviserende nivå (nivå 3). De ulike nivåene har vi valgt å trekke frem på bakgrunn av senere analyse av elevenes diskurs, hvor vi har tenkt å bruke tabellen for å skille mellom nivåene til elevenes diskurs (Caspi & Sfard, 2012). En overgang mellom aritmetisk og algebraisk diskurs kan være krevende, og for å se på hva som kjennetegner elevenes overgang har vi valgt å ha med ulike punkter for utviklingen av en algebraisk tankegang (Kieran, 2004). Avslutningsvis har vi diskursen om mønstergeneralisering. Oppgavene til elevene er oppgaver innen mønstergeneralisering i algebra, det var derfor nødvendig å trekke frem teori for å sammenfatte ulike kjennetegn ved diskursen for mønstergeneralisering.

3 Metode

Studien vår undersøker elevers deltagelse i en diskurs med problemløsingsoppgaver innen algebra. For å kunne svare på hva som kjennetegnes, har vi valgt å ta i bruk videoobservasjon som primærmetode, hvor vi observerer to grupper med elever som jobber sammen med problemløsingsoppgaver innenfor mønster/algebra. Vi har også valgt å støtte opp forskningen ved å bruke observasjon og elevbesvarelser som sekundærmetode. I dette kapittelet trekker vi frem det metodiske valget og observasjon som metode, før vi videre presenterer utvalg, valg av oppgaver til elevene og metode for analyse. Til slutt drøftes kvaliteten av forskningsarbeid og etiske refleksjoner blir belyst.

3.1 Metodisk valg

Valg av metode ble naturligvis påvirket av valget av det overordnede teoretiske rammeverket kommognisjon. Det kommognitive rammeverket tar for seg elevenes læring, og hevder at elevenes læring kan identifiseres ved endring av diskurs (Sfard, 2008). Forskningen vil derfor konsentrere seg om diskurser. Vi skal se på hva som kjennetegner elevers matematiske diskurs ved arbeid med problemløsingsoppgaver i algebra. Diskursen til elevene vil derfor være fokusområdet for vår forskning. Hvordan eleven tenker vil ikke i følge Sfard (2008,2012) være observerbart, men deltakelsen i den matematiske diskursen gir likevel mulighet for en tolkning. Med kommognisjon som teoretisk rammeverk, og matematiske diskurser som fokusområde vil det være den helhetlige diskursen til elevene som skal analyseres (Sfard, 2008). Den helhetlige diskursen innebærer analyse av elevenes kommunikasjon med seg selv gjennom tenking, og elevenes kommunikasjon med hverandre gjennom og hva de gjør. Det er elevenes deltakelse i diskursen, og deres interaksjon med andre som skal analyseres.

Det er derfor video og observasjon av elevenes deltakelse og interaksjon som er datamateriale i forskningen. Hele dialogen mellom elevene når de arbeider med problemløsingsoppgavene ble transkribert til analyse. For å sikre kvalitet i forskningen blir det derfor avgjørende at vi som forskere kan trekke frem nøyaktig det som ble sagt og gjort. Analyse basert på gjenfortelling som dokumentasjon vil ikke være med på å sikre kvalitet i forskningen, og vi anser derfor ikke gjenfortelling fra observasjon alene som tilstrekkelig måte å innhente data (Sfard, 2008). Den kommognitive forskningen krever nøyaktighet, og vi som forskere har derfor en rolle som vil være avgjørende for resultatet av forskningen. Det strenge kravet i kommognitv forskning om nøyaktighet i forskning gjør at det ikke vil være mulig å gjennomføre en ikke-deltakende observasjon. Observasjonen må derfor gjennomføres som deltakende observasjon, men det er likevel viktig å være bevisst på hvor aktiv en som forsker er da dette kan påvirke forskningen (Sfard, 2008). For å støtte opp observasjonene, og kravet om nøyaktighet i kommognitiv forskning har vi derfor valgt å bruke videoobservasjon som primærmetode, og deltakende observasjon som sekunder metode sammen med skriftlig elevbesvarelse for innhenting av empiri til vår studie.

3.2 Observasjon som metode

Det kreves planlegging for å gjennomføre en observasjonsstudie (Tjora, 2021, s.64). For å kunne undersøke og samle inn svar som vil være med på å gi et akseptabelt resultat til forskningen kreves det at en som forsker har forberedt problemstilling og relevante forskningsspørsmål. En som forsker må også ha en tanke om hvilket teoretisk felt og temaer som skal studeres i observasjonen for å få størst mulig utbytte av observasjonene (Tjora, 2021, s. 64).

Observasjonene ble gjort på grupperom i mindre grupper. Vi valgte å observere elevene i mindre grupper fordi vi tenker at det vil være en enklere måte å innhente dataene vi trenger fra observasjonene enn å observere flere grupper samtidig i klasserommet. En annen grunn for at vi velger å se på mindre grupper ute av klasseromssituasjonen er fordi vi tenker at det vil være enklere å observere små grupper enn en hel klasse når det kommer til den matematiske diskursen. Observasjon av grupper kan gi oss muligheten til å se om elevene kan sette ord på tanker og de innvendige prosessene i interaksjon med andre, ettersom vi ikke direkte kan observere elevenes tanker. Dette håper vi kan være med på å gi oss et bilde av elevenes innvendige handlinger (Sfard, 2008).

3.2.1 Videoobservasjon som primærmetode

Videoopptak anses som nyttig for en dypere forståelse av komplekse samhandlinger, samt at det er et hjelpende verktøy for å studere samspillet mellom den verbale kommunikasjonen og den nonverbale kommunikasjonen av elevenes diskurs (Bjørndal, 2017, s. 80). Sfard (2008) belyser som tidligere nevnt at studering av diskurser krever nøyaktighet, og en ikke-tolket gjengivelse av situasjonene er noe av det som er fordelen ved å bruke videoobservasjon, en får en korrekt gjengivelse av de sosiale handlingene uten tolkning (Tjora, 2021, s. 117). Det elevene sier og gjør danner grunnlaget for resultatet av forskningen, og en korrekt gjengivelse av det som blir sagt og gjort av elevene vil derfor være en viktig del av forskningen (Sfard, 2008,2012). En korrekt gjengivelse av det som blir sagt og gjort vil også være med på å gjøre at en unngår at forskningen bygger på forskernes forestillinger (Davidsen & Kjær, 2018, s. 26). Videoobservasjon gir mulighetene til å fange opp empiri som enten ikke har blitt registrert eller som ellers kunne blitt glemt (Bjørndal, 2017, s.79-81).

I vår undersøkelse skal elevenes deltakelse og de visuelle mediatorene de benytter hjelpe oss å besvare problemstillingen. Det vil si at de synlige objektene som brukes som en del av kommunikasjonsprosessen er en del av de dataene vi ønsker å fange opp. Davidsen & Kjær (2018, s. 26) belyser at videoobservasjon kan brukes for å studere språk, samhandling, bruk av objekter og kroppsspråket som naturlig utfolder seg mellom deltakerne. Davidsen & Kjær trekker dermed frem flere av de ulike visuelle mediatorene som blir påpekt av Anna Sfard (2008) som en viktig del av studie av matematiske diskurser.

Videoobservasjon krever at det er gjort gode forberedelser på forhånd. Det betyr at før vi begynte videobservasjonen hadde vi klart formålet med opptaket, og hadde tenkt gjennom de etiske og tekniske utfordringene. De etiske utfordringene ved videoopptak drøftes i kapittel 3.6.3, og vi velger derfor bare å ta for oss de tekniske utfordringene i dette kapittelet. Vi forsøkte å kontakte flere institusjoner for å få låne videoutstyr uten å lykkes. Det anbefales å brukes flere medier for opptak for å sikre at mest mulig data ble fanget opp, men vi endte likevel opp med å bruke en ikke-kommuniserende Ipad uten sim-kort som utstyr da vi ikke lykkes med å få tak i annet utstyr. Vi valgte å bruke et langt videoopptak for hver av gruppene istedenfor å bruke små videoopptak, dette for å hindre at vi skulle gå glipp av relevant data fra den sosiale interaksjonen (Bjørndal, 2017, s. 90). Videoopptaket ble umiddelbart overført til sikret bevaring på USN, og slettet fra Ipad.

3.2.2 Observasjon og elevbidrag som sekundærmetode

En observasjon er en situasjon hvor det blir gjort en studie av deltakernes handlinger i felten (Thagaard, 2018, s.63). Vi har valgt å gå for en strukturert tilnærming til observasjon, da vi i forkant av undersøkingen hadde klart hva formålet med observasjonen vår var. Formålet som tidligere nevnt er å se på hva som kjennetegner elevers diskurs ved arbeid med problemløsing oppgaver i algebra. Vi skal se på om elevene benytter seg av en rituell eller utforskende tilnærming, og vi skal se på hvilke mediatorer elevene bruker og hvordan de benyttes. Når en er ute i felten og observerer kan en innta ulike roller for observatør, en kan innta rollen som fullstendig deltaker hvor en på lik linje som de andre deltar eller en kan foreta en ikke-deltakende observasjon hvor en observerer fra sidelinjen (Thagaard, 2018, s. 69). Vi har valgt å gå for en mellomting av disse to ytterpunktene som er en deltakende observasjon, også kjent som den mest vanlige formen for observasjon (Thagaard, 2018, s. 69). Deltagende observasjon kjennetegnes ved at forsker både observerer og deltar i felten, det vil ikke si at en som observatør skal gjøre det samme som deltakerne gjør, men at en samhandler med deltakerne mens de utfører sine arbeidsoppgaver.

Det er flere utfordringer under observasjon som metode for innsamling av empiri (Thagaard, 2018). Hun trekker frem at det vil være avgjørende for en deltakende observasjon at en som forsker blir akseptert i det miljøet vi skal forske i. Selv om vi har valgt å gå for en deltakende observasjon ønsker vi i minst mulig grad å påvirke samtalene til elevene, da vi er ute etter å finne ut hva som kjennetegner elevenes diskurs når de kommuniserer og er i interaksjon med andre i størst mulig grad uten hjelp av lærer. Dette er et dilemma vi er klar over, at vi som forskere påvirker situasjonen, og ved at vi er mer bevisste på dette kan vi gjøre denne påvirkningen mindre.

Elevene løser oppgaver som skal gi oss data til analyse. Selv om vi har videoobservasjon og deltakende observasjon har vi i tillegg valgt å samle inn og ta bilde av elevenes notater til oppgaveløsningen. Elevbesvarelser vil derfor også benyttes som empiri til forskningen.

3.3 Utvalg

Kvalitative studier kjennetegnes ofte ved et begrenset utvalg av informanter til undersøkelsen, det er derfor viktig at de som deltar i forskningen er hensiktsmessig utvalgt for å hente inn informasjon som kan være med på å svare på problemstillingen (Thagaard, 2018, s.54). Vi har i vår masteroppgave har vi benyttet oss av et strategisk utvalg, som vil si at våre deltakere i forskningen er valgt ut fra problemstillingen vår (Thagaard, 2018, s.54). Vi valgte å benytte oss av et strategisk utvalg fordi formålet med oppgaven ikke er å gjøre en vid undersøkelse, men å kunne si noe om hva som kjennetegner elevers arbeid med diskurser med problemløsing i algebra. Det strategiske utvalget kjennetegnes ved et begrenset antall personer som skal undersøkes, og på grunn av at vi ikke ønsker å gjøre en vid undersøkelse så vi det nødvendig å ta en strategisk utvelgelse av informanter til oppgaven (Thagaard, 2018, s.54). Utvelgingsprosessen anses som en av de viktigste oppgavene i en studie for å skaffe de riktige deltakerne i forskningen. Vi har derfor vært avhengige av å hente hensiktsmessige informanter som i våres tilfelle er elever på 9.trinn som kan gi oss den informasjonen vi trenger for å kunne skrive noe om kjennetegnene ved problemløsing i algebra (Thagaard, 2018, s.56).

Hvor og når forskningen skulle gjennomføres har gått på tilgjengeligheten til skolene i nærområdet. Vi har tatt kontakt med flere ungdomstrinn i distriktet for å høre om det var av interesse og om de hadde tid samt mulighet til å delta i forskningen våres. I henvendelsen ble det informert kort om prosjektet. Etter en periode med forsøk på å finne skoler fikk vi til slutt en avtale med en ungdomsskole i nærheten, og det ble sendt ut tilstrekkelig med informasjon om hva det innebar å delta i forskningen. Det ble sendt hjem et informasjonsskriv til foresatte som skulle returneres med underskrift om samtykke til deltakelse i forskningen. Flere av elevene viste seg å være skeptiske til gjennomføring av undersøkelse når de hørte at det var med videobservasjon. Videoobservasjon kan i flere tilfeller virke skremmende for ungdommer, og for å trygge ungdommer på hvorfor vi skal ta videoopptak av dem ble vi enige sammen med kontaktpersonen på skolen at vi skulle komme før forskningsdagen for å fortelle elevene om prosjektet. Dette for å trygge dem med grunnen til at vi ønsket å ta videoopptak, for å hilse på dem og for å svare på eventuelle spørsmål.

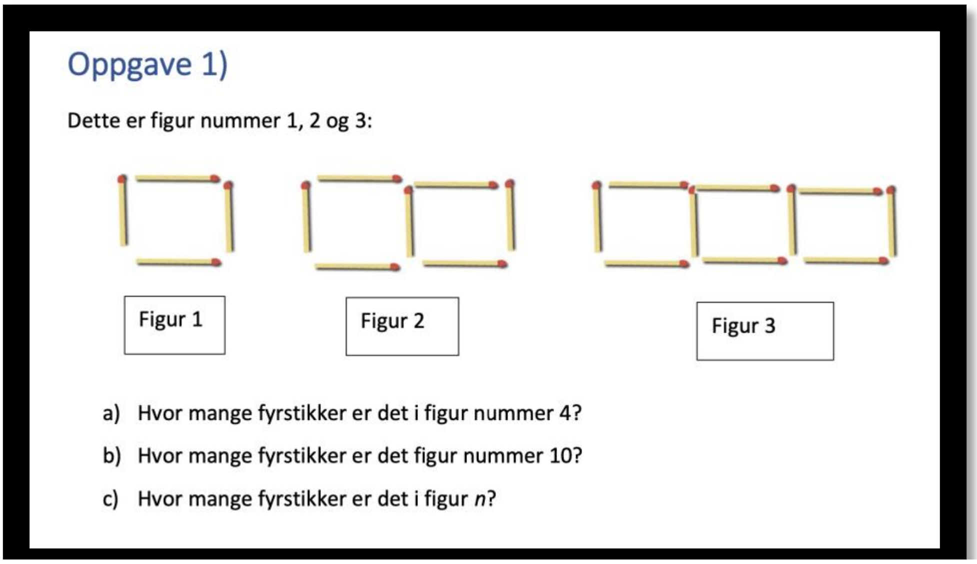
For å være sikre på at vi hadde tilstrekkelig med data for analysen bestemte vi oss på forhånd for at vi ønsket å undersøke to grupper med 3-4 elever i hver gruppe. Grunnen for at vi ikke valgte flere grupper er fordi vi ikke ville sitte igjen med uoverkommelig datamengde i analysedelen, og at vi heller ser på det som hensiktsmessig å se dypere på to grupper enn å se på overflaten i flere grupper. Dette for å kunne gi et akseptabelt svar på problemstillingen.

3.4 Oppgavene til elevene

I studien vår skal vi studere hva som kjennetegner elevers arbeid med problemløsing i matematikk i emnet algebra. Vi har videre valgt å holde oss innenfor mønsteralgebra, og ut fra dette har vi laget et sett med oppgaver. Vi har valgt å kalle det for oppgaver og ikke matematiske problem, ettersom det er uvisst om elevene vil oppfatte det som matematiske problem. Oppgavesettet inneholder fem oppgaver, hvor mesteparten av oppgavene inneholder en deloppgave hvor elevene skal finne en formel for n, med unntak av oppgave to og tre. Utgangspunktet for oppgavesettet var at vanskelighetsgraden skulle være variert. Det ene oppgavesettet inneholder også et eksempel på hvordan vi kan finne en formel for n i den gitte figuren. Kun en gruppe fikk dette eksemplet, hvor vi skal se om det endrer anvendbarhetsbetingelsene, og om løsningene bærer preg av dette eksempelet. Videre vil vi gi en kort presentasjon av oppgavene.

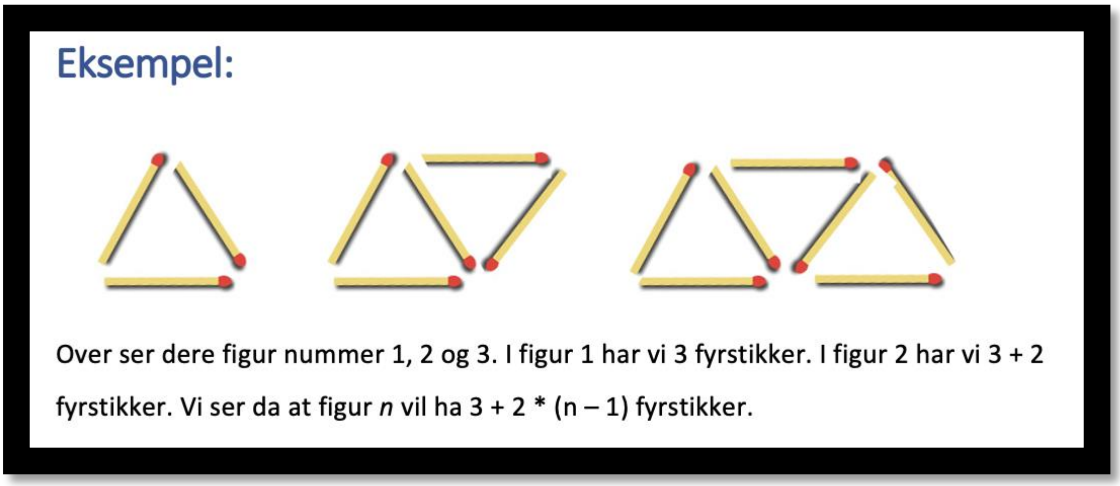
3.4.1 Oppgave 1

Oppgaven er hentet fra Lithners (2017), se figur 3. Fyrstikk mønsteret i denne oppgaven er et geometrisk mønster med lineær vekst, $T_n = 3n + 1$, hvor T står for antall fyrstikker og n er figurens nummer.



Figur 3: Oppgave 1 (Lithner, 2017)

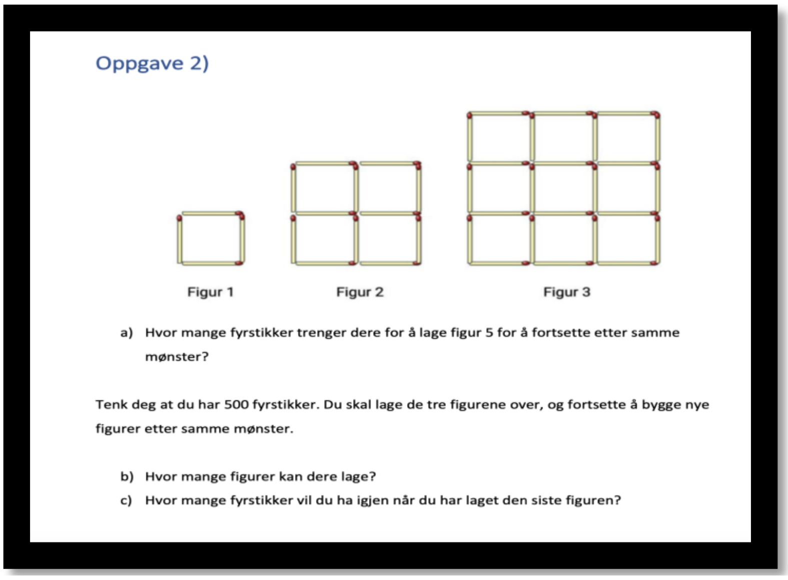
De to første deloppgavene i oppgave 1 går ut på at elevene skal bygge videre på figuren. Dette forutsetter at elevene er i stand til å se hvordan mønsteret endrer seg, og bruke dette på de neste figurene. Den siste deloppgaven, oppgave 1c, ser om elevene klarer å lage en generell formel for fyrstikkmønsteret. Denne deloppgaven forutsetter at elevene er i stand til å beskrive mønsteret ved bruk av symbolske mediatorer. Oppgaven er som nevnt i tråd med Lithners forskning, hvor det er gitt et eksempel foran, se figur 4, for å se om dette endrer anvendbarhetsbetingelsene. Dette ble også gjort hos gruppe 1.



Figur 4: Eksempeloppgaven (Lithner, 2017)

3.4.2 Oppgave 2

Oppgave 2, som vist i figur 5, er hentet fra et oppgavesett med eksempeloppgaver knyttet opp mot eksamensøving i matematikk 1P (Utdanningsdirektoratet, 2021). Vi har valgt å gjøre om på oppgaven, og på deloppgave b velger vi å bruke 500 fyrstikker, i stedet for 10 000 fyrstikker som eksempeloppgaven ønsker de skal bruke.

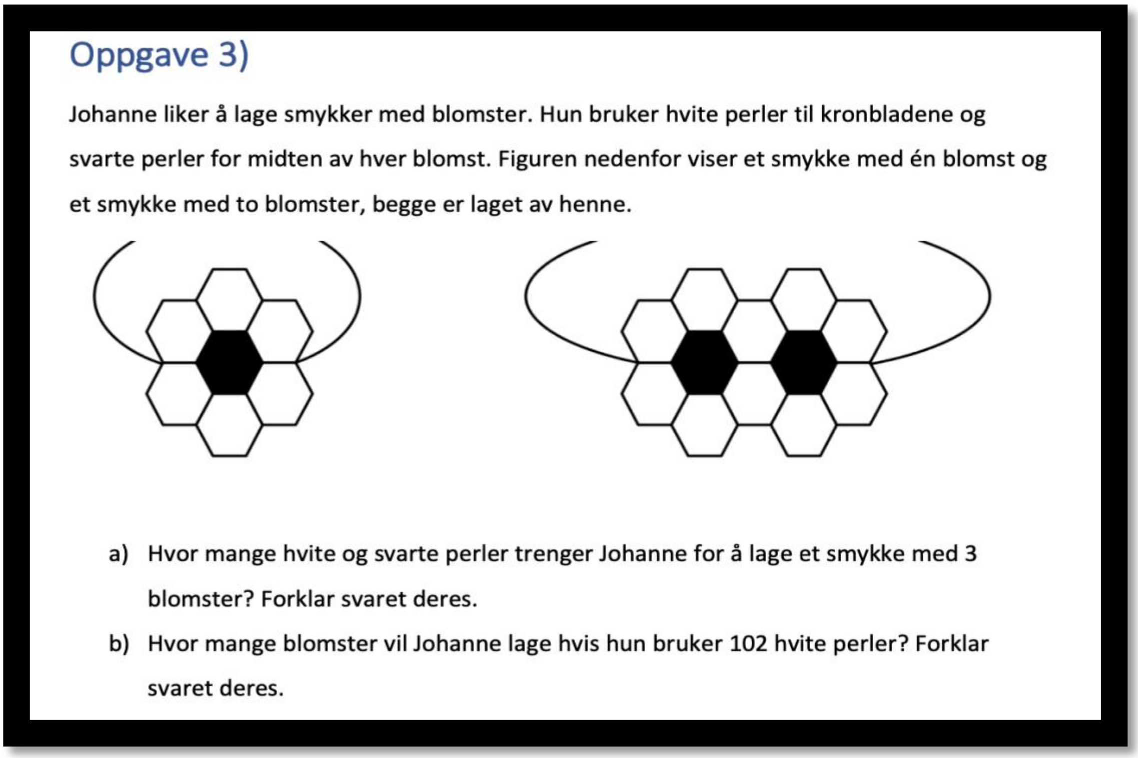


Figur 5: Oppgave 2 (Utdanningsdirektoratet, 2021)

Deloppgave 2a bygger på samme prinsippet som på oppgave 1a og 1b i forrige oppgave, og krever de samme ferdighetene for å løse oppgaven. Deretter endrer anvendbarhetsbetingelsene seg og elevene må være i stand til å finne ut hvor mange figurer de kan bygge med 500 fyrstikker. Det er flere heuristiske tilnærmingsmåter elevene kan ta i bruk for å løse denne oppgaven, og vi er nysgjerrige på hvilken matematisk diskurs de vil ta i bruk for å løse denne oppgaven. Deloppgave c innebærer å ta antall fyrstikker og subtrahere det med det produserte narrativet fra forrige oppgave.

3.4.3 Oppgave 3

Oppgave 3 fremstiller et geometrisk mønster i lineær vekst i form av et smykke. Når elevene skal tolke den visuelle representasjonen, må de formulere en beskrivelse som refererer til hver blomst som en felles enhet for å danne et lineært mønster (Spangenberg & Pithmajor, 2020). For eksempel deler hver blomst to hvite perler for å danne en komplett blomst, som vist i figur 6. Fire hvite perler må legges til på slutten av hver tidligere blomst for å lage en ny blomst og ytterlige to perler for å danne en komplett blomst, noe som gir den generelle reglen for hvite perler $T_n = 4n + 2$, hvor variablen n representerer antall blomster eller antall sorte perler.



Oppgave 3)

Johanne liker å lage smykker med blomster. Hun bruker hvite perler til kronbladene og svarte perler for midten av hver blomst. Figuren nedenfor viser et smykke med én blomst og et smykke med to blomster, begge er laget av henne.

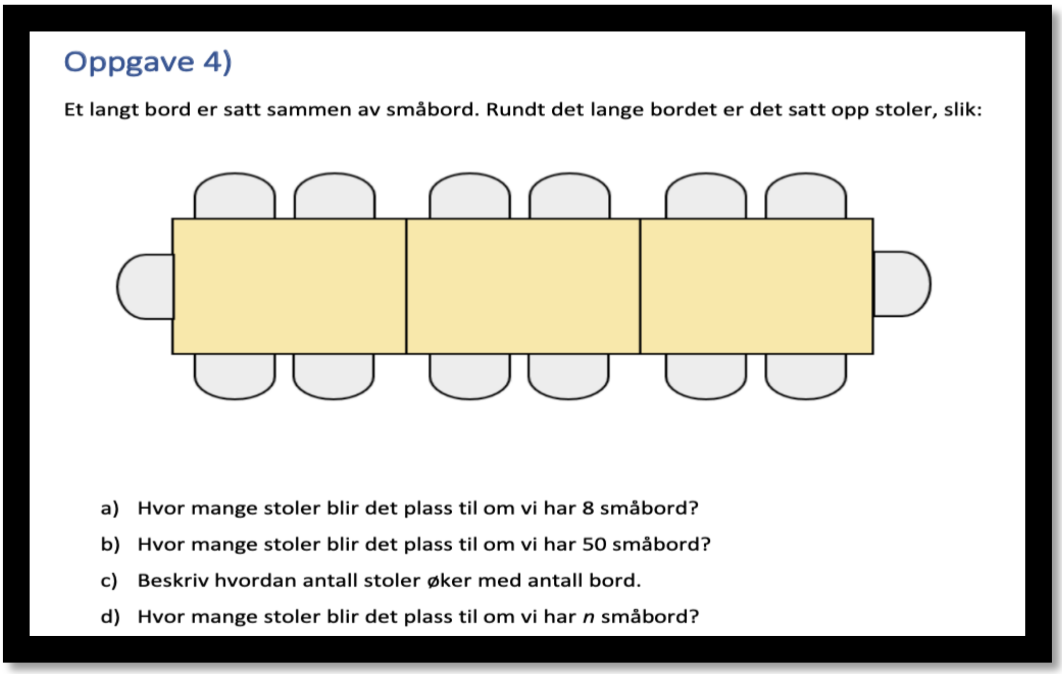
a) **Hvor mange hvite og svarte perler trenger Johanne for å lage et smykke med 3 blomster? Forklar svaret deres.**
b) **Hvor mange blomster vil Johanne lage hvis hun bruker 102 hvite perler? Forklar svaret deres.**

Figur 6: Oppgave 3 (Spangenberg & Pithmajor, 2020)

Denne oppgaven spør ikke etter en generell formel, derimot må gruppene forklare svaret deres. Dersom elevene vanligvis ikke har forklaring rundt svaret deres, kan dette være med på å endre avslutningsbetingelsene og gjøre det enkelt å anerkjenne det konstruerte narrativet.

3.4.4 Oppgave 4

Den fjerde oppgaven gruppene ble introdusert for inneholder også et geometrisk mønster i lineær vekst, og den generelle formelen kan uttrykkes ved $T_n = 4n + 2$. Som vist i figur 7 kan vi se at den visuelle representasjonen viser figur 3, altså n = 3, hvor n er antall bord. Deloppgave 4a innebærer å gå fra figur 3 til figur 8, og finne ut hvor mange stoler som passer til 8 småbord, og videre på deloppgave b velger vi å sette inn 50 småbord. Dette for å se hvilken tilnærmingsmåte gruppene velger å ta i bruk. I denne oppgaven valgte vi at gruppene skulle beskrive hvordan antall stoler øker med antall bord i stedet for å gå rett på å finne en generell formel. Dette gjør vi for å se hvordan den matematiske diskursen henger sammen med de symbolske mediatorene elevene tar i bruk på oppgave 1d.



Figur 7: Oppgave 4 - bordproblemet

3.4.5 Oppgave 5

Oppgave 5, som vist i figur 8, er en litt annerledes oppgave ettersom den visuelle representasjonen er en tredimensjonal figur, som bygges av små kuber (Hagland et al., 2005). I likhet med oppgave 4 er det kun en visuell representasjon av figuren, noe som kan føre til at elevene ser på dette som figur en i stedet for figur fire. Ser de på mønsteret ut fra at den visuelle representasjonen som figur fire, vil de kunne få den generelle formelen $T_n = n\ (2n - 1)$, som også kan skrives som $T_n = 2n^2 - n$.

a) **Hvor mange klosser trengs det for å bygge tårnet på bildet?**

b) **Hvor mange klosser trengs det for å bygge et lignende tårn som er 6 klosser høyt? Forklar svaret deres**

c) **Hvor mange klosser trengs det for å bygge et lignende tårn som er 12 klosser høyt? Forklar svaret deres**

d) **Hvor mange klosser trengs det for å bygge et lignende tårn som er *n* klosser høyt?**

Figur 8: Tårnet (Hagland, et al., 2005)

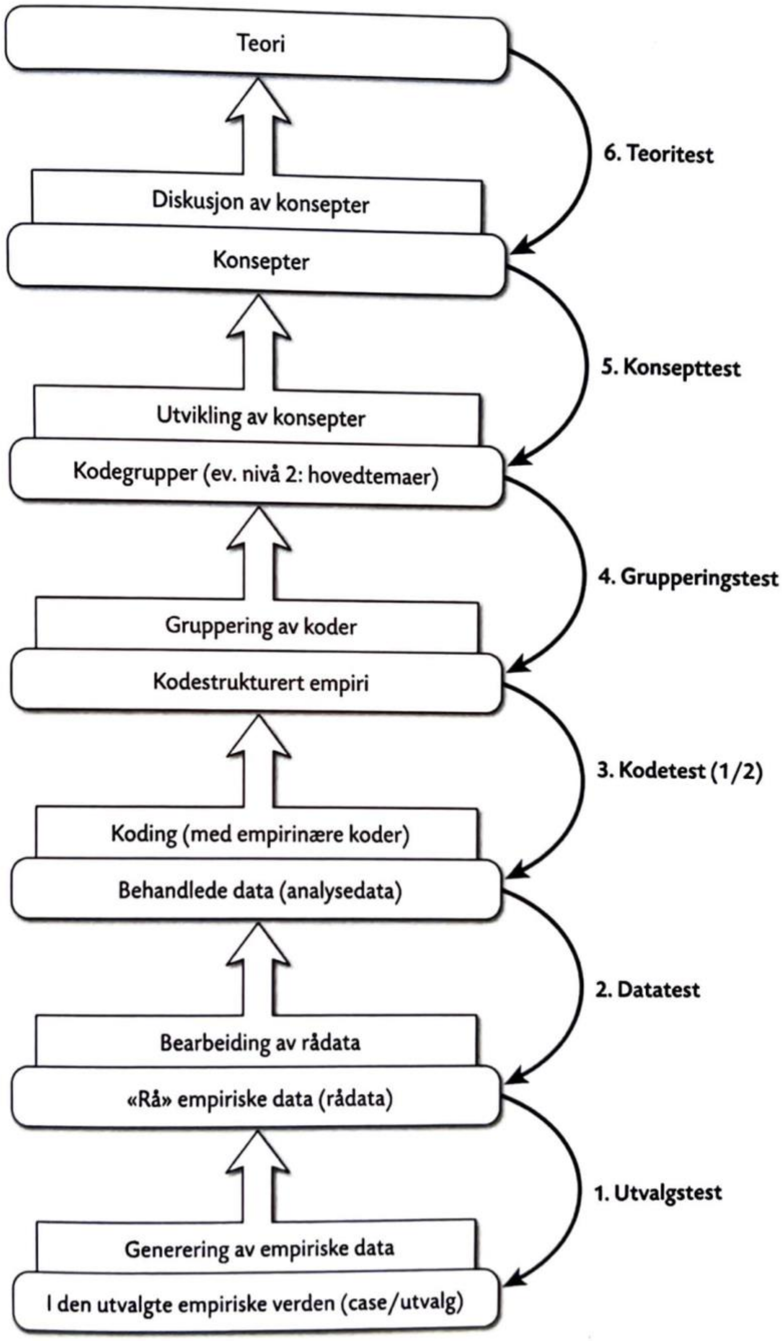
Hagland et al., (2005) trekker frem en liste på matematiske kunnskaper som elever kan anvende for å utvikle løsningen av problemet: naturlige tall, tabell, mønster, aritmetiske tallrekker, areal, plangeometriske figurer, romlige figurer, variabelbegrepet og formel.

Denne oppgaven har vi også valgt å endre anvendbarhetsbetingelsene ved å legge til at de skal forklare svaret de kommer frem til. Dette igjen er for å se om elevene klarer å underbygge det konstruerte narrativet for å se om de arbeider utforskende eller rituelt.

3.5 Analysemetode

Forskningen innenfor kvalitativ forskning er preget av både en induktiv- og deduktiv tilnærming (Thaagard, 2018, s. 184). Det vil si at vi har laget koder ut fra valgt teoretisk rammeverk for, en deduktiv tilnærming. Samtidig gir analysen av datamateriale i kvalitativ forskning muligheter for nye koder. Koding- og kategoriseringsprosessen vil være preget av teori, samt som forskerens erfaring, kunnskaper og forståelse vil være en viktig del av hvordan dataene tolkes og hvilke koder som trekkes frem gjennom en induktiv metode (Nilssen, 2014). På bakgrunn av dette har vi valgt å følge *stegvis-deduktive induktive metoden* som Aksel Tjora (2021) beskriver.

I den stegvis-deduktive induktive metoden, som vist i figur 9, arbeider vi i ulike etapper, fra *rådata* til *konsepter* eller *teorier* (Tjora, 2021). Prosessen som går oppover oppfattes som induktiv, hvor mange jobber fra data mot teori, og prosessen som går nedover er å oppfatte som deduktiv, hvor man sjekker det teoretiske mot det empiriske. Modellen kan gi inntrykk av at prosessen er lineær, men prosessen er dynamisk. I praksis vil vi kunne befinne oss på ulike stadier i SDI-modellen samtidig, for ulike deler av et prosjekt, og modellen er utviklet for å ta ut potensialet i den empirien vi har generert (Tjora, 2021). Videre presenterer vi vårt arbeid med hvordan vi har analysert datamaterialet for denne studien.



Figur 9: SDI-modellen (Tjora, 2021, s. 21)

3.5.1 Analyseverktøy

For å analysere datamateriale fra observasjon har vi benyttet oss av ulike verktøy for analyse (Nilssen, 2012). Vi har utarbeidet en transkripsjonsnøkkel, og vi har benyttet oss av dataprogrammet Quirkos.

Det første vi gjorde var å se gjennom videoopptakene av de to ulike gruppene vi har observert. Dette gjorde vi for å danne oss et inntrykk av hvordan elevene arbeidet med oppgavene og kommuniserte som en gruppe. Videre lagde vi en transkripsjonsnøkkel som skulle være til hjelp for oss ved transkribering av videoopptakene, se tabell 4. Selv om vi tidligere hadde testet lyden før opptak, opplevde vi at lyden ble litt lav. Det var derfor nødvendig å se gjennom ulike sekvenser av opptaket flere ganger for å sikre at transkripsjonen ble riktig. Dette gjøres også på bakgrunn av at det er elevenes diskurs som skal analyserer, derfor har vi prøvd å gjengi det elevene har sagt uten tolkninger for å legge vekt på viktigheten av gjengivelse av elevenes stemme (Sfard, 2008). For å gi en mest mulig nøyaktig transkripsjon av elevenes stemme har vi brukt transkripsjonsnøkkelen som vist i tabell 4. Ved å ta i bruk denne har vi fått inn i transkripsjonene andre nødvendigheter for å analysere en diskurs, som for eksempel gester, pauser, opphold og overlapp. Elevene i undersøkelsen snakket ikke bokmål, de snakket dialekt, men vi har prøvd å gjøre alle transkripsjonene om til bokmål. Dette har vi gjort på bakgrunn av at vi ønsker at studien skal være lesbar for alle, og for å sikre en bedre kvalitet for leseren.

<>	Gester – mimikk - håndbevegelser
,	Kort opphold, overgang
..	Kort opphold < 1 sekund
...	Lengre opphold > 1 sekund
(ns)	Lengre opphold > 3 sekund (n- antall sekund)
Ab-	Avbrutt tale
!abc	Ekstra trykk, etterfølgende ord fremheves
Abc?	spørrende
[abc]	Overlapp (tekst i påfølgende linjer markert med [] når der overlapper i tid
((abc))	Kommentarer, beskrivelser

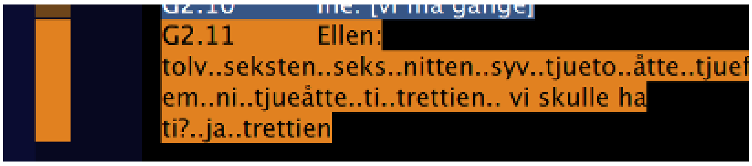
Tabell 4: Transkripsjonsnøkkel

Etter at vi hadde transkribert observasjonene våre importerte vi dataene inn i dataprogrammet Quirkos. Quirkos er et dataprogram for koding av data. Kodingen gjorde vi i ulike omganger. Vi startet ved å bruke dataprogrammet for å dele inn i ulike kategorier, og underkategorier. Når vi var ferdige å dele inn i kategorier begynte vi å kode datamaterialet. Vi startet med gruppe 1, og tok linje for linje til vi var gjennom alle transkripsjonene i gruppe 1 og 2. Hensikten med å bruke programmet i analysen var å skape en mer helhetlig oversikt over de ulike kategoriene, og hvilke deler av transkripsjonen som hørte inn under de ulike kategoriene. Figur 10 viser hvordan de ulike kategoriene som vist til høyre har ulik farge, og hvordan transkripsjonene til venstre har blitt kodet ved bruk av fargene til de ulike kategoriene.

Figur 10: Quirkos Software

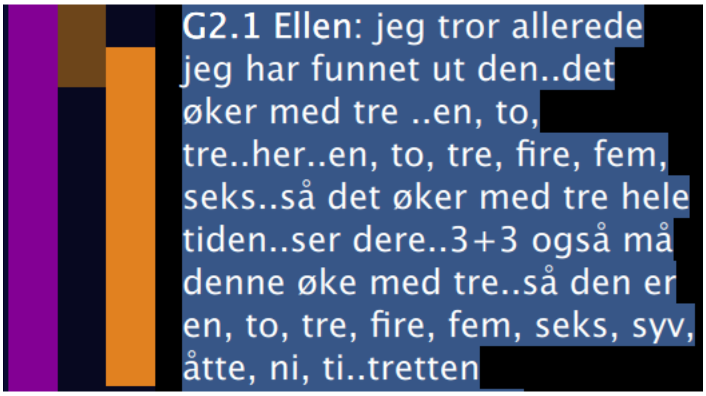
Hver kategori har en egen farge, og en kan markere transkripsjonen med flere farger (innen flere kategorier). Vi startet med en kategori om gangen, og arbeidet oss gjennom hele datamaterialet fra gruppe 1 og gruppe 2, før vi startet med en ny farge. Vi har for eksempel oransje farge, som vi ser i figur 10 er fargen for prosedyrer. Dersom vi ser på den venstre siden igjen ser vi at G2.11 har oransje farge og vil derfor være prosedyrer elevene gjør. Se figur 11 og figur 12 for å se samsvar med kategori og fargekode.

Figur 11: Kategori prosedyre



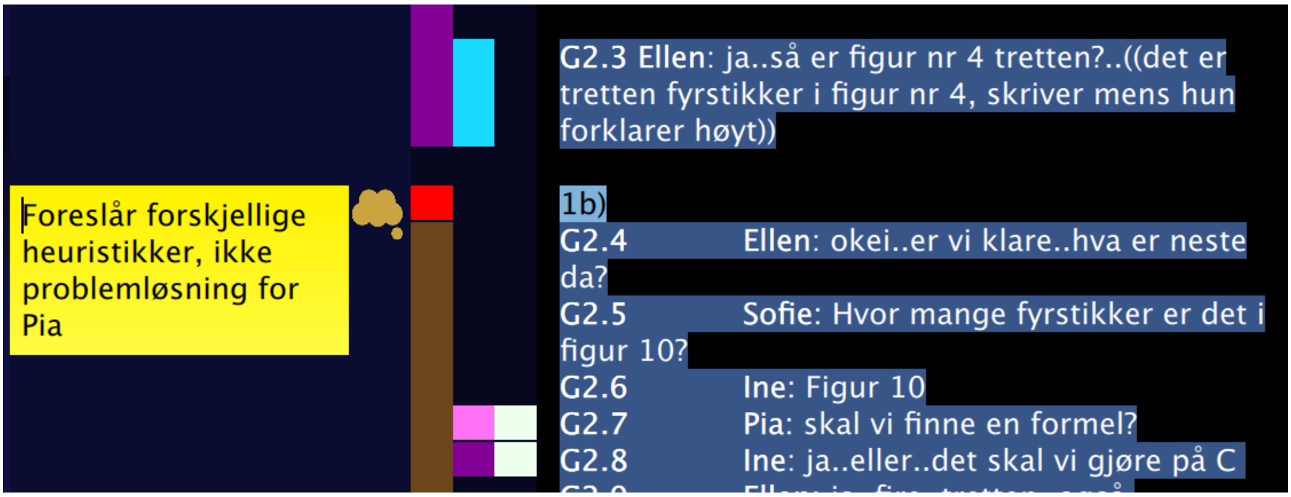
Figur 12: Transkripsjon kodet med kategorien prosedyre

Som tidligere nevnt kunne en transkripsjon markeres med flere enn en kategori. Da vi markerte transkripsjonene med flere kategorier endret fargen på transkripsjonen seg til lyse blå. Det vil si at lyseblå data betyr at transkripsjonen er merkert med flere kategorier. De ulike kategoriene som har blitt brukt vil da stå til høyre for tranksripsjonen. Dersom vi ser på figur 13, ser vi at transkripsjonen G2.1 er datakodet med fargen lyseblå, og til høyre ser vi at den er kodet med kategoriene aritmetisk diskurs (lilla), anvendbarhetsbetingelser (brun) og prosedyre (oransje).



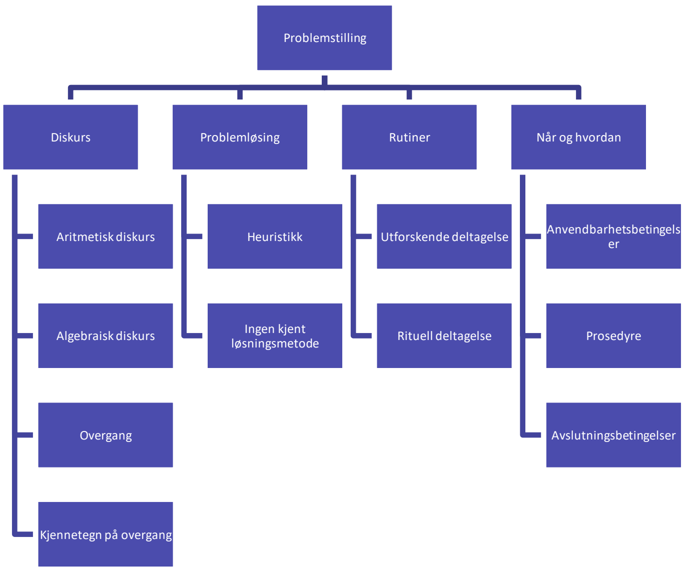
Figur 13: Transkripsjon kodet med flere kategorier

Undervegs i transkripsjonene la vi inn kommentarer, ved å legge til en sky helt til venstre i transkripsjonsfeltet. Vi brukte skyen til å legge inn ting vi observerte undervegs, som vi tenkte var viktige å notere til vi senere skulle skrive analysedelen av studien. Figur 14 viser hvordan skyen ble brukt.



Figur 14: Kommentarer til transkripsjonen

På forhånd hadde vi utarbeidet oss koder som vist i kodehierarkiet i figur 15. Disse kodene er utarbeidet fra vårt teoretiske rammeverk. Ettersom vi analyserte datamaterialet, måtte vi tilføye nye koder, for eksempel når vi analyserte elevenes rutiner, tilføyde koder som gav kjennetegn på en de-ritualiseringsprosess, altså kodene *fleksibilitet*, *binding, uavhengighet* og *gjenkalling* (eng: recall).



Figur 15: Kodehierarkiet

3.6 Kvalitet i forskningen

I dette delkapittelet vil vi drøfte forhold som er med på å sikre kvaliteten i forskningen. Vi vil derfor trekke frem begrepene validitet, reliabilitet, og etiske retningslinjer brukt i forskningen.

Validitetsbegrepet handler om hvor gyldig en forskning er, det vil si hvor relevant forskningen er og hvordan forskningen blir presisert (Tjora, 2021, s.260). Hvor stor validitet vår forskning vil ha vil derfor være avhengig av i hvor stor grad vi undersøker det vi sier at denne forskningen skal undersøke. Hvor valid forskningen er handler også om hvor transparent forskningen er, og hvordan vi har valgt å tolke dataene i studien vår (Thagaard, 2018, s.189). Det er ikke bare gyldigheten i en forskning som brukes for å måle kvaliteten i forskningen. Hvor pålitelig en forskning er, reliabilitetsbegrepet hører også til under måling av kvalitet i forskning. Sammenhengen i teksten som er produsert forteller oss hvor pålitelig en studie er, og dersom en tekst fremstår som sammenhengende og gjennomtenkt vil forskningen pålitelighet øke. Det vil si om det er en synlig sammenheng mellom de ulike. Delene av fremstillingen for leseren (Tjora, 2021, s.263).

Kapittelet videre vil ta for seg begrepet validitet og reliabilitet, og drøfte begrepene i sammenheng med oppgaven vår. Vi vil trekke frem hva vi har gjort for å fremme validitet og reliabilitet i forskningen vår, og hva som kan ha påvirket validiteten og reliabiliteten. Vi har valgt å ta for oss begrepene hver for seg, før vi avslutter delkapittelet ved å trekke frem etiske betraktninger vi har tatt hensyn til gjennom hele forskningsprosessen.

3.6.1 Validitet (gyldighet)

Validitetsbegrepet handler om hvordan studien utføres, og hvorvidt de slutningene som trekkes er i samsvar med problemstillingen (Tjora, 2021). Studiens validitet styrkes ved indre og ytre validitet, kvaliteten til dataene og slutningene som er tatt i studien (Kleven et al., 2014). Vi har i vår studie valgt kommognisjon som overordnet rammeverk. Problemstillingen vår er utgangspunktet for valgene som er gjort i studien. Vi har i vår forskning sett på hva som kjennetegner 9.trinn elevers diskurs i problemløsingsoppgaver i algebra. Datamaterialet som er hentet inn i studien er derfor datamateriale som skal være hensiktsmessig for å kunne svare på hva som kjennetegner elevenes diskurs. Problemstillingen vår forteller at det er problemløsingsoppgaver i algebra som skal studeres, og vi har derfor valgt ut det vi tenker kan være problemløsingsoppgaver i algebra som har blitt gitt ut til elevene. Elever ved 9. trinn, slik som problemstillingen fremstiller har deltatt i studien, og vi har samlet inn data om deres diskurs.

Det er ikke bare kvaliteten på data og beslutningene som har blitt tatt som påvirker validiteten i forskning. Validitetsbegrepet består av en indre validitet og en ytre validitet. Den indre validiteten handler om tolkningen som presenteres i studien. Det vil si om vi som forskere har argumentert for tolkingene i studien (Kleven et al., 2014). For å sikre at den indre validiteten har vi argumentert og forklart resultatene vi har fått i forskningen, og satt resultatene opp mot presentert teori. Den ytre validiteten handler om hvor gyldige resultatene i forskningen er og det vil si om at resultatet fra forskningen kan generaliseres, og overføres til andre kontekster (Kleven et al., 2014). Vi har gjennomført en kvalitativ studie på et 9.trinn på en skole. Det vil si at resultatene vil gjelde direkte for akkurat de elevene som deltok fra 9.trinn på den skolen. Selv om resultatene vil være for den situerte situasjonen vil en kunne bruke resultatene til sammenligning med kjennetegn på andre 9.trinn, eller eventuell senere forskning. Dersom den samme studien hadde vært gjennomført på nytt med den samme klassen, men med ulike elever er det derfor ikke sikkert at vi ville fått de samme resultatene.

3.6.2 Reliabilitet (pålitelighet)

Reliabilitetsbegrepet betyr pålitelighet, det vil si i hvor stor grad en kan stole på at forskningen er pålitelig. Begrepet handler også om i hvilken grad forskningen påvirkes av tilfeldige målingsfeil som kan forekomme ved studier (Kleven et al., 2014). I vår studie tar vi forbehold om at tilfeldige målingsfeil kan være dagsformen til elevene, og at elevene som deltok i studien ble videoobservert. Elevenes dagsform kan ha hatt innvirkning på dataen, men elevene virket motiverte til å delta i forskningen og ønsket å gjøre oppgavene vi hadde valgt ut til dem. Elevene fikk lov til å velge oppgaver selv ut fra et oppgavehefte, noe som syntes å motivere elevene. Derimot var elevene mer skeptiske til videoobservasjon enn vi i utgangspunktet hadde sett for oss. Dette gjaldt den første gruppen vi observerte, hvor de i starten syntes det var ubehagelig å bli filmet. Etter at vi fikk til en god dialog med repeterende informasjon om hva videoopptaket skulle brukes til glemte elevene etter hvert at de stod et kamera der. Andre tilfeldige målingsfeil kan være hvordan datamateriale blir tolket, og eventuelle situasjoner som har blitt mistet ved observasjon. For å sikre at vi ikke skulle miste noen av situasjonene under observasjon valgte vi som tidligere nevnt å bruke videoobservasjon.

Ved tolkning og analysering av datamaterialet har vi etterstrebet å transkribere direkte det elevene har sagt. Opptaket har derfor blitt sett flere ganger for å kunne gjengi det som blir sagt og for å unngå egne tolkninger av elevens stemme (Sfard, 2008). Vi har som nevnt i kapittel 3.5.1 brukt en transkripsjonsnøkkel (tabell 4). Dette har vi gjort for at presentasjonen av datamateriale til leseren skal være troverdig, og for å gjengi elevenes samtale, utrykk og bevegelser så nøyaktig som mulig.

Gjennom hele forskningen har vi etterstrebet å være transparente, og vi har begrunnet analysen og diskusjonen vår i teorien vi har valgt ut til oppgaven. Dette har vi gjort for å sikre troverdigheten til studien (Kvale et al., 2015).

3.6.3 Etiske betraktninger

All forskning skal gjennomføres på en forsvarlig måte som møter og ivaretar informanter og deltakeres behov (De forskningsetiske komiteer, 2021). Forskningsetikken, og de nasjonale retningslinjene for forskning skal være med på å sikre dette og at forskningen følger anerkjente normer. Vi har i vår forskning fulgt retningslinjene i forskningsetikken knyttet til forskerfellesskapet, hensyn til personer og forskerens formidling (De forskningsetiske komiteer, 2021).

Forskningen vår inneholder informanter som er ungdom. Vi som forskere er derfor nødt til å forholde oss til de strenge etiske retningslinjene som gjelder for forskning med barn som deltakere i forskning. De forskningsetiske komiteene (2021, s.19) belyser følgende:

> «Barn som deltar i forskning, har særlig krav på beskyttelse. Forskere må som hovedregel innhente samtykke både fra foresatte og fra barna selv. I noen tilfeller kan barn samtykke alene».

I henhold til det som blir belyst av de forskningsetiske komiteene utarbeidet vi et informasjonsskriv som ble sendt hjem til foresatte om forskningen (vedlegg 1 og vedlegg 2). Informasjonsskrivet inneholdt tilstrekkelig med informasjon om forskningen, hva som er formålet med forskningen, informasjonstilgang, bruk av resultater og hvilke følger det vil ha å delta i forskningen (Thagaard, 2018, s. 22-23). På slutten av skjemaet fikk de et frivillig valg mellom å godta deltakelse i forskningen for barnet deres, eller å avslå deltakelse.

Vi har i vår forskning benyttet oss av videoopptak og observasjon som metode. Ved å bruke denne kvalitative metoden, fikk vi som forskere nær kontakt med de personene som deltar i forskningen (Thagaard, 2018). Det vil si at vi ble nødt til å forholde oss til personvernopplysninger i forskningen. For å ivareta sikkerheten om at personvern ble holdt har vi fulgt vi de etiske retningslinjene presentert av forskningsetiske komiteer (Thagaard, 2018, s. 21). I de etiske retningslinjene ble det påpekt at prosjekt som inneholder personvernopplysninger er meldepliktige. Vi meldte derfor inn prosjektet til norsk senter for forskningsdata (NSD), hvor vi i detalj opplyste om hensikten med prosjektet, hvordan vi skulle behandle dataene vi fikk inn og hvordan prosjektet skulle gjennomføres (Vedlegg 1). Vi påpeker derfor at all forskning i denne studien har blitt basert på personvernopplysningsloven, og respekt for menneskeverdet til deltakerne som har deltatt i forskningen (Personopplysningsloven, 2018).

4 Analyse og resultater

Problemstillingen i denne studien er: Hva kjennetegner en gruppe 9. trinns elevers deltakelse i en matematisk diskurs i arbeid med problemløsing innen algebra? I dette kapitlet presenterer vi analysen av to elevgruppers deltagelse i hver sin matematiske diskurs av problemløsingsoppgaver i algebra. Gruppe 1 består av Lise, Mia og Sarah, og gruppe 2 består av Pia, Ellen, Ine og Sofie. Navnene som er gitt i denne studien, er fiktive. Når vi analyserte diskursen, utpekte det seg flere interessante temaer å analysere i dybden. Det første var hvorvidt oppgavene var problemer for elevene eller ikke, og hvilke ord og tegn innen diskursen som signaliserer problemløsing og ikke. Dette blir analysert i delkapittel 4.1. Videre ser vi på rutinenes metaregler, altså *når* og *hvordan*. Her analyserer vi anvendbarhetsbetingelsene, prosedyrene og avslutningsbetingelsene. Dette blir analysert i delkapittel 4.2. På bakgrunn av analysen av rutinens metaregler, velger vi i delkapittel 4.3 og se på rituell og utforskende deltagelse i den matematiske diskursen. Her tar vi utgangspunkt i om gruppene bidrar til en diskursiv prosess som resulterer i nye anerkjente narrativer, om de underbygger narrativene og om de gjenkaller tidligere godkjente narrativer, noe som betegner utforskende rutiner (Sfard, 2008). Vi tar også for oss kjennetegnene i de-ritualiseringsprosessen når vi analyserer elevenes deltagelse (Lavie, Steiner & Sfard, 2018). Avslutningsvis analyserer vi den aritmetiske og algebraiske diskursen i delkapittel 4.4. Vi analyserer elevenes deltagelse i den algebraiske diskursen på bakgrunn av modellen til Caspi og Sfard (2012), og i hvilken grad gruppene går fra den aritmetiske diskursen over til den algebraiske diskursen på bakgrunn av kjennetegnene Kieran (2004) belyser.

4.1 Problemløsing

Hovedkategorien problemløsing dreier seg om elevene oppfatter oppgavene som et matematisk problem. Vi benytter oss av definisjonen til Boesen (2006) når vi definerer et matematisk problem, og på bakgrunn av dette ser vi hvilke ord og tegn som signaliserer at det er et matematisk problem. Vi ser også på deloppgaven og ikke oppgaven i sin helhet når vi trekker frem om elevene ser på det som et matematisk problem eller ikke. Dette er på bakgrunn av hvordan oppgavene er bygget opp.

Ved å observere gruppe 1, som består av Lise, Mia og Sarah, ser vi på første deloppgaven med fyrstikker, oppgave 1a, at oppgaven ikke er et matematisk problem for dem. Dette begrunnes fordi elevene vet med engang hvilken heuristisk tilnærming de skal ta i bruk, som vi ser innledningsvis i transkripsjon 1.1.

1.1 **Lise**: Øker med tre
1.2 **Mia**: Ja
1.3 **Mia**: På a står det hvor mange fyrstikker det er i figuren, altså i figur fire

Lise starter diskursen ved å påpeke hvor mange fyrstikker figuren øker med, og deretter setter de raskt i gang en prosedyre for å løse oppgaven. Det betyr at de vet fra starten hvilken heuristikk de kan ta i bruk, og oppgaven er en øvelse (eng: excercise). Denne oppgaven observerer vi heller ikke som et matematisk problem i gruppe 2, ettersom diskursen starter med at Ellen allerede har svaret.

2.1 **Ellen**: jeg tror allerede jeg har funnet ut den..det øker med tre

Ved at Ellen også kommer frem til at figuren øker med tre, og vi observerer at gruppen er enige, settes i gang en prosedyre for å komme frem til løsningen. Derfor begrunnes denne deloppgaven som en øvelse (eng: excercise) for gruppe 2 også. Neste deloppgave, oppgave 1b, fremstår gruppe 1 som usikre på hvordan de skal gå frem. De trekker frem ulike strategier, og vet ikke hvordan de skal løse oppgaven. Her tar de i bruk tidligere kunnskap for å prøve å konstruere noe nytt.

1.14 **Lise**: tre.. nei.. 4 + 3 + 3.. ni ganger... Er det det?
1.19 **Sarah**: Kan du tegne figurer?
1.22 **Mia**: !Jeg teller her borte
1.31 **Lise**: Det fungerer sikkert (4s)

Transkripsjonen 1.14 viser at Lise setter i gang en prosedyre raskt, men er usikker på om hun har tatt det rette valget. Observasjonene vår viser også at hun er spørrende, noe som fører til at hun ikke fortsetter prosedyren. Videre ser vi i 1.19 og 1.22 at de diskuterer ulike prosedyrer, noe som antyder at de ikke kjenner til hvilken heuristisk tilnærming de skal ta i bruk med engang for å løse oppgaven, og derfor anser vi dette som et matematisk problem for gruppen.

Diskusjonen rundt hvilken heuristikk de skal ta i bruk observerer vi også på deloppgave 2a, den andre oppgaven med fyrstikker.

1.151 **Lise**: der øker den først med tre også fem tror jeg..den øker rundt der <peker på mønsteret>
1.157 **Sarah**: [<tegner figuren mens Lise forklarer>]

1.158 **Sarah**: hva var det vi skulle..fem..skal vi telle dem da? ((snakker om fyrstikkene i den nye figuren hun har tegnet))..får vi det til?
1.159 **Mia**: men her har den jo bare økt med tre <peker på tegnet figur>-
1.160 **Lise**: ja men den har økt rundt her også..sånn <viser med blyant>..også har den økt..også øker den sånn og den sånn
1.161 **Lise**: har dere telt?
1.162 **Sarah**: !nei
1.163 **Mia**: jeg kom ikke så langt
1.164 **Sarah**: to, fire, seks

Utdraget ovenfor viser at diskursen består av diskusjonen av hvilken prosedyre de skal sette i gang, og det trekkes frem heuristikker som å finne økningen (1.151, 1.159, 1.160), tegning (1.157, 1.158) og telling (1.161). På bakgrunn av at de trekker frem ulike heuristikker og ikke vet hvilken de skal ta i bruk med engang de har lest oppgaven, anser vi denne deloppgaven som et matematisk problem for gruppe 1. Vi observerer også at gruppe 2, opplever oppgavene som et matematisk problem når diskursen består av diskusjonen rundt hvilken heuristikk de skal ta i bruk for å sette i gang prosedyren.

2.46 **Ine**: dersom det er lik økning
2.47 **Ellen**: og den blir tjue..den blir tjueåtte..figur 4
2.48 **Ine**: ja
2.49 **Ellen**: tell for sikkerhetsskyld om det er tjue der
2.58 **Ine**: nei økningen er ulik
2.59 **Sofie**: åja
2.60 **Ine**: men det er et mønster i økningen
2.61 **Pia**: det øker jo med fire
2.62 **Sofie**: okei
2.63 **Pia**: fordi på den neste her så må vi legge til en, to, tre

Ovenfor viser transkripsjonen hvor gruppe 2 trekker frem ulike heuristikker de vil ta i bruk for å løse oppgaven. Det gjelder å finne økningen og bruke den til addisjon av antall fyrstikker (2.46, 2.58, 2.60, 2.61) og telling blir også trukket frem og brukt (2.49, 2.63). Gruppen tar for seg ulike problemløsingsheuristikker, og vi kommer til å presentere prosedyrene i neste delkapittel.

Videre på deloppgave 3a, blomsteroppgaven, ser vi at gruppe 2 igjen diskuterer ulike heuristiske tilnærmingsmåter og er usikre på fremgangsmåten.

2.264 **Ellen**: Her må vi gjøre det samme som vi gjorde på den.. plusse
2.265 **Pia**: på hvilken da?.. ehh
2.266 **Sofie**: men her.. øker økningen her?
2.291 **Pia**: Jeg vet ikke om de mener at vi skal ta dem i lag eller om de mener at vi skal finne ut hvor mange hvite og hvor mange svarte

Transkripsjonene ovenfor starter med at Ellen (2.264) belyser at de må gjøre det samme som de har gjort tidligere, og bruke addisjon. Pia er usikker på anvendbarhetsbetingelsene i oppgaven (2.291), og vi observerer at dette endrer heuristikken ved å starte en ny diskusjon rundt hvilken tilnærming de skal ta i bruk. Derfor anses denne deloppgaven som et matematisk problem. På neste deloppgave, oppgave 3b, observerer vi at oppgaven ikke er et problem for Pia, ettersom hun ønsker å finne formelen for å løse oppgaven, selv om oppgaven ikke spør etter denne.

2.298 **Ellen**: !Ja da må vi gjøre sånn som jeg gjorde her.. seks.. så blir økningen fire.. også blir det ti her pluss fire hele tiden.. pluss fire..
2.299 **Sofie**: Fjorten?... ja
2.300 **Ellen**: Så da kan vi bare plusse
2.301 **Pia**: Eller finne formelen

Ellen og Sofie (2.298 – 2.300) ønsker å bruke addisjon videre på mønsteret, og vi observerer også at de tar i bruk tegning for å påpeke poenget. Pia (2.301) trekker frem å finne formelen som en fremgangsmåte, og valget faller på denne prosedyren. På bakgrunn av at Pia kjenner til en heuristikk som løser oppgaven, anser vi ikke dette som et matematisk problem for henne. Diskursen blir tydelig styrt av Pia, og gjennom observasjonen oppfatter vi at resten av gruppen ikke helt forstår hvordan hun går frem for å løse oppgaven. Vi kan på bakgrunn av observasjonene våre ikke si om det er et matematisk problem for de andre deltagerne i diskursen, ettersom Pia styrer diskursen. Dette gjenspeiler seg også i deloppgave 1c, hvor Pia allerede i oppgave 1b hadde etter våre observasjoner valgt å finne formelen på egenhånd.

2.17 **Pia**: C... skal vi finne formelen nå?
2.18 **Ellen**: Ja
2.19 **Pia**: Da er det
2.21 **Pia**: 3n + 1

Ettersom Pia valgte autonomi fremfor gruppedeltagelse i deloppgave 1b, hadde hun løsningen klar på deloppgave 1c. Derfor er ikke denne oppgaven et matematisk problem for Pia, men på bakgrunn av dette kan vi heller ikke nå si noe om at det er et matematisk problem for de andre deltagerne. Dette skjer også i oppgave 5a, tårnproblemet, hvor Pia tar styringen og starter direkte på en prosedyre.

2.346 **Pia**: okei.. da blir det jo en, to, tre, fire, fem, seks gange fire.. som blir tjuefire.. også i midten da er det jo fire.. tjueåtte

2.347 **Ellen**; ååh
2.348 **Sofie**: oi (15s) okei så tjuefire fordi du ganget-

Observasjonene tilsier at løsningsmetoden er kjent fra starten, og vil ikke anses å være et matematisk problem. Pia (2.346) setter i gang prosedyren og kommer frem til en løsning, men observasjonene viser at resten av gruppen ikke forstår hva Pia har gjort. På bakgrunn av dette kan vi kun si at oppgaven ikke er et matematisk problem for Pia, og resten av gruppen følger henne og går videre på neste deloppgave.

I analysen ser vi at problemløsingsdiskursen kjennetegnes av usikkerhet. Vi observerer diskusjonen rundt oppgavene som gruppene opplever som et matematisk problem er preget av usikkerhet. I arbeidet med deloppgave 4d, observerer vi gruppe 1 som usikre på hvilke valg de skal ta.

1.325 **Mia**: Jeg husker vi gjorde noe sånn i timen
1.326 **Lise**: ja
1.327 **Mia**: men vi klarte ikke å bli enige om.. eehm.. –

Bordoppgaven (Oppgave 4) var en kjent oppgave for gruppen (1.325, 1.327), likevel observerer vi at deloppgave 4d er et matematisk problem for gruppe 1. Gruppen tar i bruk ulike heuristikker for å prøve å komme frem til et generelt uttrykk for *n*, og de uttrykker usikkerhet rundt valgene de tar. Det at problemløsingsdiskursen kjennetegnes av usikkerhet ser vi også på gruppe 2. Det observeres flere tilfeller hvor elevene uttrykker usikkerhet, og vi velger å trekke frem transkripsjoner fra deloppgave 5b.

2.358 **Sofie**: ja så da plusser vi bare på tolv
2.359 **Pia**: nei
2.360 **Sofie** nei
2.376 **Sofie**: kan du tegne den for oss?
2.379 **Pia**: se da en to tre fire fem seks syv åtte ni ti.. sant når det er seks oppover det er jo.. den på toppen sant.. nå er det jo fire her
2.380 **Sofie**: ja
2.381 **Pia**: eller må vi plusse på to til? ... det må vi kanskje.. fordi det er jo allerede, vent litt

Transkripsjonen 2.358 trekker Sofie frem addisjon som en heuristikk for å komme frem til en løsning, blir avslått av Pia og Sofie (2.359 og 2.360). Videre trekker de frem en ny heuristikk, altså tegning (2.376), og i det Pia avslår denne heuristikken gjennom forklaring på hvorfor det stemmer, uttrykker hun en usikkerhet i hvordan hun har valgt å løse oppgaven (2.379 og 2.381). Diskusjonen rundt heuristikkene og usikkerheten er begrunnelsene for at denne oppgaven anses å være et matematisk problem for gruppe 2.

Videre observerer vi at anvendbarhetsbetingelsene spiller en rolle for om diskursen er problemløsende. Oppgave 1c for gruppe 1 observerer vi som et matematisk problem for gruppen. Dette er på bakgrunn av de ikke vet hvilke strategier de skal ta i bruk for å finne hvor mange fyrstikker der er i figur *n*. Boesen (2006) trekker frem at elever må ta i bruk tidligere kunnskap for å konstruere nye narrativ, og gruppen prøver å memorere (1.43, 1.44 og 1.45) og leter i bøkene etter oppgaver som ligner.

1.43 **Mia:** Jeg husker ikke hvordan det var-
1.44 **Lise**: Var ikke de noe sånn n=... nei husker ikke
1.46 **Lise**: Nja nei men vi har hatt om dette-

Leting i bøkene etter tidligere oppgaven, samt som å søke opp hvordan de skal gå frem ved hjelp av iPad'en viser at elevene skifter ontologi på heuristikkene de benytter, altså de går fra det matematiske til det mer generelle. Observasjonene med oppgave 2b hos gruppe 1 observerer vi at de uttrykker usikkerhet, og denne usikkerheten bygger seg videre på de neste oppgavene. Dette oppfatter vi som på bakgrunn av anvendbarhetsbetingelsene for oppgaven.

1.243 **Lise**: jeg skal bare lese den
1.244 **Sarah**: hvor mange figurer kan vi lage med..av femhundre fyrstikker
1.245 **Mia**: nå er vi på fire da har vi sekstifire-
1.246 **Sarah**: !vi er på fem..ikke fire..fem
1.247 **Lise**: har dere lest den liksom?

Her påpekes det to ganger (1.243 og 1.247) av Lise om de har lest oppgaven, samt som Sarah (1.244) leser den høyt. Det observeres at anvendbarhetsbetingelsene for oppgaven gjør at de ikke oppfatter hvordan deloppgaven skal løses. Dette fører til at de ikke vet hvilken heuristikk de skal ta i bruk, og videre diskusjon er preget av dette. Derfor anser vi denne deloppgaven som et matematisk problem for gruppe 1. Våre observasjoner tilsier at anvendbarhetsbetingelsene gjør gruppe 2 også usikre på hvordan de skal gå frem i å løse oppgaven, og tar i bruk flere ulike heuristikker i deloppgave 5d.

2.438 **Pia**: Det vi egentlig også kunne gjort er bare å legge på en sånn under også da.. hvis du skjønner
2.439 **Ine**: Ja.. for da blir det.. ja.. det kunne vi gjort.. for da blir den i midten og ((utydelig))

2.440 **Pia**: Ja det kunne vi gjort.. ja.. meeen.. da må vi finne formelen.. men er en klosse figuren eller er hele denne figuren en
2.446 **Pia**: for her på den neste da så trengs det jo fire under.. skjønner du hva jeg mener
2.447 **Ine**: Ja
2.448 **Pia**: Når vi bygger den opp så tar du bare sånn kryss under.. også da øker det jo.. men hvordan formelen blir når det er forskjellige økninger det vet jeg ikke

Transkripsjonen 2.438 og 2.439 viser hvordan Pia og Ine diskuterer hvordan de kan endre figuren for å komme frem til en heuristikk som kan gi en generell formel for figuren. Videre ser vi i 2.440 at anvendbarhetsbetingelsene for oppgaven, hvor oppgaven oppgir kun en representasjon av figuren, som inneholder fire klosser i midten, trekker Pia frem at det er forvirrende, om det er figur en eller om kun en kloss er figur en. Videre i transkripsjonene 2.446 til 2.448 trekkes det frem ulike måter å endre figuren på for å komme frem til en prosedyre. På bakgrunn av usikkerheten og anvendbarhetsbetingelsene anser vi denne oppgaven som et matematisk problem for gruppen.

Funnene fra analysen viser hva gruppene oppfatter som et matematisk problem og ikke, og belyser det Boesen (2006) definerer som et matematisk problem. Funnene trekker i tillegg frem at en problemløsingsdiskurs kjennetegnes av diskusjonen om hvilken heuristisk tilnærming de skal ta i bruk, og problemløsingsdiskursen kjennetegnes av usikkerhet. Dette er et fellestrekk vi observerer hos begge gruppene. I diskursen ser vi at deltagerne diskuterer hvilken heuristikk de skal bruke i problemløsingsoppgavene, og at de tar i bruk flere og ulike heuristikker. Vi observerer også at begge gruppene uttrykker usikkerhet i problemløsingsdiskursen når de diskuterer de ulike heuristikkene, og når de tar dem i bruk. Boesen (2006) understreker som nevnt tidligere at et matematisk problem er individrelatert, noe som vi observerer. Om en diskurs er en problemløsingsdiskurs er avhengig av hvilke(n) deltager i diskursen som observeres. Det trekkes frem eksempler hvor vi observerer at oppgavene er en øvelse (eng: excercise) for Pia og hun styrer diskursen på bakgrunn av dette, men resten av gruppen forstår ikke fremgangsmåten og kan derfor oppleves som et matematisk problem for resten av deltagerne. Avslutningsvis observerer vi at anvendbarhetsbetingelsene for oppgavene spiller en rolle for om diskursen er problemløsende.

4.2 Når og hvordan

Som vi trakk fram i det teoretiske rammeverket så blir når (eng: the when) delt opp i anvendbarhetsbetingelser og avslutningsbetingelser. Hvordan (eng: the how) er hvilke prosedyrer som blir tatt i bruk, altså hvordan løser de oppgavene. En naturlig rekkefølge vil være å trekke frem anvendbarhetsbetingelsene først, deretter for å se på hvilke prosedyrer gruppen bruker, og til slutt hva som utgjør avslutningsbetingelsene for oppgavene. Ved å observere gruppens når og hvordan vil vi kunne se om det er en rituell- eller utforskende deltakelse.

Vi har valgt å trekke frem elevenes diskurs under oppgave 3 for å presentere et eksempel på hvordan elevene tar i bruk når (the when) og hvordan (the how).
Anvendbarhetsbetingelsene innen problemløsing vil være lesing av oppgaven, analysere problemet, utforske og planlegge hvordan de skal gå frem for å løse det. Dersom gruppen jobber utforskende vil vi kunne se at de deltar i underbygging (eng: substantiation). For å beskrive dette ser vi på om gruppen tester utformede hypoteser, uttrykker støtte til hypoteser, forklarer og viser hvorfor, utrykker forståelse og usikkerhet. Vi ser også på om deltakerne i gruppen er avhengig eller uavhengige av hverandre for å løse matematiske problem, dette er på bakgrunn for hvordan de-ritualiseringsprosessen fungerer. Videre tar vi for oss gruppens prosedyrer, the how. Dette er på bakgrunn av å se hvilken heuristisk tilnærming de tar for seg når de skal løse matematiske problem. Vi ønsker også å se om elevene er fleksible i heuristikken og tillater variasjon, eller om de memorerer tidligere oppgave for å komme frem til en rett strategi for å løse problemet, og ikke gjenkaller tidligere narrativer. Til slutt tar vi for oss avslutningsbetingelsene, the when, og ser hva som gjør at elevene sier seg ferdige med det matematiske problemet. Her benytter vi koden konstruksjon (Sfard, 2008) (eng: construction), for å se om gruppen har konstruert et nytt narrativ i den diskursive prosessen. Når vi ser på konstruksjon må vi igjen trekke frem underbygging, og ser på om gruppen forklarer gruppen hvordan det nye narrativet som er produsert kan bli godkjent.

4.2.1 Anvendbarhetsbetingelser

Felles for begge gruppene etter våre observasjoner er at den første anvendbarhetsbetingelsen innebærer å lese oppgaven. Dette blir gjort både hver for seg, og noen oppgaver blir også lest høyt. Observasjonene viser ikke noe fast mønster om at oppgavene blir lest høyt eller hver for seg, men at dette blir gjort helt tilfeldig. Som nevnt i kapittel 3.4 har vi valgt å gi den første gruppen et eksempel på hvordan en finner en generell formel knyttet til den gitte visuell i oppgave 1. Dette har vi gjort på bakgrunn av å se om det endrer anvendbarhetsbetingelsene og om de bruker det gitte eksempelet videre i den matematiske diskursen. Gruppe 1 la ikke merke til det gitte eksemplet, som vist i transkripsjonen nedenfor, selv om det var det første som kom i oppgavesettet som ble utdelt, de valgte heller å gå rett på oppgave 1.

1.104 **ML**: Det jeg kan si da er at dere har et eksempel ovenfor oppgaven
1.105 **Mia**: Det så ikke jeg
1.106 **Sarah**: Det var det jeg trodde..der er det +2 fordi den øker med to..fordi det har alle figurene til felles at de øker tre
1.107 **Mia**: ja

Som vi ser i transkripsjon 1.104 er det forsker som påpeker eksemplet som er gitt i oppgavesettet. Dette kan tyde på at elever i en problemløsingsdiskurs leter etter den visuelle mediatoren «Oppgave» for å vite hva de skal gjøre. Dette gjør at det som står foran ikke blir en del av anvendbarhetsbetingelsene. Observasjonene og videoobservasjon viser at gruppen slet med å finne brukelige heuristikker og produsere narrativer knyttet til deloppgave 1c. Da valgte vi å påpeke at det var gitt et eksempel i starten på oppgavesettet. Som vi ser fra transkripsjon 1.104 til 1.107 trekker Sarah frem eksempelet, og først da endrer dette anvendbarhetsbetingelsene, og setter i gang en diskusjon hvor de prøver å ta i bruk det gitte eksemplet og resonnere seg frem til hvordan de kan ta det i bruk for å finne en generell formel for deloppgave 1c.

1.109 **Mia**: men her står det..ehh.. okei skal jeg lese til deg.. over ser dere figur 1, 2 og 3.. i figur 1 har dere tre fyrstikker og i figur 2 har vi 3+2 fyrstikker.. i figur 3 har vi 3+2 • 2=7 fyrstikker.. i figur nr 4 vil vi da ha 3 + 2 • 3 fyrstikker vi ser da at figur n vil da ha 3 + 2 • n - 1 fyrstikker
1.110 **Lise**: Jeg husker bare at vi gjorde noe sånn..f også n + 3
1.111 **Mia**: [utydelig] også var det – 1 fordi på grunn av en eller annen greie som jeg ikke husker..men skal vi finne ut av figur 4 da..den er jo nærmest figur 3..eller?
1.112 **Sarah**: ja
1.113 **Mia**: det er det jeg har gjort..og da blir jo-
1.114 **Sarah**: !men hva heter oppgaven..oppgavemetoden..altså hva..liksom..en har jo geometri og sånne ting men hva er dette?

I transkripsjon 1.109 velger Mia å lese eksemplet høyt på ny, men gruppen klarer ikke å sette i gang de andre anvendbarhetsbetingelsene for problemløsing, som innebærer å analysere, utforske og planlegge (Schoenfeld, 1993). Videre i transkripsjonene 1.110 til 1.114 ser vi at de prøver å memorere tidligere kunnskap. De bruker også heuristikken «lete etter metode i bøker og på nett».

Gruppe 1 valgte å gjøre oppgave 1, 2 og 4. Deloppgave 1c og deloppgave 4d inneholder det algebraiske objektet *n* i oppgaveformuleringen. Observasjonene viser at når anvendbarhetsbetingelsene for oppgavene inneholder *n*, klarer ikke gruppen å konstruere nye godkjente narrativer.

1.42 **Sarah**: Hvor mange fyrstikker er det i figur !n
1.43 **Mia**: Jeg husker ikke hvordan det var-

Sarah leser oppgaven høyt for de andre (1.42) og Mia påpeker at hun ikke husker hvordan det var (1.43). Det symbolske objektet n virke å endre anvendbarhetsbetingelsene så mye at elevene endrer heuristikker fra matematiske til generelle, eksempelvis: «la oss de om vi husker den rutinen igjen». Dette observerte vi også på deloppgave 4d, hvor oppgaveteksten er formulert slik: «Hvor mange stoler blir det plass til om vi har *n* småbord?».

1.382 **Sarah**; årrh.. da var det de n-greiene igjen da
1.387 **Mia**; hva ble vi enige om på forrige oppgave
1.388 **Sarah**; vi hoppet over den.. men jeg tror denne er enklere enn den er.. eehm.. vi må uansett få frem at vi øker med fire på en eller annen måte.. fordi det går igjen for alle uansett for hvilket tall som står for n

Observasjonene viser at når oppgaven blir satt i denne konteksten, sliter gruppen med å sette i gang en prosedyre. Som vi ser i 1.382 påpeker Sarah at «det er de *n*-greiene igjen», og vi observerer at gruppen mister motivasjonen, og begynner å se på klokken. Dette tyder på at symbolet n bærer en mening som betyr en rutine de ikke kan. Observasjonen påpeker at innføringen av symbolske gir en endring av hvilke heuristikker som blir valgt for gruppe 1.

Den andre gruppen, gruppe 2, fikk ikke utdelt oppgavesett med det eksemplet som ble gitt til gruppe 1. På bakgrunn av dette fikk ikke denne gruppen de samme anvendbarhetsbetingelsene som gruppe 1. I oppgave 1b ser vi raskt at Pia ønsker å anvende en formel for å finne ut hvor mange fyrstikker det er i figur 10, som vi ser i transkripsjon 2.7.

2.4 **Ellen**: okei..er vi klare..hva er neste da?
2.5 **Sofie**: Hvor mange fyrstikker er det i figur 10?
2.6 **Ine**: Figur 10
2.7 **Pia**: skal vi finne en formel?
2.8 **Ine**: ja..eller..det skal vi gjøre på C
2.9 **Ellen**: ja..fire..tretten..også
2.10 **Ine**: [vi må gange]

Ine og Ellen velger å avvise forslaget til Pia om å finne en formel, og fortsetter planlegging på bakgrunn av at de skal finne en generell formel i oppgave 1c, som vi ser i transkripsjonene 2.8 til 2.10. Vi observerer at Pia ønsker å sette i gang en prosedyre ved å finne formel og Sfard (2008) påpeker at anvendbarhetsbetingelsene innebærer hvilken kontekst oppgaven er satt i og hvilke betingelser som er gitt. Ved at Pia (2.7) ønsker å finne formel selv om deloppgave 1b ikke sier noe

om det, kan det bety at anvendbarhetsbetingelsene for Pia innenfor figurtall, er å sette i gang en prosedyre for å finne formel, uansett om det er det oppgaven spør etter. Ine og Ellen ønsker å ta utgangspunkt i oppgaveteksten, og begrenser rommet med mulige valg. Her planlegger de ulike prosedyrer for å senere anvende de i den valgte prosedyren.
Videre observerer vi at Pia analyserer oppgavene som er gitt raskt, og trenger mindre planlegging for å sette i gang en prosedyre. Som vi ser i transkripsjon 1.154 nedenfor, oppfatter hun oppgaven som en kjent oppgave, og mens de andre setter i gang en diskusjon for å planlegge hvordan de skal gå frem som vi ser i transkripsjon 1.155 til 1.157, bryter Pia inn med å si hva økningen er, dette ser vi i transkripsjon 1.158. Vi observerer at når en oppgave anses som kjent gir det en annen forutsetning og setter i gang andre heuristikker.

2.151 **Ellen**: er det liksom tre små bord..
2.152 **Sofie**: ja sikkert..også på hvert bord så sitter det-
2.153 **Ine**: hva er oppgaven?
2.154 **Pia**: åå..det er denne
2.155 **Ine**: et langt bord er satt sammen av småbord, og rundt det bordet er det satt opp stoler
2.156 **Pia**: hvor mange stoler blir det plass til med åtte småbord
2.157 **Sofie**: men i midten..der kan det være-
2.158 **Pia**: det øker med fire

Ut ifra dette anser vi at Pia ikke oppfatter de samme anvendbarhetsbetingelsene som resten av gruppen, hvor hun kan plasseres på et høyere nivå innenfor den algebraiske diskursen i henhold til modellen til Caspi og Sfard (2012), noe som vi kommer tilbake til i analysen av den aritmetiske og algebraiske diskursen hvor hun er på et høyere nivå. Det observeres også at Pia er den som stopper anvendbarhetsbetingelsene for gruppen, for å sette i gang prosedyrene.

2.298 **Ellen**: hundre og to hvite perler.. !Ja da må vi gjøre sånn som jeg gjorde her.. seks.. så blir økning fire.. også blir det ti her pluss fire hele tiden.. pluss fire pluss fire pluss fire ((gjentar seg for å påpeke poenget)
2.299 **Sofie**: fjorten? ... ja
2.300 **Ellen**: så da kan vi bare plusse
2.301 **Pia**: eller finne formelen
2.302 **Sofie**: Ja det er kanskje lettere å finne formelen-

Transkripsjonen ovenfor er fra oppgave 3b, hvor vi ser Sofie og Ellen sette i gang en diskusjon og planlegger hvordan de skal gå frem. Her ser vi igjen at Pia avslutter anvendbarhetsbetingelsene ved å avbryte diskusjonen for å peke de i retningen til å finne en generell formel for mønsteret, dette ser vi i transkripsjon 2.301. Dette gjenspeiler seg også i oppgave 5, hvor Pia avslår et forslag til en prosedyre som Sofie resonnerer seg frem til, som vi ser i transkripsjon 2.357 til 2.360.

2.357 **Pia**: også b'en.. nå skal vi finne ut hvor mange som trengs for å bygge et tårn som er seks klosser høyt.. Denne er fire klosser høy.
2.358 **Sofie**; ja så da plusser vi bare på tolv
2.359 **Pia**: nei
2.360 **Sofie** nei

Her observeres det I tillegg at Sofie ikke får muligheten til å forklare resonnementet sitt, før Pia avslår og setter i gang en annen prosedyre. Dette viser igjen at gruppen er avhengig av Pia som deltaker og følger hennes regler for diskursen, men Pia er uavhengig av gruppen.

Funnene fra analysen knyttet til anvendbarhetsbetingelsene er først og fremst at elevene går rett til tekst markert med «Oppgave». Gruppe 1 som har fått utdelt et eksempel hopper rett over det og anerkjenner det ikke i det hele tatt, mens hvor det er markert «Oppgave» velger de å lese. Eleven på et høyere nivå i den algebraiske diskursen styrer anvendbarhetsbetingelsene. Eleven kan stoppe anvendbarhetsbetingelsene for å sette i gang prosedyrer som hun mener er riktige, og vi ser også at hvis det blir avslått, velger hun å gjøre det for seg selv. Funnene viser også oppgaveformuleringer som inneholder variabelen *n*, endrer hvilke heuristikker som blir valgt. Gruppe 1 har ikke forstått det algebraiske objektet, og på bakgrunn av dette skaper det misforståelser i gruppen.

4.2.2 Prosedyre

For å analysere elevenes prosedyrer har vi valgt å ta utgangspunkt i de heuristiske tilnærmingsmåtene som blir presentert i kapittel 2.5.1. Vi har utarbeidet en tabell for å få en oversikt over hvilke prosedyrer som nevnes og tas i bruk, se tabell 4 og 5. I disse tabellene har vi valgt å ta for oss heuristikkene let etter mønster, konstruere tabell, liste over muligheter, tegning, figur eller graf, gjett og kontroller, løs et annet problem og annet (Björkqvist, 2003). Vi har valgt ta med annet for å trekke inn de andre heuristikkene elevene tar i bruk. Under disse kategoriene setter vi inn hvilke deloppgaver som passer inn med de ulike heuristiske tilnærmingsmåtene, og videre i dette delkapitlet tar vi for oss våre funn fra analysen rundt prosedyrene.

Den første prosedyren som blir tatt i bruk av begge grupper er å lete etter mønsteret og finne økningen. Som vi ser i transkripsjonene 1.1 (oppgave 1), 1.151 (oppgave 2) og 1.330 (oppgave 4) er det Lise som tar initiativ til å starte diskursen for å lete etter mønster for gruppe 1.

1.1 **Lise**: Øker med tre
1.151 **Lise**: der øker den først med tre også fem tror jeg..den øker rundt der
1.330 **Lise**: den øker bare med fire, den flytter seg bare bort

Gruppe 2 observerer vi at alle aksepterer diskursen for å finne økningen i mønsteret. Ser vi transkripsjonene 2.1 (oppgave 1), 2.37 (oppgave 2), 2.158 (oppgave 4), 2.266 til 2.271 (oppgave 3) og 2.444 (oppgave 5) så er hele gruppen enige om at de må finne økningen på figuren før de går videre.

2.1 **Ellen**: jeg tror allerede jeg har funnet ut den..det øker med tre ..en, to, tre..her..en, to, tre, fire, fem, seks..så det øker med tre hele tiden..ser dere..3+3 også må denne øke med tre
2.37 **Sofie**: oppgave 2 (5s) okei så..skal vi finne økningen-
2.158 **Pia**: det øker med fire
2.266 **Sofie**: men her..øker økningen her?
2.267 **Pia**: ehh..nei
2.268 **Ine**: [nei]..hvor mye øker det med da-
2.267 **Ellen**: se her blir det blir det +4..det blir bare pluss fire hele veien.. gjør det ikke det?
2.268 **Ine**: den i midten teller den også?
2.269 **Sofie**: nei de hvite var det ikke det?
2.270 **Ellen**: !og svarte da blir det syv her
2.271 **Sofie**: da er økningen
2.444 **Pia**: så øker den med.. den øker forskjellig.. eller hvis vi tar bort.. hvordan var det vi gjorde på den forrige? når det var forskjellig

Begge gruppene bruker økningen sammen med andre strategier, som telling, addisjon, multiplikasjon for å finne de neste figurene. Forskjellen mellom gruppe 1 og gruppe 2 er at gruppe 2 fortsetter med å bruke økningen for å lage en generell formel, noe som gruppe 1 ikke får til. Ser vi på transkripsjonene 2.20 til 2.24 (oppgave 1c) og 2.309 til 2.315 (oppgave 3) fra gruppe 2, bruker de økningen for å lage en generell formel for så å ta den i bruk for å løse oppgaven.

2.20 **Ellen**: det var økning også var det..i den første..fire og tre..pluss tre
2.21 **Pia**: 3n+1
2.22 **Sofie**: [er det ikke fire *n*..4*n*]
2.23 **Ellen**: 3*n*+1..men hvorfor kan det være pluss en da..det øker jo med tre?
2.24 **Pia**: tre det er økningen..n det er jo figurtallet..og det er en..derfor blir det..3 • 1 og det blir jo tre og den første er det jo fire derfor må vi plusse på en..hvis vi tar neste da så blir det jo 3 • 2 som er seks og her er det syv derfor plusser vi på en
2.309 **Ellen**: fire n pluss fem.. er det ikke det?.. eller?
2.310 **Pia**: nei pluss to
2.311 **Ellen**: jaa
2.312 **Sofie**: åja jo
2.313 **Ellen**: åja på de hvite?
2.314 **Pia**: ja
2.315 **Ellen**: fire *n* pluss to

Transkripsjonene ovenfor viser at gruppe 2 konsekvent bruker økningen for å finne en generell formel for de ulike oppgavene. Gruppe 1 finner også økningen, men klarer kun å bruke den for de neste figurene. Gruppen gjennomførte oppgave 1, 2 og 4, hvor oppgave 1 og 4 spør etter en formel. Ved bruk av n i oppgaveteksten henger de seg mer opp i dette, og klarer ikke å fullføre prosedyrer rundt disse oppgavene.

1.43 **Mia**: Jeg husker ikke hvordan det var-
1.44 **Lise**: Var ikke de noe sånn n=.. nei husker ikke
1.45 **Mia**: <rister på hodet>
1.46 **Lise**: Nja nei men vi har hatt om dette-
1.47 **Sarah**: Hva betyr n i denne oppgaven?

Transkripsjonene 1.43 til 1.47 viser at elevene henger seg opp i det algebraiske symbolet *n*, og klarer ikke helt å uttrykke hva det representerer. Gjennom diskusjon kommer de frem til at de kan bruke en tabell. Her henger de seg mer opp i det praktiske rundt tabellen og gir opp prosedyren. Nedenfor i transkripsjonen 1.57, 1.87 og 1.90 til 1.103 (oppgave 1c) presenterer vi hvordan Mia ønsker å ta i bruk en tabell for å se utviklingen på mønsteret.

1.57 **Mia**: Vi hadde jo sånn diagram flere ganger også skrev vi sånn.. f1, f2, f3, f4.. også bortforbi der igjen skrev vi vel en, to, tre, fire, fem ned
1.87 **Mia**: Skal vi se.. hvor lang må denne være da..sånn
1.90 **Mia**: Var det to eller tre kolonner vi hadde?
1.91 **Lise**: På?
1.92 **Mia**: bortover
1.93 **Lise**: Spørs hvor mange f1, f2, f3 du har
1.94 **Mia**: !nei..bortover
1.96 **Mia**: Ja..denne veien .. nei..jeg vet ikke..jeg husker ikke
1.97 **Lise**: tre da.. jeg husker ikke at vi hadde en tabell en gang
1.98 **Mia**: !sånn.. jeg husker ikke hva vi skriver opp
1.99 **Sarah**: Hadde vi en tabell?
1.100 **Mia**: !ja vi hadde en tabell hvor vi skrev f1, f2, f3 og så videre nedover..husker dere ikke det?
1.101 **Sarah**: nei
1.102 **Lise**:
1.103 **Mia**: nei

En annen heuristisk tilnærming som blir tatt i bruk er gjett og kontroller, noe som også er en vanlig problemløsingsheuristikk (Björkqvist, 2003). Begge gruppene tar i bruk denne heuristikken hvor oppgavene blir oppfattet som et matematisk problem. Som nevnt endret vi anvendbarhetsbetingelsene for gruppe 1, ettersom vi gav dem et eksempel på å finne en generell formel. Gruppe 1 klarte ikke å anvende dette eksemplet i oppgavene på en korrekt måte, men det førte dem til å sette i gang en prosedyre med gjett og kontroller. Transkripsjonene 1.122 til 1.129 viser hvordan Mia gjetter seg frem til en formel i oppgave 1c, og det observeres at hun er usikker og ønsker at en av oss kan hjelpe.

1.122 **Mia**: Var det 4 + 3 ● 3 ● 1 + 1?..som svar ((ser bort på ML..viser tydelig at hun vil han skal komme bort)).. kan jeg gjøre sånn?

1.123 **ML**: Ja..du kan jo prøve deg på den.. dersom du setter inn for eksempel på den oppgaven? <peker på representasjonen av figuren> Da er det jo lettest å prøve dersom du setter inn figur 3..hvor mange var det der..
1.124 **Mia**: tretten
1.125 **ML**: Mhm.. n da dersom du setter inn tre vil du få tretten da?
1.126 **Mia**: 4+3 det er..sju.. ● 3.. ehh-
1.127 **Sarah**: tjueen
1.128 **Mia**: og så 3-1..i parantes..to..da blir det ikke det hvertfall
1.129 **Lise**: !nei

Denne prosedyren settes i gang på bakgrunn av anvendbarhetsbetingelsene (Sfard, 2008). Likevel inneholder ikke formelen som Mia produserer i 1.122 noen algebraiske symboler, som for eksempel variabelen *n*. Videre prøver ML (mannlig lærer/forsker) å utvide prosedyren til at de kontrollerer den og hvordan de kan gjøre det, samtidig som ML velger å trekke inn den algebraiske representasjonen *n*. Diskursen i denne oppgaven er preget av at de er noivser innen algebraisk diskurs og er usikre på håndteringen av det algebraiske objektet *n* (Sfard, 2008. Vi ser også på transkripsjonen 1.126 at de ikke mestrer regnerekkefølger, ettersom de adderer før de tar i bruk multiplikasjon.

Gruppe 2 velger også å ta i bruk gjett og kontroller heuristikken, og dette gjør de på oppgave 5d. De bruker gjett og kontroller på bakgrunn av anvendbarhetsbetingelsene for oppgaven, altså de tar for seg økningen og den første figuren for å komme frem til en generell formel. Transkripsjonene 2.463 til 2.469 nedenfor viser diskusjonen og prosedyren for hvordan de tar i bruk denne heuristikken.

2.463 **Ellen**: 17 + 4n + 28 ... går det?
2.464 **Pia**;: det øker med sytten.. kanskje sytten pluss fire n pluss noe
2.465 **Ellen**: pluss den første figuren som var tjueåtte
2.466 **Pia**; eller da må vi finne ut hvor mye det blir.. sytten... og det var tjueåtte.. og sytten minus tjueåtte det er?
2.467 **Ellen**; elleve
2.468 **Pia**: <viser boken til Ina>
2.469 **Ina**: 13 + 4n + 11

Videre observerer vi at gruppen sjekker med den gitte figuren som inneholdt 28 klosser.

2.472 **Ellen**: det er rett
2.473 **Pia**: da blir det sytten gange seks pluss 11
2.474 **Ellen**: det er ikke rett
2.475 **Pia**: det er altfor mye

Før gruppen tar i bruk gjett og kontroller heuristikken gjenkaller de tidligere narrativer for å sette i gang prosedyren. Deretter kommer de frem til det algebraiske uttrykket 13 + 4*n* + 11, og sjekker dette med den gitte figuren som blir presentert i oppgaveteksten. Transkripsjon 2.474 og 2.475 viser at de raskt resonnerer seg frem til at det ikke er den rette formelen for den gitte figuren.

Nedenfor presenterer vi en tabell som viser hvilke heuristiske tilnærminger gruppene har tatt i bruk på de ulike oppgavene. Tabellen tar først for seg gruppe 1 og deretter gruppe 2. Heuristikkene vi har valgt å trekke frem er på bakgrunn av Björqkvist (2003) sine problemløsingsheuristikker.

Problemløsingsheuristikk/prosedyre						
Let etter mønster	Konstruer tabell	Liste over muligheter	Tegning, figur eller graf	Gjett og kontroller	Løs et enklere problem	Annet
Oppg. 1a						Telling Oppg. 1a
Oppg. 1b			Nevner det, men starter ikke prosedyren			Addisjon
	Oppg. 1c – starter prosedyren, men får det ikke til			Ser på eksempelet som er gitt, gjetter seg fram til utregninger, kontrollerer og får feil		
Oppg. 2a			Oppg. 2a			Telling, dobling (multiplikasjon, addisjon)
Oppg. 2b						Multiplikasjon, addisjon
						Oppg. 2c subtraksjon

Oppg. 4a			Oppg. 4a			Telling
			Oppg. 4b, nevnes, men starter ikke prosedyren			Telling, multiplikasjon

Tabell 5: Problemløsingsheuristikk gruppe 1

Problemløsingsheuristikk/prosedyre						
Let etter mønster	Konstruer tabell	Liste over muligheter	Tegning, figur eller graf	Gjett og kontroller	Løs et enklere problem	Annet
Oppg. 1a						Telling, addisjon
Oppg. 1b						Finne formel (Pia setter i gang alene), telling, addisjon
Oppg. 1c – bruker økningen for å finne formelen						
Oppg. 2a						Telling, addisjon
Oppg. 2b Bruker økningen						Addisjon, telling
						Oppg. 2c Subtraksjon
Oppg. 4a			Tegner figur			Telling, addisjon, multiplikasjon
						Oppg. 4b, multiplikasjon
						Oppg. 4c, forklaring
Oppg. 4d, bruker						

mønster for å finne formel						
Oppg. 3a Leter etter økningen						Telling, addisjon, subtraksjon
Oppg. 3b, finner formel						Hoderegning, multiplikasjon
Oppg. 5a						Telling, multiplikasjon, addisjon
Oppg. 5b			Tegner figur (den ene siden av figuren)			Telling, addisjon
Oppg. 5c, bruker mønsteret						Multiplikasjon, deling, addisjon
Oppg. 5d – bruker økningen for å finne formel				Gjetter og kontrollerer ved flere anledninger		

Tabell 6: Problemløsingsheuristikk gruppe 2

Tabell 5 og 6 viser at begge gruppene velger å finne mønsteret ved å finne økningen, men bare gruppe 2 klarer å anvende dette til et generelt uttrykk for figurene som gis i oppgaveteksten. Videre ser vi i tabell 5 at gruppe 1 har ved en anledning, oppgave 1c, prøvd å konstruere en tabell for å løse oppgaven. Vi observerer at de henger seg mer opp i det praktiske og velger å ikke utføre heuristikken likevel. Kolonne nummer tre og seks har ingen av gruppene valgt å benytte seg av, som innebærer å sette opp en liste over muligheter og løse et enklere problem. Observasjonene i denne studien viser ingen antydning at elevene tar i bruk, eller diskuterer disse problemløsingsheuristikkene.

Funnene i analysen i elevenes problemløsingsheuristikker knyttet til oppgaveheftet er at begge gruppene starter med å lete etter mønsteret for å finne økningen. Dette tyder på at elevene har innført en rutine rundt figurtall som innebærer at mønsteret er det første de skal finne. Gruppe 2 bruker også denne økningen videre for å produsere en generell formel for figurene. Begge gruppene tar i bruk problemløsingsheuristikken «gjett og kontroller». Gruppe 1 velger derimot å bruke gjett og kontroller ut fra det gitte eksemplet, og klarer ikke å anvende dette på betingelsene på de andre oppgavene. Det blir også tatt i bruk tegning som en problemløsingsheuristikk, hvor i noen tilfeller blir det brukt for å finne økningen og andre for å finne antallet i et gitt figur nummer.

4.2.3 Avslutningsbetingelser

Avslutningsbetingelsene er en del av rutinens når (eng: the when) og handler om hva som gjør at elevene opplever at rutinen er ferdig (Sfard, 2008). Vi har valgt å trekke frem noen eksempler fra begge gruppene, og dette gjør vi på bakgrunn av neste kapittel, hvor vi ser om elevene deltar rituelt eller utforskende i den matematiske diskursen. Vi observerer at gruppe 1 avslutter oppgaven ved å skrive ned svaret i boken, og ingen forklaringer på hvorfor. Svaret blir skrevet ned rett etter avsluttet prosedyre, og de viser fysisk at de er enige ved å gi et nikk. Når gruppen er enige i svaret, avslutter de oppgaven og går videre. Gruppen er ikke interesserte i hvorfor det svaret som kommer frem fra utført prosedyre er rett, men hva svaret er. Transkripsjonene 1.35 til 1.38 støtter disse observasjonene.

1.35 **Sarah**: Ja.. hva er svaret da?
1.36 **Lise**: 18 + 13.. var det ikke det?
1.37 **Mia**: jo
1.38 **Sarah**: Ja

Videre observeres det at de skriver ned svaret på 18 + 13, og går videre. Dette gjelder for alle oppgavene som gruppe 1 velger å gjennomføre, og det påpekes av Mia også at å skrive ned svaret er avslutningsbetingelsene for oppgavene. Transkripsjonen 1.242 understreker nettopp dette.

1.242 **Mia:** du må skrive det ned

I arbeidet med oppgave 1c, hvor de skal finne en generell formel, får de ikke dette til. Vi observerer at de mister motivasjonen og ønsker og gå videre. Dette gjør at det er vi som bestemmer avslutningsbetingelsene for gruppen. De velger å spør om de kan hoppe over oppgaven, og venter på et svar fra oss, som vist i transkripsjonene 1.147 til 1.149.

1.147 **Sarah:** kan vi hoppe over oppgaven denne oppgaven?
1.148 **Mia:** [ja kan vi]
1.149 **ML:** Ja..det bestemmer dere selv..dere kan se på de andre oppgavene

Ved å få vår godkjennelse på at de kan se på de andre oppgavene, velger de å avslutte oppgaven for å gå videre. Det vil si at det er lærer som gir avslutningsbetingelsen for gruppen.
Den andre gruppen har også samme tilnærming på avslutningsbetingelsene som gruppe 1, hvor det å skrive ned svaret i boken alltid er med på avslutningsbetingelsene. Det som vi kan trekke frem som observeres i gruppe 2, er at deltakerne i diskursen spør hverandre hvorfor det er svaret. Samtidig som det trekkes frem forklaringer, velger vi også å endre avslutningsbetingelsene for denne gruppen ved å stille spørsmål om hvorfor og hvordan de kommer frem til de produserte narrativene. Dette ser vi allerede i oppgave 1b, hvor Ine forklarer hvordan de kommer frem til svaret. Dette vises i transkripsjonene 2.12 til 2.16.

2.12 **Ine:** trettien fyrstikker
2.13 **Pia:** var det trettien?
2.14 **Ine:** ja..vi tok bare å ganget
2.15 **Ellen:** ganget hva?
2.16 **Ine:** nei plusset

I forklaringen til Ine observerer vi også at det pekes på den visuelle representasjonen som er gitt i oppgaven, for å underbygge prosedyren og det produserte narrativet. Gruppen velger å skrive ned 31 fyrstikker i bøkene etter de har forstått svaret og de er enige, og det er med på å avslutte oppgaven og de går videre på neste deloppgave. Allerede på neste deloppgave trenger de andre medlemmene i diskursen en forklaring på den generelle formelen Pia har kommet frem til for å godkjenne narrativet, og avslutte oppgaven ved å skrive det ned i boken.

2.21 **Pia:** 3n+1
2.22 **Sofie:** [er det ikke fire en..4n]
2.23 **Ellen**: 3n+1..men hvorfor kan det være pluss en da..det øker jo med tre?
2.24 **Pia:** tre det er økningen..n det er jo figurtallet..og det er en..derfor blir det..3 ● 1 og det blir jo tre og den første er det jo fire derfor må vi plusse på en..hvis vi tar neste da så blir det jo 3 ● 2 som er seks og her er det syv derfor plusser vi på en.

Som nevnt i prosedyre kapittelet hadde Pia formelen klar (2.21), og de andre medlemmene i diskursen trenger en oppklaring i hvorfor denne stemmer før de velger å avslutte oppgaven ved å skrive den ned. I transkripsjonen 2.24 underbygger Pia det produserte narrativet for de andre medlemmene, og ved å gjøre dette er hele gruppen enige i at narrativet er godkjent, og de velger å avslutte oppgaven ved å skrive ned formelen i boken.

Det som observeres i gruppe 2 er at når alle deltakerne er med i prosedyren så behøver de ingen forklaring på det narrativet som blir produsert, da er gruppen enig med hverandre og avslutter oppgaven ved å skrive svaret i boken. Transkripsjonene ovenfor viser at når noen av medlemmene ikke forstår prosedyren som blir utført og et narrativ blir konstruert, trenger de en forklaring fra de andre. Avslutningsbetingelsene viser seg også til å være mest styrt av Pia. Gruppen henvender seg til Pia ettersom hun underbygger narrativene sine og gir en forklaring på det som er blitt konstruert og hvilke prosedyrer som er tatt i bruk. Dette ser vi i transkripsjonene nedenfor, 2.210 til 2.112 og 2.239 til 2.241.

2.210 **Sofie:** tohundre og to
2.211 **Pia:** det var.. jeg tok bare..bort endene..og da er det førtiåtte bord i midten med fire stoler på hvert bord dersom det følger samme mønster..derfor ble det 48 ● 4 + 5 + 5
2.212 **Ine:** ja for der kan de sitte en mer enn de kan på de andre
2.239 **Pia:** jo di øker jo med fire da..for når vi begynner med ett bord.. har vi jo en stol på hver ende..og så øker det jo hele tiden med fire.. det blir jo riktig med økninge med fire..blir det ikke det?
2.240 **Ine:** !jo
2.241 **Pia:** ja det gjør det

Transkripsjonene er fra arbeidet med oppgave 4, deloppgave c og d. Vi ser i transkripsjon 2.211 at Pia gir en beskrivelse av hvordan antall stoler øker med antall bord, før hun senere velger å trekke frem formelen $4n + 2$. Denne formelen underbygger hun med forklaringen som vist i 2.239. Dette gjør at de andre medlemmene kan si seg enige, formelen skrives ned i bøkene og de avslutter oppgaven.

I arbeidet under oppgave 3b velger vi å endre avslutningsbetingelsene selv. Gruppen har konstruert et nytt narrativ, og avslutter oppgaven ved å si svaret høyt og skrive det ned i boken. Av interesse rundt at svaret kom så fort frem, valgte vi å spørre hvordan de kom frem til dette. Det som tidligere var avslutningsbetingelsene for denne oppgaven, blir nå endret, og vi ønsker en forklaring.

2.333 **ML**: hvordan kom du fram til tjuefem?
2.334 **Pia**: jeg tenkte hva jeg måtte gange.. eller jeg så at det var pluss to og da tenkte.. tok jeg vekk to fra ett hundre.. også tenkte jeg hva må jeg gange fire med for å få ett hundre

2.335 **ML**: aah.. lurt!
2.336 **Pia**: så da ble det bare tjuefem
2.337 **Ellen**: eehmm.. hun kan lage tjuefem stk

Transkripsjonen 2.333 viser hvordan vi endrer avslutningsbetingelsene. Igjen er det Pia som tar ordet (2.334) og underbygger narrativet sitt ved å gi en forklaring samt som hun bruker representasjonen som er gitt i oppgaven. Videre velger Ellen (2.337) å støtte svaret til Pia, ved å gjenta hvor mange blomster som kan bli laget.

Funnene i analysen til gruppenes avslutningsbetingelser består av at begge gruppene alltid avslutter oppgaven ved å skrive svaret ned i boken. Når dette er gjort, er de klar for å gå videre til neste oppgave. Det er noen deloppgaver hvor gruppe 2 må underbygge narrativet til de andre deltagerne dersom det er noe uklart rundt prosedyren. Funnene viser også at lærer kan endre avslutningsbetingelsene for gruppene, enten om det er å gi en godkjennelse på å gå videre når de ikke har fullført oppgaven, eller om det er å stille hvordan de har kommet frem til de konstruerte narrativene. Funnene viser at når forsker endrer avslutningsbetingelsene ved å stille spørsmål, underbygger eleven som er plassert på et høyere nivå innenfor den algebraiske diskursen det konstruerte narrativet. Det er også denne eleven som styrer avslutningsbetingelsene ved flere anledninger, ettersom gruppen lener seg på denne personen og er enig i det hun konstruerer.

4.3 Utforskende eller rituell deltakelse

Ved å analysere gruppenes når og hvordan kan vi videre se om elevene deltar utforskende eller rituelt i den matematiske diskursen. Ved hjelp av kjennetegnene i de-ritualiseringsprosessen ønsker vi å se på hvordan elever deltar, og vi gjør det ved hjelp av å se om de er fleksible i prosedyrene, anvendbarhetsbetingelsene, om de er uavhengige eller avhengige av hverandre og om de underbygger narrativene sine. Gruppe 1 viser til dels en fleksibilitet i prosedyrene sine, men klarer gjentatte ganger ikke å fullføre prosedyren med mindre det innebærer telling, addisjon, multiplikasjon og subtraksjon. Samtidig som de blander anvendbarhetsbetingelsene i oppgaven, som nevnt i diskurs kapitlet, hvor de blander fyrstikker med kvadrater. Nedenfor viser vi et utdrag som påpeker at de er avhengig av læreren for å klare oppgave 2b.

1.267 **Sarah:** vanligvis pleier vi å få det forklart av læreren vår en gang grundig også kan vi liksom videre..men det er litt vanskelig når vi ikke har hatt dette på så lenge
1.268 **ML**: [mhm]
1.269 **Mia:** [vi har ikke vært inne på dette på..ca..seks, syv måneder kanskje]..men jeg lover dere..den andre gruppen kommer til å ta dette med engang..det er så irriterende

1.270 **Lise:** [ja de kommer til å bli ferdige med alt]

Sarah påpeker her at læreren deres gir en grundig gjennomføring i hvordan de kan løse denne type oppgaver, for så å jobbe videre med det. Dette kan indikere at elevene er vant til en tradisjonell matematikkundervisning, samtidig som de er ute etter hvilken prosedyre som de kan ta i bruk for å løse oppgaven (Lavie, Steiner & Sfard, 2018). Dette gjenspeiler seg i avslutningsbetingelsene for gruppen, altså det viktigste for elevene her er å avslutte oppgaven for å gå videre til neste, og ikke fokusere på det produserte narrativet, altså det handler ikke om å vite, men om å prestere og opptre for deltakerne i denne matematiske diskursen. Dette kommer også frem i observasjonene hvor de trekker frem flere ganger at de selv understreker at det er flaut når de ikke får det til. Mia trekker også frem i 1.269 at det er lenge siden de har gått gjennom det, men likevel klarer de ikke å gjenkalle tidligere narrativer som er et tegn på utforskende undervisning. Vi har sett i tidligere transkripsjoner at de prøver å memorere og lete etter tidligere oppgaver som de kan jobbe seg ut fra. Mia påpeker også at den andre gruppen kommer til å få dette til med engang, noe som viser at det er det sosiale båndet i arbeidet med disse oppgavene som er viktigst. De ønsker å prestere på samme nivå som den andre gruppen gjør (Sfard, 2008).

Gruppe 1 kan ikke plasseres i et nivå innenfor den algebraiske diskursen, noe som vi trekker frem i neste delkapittel, og klarer ikke å produsere formler til de gitte figurene, dette ser vi i både prosedyrene og avslutningsbetingelsene til gruppen. I oppgave 4d er avslutningsbetingelsen at tiden gikk ut. Når vi observerte klokken og motivasjonen til elevene valgte vi å veilede elevene på rett vei til å sortere tankene rundt å finne formelen. Nedenfor trekker vi frem relevante transkripsjoner for å vise dette.

1.465: **ML**: hvert bord øker med fire .. Hva med disse to? <peker på representasjonen>
1.466 **Mia**: får vi pluss to?
1.467 **ML**: hvorfor vil du ha pluss to?
1.468 **Mia**: fordi det er to stoler på de ytterste bordene
1.469 **ML**: nå er dere inne på noe.. hva kan hvert bord stå for?
1.470 **Lise**: n
1.474 **ML**: hvis hvert bord øker med fire.. og vi har de to stolene på sidene.. hva skjer da?
1.475 **Lise**: så fire gange n pluss to? Ja
1.480 **ML**: nå som dere har kommet frem til den formelen der.. hvordan vet dere at den stemmer?
1.481 **Lise**: fordi fire ganger n pluss to er
1.482 **Sarah**: vi kan teste den.. regne
1.485 **ML**: hvor mange bord er det på tegningen der? <viser til representasjonen>
1.486: **Lise**: tre
1.487 **ML**: hvor mange stoler er det?
1.488 **Sarah:** fjorten
1.489 **ML**; hva var det n sto for nå igjen?

1.490 **Sarah og lise**: bordene
1.491 **ML**: hvis vi har tre bord, hva kan vi sette inn i formelen?
1.493 **Mia**: fire ganger tre pluss to fjorten

Dette var den siste oppgaven de kom til, og hadde tidligere ikke klart å komme fremt til en generell formel for noen av de tidligere oppgavene, samt så klarte de ikke å anvende det gitte eksemplet som denne gruppen fikk. Transkripsjonene viser hvor avhengige de er av oss, for å sortere tankene og forstå det algebraiske objektet, variabelen *n*. Gruppen har tidligere ikke underbygget påstandene sine, og derfor valgte vi som vist i 1.465 å gå inn å være spørrende rundt oppgaven ettersom vi observerte at motivasjonen til gruppen var lav og de var klar til å gå videre til neste time. Ved å stille spørsmålet som vist i transkripsjon 1.467, oppfatter Mia at det må være stolene som er i enden på bordene, og klarer å se sammenhengen. Vi ønsker også å trekke frem variabelen *n*, ettersom denne har vist seg å være et frustrerende algebraisk objekt for gruppen. 1.469 stiller jeg et ledende spørsmål om hva bordene kan stå for, og Lise kobler dette sammen med variabelen. Likevel klarer de ikke å koble sammen at det øker med fire stoler på hvert bord, pluss stolene på endene, og da er de igjen avhengige av oss. 1.474 og 1.475 viser hvordan jeg stiller et ledende spørsmål og de raskt klarer å komme frem til den generelle formelen $4n + 2$. Videre er det vi som styrer avslutningsbetingelsene, ettersom vi ønsker at de skal kontrollere formelen. Gruppen er usikre på hvordan de skal gjøre dette, og vi må stille ledende spørsmål igjen slik at de kan godkjenne det produserte narrativet. Dette er tydelige kjennetegn på at gruppen har en rituell deltakelse i arbeidet med både oppgavene og oppgavene som ansees å være matematiske problem.

Observasjonene viser at gruppen jobber utforskende til tider, men de klarer kun å opprettholde de utforskende rutinene innenfor aritmetikken som vi trekker frem i transkripsjonene nedenfor. Oppgave 1a, som ikke ansees å være en problemløsingsoppgave, viser Mia kjennetegn på de-ritualiseringsprosessen ved at det settes i gang en prosedyre. Hele gruppen er enig i det produserte narrativet, men underbygger det ikke uten at vi spør hvordan de kom frem til svaret. Først da velger Mia å forklare svaret ved hjelp av representasjonen som er gitt i oppgaven.

1.11 **ML:** Hvorfor er det tretten?
1.12 **Lise**: han øker med tre
1.13 **Mia**: og til å begynne med så var det fire.. i liksom.. i den første firkanten .. også 4 + 3.. + 3 + 3 blir tolv... !ja

Lise gir en kort forklaring på at figuren øker med tre, men ikke hvorfor de kom frem til tretten. Mia bygger videre på dette, og viser med figuren at de øker med tre, og må derfor plusse på tre frem til de kommer til figur fire. Hun påpeker i 1.13 at det blir tolv, men de har tidligere sagt tretten og det var dette som ble skrevet ned i boken for å avslutte oppgaven. I denne deloppgaven viser Mia at hun er uavhengig av de andre på gruppen, mens de andre krever en bekreftelse på at dette er et godkjent narrativ som de kan skrive ned, noe som antyder at Mia er innenfor en utforskende deltakelse i aritmetikken.

Vi observerer i gruppe 2 at flere av deltakerne deltar utforskende. I oppgave 2 trekker deltakerne frem ulike heuristiske tilnærminger for å løse oppgaven, noe som gjør dem fleksible. Utdraget nedenfor viser også hvordan de matematiske objektene blir diskutert.

2.57 **Sofie:** så økningen er lik
2.58 **Ine:** nei økningen er ulik
2.59 **Sofie:** åja
2.60 **Ine:** men det er et mønster i økningen
2.61 **Pia:** det øker jo med fire
2.62 **Sofie:** okei
2.63 **Pia:** fordi på den neste her så må vi legge til en, to, tre
2.64 **Ellen:** også men er den ..denne figuren her tjuefire den da?

Som vi ser ovenfor diskuteres det om økningen til figuren, og Ine påpeker at det er et mønster i økningen (2.58). Dette fører til at de kan bruke dette som en input senere i oppgaven, og rutinen er bundet (Lavie, Steiner & Sfard, 2018). Denne økningen tas i bruk som et senere ledd når de skal finne figur fem, og i neste deloppgave hvor de skal finne hvor mange figurer de kan lage med 500 fyrstikker. Dette er en nødvendig egenskap for å delta utforskende, ettersom dette trekket er rettet mot sluttresultatet, altså et godkjent narrativ.

I neste deloppgave, oppgave 2b, ser vi fra starten av at de diskuterer ulike heuristiske tilnærmingsmåter for å sette i gang en prosedyre, altså et tegn på de er fleksible. Diskursen antyder at elevene ikke har vært borti oppgaver som ligner på denne, hvor figurene ikke øker med det samme. Dette gjør at de blir i tvil om de kan finne en formel, og ettersom anvendbarhetsbetingelsene for oppgaven ikke sier noe om dette, velger de å ta i bruk en annen heuristikk.

2.80 **Ellen:** ååja..også figur..men..ehh..hjelper det å lage..tegne formelen da?
2.81 **Pia:** hmm..
2.82 **Sofie:** prøve foreksempel..du kan ta en..øøh
2.83 **Ine:** [vi kan finne økningen..åja..nei..den har vi jo allerede]
2.84 **Ellen**: men går det ann å finne formelen når det er så forskjellig økning?..det er vell ikke samme måte?

2.85 **Pia:** jeg vet ikke
2.86 **Ellen:** eller så kan vi gjøre det på den tungvindte måten
2.87 **Sofie:** det blir veldig tungvindt
2.88 **Ine:** går det ann å gange på en måte?
2.89 **Sofie:** ja..jeg og tenkte det..eller bare foreslå en figur å se om vi har nok fyrstikker

Ellen trekker frem i 2.80 at de kan finne en formel, mens de andre i gruppen uttrykker usikkerhet rundt dette. Senere i diskusjonen velger Ellen (2.86) å påpeke at de kan ta den tungvinte metoden, altså å addere seg frem til svaret. Når prosedyren settes i gang finner de raskt ut at det ikke var en så tungvint metode å ta i bruk ettersom Pia påpeker anvendbarhetsbetingelsene for oppgaven.

2.99 **Pia:** du må huske å legge sammen..alle figurene
2.100 **Ine:** ja for vi har jo femhundre fyrstikker
2.101 **Ellen:** ååja..men då trenger vi ikke å holde på så lenge

Transkripsjonene 2.99 til 2.101 viser at Pia understreker at de må legge antall fyrstikker sammen, og Ine forklarer hvorfor ved å understreke at de kun har femhundre fyrstikker. Den matematiske diskursen i arbeidet med denne oppgaven underbygger det konstruerte narrativet de kommer frem til ved at de forklarer stegene i prosedyren til hverandre. Det konstruerte narrativet de kommer frem til, altså at de kan lage syv figurer med 500 fyrstikker er derimot et feil svar på oppgaven, ettersom du kan lage 8 figurer.

Ved flere anledninger ser vi som nevnt i avslutningsbetingelsene at gruppen er avhengig av Pia for å godkjenne narrativene de produserer. Dette antyder at Pia deltar utforskende i den matematiske diskursen. Hun underbygger narrativene for de andre i gruppen, og til oss når vi spør om en forklaring. Prosedyrene viser også at hun tar egne valg for å løse oppgaven, som nevnt ved å finne formelen allerede i deloppgave 1b, i stedet for å vente til deloppgave 1c. Dette vises også igjen i oppgave 5, da dette så ut til å være den mest utfordrende oppgaven for gruppen.

2.371 **Pia:** [når det er seks så] plusser du bare på to opp også plusser du på.. en to tre fire
2.372 **Ellen**: meeen
2.373 **Sofie**: Hæ
2.374 **Pia**: og da blir det.. fire fem seks syv åtte ni ti på baksiden.. fire ganger ti pluss seks
2.375 **Ellen**: men hvordan blir det ti på hver side når du har fire i lengden .. da blir det en to tre !fire.. fem seks syv åtte ni ti elleve tolv
2.376 **Sofie**: kan du tegne den for oss?
2.377 **Ellen**: nei.. hvorfor?
2.378 **Sofie**: for jeg skjønner ikke
2.379 **Pia**: se da en to tre fire fem seks syv åtte ni ti.. <peker på representasjonen> sant når det er seks oppover det er jo.. den på toppen sant.. nå er det jo fire her
2.380 **Sofie**; ja
2.381 **Pia**: eller må vi plusse på to til? ... det må vi kanskje.. fordi det er jo allerede, vent litt
2.382 **Ine**: det er jo fire der .. også seks høyt da må vi-

2.383 **Pia**: ja da må vi ta to rekker til.. men det blir fortsatt mer.. da blir det fem her nede.. jo det blir det.. fem her nede

Utdraget ovenfor viser hvordan Pia forklarer hvordan hun har løst oppgaven til de andre på gruppen, ettersom de ikke forstår hva hun har gjort. Dette gjør også at Pia (2.381) uttrykker usikkerhet når hun forklarer, og må tilbake for å endre på det hun har gjort. Dette fører til at Pia igjen setter i gang en ny prosedyre, og produserer et narrativ som hun underbygger i 2.383. Vi valgte også å spørre etter en forklaring, noe som igjen underbygger narrativet.

2.401 **ML**; hvordan tenkte dere når dere kom frem til sekstiseks?
2.402 **Pia**: vi tok også egentlig bare fant ei side-
2.403 **Sofie**: en side
2.404 **Pia**: en side også ganget vi med fire også plusset vi seks.. ja vi følgte egentlig bare mønsteret

Når vi spør etter en forklaring (2.401) velger også Sofie å koble seg på, noe som viser at hun har forstått fremgangsmåten. Videre tar Pia (2.404) og forklarer hvordan de kom frem til 66, og dette gjør hun ved å vise sin egen tegning av en side, og representasjonen som er gitt i oppgaven. Dette er en diskursiv prosess som resulterer i nye anerkjente narrativer, som igjen viser at Pia deltar utforskende (Sfard, 2008).

Funnene i analysen rundt elevenes deltagelse i den matematiske diskursen viser at det er tydelige tegn på en ritualisert deltagelse. Dette begrunnes på bakgrunn av avslutningsbetingelsene, ettersom begge gruppene viser at når narrativet er konstruert, skrives det ned og de går videre. Gruppe 1 trekker også frem at de er avhengige av læreren sin, og vi observerer at de er avhengige av oss, hvor vi også velger å hjelpe elevene til å konstruere narrativ. Vi ser tegn til utforskende rutiner ved enkeltelever, for eksempel Mia sin de-ritualiseringsprosess hvor hun underbygger det konstruerte narrativet i deloppgave 1a viser tegn på utforskende rutiner innenfor den aritmetiske diskursen. Funnene fra analysen viser også at gruppe 2 trekker frem flere de-ritualiseringsprosesser som å være fleksible i heuristikken, binder rutinen og underbygger narrativer på bakgrunn av de andre deltagerne og ved at lærer stiller spørsmål.

4.4 Aritmetisk og algebraisk diskurs

Vår problemstilling innebærer å se hvordan elever på 9. trinn deltar i en matematisk diskurs i arbeid med problemløsingsoppgaver knyttet til algebra. Oppgavene som ble gitt til elevene krever matematisk kunnskap innenfor aritmetikk og algebra. For å analysere diskursen har vi valgt å ta for oss kjennetegnene på en algebraisk diskurs, overgangene fra en aritmetisk til en algebraisk diskurs, samt se på de ulike nivåene innenfor en algebraisk diskurs. Ved å ta i bruk de ulike nivåene innenfor en algebraisk diskurs, kan vi se på enkelte deltaker i gruppene for å se i hvilken grad de behersker den algebraiske diskursen. Vi vil videre i kapittelet trekke frem interessante funn fra analysen.

5.4.1 Overgang fra aritmetisk til algebraisk diskurs

Elevene i gruppe 1 observerer vi at ikke klarer overgangen til den algebraiske diskursen. Elevene klarer ikke å bruke tall og bokstaver, i stedet for tall alene. De klarer ikke å arbeide med bokstaver som til tider kan være ukjente, variabler eller parametre (Kieran, 2004). Gruppen hadde utfordringer med å behandle variabelen n i oppgave 1 skrevet på symbolsk form. De prøver å ta i bruk rutebok som tidligere har blitt brukt i undervisning for å prøve å se om de kan finne ut hva variabelen betyr.

1.42 **Sarah:** Hvor mange fyrstikker er det i figur !n
1.43 **Mia:** Jeg husker ikke hvordan det var-
1.44 **Lise:** Var ikke de noe sånn n=.. nei husker ikke
1.45 **Mia**:
1.46 **Lise:** Nja nei men vi har hatt om dette-
1.47 **Sarah:** Hva betyr n i denne oppgaven?
1.48 **Lise:** [Kan jeg bla bak i boka?]
1.49 **Mia:** n er jo figur..nummeret.. er det ikke?-
1.50 **Lise:** n er jo på en måte.. det var sånn F og så var det n i parantes eller noe
1.51 **Sarah:** Det er jo figurnummer.. men det er jo ikke noe nummer det er en bokstav
1.52 **Mia:** [Det er jo F.. n]
1.53 **Lise:** Men det blir på en måte.. det er ikke med tallene

Transkripsjonene 1.41 til 1.53 viser at elevene tidligere har hatt om variable i matematikken. Selv om elevene tidligere har møtt på bokstaver i algebraen, ser vi at elevene ikke klarer å memorere tidligere kunnskaper om hvilken betydning variable n får ved algebraiske figurmønstre. De kommer frem til at bokstaven n står for figurnummer som vist i transkripsjon 1.49-1.51, men klarer ikke å komme frem til hva figurnummer betyr. Dersom en ser på transkripsjon 1.51 trekker Sarah frem at figurnummer ikke er et nummer, men en bokstav, og viser tydelig forvirring rundt at begrepsnavnet figurnummer inneholder ordet nummer, noe hun ikke forstår når det er en bokstav de skal arbeide med. Dette kan tilsi at det er mangel på forståelse for variable, n ved algebraisk diskurs.

I transkripsjonene 1.54 til 1.57 ser vi at elevene ikke klarer å utforme et generelt uttrykk for mønsteret i oppgave 1. De trekker frem ulike måter de kan komme frem fremgangsmåter for å lage et utrykk, men det er tydelig at de ikke vet hvordan de skal gjøre det. Videre i transkripsjonen ser vi at de fortsetter med drøfting av betydningen av n, og hvordan de skal klare å komme frem til et gitt utrykk. De trekker frem flere algebraiske symboler, og ord innenfor den algebraiske diskursen, men klarer ikke å knytte det riktig sammen.

1.54 **Mia:** Er det ikke at vi kan bestemme det da? Hva som skal komme etterpå? (9s) nei.. det står ingenting her
1.55 **Sarah:** Da får vi finne det her da
1.56 **Lise:** Men det var ett eller annet.. husker vi skrev sf først også sånn n i parantes-
1.57 **Mia:** Vi hadde jo sånn diagram flere ganger også skrev vi sånn.. f1, f2, f3, f4.. også bortforbi der igjen skrev vi vell en, to, tre, fire, fem ned
1.63 **Mia:** Nei altså jeg husker det.. men husker ikke hvorfor vi skrev det
1.64 **Lise:** !Det er fordi vi ikke vet hvor mange det er i figuren..så defor brukte vi n eller fordi vi ikke vet hvor mange det er i figuren..det er liksom når vi bruker x ikke sant.. da har vi x- antall.. det er n antall.
1.65 **Mia:** Mhm

Lærer trekker frem eksempelet hvor på fremsiden av oppgavesettet for å prøve å hjelpe elevene å finne en formel, men elevene klarer fortsatt ikke å komme frem til den riktige formelen. I transkripsjonene 1.110-1.129 vist under ser vi at elevene leser gjennom eksempelet og prøver å trekke frem tidligere kunnskaper om hvordan en skal lage et algebraisk uttrykk for variable n. Elevene gir til slutt opp oppgaven da de ikke klare å finne frem en formel, noe som tilsier at elevene ikke klarer å gå fra den aritmetiske diskursen til den algebraiske diskursen (Caspi & Sfard, 2012).

1.110 **Lise:** Jeg husker bare at vi gjorde noe sånn..f også n +3
1.111 **Mia**: [utydelig] også var det – 1 fordi på grunn av en eller annen greie som jeg ikke husker..men skal vi finne ut av figur 4 da..den er jo nærmst figur 3..eller?
1.112 **Sarah**: ja
1.113 **Mia**: det er det jeg har gjort..og da blir jo-
1.124 **Mia**: tretten
1.125 **ML**: Mhm.. n da dersom du setter inn tre vil du få tretten da?
1.126 **Mia**: 4+3 det er..sju.. ● 3.. ehh-
1.127 **Sarah**: tjueen
1.128 **Mia**: og så 3-1..i parantes..to..da blir det ikke det hvertfall
1.129 **Lise**: !nei

På Gruppe 2 observerer vi at en av elevene, Pia, i større grad behersker variable i oppgaver. Hun trekker frem at n, betyr figurnummer og viser at de vet hvordan de skal bruke variabelen ved å løse oppgaven og støtte opp med forklaring. Transkripsjonene 2.17 til 2.24 viser at Pia løser oppgaven hvor de skal finne et utrykk for n, og at hun støtter opp svaret sitt med forklaring.

2.17 **Pia:** C..skal vi finne formelen nå?
2.18 **Ellen:** ja
2.19 **Pia:** da er det
2.20 **Ellen:** det var økning også var det..i den første..fire og tre..pluss tre

2.21 **Pia:** 3n+1
2.22 **Sofie:** [er det ikke fire n..4n]
2.23 **Ellen**: 3n+1..men hvorfor kan det være pluss en da..det øker jo med tre? <peker på figuren>
2.24 **Pia:** tre det er økningen..n det er jo figurtallet..og det er en..derfor blir det..3 ● 1 og det blir jo tre og den første er det jo fire derfor må vi plusse på en..hvis vi tar neste da så blir det jo 3 ● 2 som er seks og her er det syv <peker på figurene> derfor plusser vi på en

Det observeres at de andre elevene i gruppen deltar aktivt på oppgavene, men det blir vanskelig å si noe om de andre elevene på gruppen behersker og forstår variable. Grunnen til dette er at Pia allerede har formelen klar før de andre på gruppen får mulighet til å uttrykke seg. Pia gjør også en tydelig kobling mellom formell og uformell algebra ved å forklare hvordan hun tenker i transkripsjon 2.24. De sier seg heller enig med det Pia trekker frem, enn å prøve å forklare hvorfor.

5.4.2 De ulike nivåene i den algebraiske diskursen

Som tidligere nevnt observerer vi at gruppe 1, ikke klarer å komme seg fra den aritmetiske diskursen til algebraiske diskursen. Det betyr at det ikke kan analyseres hvilket nivå i den algebraiske diskursen gruppen er på. Gruppe 2 observerer vi at tar i bruk den algebraiske diskursen, og vi skal derfor ut ifra innsamlet data, analysere om elevene befinner seg på prosessuelt nivå, granulært nivå, eller objektiviserende nivå (Caspi & Sfard, 2012).

Vi observerer som nevnt i forrige delkapittel at Pia behersker å finne formler for en hvilken som helst figur n. Dersom vi ser på tabell 3, i kapittel 2.5.2 ser vi at på bakgrunn av at Pia klarer å finne frem til en formel, og presisere hva formelen betyr, viser hun at hun klarer å delta i den algebraiske diskursen på et granulært nivå (nivå 2)(Caspi & Sfard, 2012). I den granulære diskursen observerer vi at Pia bruker et formelt språk, hvor hun tar i bruk uttrykket og ikke bare beskriver komplekse kalkulasjoner som vist i tidligere transkripsjon 2.17 til 2.24 (Caspi & Sfard, 2012). Vi observere også at Pia foretrekker å finne formel for å løse oppgaver, selv om det ikke er oppgitt i oppgaven at de skal finne formelen som vist i transkripsjonene 2.298 til 2.303, fra oppgave 2.

2.298 **Ellen**: hundre og to hvite perler.. !Ja da må vi gjøre sånn som jeg gjorde her.. seks.. så blir økning fire.. også blir det ti her pluss fire hele tiden.. pluss fire pluss fire pluss fire ((gjentar seg for å påpeke poenget))
2.299 **Sofie**: fjorten? ... ja
2.300 **Ellen**: så da kan vi bare plusse
2.301 **Pia**: eller finne formelen
2.302 **Sofie**: Ja det er kanskje lettere å finne formelen-
2.303 **Ellen**: [ja det kan du]

De andre elevene på gruppe 2, observeres å være på det prosessuelle nivået i den algebraiske diskursen. Transkripsjonene 2.57 til 2.63 viser at elevene klarer å finne økningen, og mønsteret til oppgavene ved en lineær rekkefølge på generaliseringen (Caspi & Sfard, 2012). Transkripsjonene viser også at de bruke økningen for å generalisere mønsteret.

2.57 **Sofie:** så økningen er lik
2.58 **Ine:** nei økningen er ulik
2.59 **Sofie:** åja
2.60 **Ine:** men det er et mønster i økningen
2.61 **Pia:** det øker jo med fire
2.62 **Sofie:** okei
2.63 **Pia:** fordi på den neste her så må vi legge til en, to, tre

Vi observerer at Ellen nevner å finne formel for å løse oppgave 2, som vist i transkripsjonene 2.78 til 2.80. Ellen viser i transkripsjonene at hun har kunnskapen om at det er mulig å lage en formel for å løse oppgaven. Selv om hun trekker frem at de kan bruke en formel observeres hun som nølende. I transkripsjon 2.80, og 2.84 ser vi at hun trekker frem formelbegrepet, men virker nølende i språket, påvirkes av at økningen er forskjellig og klarer derfor ikke å finne frem til en formel. Hun blir derfor værende på det prosessuelle nivået (nivå 1), og klarer ikke å komme seg over på det granulære nivået (nivå 2).

2.78 **Sofie:** hva er b´en da?

2.79 **Pia:** du har femhundre fyrstikker så skal du fortsette i det samme mønsteret og se hvor mange figurer du klarer å lage
2.80 **Ellen:** ååja..også figur..men..ehh..hjelper det å lage..tegne formelen da?
2.84 **Ellen**: men går det ann å finne formelen når det er så forskjellig økning?..det er vell ikke samme måte?

Sofie, Ellen og Ine benytter seg vekselvis av en uformell og en formell tilnærming til det prosessuelle nivået i den algebraiske diskursen. De stiller spørsmål til hvordan de kan finne elementer som kan hjelpe dem å finne mønsteret, eksempelvis økningen. Elevene viser i transkripsjon 2.237 til 2.242 at de benytter seg av en uformell algebraisk diskurs da de ikke fremhever noen form for symbolsk algebra.

2.237 **Pia:** dersom vi tar ett bord..da har vi seks stoler på ett bord..og så øker det med fire stoler for hvert småbord
2.238 **Sofie:** så da kan vi finne-
2.239 **Pia:** jo di øker jo med fire da..for når vi begynner med ett bord.. har vi jo en stol på hver ende..og så øker det jo hele tiden med fire.. det blir jo riktig med økninge med fire..blir det ikke det?
2.240 **Ine:** !jo

2.241 **Pia:** ja det gjør det
2.242 **Ine:** for hvis det bare er to bord så er de jo på den andre enden
2.243 **Pia:** så det øker hele tiden med fire..4n.. på d

Vi observerer at selv om de i noen sammenhenger bruker en uformell tilnærming til diskursen, benytter de seg i andre sammenhenger av variabelen gitt i oppgaven, n. I transkripsjonen 2.243 ser vi at elevene trekker frem variablen n, og bruker den som variabel, noe som kjennetegner en formell tilnærming til den algebraiske diskursen på et prosessuelt nivå (Caspi & Sfard, 2012).

På bakgrunn av analysen av algebraisk og aritmetisk diskurs har velger vi i korte trekk å trekke frem funnene for analysen av kapittelet. Overgangen mellom aritmetisk og algebraisk diskurs oppleves som utfordrende når elevene ikke klarer å se sammenhengen og ikke klarer å knytte det uformelle med det formelle. Elevene med manglende kunnskap innenfor bruken av algebraiske objekter velger da å gå tilbake til den aritmetiske diskursen når de introduseres for de algebraiske istedenfor å gå over i den algebraiske diskursen.

Elevene som klarer å beherske den algebraiske diskursen kjennetegnes ved de ulike nivåene i diskursen. Funnene ved analysering av kjennetegn ved de ulike nivåene i diskursen er at:
Elevene på det prosessuelle nivået er kjent med ulike algebraiske objekter, og at de klarer å finne elementer som hjelper dem å finne frem til et mønster. Elevene på det granulære nivået behersker arbeidet med variable, og tall og bokstaver. Det som skiller elevene fra det prosessuelle og det granulære nivået observeres å være at elevene på det granulære nivået klarer å lage en formel for et gitt utrykk.

5 Diskusjon

Vi har analysert to grupper fra 9. trinn sin deltagelse i en felles matematisk diskurs av problemløsingsoppgaver knyttet til algebra. Vi har funnet ut hva som kjennetegner diskursen når elevene møter et matematisk problem, og hva som kjennetegner diskursen når elevene møter en øvelse (eng: exercise). Funnene viser også i hvilken grad elevene deltar i en algebraisk diskurs, og hvordan de ikke klarer å komme seg inn i den algebraiske diskursen, dette begrunnes ut fra modellen til Caspi og Sfard (2012). Den matematiske diskursen viser også et skille i gruppene hvor de fleste hare en ritualiserende deltakelse, men vi ser til tider tegn på utforskende deltakelse hos enkelt elever. Særlig er det tydelig at diskursen er mer rituell i overgangen fra aritmetikk til algebra. Elever som også er på et høyere algebraisk nivå er den som styrer den matematiske diskursen, ettersom de andre støtter seg på denne personen. I avsnitt 5.1 ser vi på elevenes avslutningsbetingelser. Videre i avsnitt 5.2 ser vi på overgangen mellom den aritmetiske diskursen til den algebraiske diskursen. Vi vil så i avsnitt 5.3 ser vi på elevenes heuristikk, altså rutinens hvordan. I avsnitt 5.4 trekker vi frem kjennetegnene på problemløsingsoppgaver. Avslutningsvis i avsnitt 5.5 vil vi diskutere kvaliteten på studien. Funnene skal diskuteres opp mot tidligere forskning og antyde implikasjoner for undervisning og videre forskning.

5.1 Avslutningsbetingelser

Funnene i denne studien viser at avslutningsbetingelsene styrer hvorvidt elevene får anledning til å utforske. Analysen antyder at elevene har få metaregler å basere på hva som er en vellykket avslutning av en rutine. Studien belyser at begge gruppene avslutter en oppgave ved å skrive ned svaret i boken, for så å gå videre på neste oppgave. Dette antyder at elevene har opparbeidet seg rutiner hvor det å skrive svaret ned i boken oppfyller avslutningsbetingelsene, dersom alle deltagerne i gruppen er enig, noe som er et tegn på rituell deltagelse. Det påpekes også fra en elev på gruppe 1 at de er vant til at læreren går grundig gjennom hvordan de skal løse oppgaver, for så å jobbe med det videre. Dette kan antyde at elevene er vant med tradisjonell undervisning. Sfard (2008) understreker at elever som deltar rituelt tar andre utøvernes regler i betraktning, og gjør nøyaktig det som de gjør. Tradisjonell undervisning hvor lærer går gjennom en løsningsmetode, gjerne i form av et eksempel, og elevene kan jobbe med denne etterpå fremmer nettopp disse aspektene ved en rituell rutine.

Eleven som presterer på et høyere nivå innenfor den algebraiske diskursen underbygger i noen tilfeller de konstruerte narrativene som en avslutningsbetingelse, og dette gjøres på bakgrunn av at de andre deltagerne ikke forstår hva som er blitt gjort. I det de andre deltagerne stiller seg spørrende til eleven som har konstruert narrativet, settes i gang en rutine ved å underbygge narrativet. Når eleven underbygger innebærer det å forklare hvorfor, vise hvorfor og uttrykke forståelse uten å henvise til prosessen (Sfard, 2008, Lavie, Steiner & Sfard, 2018). Dette er både et sentralt trekk i en utforskende rutine, samt et kjennetegn for de-ritualiseringsprosessen. En lærer kan føre inn denne metareglen, underbyggelse av narrativer, ved å stille seg spørrende til elevenes konstruerte narrativer. Dette valgte vi å gjøre i studien, hvor vi avbrutte avslutningsbetingelsen til gruppe 2 ved å stille spørsmålet hvordan de kom frem til det konstruerte narrativet. Eleven på et høyere nivå innen den algebraiske diskursen tok muligheten til å underbygge narrativet ved å forklare og vise hvorfor uten å ta for seg prosessen. Dette viser hvor viktig det er for lærere å endre avslutningsbetingelsen ved å forvente at elevene underbygger det de svarer, altså at læreren fremmer utforskende rutiner (Sfard, 2008, Lavie, Steiner & Sfard, 2018). Gruppe 2 viser også de-ritualiseringsprosesser i arbeidet med oppgave 2b som de anser som et matematisk problem ved å være fleksible og binder sammen ledd til en mer sammensatt rutine. Den diskursive prosessen fører til at elevene konstruerer et nytt narrativ, men er feil. Sfard (2008) hevder at en utforskende rutine er en diskursiv prosess som resulterer i nye anerkjennelige narrativer og narrativene skal godkjennes. Elevene viser tegn på utforskende rutiner, men produserer ikke et godkjent narrativ, og de underbygger heller ikke narrativet. Dersom elevene hadde underbygget narrativet sitt, enten rituelt ved å vise til prosessen, eller utforskende ved å ikke ta hensyn til prosessen, kunne de ha sett hvor feilen oppstår. Det vi stiller oss spørrende til er dersom elevene viser flere tegn til utforskende deltagelse, men konstruerer et feil narrativ, kan det da fremstilles som en utforskende rutine.
I følge Sfard (2008) skal det være tråd med den matematiske diskursen slik den oppfattes av eksperter, men samtidig være konstruert mange narrativer som ikke er riktige gjennom tidenes. Selv om narrativene ikke anses som riktige, blir prosessen fremdeles sett på som utforskende.

Deltagelsen i den matematiske diskursen for gruppe 1 kan antyde at de deltar i et ad hoc-mønster (Sfard, 2008). Dette innebærer at elevene ikke har rutiner som passer med situasjonen de selv opplever, men prøver å anvende noe fra tidligere, kjente situasjoner. Dette ser vi når gruppe 1 prøver å memorere tidligere oppgaver. Sfard (2008) understreker også at dette ofte skjer i skolen når en er en nykommer i en diskurs, noe som funnene påpeker, at de er noviser innenfor den algebraiske diskursen. På bakgrunn av at Pia styrer den matematiske diskursen for gruppe 2, er det derfor vanskelig å plassere resten av deltagerne innenfor et diskursivt mønster. Sfard (2017) diskuterer også at elever som deltar rituelt kan skyldes at de ikke har møtt en diskurs i matematikken som gjør at de kan delta utforskende. De har ikke lært metareglene for en utforskende deltagelse. De kjenner heller ikke til metareglene og vet ikke engang at de eksisterer, og på bakgrunn av dette gjør elevene det de tror vi forventer av dem. Dette er også noe vi ser hos gruppe 1 i analysen vår, hvor de er opptatt av hva den andre gruppen kommer til å gjøre, noe som kan antyde at vi forventer en lik deltagelse fra begge gruppene. Sfard (2008) mener at elevenes metaregler ikke kan utvikles raskt, og dette begrunnes med at det tar lang tid å bli vant med nye regler i en diskurs.

Som nevnt innledningsvis viser funnene i analysen at avslutningsbetingelsene styrer hvorvidt elevene får muligheten til å utforske. Vi ønsker å trekke frem oppgavene i oppgavesettet som er gitt til elevene. Dersom oppgavene hadde vært formulert på en annen måte, kunne dette kanskje satt i gang utforskende rutiner. Oppgavesettet vi delte ut deler en del av de samme delspørsmålene, hvor de skal finne et antall til et bestem figur nummer, deretter finne et nytt antall til et annet bestemt figur nummer, og avslutningsvis antallet i figur n. Oppgave 2 og 3 har vi utelukket å spørsmålet om å lage en generell formel for figuren. Ved å endre oppgavene kunne det gitt andre forutsetninger, og kanskje satt i gang utforskende rutiner. En eksempeloppgave i arbeidet med figurtall som Matematikksenteret (u.å.) trekker frem er et tårnproblem. Elevene skal bygge et tårn med terninger, og får oppgaver knyttet til dette. Figur 16 viser hvordan den første deloppgaven er utformet.

- **Bygg et tårn med terninger. Det vil si at du setter terningene opp på hverandre. Tell antall synlige sider og noter svarene i tabellen.**

Antall terninger	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Antall synlige sider									

Figur 16: Deloppgave 1 knyttet til figurtall (Matematikksenteret u.å.)

I stedet for at elevene skal finne antall i et bestemt figurnummer, får de her muligheten til å bygge og finne antallet på de ni første figurene i tårnet først. Videre på neste deloppgave skal de prøve å finne en sammenheng mellom antall terninger og antall synlige sider, og deretter skrive ned sammenhengen med ord. I stedet for å formulere oppgaven ved å trekke frem det algebraiske objektet n, kan de i denne formuleringen utarbeide seg en regel på bakgrunn av sin egen kompetanse. Dermed får de kjangsen til å vise uformell algebra, dersom de for eksempel ikke kan bli plassert i et nivå innenfor den algebraiske diskursen. Funnene i vår analyse tilsier nettopp dette, når det algebraiske objektet n er formulert i oppgaveteksten, klarer ikke elevene i gruppe 1 å avslutte oppgaven, derfor kan en slik tilnærming endre avslutningsbetingelsene. Oppgaven fortsetter ved å sette opp en ny tabell, se figur 17.

- **Bruk denne sammenhengen for å finne antall synlige sider i flere tårn.**

Antall terninger	15	20	30	50	100	1000	10000
Antall synlige sider							

Figur 17: Deloppgave knyttet til figurtall (Matematikksenteret u.å.)

Denne tabellen trekker frem et høyere antall terninger, altså her må de ta i bruk sammenhengen som de gav i forrige deloppgave og kontrollere den på et høyere antall figurer. Dette kan føre til en form for underbyggelse av det tidligere konstruerte narrativet, ettersom de skal kontrollere den. Videre er det også et kjennetegn fra de-ritualiseringsprosessen hvor de binder sammen leddene noe som fører til en mer sammensatt rutine (Sfard, 2008). Den siste deloppgaven spør om elevene klarer å finne løsningen med regelen som er blitt skrevet tidligere, eller om de måtte endre noe for å finne antall sider i høye tårn, deretter skal de notere den nye regelen. Dette er en helt annen utforming av en oppgave knyttet til mønsteralgebra enn det som er gitt i vår studie. Denne type oppgaver kan skape avslutningsbetingelser som fremmer underbyggelse av narrativer, samt den kan trekke frem ulike kjennetegn på en de-ritualiseringsprosess. Dette er ikke noe vi kan konkludere med ettersom det trengs mer forskning innenfor dette feltet. Et spennende forskningsprosjekt for videre forskning kan være å se på hvordan utformingen av oppgaver kan endre elevenes avslutningsbetingelser.

5.2 Den matematiske diskursen

Resultatene fra undersøkelsen viser at elevene sin deltagelse i den algebraiske diskursen er knyttet til hvilket nivå vi kan plassere dem innenfor modellen til Caspi & Sfard (2012). Vi ser at det å gi oppgaver som inneholder det algebraiske objektet n, som de fleste oppgavene inneholder, er en invitasjon til den algebraiske diskursen.

Overgangen fra aritmetisk til algebraisk diskurs oppleves som utfordrende for elevene. Kieran (2004) belyser at overgangen mellom aritmetikken og den algebraiske diskursen krever justeringer. Analysen av den algebraiske diskursen viser at gruppe 1 har utfordringer med justeringene som må gjøres for å kunne delta i den algebraiske diskursen. Elevene viser at de har kjennskap til flere ulike algebraiske objekter. De prøver å sammenfatte hva de ulike objektene tyder, men klarer ikke å knytte objektene sammen. De sliter med å finne relasjonen mellom tallene og de ulike algebraiske objektene i oppgavene (Kieran, 2004). Utfordringene i møtet med de ulike algebraiske objektene kommer trolig blant annet av at de ikke klarer å akseptere at et svar ikke nødvendigvis trenger å være et tall, men at det kan være en sammensetning av tall og bokstaver (Kieran, 2004). Derimot klarer gruppe 2 å skifte fokuset fra numeriske beregninger til relasjoner mellom tallene. Tidlig i oppgavene viser de at de forstår at de skal bruke økning mellom figurene for å finne frem til svaret i oppgavene. Selv om gruppe 2 klarer å komme over i den algebraiske diskursen, viser analysen at elevene er raske med å gå over til den aritmetiske diskursen dersom de ser at de har mulighet til det. Det er kun den ene eleven som tydelig er på et høyere nivå i den algebraiske diskursen som foreslår å bruke objekter fra den algebraiske diskursen for å løse oppgavene. Vekslingen mellom de to ulike diskursene kan tyde på at elevene ikke føler seg helt trygge i den algebraiske diskursen da den ikke følger de samme metareglene som den aritmetiske diskursen (Booth, 1998). En annen grunn kan være at de har mangel på kunnskap om de symbolske mediatorene, og at de ikke forstår meningen med å bruke symboler og ikke tall (Caspi & Sfard, 2012).

Elevene arbeider på grupper gjennom hele timen. Som nevnt ovenfor viser funnene at overgangen mellom aritmetisk og algebraisk diskurs er utfordrende for elevene, og det samme er samarbeidet mellom elever på ulikt nivå innen algebraisk diskurs. Dette fordi de oppfatter symboler og begreper knyttet til algebra på ulike måter, grunnet de ulike nivåforskjellene. Det kommer tydelig frem at gruppe 1 har en bedre kultur for samarbeid innad i gruppen, noe som kan tyde på at de er i den samme diskursen. Det vil si at de har den samme forståelsen for hva som ligger i de ulike begrepene de velger å ta i bruk. Samarbeidet på gruppe 2 viser seg å være mer utfordrende da elevene er i ulike nivåer i diskursen. Noen av elevene veksler frem og tilbake, mens andre er i den algebraiske diskursen, men på forskjellige nivåer. Det kan derfor oppstå vanskelighet for samarbeid da noen elever er på et høyere nivå, og for eksempel anvender andre prosedyrer enn elevene på et lavere nivå. Elevene på et lavere nivå vil derfor ikke klare å delta i diskursen på grunn av mangel på forståelse for bruk av prosedyrer på et høyere nivå innenfor den algebraiske diskursen (Caspi & Sfard, 2012). Samarbeidet mellom elevene på ulike nivå kan også oppleves som problematisk da eleven som befinner seg på et høyere nivå har mulighet til å ta over og styre den matematiske diskursen. Analysen viser at elevene på gruppe 2, ved flere oppgaver blir styrt av eleven som er på et høyere nivå enn de andre, og at de derfor ikke får mulighet til å kunne delta i diskursen på bakgrunn av overstyring. Dette betyr ikke at de ikke skal arbeide sammen, men at det fordrer en annen type samarbeid enn det vi observerte. Det trengs ny forskning på hvordan man kan binde sammen disse to diskursene bedre for elevene, samt som å se på hvor viktig det er for elevene at de forstår det er en kobling mellom den formelle og uformelle matematikken, og helt eksplisitt hva den er i et gitt tilfelle. Det kan for eksempel være hva *n* representerer.

I tråd med Caspi & Sfard (2012) må noe gjøres for å at overgangen mellom nivåene i den algebraiske diskursen skal oppleves som mindre utfordrende for elevene. Det kan for eksempel tenkes at lærere i høyere grad burde være bindeledd mellom formell og uformell algebra, da elevene trenger å lære hva begrepene betyr. Som nevnt i avslutningsbetingelsene ser vi at oppgavesettet vårt kanskje burde vært formulert på en annen måte. Dette ønsker vi å trekke frem og diskutere for den matematiske diskursen. Oppgavesettet våres inneholder flere oppgaver som har det algebraiske objektet n, hvor dette skulle være en invitasjon for elevene til den algebraiske diskursen. I studien til Caspi og Sfard (2012) ser vi at de har utformet oppgaveteksten på en annen måte, som vist i figur 18.

Given the sequence: 4, 7, 10, 13, 16 ….
1. Write the next three elements of the sequence
2. What number appears in the 20th place in the sequence?
3. What number appears in the 50th place in the sequence?
4. Write a rule for calculating any number [literally: a number that appears in any place] in the sequence

Figur 18: Første oppgaven i studien til Caspi og Sfard (2012)

De tre første deloppgavene, 1, 2 og 3, er utformet på lik måte som vi tar for oss i oppgavesettet vårt. Oppgave 1 ønsker å få frem de tre neste tallene i tallrekken. Oppgave 2 ønsker å finne ut hvilket tall som kommer på 20. plassen i tallrekken, og oppgave 3 ønsker å finne ut hvilket tall som kommer på 50. plassen i tallrekken. Forskjellen mellom vår oppgave og Caspi og Sfard sin er at de vil få elevene til å skrive en generell regel for tallrekken uten å trekke frem algebraiske symboler. Ved å utforme oppgaveteksten på en lignende måte som Caspi og Sfard gjør, trenger ikke elevene å kjenne til algebraiske begreper. I studien deres har ikke elevene blitt introdusert for formell algebra, og i stedet for algebraiske symboler tar elevene i bruk tomme firkanter som en symbolsk mediator, og elevene på 5. trinn velger å sette en strek for å representere at det skal stå et tall oppå. Gjennomføringen av denne type oppgaver kan lede opp til at elevene får utforske variable begrepet i større grad enn dersom det kun blir presentert og rituelt behandlet. Funnene i analysen viser at på bakgrunn av det algebraiske objektet n, klarer de ikke å komme inn i den algebraiske diskursen, og dermed kan vi ikke plassere dem innenfor et nivå. Dette kan også tyde på at elevene på gruppe 1 har kun rituelt behandlet det algebraiske objektet n, og er avhengig av andre for å ta det i bruk når det presenteres i en oppgavesituasjon. Studien til Caspi og Sfard belyser at elevene på 5. trinn er innenfor nivå 1 i den uformelle algebraiske diskursen, og elevene på 7. trinn kan plasseres på grensen til nivå 2 innenfor den uformelle algebraiske diskursen. Dette er noe som trenger mer forskning på, først på bakgrunn av at modellen for nivåene i den algebraiske diskursen ikke er fullstendig beskrevet, og vi oppfatter den som vanskelig å forstå. Med mer forskning innenfor dette feltet kan det bidra til å utarbeide flere kjennetegn innenfor de ulike nivåene, noe som også kan føre til at den vil bli enklere å oppfatte.

5.3 Elevenes heuristikker (eng: the when)

Studien viser at elevene har ulike rutiner for hvordan de velger å løse et problem. De to ulike gruppene benytter seg av ulike heuristikker, og de har utarbeidet rutiner innenfor en rituell tilnærming, og en utforskende tilnærming (Sfard, 2008). Det er ulike grunner til valg av heuristikker, og Sfard poengterer at det anvendbarhetsbetingelsene som påvirker valgene elevene tar. Dette er det vi ønsker å drøfte videre i dette delkapittelet.

Et at funnene i studien er at elevenes bruk av heuristikker endrer karakter når problemet blir for stort. Elevene endrer fra å ta i bruk matematiske heuristikker til generelle, de endrer ornitologi. Det vil si at elevenes anvendbarhetsbetingelser er å lese oppgaven, men så snart de skal i gang med

planlegging av prosedyre endres karakteren når problemet blir for stort. Gruppe 1 i studien opplevde tidlig at problemet de skulle løse ble for stort, og valgte da å benytte seg av generelle heuristikker og ikke de matematiske. De begynte å bla tilbake i boken, og søke etter definisjoner og generell hjelp på internett. Det kan antyde at elevene er vant til å arbeide rituelt, altså å gjøre det de tror læreren forventer av dem, og ved å gjøre nøyaktig det andre mennesker gjør eller som de selv har gjort før. Gruppe 1 trekker også frem at de kunne ønske at læreren deres var tilstedte da han alltid pleide å ha en gjennomgang på tavlen, hvor elevene skrev ned eksemplene og arbeidet med disse som hjelp gjennom andre oppgaver.
Det er ikke bare når problemet blir for stort vi ser at elevene tar i bruk de generelle heuristikkene. Elevene i gruppe 1 tar i bruk de generelle heuristikkene når de møter på symboler og ord som de tilsynelatende kun har behandlet rituelt tidligere. Lavie, Steiner & Sfard (2018) hevder at det ikke er noen annen måte å starte en prosess på enn rituelt dersom de møter en ny diskurs, som for eksempel skjer når elevene i gruppe 1 møter variable n. Elevenes tidligere utsagn om hvordan læreren driver matematikkundervisningen i klassen kan antyde at elevene ikke har innarbeidet nok matematiske strategier for å angripe problemer de ikke kjenner til. Her er det viktig å påpeke at det ikke er noe galt i å søke på internett og ta i bruk andre ressurser for å finne informasjon. Det er mangelen på en matematisk heuristikk som påpeke, og at søking på internett og bøker ofte blir sett på som rituelt.

I gruppe 2 kunne den ene eleven plasseres på et høyere nivå innenfor den algebraiske diskursen enn de andre på gruppen. Som tidligere nevnt i 5.2 påpekes det at samarbeid mellom elever på ulike nivåer i en diskurs kan være utfordrende. I analysen på gruppe 2 ser vi på bakgrunn av at den ene eleven er på et høyere nivå, har eleven en høyere autoritet i gruppen. Det vil si at elevenes heuristikker blir bestemt ut ifra hvilke heuristikker elevene på det høyeste nivået ønsker å ta i bruk. Dette gjør at de andre elevene i gruppen ikke får deltatt på rutinens hvordan (the how).

5.4 Kjennetegn på problemløsing

Vi har gjennomgått flere definisjoner til problemløsing (Polya, 2004; Schoenfeld, 1993; Bjökqvist, 2003; Boesen, 2006). Funnene i analysen viser at når elevene oppfatter en oppgave som et matematisk problem uttrykker de usikkerhet i problemløsingsdiskursen. Gruppe 1 uttrykker usikkerhet rundt det algebraiske objektet n som blir presentert i oppgaveteksten, og som Schoenfeld (1993) belyser i sin modell knyttet til problemløsingsprosessen at de to første fasene i arbeidet med et matematisk problem å lese og analyse. Polya (1957) kaller denne fasen et behov for å forstå problemet. Elevene i gruppe 1 klarer dermed ikke å komme seg videre i problemløsingsfasene, ettersom de ikke klarer å forstå problemet og gir opp. Lærere som underviser i matematikk må derfor poengtere at usikkerhet er bra, og videre trene elever til å være utholdende i usikkerhet. Begge gruppene uttrykker usikkerhet rundt de ulike heuristikkene som de vil ta i bruk, og som Boesen (2006) trekker frem er et matematisk problem en oppgave hvor de ikke kjenner til den rette løsningsmetoden. Videre viser funnene at når en oppgave oppfattes som et problem, er diskursen preget av diskusjonen rundt hvilken heuristikk de skal ta i bruk for å løse problemet. Dersom elevene ikke kjenner til rett løsningsmetode, og diskuterer de ulike heuristikkene, kan de uttrykke usikkerhet, og på bakgrunn av dette er usikkerhet og diskusjon rundt hvilke heuristikker som skal brukes kjennetegn på problemløsing.

Definisjonene til problemløsing trekker frem at et matematisk problem er subjektivt, altså individrelatert (Polya, 2004; Schoenfeld, 1993; Björkqvist, 2003; Boesen, 2006; Yan & Lianghuo, 2006). Funnene i studien fremhever dette tydelig, hvor en elev oppfatter oppgaven som en øvelse (eng: excercise). Videre ser vi at eleven velger å starte prosedyren og løse oppgaven, og de andre deltagerne på gruppen klarer ikke å oppfatte hva som er blitt gjort. Dette kan antyde at de andre deltagerne oppfatter det som et matematisk problem, men ettersom de ikke fikk bli med i diskursen, kan vi ikke konkludere med noe. Dette fører til at eleven som løste oppgaven, underbygger narrativet sitt med å henvise til prosessen, og de andre sier seg enige i det som er blitt gjort. Sfard (2008) belyser at det er kun det som blir sagt og gjort som skal analyseres, og det er ikke mulig å observere elevenes kommunikasjon med seg selv. Videre påpekes det at læring skjer gjennom endring i diskursen. Vi trekker frem muligheten for at de andre deltagerne i gruppene kanskje ikke forstod forklaringen og prosessen for å løse oppgaven, og på bakgrunn av dette ender de ikke opp med en endring i diskursen ved å tilføye det nye narrativet. Ved at en elev tar styringen for diskursen på bakgrunn av de selv ikke oppfatter oppgaven som et problem, gjør at de andre elevene ikke får delta i diskursen, og innenfor det kommognitive rammeverket er det deltagelsen som også gir personlig intellektuell utvikling. Videre ønsker vi å diskutere hvordan en kan tilordne problemløsing i grupper slik at alle elever deltar på lik linje uavhengig av nivåer innenfor den algebraiske diskursen.

PISA-rammeverket har utarbeidet en tabell som viser hvilke kompetanser en trenger i arbeidet med problemløsing i grupper, som vist i tabell 2.Som nevnt i kapittel 2.4.1 presenterer venstre siden av tabell 2 de samme fasene som Schoenfeld (1993) og Polya (1957) trekker frem i sine problemløsingsmodeller. Forskjellen her er at tabellen ovenfor tar utgangspunkt i problemløsingsaktiviteten som en gruppe. Ved å innføre en slik tilnærming i klasserommet, kan det føre til at elevene får muligheten til å delta på lik linje. Dette begrunner vi med at her må gruppene diskutere meningen med problemet, utarbeide en felles forståelse for problemet, tildele ulike oppgaver og kontrollere narrativene som er blitt konstruert.

5.5 Kvaliteten på undersøkelsen

I denne undersøkelsen har vi undersøkt syv elever delt på to grupper sin diskurs i problemløsingsoppgaver knyttet til algebra. De metodiske valgene vi har tatt i bruk for studien har hjulpet oss til å beskrive kjennetegn på elevenes deltagelse i en matematisk diskurs innenfor aritmetikk, algebra og problemløsing. Det at vi har brukt videoopptak og var til stede for å observere elevene under arbeidet har gjort at vi får et helhetsbilde av elevene sin matematiske diskurs. Oppgavesettet som ble utdelt inneholdt oppgaver som både var matematiske problem og øvelser (eng: excercise). Formuleringen av oppgavene gjorde det vanskelig for den ene gruppen til å komme inn i den algebraiske diskursen, noe som vi har diskutert og trenger mer forskning på.

Studien inneholder kun observasjoner av syv elever, og på bakgrunn av dette kan vi ikke generalisere resultatene til andre elever. Studien tar likevel for seg hvordan elever kan delta i en diskurs i arbeid med problemløsingsoppgaver knyttet til mønsteralgebra, og trekker frem ulike kjennetegn på denne deltagelsen. Studien kan inspirere lærere til å reflektere over hvilket nivå elevene deltar i den algebraiske diskursen, samt bidra til overgangen mellom den aritmetiske- og algebraiske diskursen, hvor funnene i denne studien viser at er vanskelig.

Vi mener studien gir verdifull informasjon om hvordan elever kan delta i en matematisk diskurs knyttet til både problemløsing, aritmetikk og algebra. Studien tar også for seg hvordan en kan bruke Sfard (2008) sitt kommognitive rammeverk for å identifisere kjennetegn ved elevers deltagelse i en matematisk diskurs, samt som studien har vært med på å bidra til å utvikle Caspi og Sfard (2012) sin modell over den algebraiske diskursen.

6 Avslutning

Denne masteroppgaven tar i bruk det kommognitive rammeverket for å undersøke elevers arbeid med problemløsingsoppgaver knyttet til algebra. Utgangspunktet for studien var å rette fokuset mot og øke kunnskapen om grunnskoleelevers arbeid med problemløsing innen algebra. I forbindelse med dette utarbeidet vi problemstillingen: «Hva kjennetegner en gruppe 9. trinns elevers deltakelse i en matematisk diskurs i arbeid med problemløsing innen algebra?». På bakgrunn av at vi ønsket å se på elevenes diskurs, valgte vi også å fokusere på elevenes rutiner. Gjennom analysen av datamaterialet ser vi hva som kjennetegner problemløsing for elevene. Funnene støtter Boesen (2006) sin definisjon på hva problemløsing er, samtidig ser vi i studien vår at problemløsingsdiskursen er preget av usikkerhet og innebærer diskusjon av hvilke heuristikker de skal ta i bruk. Videre ser vi at gruppearbeidet som ble gjennomført i studien er ikke tilstrekkelig nok for at alle elevene skal oppleve læring. Ifølge Sfard (2008) så skjer læring gjennom endring av diskursen, hvor de tilfører nye godkjente narrativer til diskursen. Funnene viser at elever som er på et høyere nivå innenfor den algebraiske diskursen kan være de som styrer diskursen, noe som gjør at de andre deltagerne ikke får delta på lik linje. Ved å lære elevene hvordan de kan samarbeide under problemløsingsoppgaver, ved for eksempel å ta utgangspunkt i tabell 6, som viser ulike kompetanser i problemløsing for grupper, kan dette være med på at elever får delta på lik linje i den matematiske diskursen.

Analyse og diskusjon på bakgrunn av det kommognitive rammeverket antyder at deltagelsen til gruppene var hovedsakelig en ritualisert deltagelse, men med tegn på utforskning. Dette gjelder spesielt innenfor algebraisk diskurs og i overgangen mellom aritmetisk og algebraisk diskurs. Dette kan skyldes at elevene har få metaregler i diskursen, spesielt knyttet til avslutningsbetingelsene. Denne studien kan gi grunnlag for refleksjon til lærere i hvordan en kan endre avslutningsbetingelsene for elevene slik at de får muligheten til å utforske. Å være bevisst på metareglene for elevenes rutiner, gjør at vi kan tilføye nye metaregler i den diskursive prosessen (Sfard, 2008). Funnene kan også antyde at elevene er vant til en tradisjonell tilnærming i undervisning, noe som kan føre til elevene har kun rituelt behandlet algebraiske objekter. Rituell behandling av algebraiske objekter vil ikke fremme de utforskende ferdighetene i algebra, noe som Grønmo (2013) kritiserer den norske skolen for. Studien viser også at det oppstår misoppfatninger rundt algebraiske objekter innad i gruppene ettersom de har forskjellig oppfattelser av begrepene.

Elevene må derfor deobjektivisere sentrale begrep i diskursen, noe som gjør at kommunikasjonen blir mer presis og at enkelte uløste spørsmål kan bli besvart (Sfard, 2008).

Rammeverkene vi har benyttet oss av har fremmet synlige kjennetegn ved elevenes deltagelse i den matematiske diskursen om problemløsing knyttet til mønsteralgebra. Ved å ta i bruk rammeverket til Caspi og Sfard (2012), har vi kunnet plassert elevene innenfor nivåer i den algebraiske diskursen. I arbeidet med å plassere elevene på et nivå i den algebraiske diskursen, har vi også tatt i bruk overgangene Kieran (2004) presenterer. Overgangen mellom diskursene oppfattes som utfordrende for elevene. Videre mener vi at modellen til Caspi og Sfard kan bidra til å få et overblikk i hvor stor grad elever deltar i den algebraiske diskursen, noe som vi ser på som en nødvendighet ettersom norske elever ligger under gjennomsnittet i forhold til andre OECD-land (Jacobsen, 2020). Oppgavesettet som er gitt i denne studien inneholder det algebraiske symbolet *n* i oppgavebeskrivelsen. Dette førte til at elevene ikke klarte å komme seg over til den algebraiske diskursen, og klarte heller ikke å sette i gang prosedyrer knyttet til disse deloppgavene. Dette er et interessant funn som kan gi grunnlag for refleksjon knyttet til undervisningen. Utformingen av oppgavene i denne studien spiller en stor rolle for om elevene klarer å sette i gang rutiner og tilnærme seg den algebraiske diskursen. Det er derfor nødvendig for lærere å være bevisst på oppgaveformuleringen og tilpasse den til elever som enda ikke har kommet inn på den algebraiske diskursen.

Denne studien kommer med forslag til en kvalitativ analyse knyttet til elevers diskurs i arbeid med problemløsing i mønsteralgebra. Resultatene fra studien er med på å videreutvikle modellen til Caspi og Sfard (2012). Samtidig er studien et bidrag til forskning innenfor det kommognitive feltet. Som en mulig forlengelse av studien kunne det vært interessant og gått mer i dybden i hvordan elever tolker forskjellige typer oppgavebeskrivelse i overgangen mellom aritmetisk og algebraisk diskurs, og analysert dette på bakgrunn av det kommognitive rammeverket og modellen til Caspi og Sfard.

Referanser

Acharya, B. (2017). Factors Affecting Difficulties in Learning Mathematics by Mathematics Learners. International Journal of Elementary Education, 6, 8. https://doi.org/10.11648/j.ijeedu.20170602.11

Björkqvist, O. (2003). Matematisk problemløsning. I B. Grevholm (Red.), Matematikk for skolen (s. 51- 70). Bergen: Fagbokforl.

Bjørndal, C. R. P. (2017). Det vurderende øyet. observasjon, vurdering og utvikling i pedagogisk praksis. Oslo: Gyldendal Akademisk.

Boesen, J. (2006). Assessing mathematical creativity : comparing national and teacher-made tests, explaining differences and examining impact.

Booth, L. R. (1988). Children's difficulties in beginning algebra. In A. F. Coxford (Ed.), The Ideas of Algebra, K-12 (1988 Yearbook) (pp. 20-32). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Caspi, S. & Sfard, A. (2012). Spontaneous meta-arithmetic as a first step toward school algebra. International Journal of Educational Research, 51-52, 45-65.

Den nasjonale forskningsetiske komité for samfunnsvitenskap og humaniora. (2016).

Caspi, S. & Sfard, A. (2012). Spontaneous meta-arithmetic as a first step toward school algebra. International Journal of Educational Research, 51-52, 45-65.

Christiansen, A. (2020). Elevane må få vanskelegare matteoppgåver. Forskning, Nyheter, Universitet i Agder. https://www.uia.no/forskning/prioriterte-forskningssentre-ved-uia/merga-mathematics-education-research-group-at-agder/innhold/nyheter/elevane-maa-faa-vanskelegare-matteoppgaaver

Davidsen, J. & Kjær, M. (2018). *Videoanalyse af social interaktion*. Samfundslitteratur.

De nasjonale forskningsetiske komiteene. (2021, 16.desember). *Forskningsetiske retningslinjer for samfunnsvitenskap og humaniora*. (5. utg.). https://www.forskningsetikk.no/retningslinjer/hum-sam/forskningsetiske-retningslinjer-for-samfunnsvitenskap-og-humaniora/

Duval, R. (2006). A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. Educational Studies in Mathematics, 61(1), 103-131. https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z

Ertesvåg, F. (2015). Svakeste matte-eksamen noensinne. VG. https://www.vg.no/nyheter/innenriks/i/MQzQK/svakeste-matte-eksamen-noensinne

Fiore, S., Graesser, A., Greiff, S., Griffin, P., Gong, B., Kyllonen, P., Massey, C., O'Neil, H., Pellegrino, J., Rothman, R., Soulé, H., & von Davier, A. (2017). Collaborative Problem Solving: Considerations for the National Assessment of Educational Progress Collaborative Problem Solving: Considerations for the National Assessment of Educational Progress.

Forskningsetiske retningslinjer for samfunnsvitenskap, humaniora, juss og teologi (4. utg.). https://www.etikkom.no/forskningsetiske-retningslinjer/Samfunnsvitenskap-jus-oghumaniora/

Grønmo, L. S. (2013). Algebra og tall er motoren i matematikken – derfor går matematikkfaget i Norden for halv fart. Bedre skole, 1, 17-22. https://www.utdanningsnytt.no/files/2019/08/22/Bedre%20Skole%201%202013.pdf

Grønmo, L.S & Helgesen, R. (2018, 11 mai). Norge trenger algebra! Aftenposten. https://www.aftenposten.no/meninger/debatt/i/qnMnz0/Norge-trenger-algebra--Liv-Sissel-Gronmo- og-Rita-Helgesen

Grue, J. (2021, 7. januar). Diskurs. Store norske leksikon. https://snl.no/diskurs

Hagland, K., Hedrén R. & Taflin, E. (2005). Rika matematiske problem: inspiration till variation. Stockholm: Liber

Jacobsen, H. Ø. (2012, 31. mai). Derfor er algebra vanskelig. Forskning. https://forskning.no/barn-og-ungdom-skole-og-utdanning-matematikk/derfor-er-algebra-vanskelig/703396

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), Algebra in the early grades (pp. 5–17). New York: Lawrence Erlbaum.

Kieran, C. (1989). The early learning of algebra: A structural perspective. In S. Wagner & C. Kieran (Eds.), Research issues in the learning and teaching of algebra, 4 (pp. 33-56). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Kieran, C. (1996). The changing face of school algebra. In C. Alsina, J. Alvarez, B. Hodgson, C.

Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it? The Mathematics Educator, 8(1), 139-151.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, 707-762.

Kleven, T. A., Tveit, K. & Hjardemaal, F. (2014). Innføring i pedagogisk forskningsmetode : En hjelp til kritisk tolking og vurdering (2. utg.). Oslo Unipub.

Kolovou, A., van den Heuvel-Panhuizen, M., & Bakker, A. (2009). Kolovou, A., Van den Heuvel-Panhuizen, M., & Bakker, A. (2009). Non-routine problem solving tasks in primary school mathematics textbooks: A needle in a haystack. Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 8(2), 29-66. Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 8, 29-66.

Kongelf , T. R. (2015). Introduksjon av algebra i matematikkbøker for ungdomstrinnet i Norge. Nordic Studies in Mathematics Education, 20 (3-4), 83–109.

Kriegler, S. (2008). JUST WHAT IS ALGEBRAIC THINKING? Hentet fra https://www.shastacoe.org/uploaded/SCMP2/Fall_Content_Day_2013/Fall_Content_Day_2013_6-9/SCMP2_Winter_Content_Day_2014/SCMP2_Summer_Institute_2014/M-Algebraic_Thinking_Article_by_Kreigler.pdf

Kvale, S., Brinkmann, S., Anderssen, T. M. & Rygge, J. (2015). Det kvalitative forskningsintervju (3. utg.). Oslo: Gyldendal akademisk.

Laborde, & A. Pérez (Eds.), 8th International Congress on Mathematical Education: Selected lectures (pp. 271-290). Seville, Spain: S.A.E.M. Thales.

Lavie, I., Steiner, A. & Sfard, A. (2018). Routines we live by: From ritual to exploration. Educational studies in mathematics, 101(2), 153-176. https://doi.org/10.1007/s10649-018- 9817-4

Lithner, J. (2017). Principles for designing mathematical tasks that enhance imitative and creative reasoning. *Zdm*, *49*(6), 937-949

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. In N. Bernarz, C. Kieran, & L. Lee, Approaches to algebra (pp. 65-86). Springer Netherlands.

Matematikksenteret. (u.å.). *Figurtall, følger og rekker – Tårn*. https://www.matematikksenteret.no/læringsressurser/videregående/figurtall-følger-og-rekker-—-tårn

Meld. St. 28 (2015-2016). Fag - Fordypning - Forståelse - En fornyelse av kunnskapsløftet. Det Kongelige Kunnskapsdepartementet. https://www.regjeringen.no/contentassets/e8e1f41732ca4a64b003fca213ae663b/no/pdfs/stm201520160028000dddpdfs.pdf

Nilssen, V. (2012). Analyse i kvalitative studier: Den skrivende forskeren. Universitetsforlaget.

NSD - Norsk senter for forskningsdata. (u.å.). Må jeg melde prosjektet mitt? Hentet fra https://nsd.no/personvernombud/meld_prosjekt/index.html

Personopplysningsloven. (2018). Lov om behandling av personopplysninger (LOV-2018-06-15-38). Lovdata. https://lovdata.no/dokument/NL/lov/2018-06-15-38

Polya, G. (1957) How to Solve It. A New Aspect of Mathematical Method. 2nd Edition, Princeton University Press, Princeton.

Polya, G. (1981). Mathematical discovery: On understanding, learning, and teaching problem solving. New York: John Wiley & sons, Inc.

Polya, G. (2004). How to solve it : a new aspect of mathematical method (Expanded ed. utg.). Princeton, NJ: Princeton University Press.

Radford, L. (2010). The eye as a theoretician: Seeing structures in generalizing activities. For the Learning of Mathematics, 30(2), 2-7. Hentet fra http://www.jstor.org/stable/20749442.

Rasmusssen, I., Kjærnsli, M., Jensen, F., & Ludvigsen, S. (2020). Problemløsing ved samarbeid i PISA 2015: En diskusjon av rammeverket og norske elevers resultater. Acta Didactica Norden, 14(1), 22 sider. https://doi.org/10.5617/adno.7862

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In (pp. 334-370).

Schoenfeld, A. H. (1993). Teaching mathematical thinking and problem solving. Sånn, ja! Rapport fra en konferanse om matematikk-didaktikk og kvinner i matematiske fag (s. 67-89). Oslo: Norges forskningsråd.

Sfard, A. (2007). When the rules of discourse change, but nobody tells you: Making sense of mathematics learning from a commognitive standpoint. The Journal of the Learning Sciences, 16(4), 1–50.

Sfard, A. (2008). Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing. New York, NY: Cambridge University Press

Sfard, A. (2012). Introduction: Developing mathematical discourse—Some insights from communicational research. International Journal of Educational Research, 51, 1–9.

Sfard, A. (2017). Ritual for ritual, exploration for exploration: Or, what learners are offered is what you get from them in return. I J. Adler & A. Sfard (Red.), Research for educational change: Transforming researchers' insights into improvement in mathematics teaching and learning (s. 41-63). New York, NY: Routledge.

Spangenberg, E., & Pithmajor, A. (2020). grade-9-mathematics-learners-strategies-in-solving-number-pattern-problems. Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 16, em1862. https://doi.org/10.29333/ejmste/8252

Thagaard, T. (2018). Systematikk og innlevelse: en innføring i kvalitative metoder (5. utg.). Fagbokforlaget.

Tjora, T. (2021). Kvalitative forskningsmetoder i praksis (4.utg.). Oslo: Gyldendal

Utdanningsdirektoratet. (2021, 12. november). Eksempeloppgaver i matematikk 1P. https://www.udir.no/eksamen-og-prover/eksamen/eksempeloppgaver/eksempeloppgaver-i-matematikk-p/

Zazkis, R. (2002). Zazkis, R. & Liljedahl, P. (2002). Arithmetic sequence as a bridge among conceptual fields. Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 2(1). 91-118. Canadian Journal of Science Mathematics and Technology Education.

Zhu, Y., & Fan, L. (2006). Focus on the Representation of Problem Types in Intended Curriculum: A Comparison of Selected Mathematics Textbooks from Mainland China and the United States. International Journal of Science and Mathematics Education, 4, 609-626. https://doi.org/10.1007/s10763-006-9036-9

Oversikt over tabeller og figurer

Vedlegg

Vedlegg 1: Vurdering av NSD

Vedlegg 2: Vil du delta i forskningsprosjekt?

Vedlegg 3: Informasjonsskriv og samtykkeerklæring til foresatte

Vedlegg 1: Vurdering av NSD

Meldeskjema / Kjennetegn ved elevers deltakelse i en matematisk diskurs i arbeid ... / Vurdering

Vurdering

Referansenummer
277996

Prosjekttittel
Kjennetegn ved elevers deltakelse i en matematisk diskurs i arbeid med problemløsning innen algebra

Behandlingsansvarlig institusjon
Universitetet i Sørøst-Norge / Fakultet for humaniora, idrett- og utdanningsvitenskap / Institutt for matematikk og naturfag

Prosjektperiode
16.08.2021 - 15.08.2022

Meldeskjema

Dato	**Type**
10.02.2022	Standard

Kommentar
Det er vår vurdering at behandlingen av personopplysninger i prosjektet vil være i samsvar med personvernlovgivningen så fremt den gjennomføres i tråd med det som er dokumentert i meldeskjemaet 10.02.2022 med vedlegg. Behandlingen kan starte.

TYPE OPPLYSNINGER OG VARIGHET
Prosjektet vil behandle alminnelige kategorier av personopplysninger frem til 15.08.2022.

LOVLIG GRUNNLAG
Prosjektet vil innhente samtykke fra foresatte til behandlingen av personopplysninger om barna. Vår vurdering er at prosjektet legger opp til et samtykke i samsvar med kravene i art. 4 og 7, ved at det er en frivillig, spesifikk, informert og utvetydig bekreftelse som kan dokumenteres, og som den registrerte/foresatte kan trekke tilbake.

Lovlig grunnlag for behandlingen vil dermed være foresattes samtykke, jf. personvernforordningen art. 6 nr. 1 bokstav a.

PERSONVERNPRINSIPPER
NSD vurderer at den planlagte behandlingen av personopplysninger vil følge prinsippene i personvernforordningen om:

- lovlighet, rettferdighet og åpenhet (art. 5.1 a), ved at foresatte får tilfredsstillende informasjon om og samtykker til behandlingen
- formålsbegrensning (art. 5.1 b), ved at personopplysninger samles inn for spesifikke, uttrykkelig angitte og berettigede formål, og ikke viderebehandles til nye uforenlige formål
- dataminimering (art. 5.1 c), ved at det kun behandles opplysninger som er adekvate, relevante og nødvendige for formålet med prosjektet
- lagringsbegrensning (art. 5.1 e), ved at personopplysningene ikke lagres lengre enn nødvendig for å oppfylle formålet

DE REGISTRERTES RETTIGHETER
NSD vurderer at informasjonen om behandlingen som de registrerte og deres foresatte vil motta oppfyller lovens krav til form og innhold, jf. art. 12.1 og art. 13.

Så lenge de registrerte kan identifiseres i datamaterialet vil de ha følgende rettigheter: innsyn (art. 15), retting (art. 16), sletting (art. 17), begrensning (art. 18) og dataportabilitet (art. 20).

Vi minner om at hvis en registrert/foresatt tar kontakt om sine/barnets rettigheter, har behandlingsansvarlig institusjon plikt til å svare innen en måned.

FØLG DIN INSTITUSJONS RETNINGSLINJER
NSD legger til grunn at behandlingen oppfyller kravene i personvernforordningen om riktighet (art. 5.1 d), integritet og konfidensialitet (art. 5.1. f) og sikkerhet (art. 32).

For å forsikre dere om at kravene oppfylles, må dere følge interne retningslinjer og eventuelt rådføre dere med behandlingsansvarlig institusjon.

MELD VESENTLIGE ENDRINGER
Dersom det skjer vesentlige endringer i behandlingen av personopplysninger, kan det være nødvendig å melde dette til NSD ved å

Dersom det skjer vesentlige endringer i behandlingen av personopplysninger, kan det være nødvendig å melde dette til NSD ved å oppdatere meldeskjemaet. Før du melder inn en endring, oppfordrer vi deg til å lese om hvilke type endringer det er nødvendig å melde:
https://www.nsd.no/personverntjenester/fylle-ut-meldeskjema-for-personopplysninger/melde-endringer-i-meldeskjema. Du må vente på svar fra NSD før endringen gjennomføres.

OPPFØLGING AV PROSJEKTET
NSD vil følge opp ved planlagt avslutning for å avklare om behandlingen av personopplysningene er avsluttet.

Kontaktperson hos NSD: Olav Rosness, rådgiver.

Lykke til med prosjektet!

Vedlegg 2: Vil du delta i forskningsprosjektet?

Vil du delta i forskningsprosjektet?

Dette er et spørsmål til dere på 9. trinn om å delta i et forskningsprosjekt hvor formålet er å undersøke elevers samtale når de arbeider med problemløsningsoppgaver knyttet til algebra. I dette skrivet gir vi deg informasjon om målene for prosjektet og hva deltakelse vil innebære for deg.

Formål

Dette forskningsprosjektet er en del av et mastergradsstudium i matematikkdidaktikk ved Universitet i Sør-Øst Norge. I prosjektet ønsker vi å undersøke elevenes samtale når de arbeider med problemløsningsoppgaver knyttet til algebra. Oppgaveløsningen vil bli gjennomført i mindre grupper, hvor elevene skal samarbeide og argumentere for valgene sine. Ved å undersøke elevenes fremgangsmåter håper vi å lære hva som kjennetegner elevenes arbeid i en matematisk samtale når de arbeider med problemløsningsoppgaver. Det vil være nødvendig med video- og lydopptak av arbeidet, og vi vil samle inn deres bidrag.

Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?

USN - Universitetet i Sørøst-Norge er ansvarlige for dette forskingsprosjektet.

Hvorfor får du spørsmål om å delta?

Utvalget er valgt ut ifra en henvendelse fra oss om en matematikklærer har mulighet til å stille en klasse på 9. trinn til rådighet for dette forskningsprosjektet. Elevene velges ut i samarbeid med matematikklærer.

Hva innebærer det for deg å delta?

Deltakelse i dette forskningsprosjektet innebærer at vi i ca. en skoletime vil observere elevenes arbeid med problemløsningsoppgaver knyttet til algebra. Elevene vil arbeide i mindre grupper. Det vil bli tatt video- og lydopptaket under arbeidet. Videoopptakene blir transkribert, og elevenes navn vil erstattes med et pseudonym. Dette er på bakgrunn av at vi ønsker å lære av elevenes tenkemåter innenfor problemløsningsoppgaver knyttet til algebra.

Det er frivillig å delta

Det er frivillig å delta i prosjektet. Du kan derfor velge selv om du ønsker å være tilstede å bidra når videoobservasjonen skal foregå. Hvis du velger å delta, kan du når som helst trekke samtykket tilbake uten å oppgi noen grunn. Alle dine personopplysninger vil da bli slettet. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for deg hvis du ikke vil delta eller senere velger å trekke deg.

Ditt personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker dine opplysninger

Vi vil bare bruke de innsamlede dataene til formålet som er fortalt om i dette skrivet. Vi behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket. Det er kun studenter og veileder som har tilgang til opplysningene. Datamaterialet er anonymisert i hele forskningsprosessen, dermed skal ikke deltakere kunne gjenkjennes i masteroppgaven.

Hva skjer med opplysningene dine når vi avslutter forskningsprosjektet?

Forskningen skal ferdigstilles og avsluttes i slutten innen 15. august 2022. Prosjektet avsluttes når oppgaven er ferdig. All data som er lagret og blitt brukt, vil slettes etter at oppgaven er ferdigstilt og innlevert.

Dine rettigheter

Så lenge du kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:

- innsyn i hvilke personopplysninger som er registrert om deg,
- å få rettet personopplysninger om deg,
- få slettet personopplysninger om deg,
- få utlevert en kopi av dine personopplysninger (dataportabilitet), og
- å sende klage til personvernombudet eller Datatilsynet om behandlingen av dine personopplysninger

Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om deg?

Vi behandler opplysninger om deg basert på ditt samtykke.

Hvor kan jeg finne ut mer?

Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:

- Emilie Langåker, Masterstudent ved Universitetet i Sørøst-Norge, USN, 48190047 , emilie_la@hotmail.com
- Marcus Haugland, Masterstudent ved Universitetet i Sørøst-Norge, USN, 99235447 , marcushaaugland@gmail.com
- NSD - Norsk senter for forskningsdata AS, på e-post (personvernombudet@nsd.no), 55 58 21 17

På forhånd takk for ditt bidrag til vårt masterprosjekt!

Med vennlig hilsen
Marcus Haugland & Emilie Langåker

____

____

Samtykkeerklæring

Jeg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet, og har fått anledning til å stille spørsmål. Jeg samtykker til:

- deltakelse i observasjon, video og lydopptak
- elevbidrag

Jeg samtykker til at opplysninger behandles frem til prosjektet er avsluttet 15.08 2022

(Signert av prosjektdeltaker, dato)

Vedlegg 3: Informasjon og samtykkeerklæring til foresatte

Informasjon og samtykkeerklæring til foresatte

Formålet med denne masterstudien er å se på hva som kjennetegner en gruppe elever på 9. trinn deltakelse i en matematisk diskurs i arbeid med problemløsning innen algebra. Fokuset vil være å undersøke hvordan elevene diskuterer og løser matematiske problem, samt argumentere for valgene deres.

Samtykkeerklæringen vil kunne gi lærer tillatelse til å uttale seg om enkeltelevers faglige nivå i matematikk til prosjektlederne. Informasjon vil bli behandlet konfidensielt i henhold til regelverket, og det er kun prosjektlederne som vil ha tilgang til informasjonen.

For å innhente data til denne studien vil elevene bli filmet. Et kamera på stativ plasseres for å fange opp hva som skjer i klasserommet/grupperommet.

Hva skjer med informasjonen om elevene?

- Alle personopplysninger vil bli behandlet konfidensielt i henhold til regelverket.
- Videomaterialet vil bli lagret på et eksternt, sikret område som krever innlogging med sterkt tjuetegns passord samt tofaktorautentisering.
- Opplysninger som vil bli lagret er transkripsjon av enkelte matematiske samtaler mellom elevene. Elevene vil være helt anonymisert.
- Elever, lærere og skolen anonymiseres i analyser av dataene. Det betyr at ingen vil kunne gjenkjennes i masteroppgaven. Alle data slettes innen prosjektet er avsluttet, 15.08.2022.

Frivillig deltakelse

Det er frivillig å delta når videoobservasjonene skal gjennomføres. Dersom du ikke ønsker at ditt barn skal bli filmet, lar du være å samtykke. Det vil da legges til rette for et alternativt, tilsvarende undervisningstilbud. Du kan når som helst velge å trekke samtykke tilbake uten å oppgi begrunnelse. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser dersom barnet ditt ikke vil delta, eller senere velger å trekke deg.

Dine rettigheter

Så lenge du kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:

- Innsyn i hvilke personopplysninger som er registrert om deg,
- å få rettet personopplysninger om deg
- få slettet personopplysninger om deg
- få utlevert en kopi av dine personopplysninger (dataportabilitet), og
- å sende klage til personvernombudet eller Datatilsynet om behandlingene av dine personopplysninger.

Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger og deg/ditt barn?

Vi behandler opplysninger om deg/ditt barn basert på ditt samtykke som foresatt.

Hvor kan jeg finne ut mer?

Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:

- Emilie Langåker, Masterstudent ved Universitetet i Sørøst-Norge, USN, 48190047, emilie_la@hotmail.com
- Marcus Haugland, Masterstudent ved Universitetet i Sørøst-Norge, USN, 99235447, marcushaaugland@gmail.com
- NSD - Norsk senter for forskningsdata AS, på e-post (personvernombudet@nsd.no), 55 58 21 17

Samtykke

Jeg ønsker at foresatte krysser av og signerer for tillatelse til at barnet kan være med under videoopptak av matematikkundervisningen disse øktene, samt at lærer kan gi informasjon om elevens faglige nivå til prosjektlederen. Returner skjemaet snarest mulig.

På forhånd takk for ditt bidrag til vårt masterprosjekt!

Med vennlig hilsen
Marcus Haugland & Emilie Langåker

____

____

Samtykkeerklæring

Vi ønsker at du som foresatt skal krysse av og signerer på skjemaet under.

- Jeg har mottatt informasjon om prosjektet
- Jeg gir tillatelse til at matematikklærer kan gi informasjon om elevens faglige nivå til prosjektleder, og til at mitt barn kan delta under filming av undervisning

Jeg samtykker til at opplysninger behandles frem til prosjektet er avsluttet 15.08.2022

____

Elevens navn

____

Signatur fra foresatt / dato