Universitetet i Sørøst-Norge
Fakultet for humaniora, idretts- og utdanningsvitenskap
–
Mastergradsavhandling
Studieprogram: MG2MA7
Vår 2022

Christian Fydrych Sæter

Elevers representasjoner når de løser tekstoppgaver

Universitetet i Sørøst-Norge
Fakultet for humaniora, idretts- og utdanningsvitenskap
Institutt for pedagogikk
Postboks 235
3603 Kongsberg

http://www.usn.no

Denne avhandlingen representerer 45 studiepoeng

Forord

Denne masteroppgaven markerer avslutningen på min femårige grunnskolelærerutdanning for trinn 5-10 ved Universitetet i Sørøst-Norge. Det å skrive denne masteroppgaven har vært spennende og veldig lærerikt, samtidig har det vært krevende. Jeg tar med meg mye god kunnskap som jeg kan anvende i min lærerkarriere.

Jeg vil benytte denne anledningen til å takke alle som hjalp meg gjennom denne prosessen. Først vil jeg takke mine veiledere Signe Holm Knudtzon og Per Vinje-Christensen for alle de gode veiledningstimene og for alle de gode og konstruktive tilbakemeldingene. Takk til mine fem informanter som stilte opp og hadde lyst til å være med på forsøket. Jeg vil også takke kontaktpersonen på skolen som stilte opp med både elever og grupperom til mitt forsøk. Helt til slutt vil jeg spesielt takke min mor, far og søster som har vist interesse og støttet meg gjennom hele studiet.

Christian Fydrych Sæter

Sammendrag

I denne masteroppgaven har jeg sett på hvordan elever på 10. trinn bruker representasjoner og gjennomfører overganger mellom representasjoner når de løser tekstoppgaver. Målet har vært å se på hvordan elever resonnerer når de løser slike oppgaver.

For å få svar på dette har jeg foretatt en kvalitativ studie blant fem elever på 10. trinn på en ungdomsskole i Viken. Oppgavene elevene fikk utdelt var fem problemløsningsoppgaver som var tilpasset 10. trinn. Etter oppgaveløsningen var det en felles gjennomgang, der elevene forklarte hvordan de hadde løst oppgavene. Det ble tatt lydopptak og gjort feltnotater under forsøket. Lydopptaket ble i ettertid transkribert. Datamateriale fra studie ble analysert og tolket i lys av teori. Representasjonene elevene tok i bruk ble klassifisert etter Duval sitt semiotiske register.

Funn fra min studie viser at elevene har en variasjon i bruken av representasjoner og at de sjelden tar i bruk kun en representasjon i oppgaveløsningen. De representasjonene elevene har benyttet seg mest av er aritmetikk og algebra. Samtidig viser funn at det er en sammenheng mellom leseforståelse og hvordan elevene tolker og dermed løser oppgavene. Leseforståelse er også bestemmende for hvilke representasjoner som blir brukt og hvordan de brukes. Enkelte elever klarer ikke å oversette fra tekst i oppgaven til en likning når det ikke er kongruent overgang mellom oppgaveteksten og likning. De feiltolker nøkkelord som for eksempel «mer enn» og ignorerer sammenhenger og leser bare tall i oppgaveteksten. Dette har innvirkning på hvilke representasjoner de tar i bruk. Studie har også vist at bruk av hjelperepresentasjoner for visualisering av innholdet i tekstoppgaven eller andre løsningsstrategier har hjulpet elevene med både forståelsen av oppgaveteksten og løsningen av oppgaven.

Innholdsfortegnelse

1 Innledning

1.1 Bakgrunn for studien

Denne masteroppgaven handler om bruken av representasjoner av matematiske objekter, fenomener, problemer eller situasjoner i forbindelse med løsning av tekstoppgaver og spesielt transformasjoner fra tekst til annen representasjon. Innenfor matematikkdidaktikk er begrepet representasjon et uttrykk for et objekt eller en ide, en måte å uttrykke (representere) objektet eller ideen på (Fagnant & Vlassis, 2013, s. 149 sitert i Knudtzon, 2019, s. 134).

Et ønske om å se nærmere på dette tema ble større når jeg under min studentpraksis observerte elever som hadde utfordringer med visualisering og fortolkning av oppgaver samt å se sammenhenger mellom ulike representasjoner. Disse utfordringer med bruk av representasjoner har jeg særlig observert i forbindelse med løsning av tekstoppgaver i matematikk. Med tekstoppgaver i matematikk menes oppgaver der elevene selv med utgangspunkt i teksten må finne fram til hvordan oppgaven kan løses (Nortvedt, 2015). Det var en generell oppfatning blant elevene at tekstoppgaver ofte er vanskeligere å løse enn et aritmetisk uttrykk.

Matematikk kan oppleves som et fag som er langt borte fra elevenes virkelighet og hverdag. Det brukes ord og begreper i matematikk som de ikke møter i dagligtale og ikke er en naturlig del av deres ordforråd. Enkelte elever strever med å mestere matematikk, da faget kan reise problemer med forståelse som de ikke opplever i andre fag. Grunnen til det er at matematikk er et abstrakt fag, der man ikke har den samme tilgangen til matematiske objekter som i de andre fagene som for eksempel fysikk og kjemi. Duval sier at matematiske objekter er abstrakte og er kun tilgjengelig gjennom ulike representasjoner av objektene. Representasjoner er derfor viktig både for matematisk tenkning og for forståelsen av matematikk (Duval, 2006, s. 107). I læreplanen LK20 påpekes det at elevene må få mulighet til å bruke matematiske representasjoner i ulike sammenhenger gjennom matematiske samtaler og egne erfaringer (Utdanningsdirektoratet, 2020c).

Selv om matematikk oppleves som et vanskelig fag av enkelte elever, er matematikk et sentralt fag fordi ferdigheter som regning og analytisk tenkning er viktig for å kunne mestre andre fag og for å kunne fungere i et samfunn. Ifølge læreplanen LK20 skal matematikk hjelpe elevene å kunne forstå mønstre og sammenhenger i samfunnet og naturen. Den sier at matematikk skal bidra til at elevene utvikler et presist språk for resonnering, kritisk tenkning og kommunikasjon. Matematikk skal også forberede elevene på et samfunn og arbeidsliv i utvikling (Utdanningsdirektoratet, 2020a). Det å beherske ulike representasjoner er en del av matematikkompetansen (Utdanningsdirektoratet, 2019).

1.2 Forskningsspørsmålet

Temaet for min studie er elevers bruk av representasjoner og overganger mellom ulike representasjoner i forbindelse med løsning av tekstoppgaver. I tekstoppgaver må elevene på bakgrunn av teksten finne ut hvordan oppgaven skal løses. De må klare å sortere informasjonen i teksten, analysere den og danne seg et kognitivt bilde av matematisk problemstilling som er utrykt i oppgaveteksten. Denne tolkningen av oppgaveteksten kan både være riktig, men også inneholde feil. Tolkningen av oppgaveteksten kommuniseres ved hjelp av representasjoner. For å kunne mestre og anvende faget må elevene kunne oversette mellom matematiske representasjoner og dagligspråket, veksle mellom ulike representasjoner, samt å forklare og begrunne valg av representasjonsform, dette følger av læreplanen LK20 (Utdanningsdirektoratet, 2020c). Jeg ønsker derfor å undersøke hva som kjennetegner elevers arbeid med matematiske representasjoner og spesielt transformasjoner fra tekster til andre representasjoner.

Målet er å kunne forstå hvordan elevene resonnerer når de løser tekstoppgaver. Dette for å finne roten til problemene med matematisk forståelse. Dette igjen for å kunne gi dem bedre undervisning og på denne måten kunne hjelpe dem å utvikle deres representasjonskompetanse og dermed deres generelle kompetanse i matematikk.

Tekstoppgaver kan være vanskelig ettersom de krever både språk- og matematikkompetanse. Min studie begrenser seg kun til analyse av bruken av representasjoner i tekstoppgaver og viktigheten av den grunnleggende leseferdigheten elevene må inneha for å kunne tolke matematiske tekster. Problematikk rundt spesifikke språk- og lesevansker som påvirker forståelsen av tekstoppgaver, samt forståelsesvansker hos elever som har norsk som sitt andre språk vil ikke være gjenstand for min forskning. Etter avtale med en skole fikk jeg mulighet til å utføre min studie på noen elever i en 10. klasse. Jeg skal derfor avgrense min forskning til dette opplæringstrinnet.

Forskningsspørsmålet mitt er:

Hvordan bruker elevene på 10. trinn forskjellige representasjoner og gjennomfører overganger i arbeid med tekstoppgaver?

1.3 Kort presentasjon av metode

Jeg har valgt en kvalitativ forskningsmetode for min studie. Data ble samlet inn gjennom en deltakende observasjon og samtaler med fem elever i en 10. klasse. Datamateriale består av elevenes besvarelser, lydopptak av samtaler med elevene og feltnotater. Lydopptaket ble transkribert. Under analysen ble alt datamateriale gjennomgått og tolket i lys av teori.

1.4 Oppgavens oppbygging

Masteroppgaven består av seks kapitler i tillegg til forord, sammendrag, litteraturliste og vedlegg.

Kapitel 1 tar for seg bakgrunn for studie og presenterer forskningsspørsmålet. I kapitel 2 skal jeg ta for meg det teoretiske grunnlaget som min studie bygger på. Jeg skal også presentere tidligere forskning som er relevant for min studie. Videre i kapittel 3 går jeg gjennom metodevalget som er gjort for min studie både når det gjelder innsamling av data og metode for analysen. Jeg skal begrunne valgene som er gjort for min forskning og reflektere rundt valget. Jeg skal også ta for meg spørsmålet rundt validiteten og reliabiliteten samt forskningsetiske vurderinger knyttet til forsøket. Jeg avslutter kapitlet med presentasjon av oppgaver som er valgt til studie. I kapitel 4 skal jeg beskrive og analysere datamaterialet fra min studie. Dette vil bli gjort for hver oppgave elevene fikk utdelt. Det kvalitative datamaterialet som ble samlet inn under forsøket skal analyseres i lys av teori i kapitel 2. På slutten av dette kapitlet presenterer jeg hovedfunnene som ble gjort. I kapitel 5 skal jeg drøfte de hovedfunnene fra kapitel 4 som etter min mening er mest interessante og som belyser mitt forskningsspørsmål. Til slutt skal jeg i kapitel 6 komme med en konklusjon på min studie. Jeg skal svare på forskningsspørsmålet, se på metodiske begrensninger for studie og hva som kan være aktuelt for videre forskning knyttet til mine funn i studie.

2 Teori

I dette kapitelet skal jeg beskrive det teoretiske grunnlaget som ligger til grunn i min studie og presentere teori fra forskere som er relevant for studie. Her kan jeg spesielt nevne Duval sin klassifisering av representasjoner i semiotiske registre, som jeg brukte som grunnlag for min analyse. Da studie ser på transformasjoner mellom oppgavetekst og andre representasjoner har jeg også støttet meg på annen relevant forskning, blant annet Nortvedt og andre forskere. I tillegg har jeg sett på representasjoner i relasjon til kompetansebegrepet i matematikk.

2.1 Matematisk kompetanse

I dette delkapitlet skal jeg presentere hva som inngår i kompetansebegrepet og hvilken betydning representasjonskompetanse har for den samlede kompetansen i matematikk.

Læreplanens overordnet del sier at faglig læring er en sentral del av både dannings- og utdanningsoppdraget til grunnopplæringen. Det er læreplanene for de ulike fag som angir innholdet i de ulike fagene og ifølge Utdanningsdirektoratet bygger de på følgende definisjon av kompetanse:

«*Kompetanse er å kunne tilegne seg og anvende kunnskaper og ferdigheter til å mestre utfordringer og løse oppgaver i kjente og ukjente sammenhenger og situasjoner. Kompetanse innebærer forståelse og evne til refleksjon og kritisk tenkning*» (Utdanningsdirektoratet, 2020d).

Men hvilke kunnskaper og ferdigheter er det som er viktig for matematisk kompetanse ?

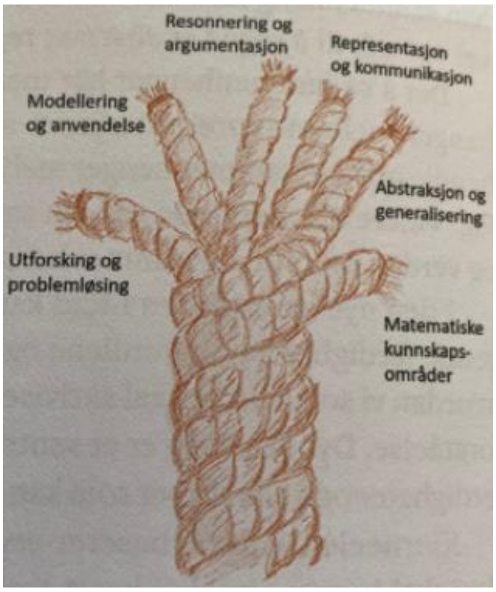
Kunnskapsdepartementet i forbindelse med Fagfornyelsen har besluttet hva som skal bli det viktigste faglige innholdet i hvert fag, de såkalte kjerneelementene (Regjeringen.no, 2018a). Kjerneelementene defineres som det elevene må lære for å kunne mestre og anvende faget. De skal prege innholdet og progresjonen i læreplanene og skal bidra til at elevene over tid utvikler forståelse av innhold og sammenhenger i faget (Utdanningsdirektoratet, 2019). Følgende kjerneelementer i matematikk ble fastsatt:

- Utforskning og problemløsning
- Modellering og anvendelse

- Resonering og argumentasjon
- Representasjon og kommunikasjon
- Abstraksjon og generalisering
- Matematiske kunnskapsområder

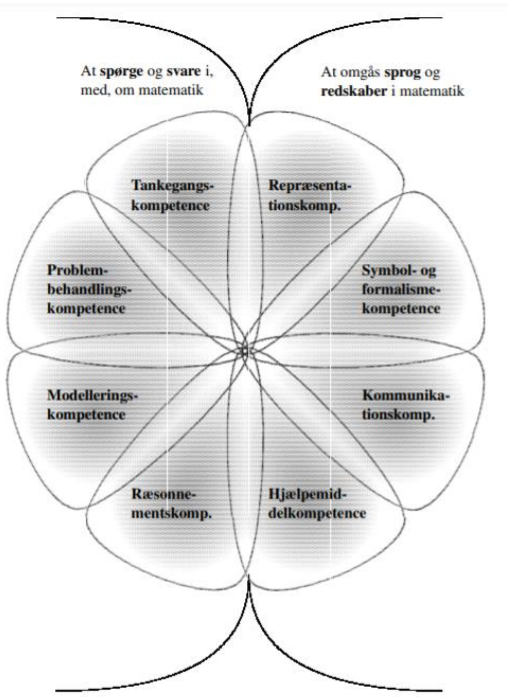
De fem første kjerneelementene som er listet opp ovenfor beskriver ifølge Kunnskapsdepartementet arbeidsmåter, metoder og tenkemåter i matematikk. Det sjette kjerneelementet beskriver de sentrale kunnskapsområdene i matematikk. Elevene skal møte det sjette kjerneelementet, de matematiske kunnskapsområdene, gjennom de fem første kjerneelementene (Regjeringen.no, 2018b). Representasjonskompetanse er et av kjerneelementene i matematikk og det innebærer at denne kompetansen ses på som viktig for å kunne mestre og anvende faget.

Representasjonskompetanse er også omtalt i de forskjellige modellene som beskriver hva som inngår i matematisk kompetanse. Ifølge «Trådmodellen med seks tråder» hos Klaveness et. al, som er en omarbeidet modell av Kilpatrick, Swafford og Findell sin trådmodell med fem tråder, er matematisk kompetanse sammensatt av de nevnte seks kjerneelementene i læreplanen LK20 (Kilpatrick, Swafford & Findell, 2001 sitert i Klaveness et. al., 2019, s. 6), se figur 2.1. Hos Klaveness et. al. visualiseres og fremstilles de forskjellige kjerneelementene som seks tråder som er tvunnet sammen til et tau. Alle trådene som symboliserer kjerneelementene, er tett sammentvunnet og de er avhengig og støtter hverandre. Tauet symboliserer den helhetlige matematiske kompetansen. Målet er å gjøre elevens «matematiske tau» så sterkt som mulig ved å tvinne trådene med hverandre og at de ikke står hver for seg (Klaveness et. al., 2019, s. 6). Alle tråder er viktig for at det «matematiske tauet» holder seg sterk. «Representasjon og kommunikasjon» er en av trådene i det «matematiske tauet». Økning av representasjonskompetanse vil kunne bidra til styrking av elevens generelle matematiske kompetanse.



Figur 2.1. Trådmodellen med seks tråder (Klaveness et. al, 2019, s. 6)

En annen modell som beskriver matematisk kompetanse, er modellen til Niss og Jensen. Det kan nevnes at denne kompetansemodellen dannet grunnlag for læreplanen LK06 Kunnskapsløftet (Knudtzon, 2019, s. 135). Ifølge Niss og Jensen er matematisk kompetanse sammensatt av åtte delkompetanser, der representasjonskompetanse er en av delkompetansene, se figur 2.2. Disse åtte delkompetanser har sine egne identiteter og er samtidig bundet sammen (Niss & Jensen, 2002, s. 44). Dette visualiseres og fremstilles i modellen som et «knutepunkt» i en «klynge». Dette symboliserer at en spesifikk matematisk kompetanse ikke kan tilegnes eller innehas isolert fra andre kompetanser (Niss & Jensen, 2002, s. 43). Samtidig understreker det hvor viktig de andre delkompetansene, som for eksempel representasjonskompetanse, er for den samlede matematiske kompetansen.



Figur 2.2. Modell av matematiske kompetanser (Niss & Jensen, 2002, s. 45)

Både læreplan LK20 og de to modellene for matematisk kompetanse fremhever viktigheten av representasjonskompetanse. Denne kompetansen er elevene avhengig av for å kunne mestre og anvende faget og på denne måten bygge og styrke sin matematiske kompetanse.

Delkompetanser i de to nevnte modellene som også kalles kjerneelementene i læreplanen henger tett sammen, men disse er også knyttet til de grunnleggende ferdighetene som også er del av den faglige kompetansen i matematikk. Ifølge læreplanen skal utvikling av faglig kompetanse skje i samspill med utviklingen av grunnleggende ferdigheter i faget (Utdanningsdirektoratet, 2020e).

Læreplanverket har definert fem grunnleggende ferdigheter i matematikk: muntlige ferdigheter, å kunne skrive, å kunne lese, å kunne regne og digitale ferdigheter (Utdanningsdirektoratet, 2020e). Alle disse ferdigheter er viktig for utviklingen av faglig kompetanse i matematikk og nødvendige redskaper for læring og forståelse av faget (Utdanningsdirektoratet, 2020e).

Matematikk har samtidig et særlig ansvar for utviklingen av regneferdigheter der blant annet bruk av representasjoner er spesielt nevnt. Lærerplanen sier at det «*å kunne regne i matematikk vil si å bruke matematiske representasjoner, begreper og framgangsmåter til å* *gjøre utregninger og vurdere om løsninger er gyldige*» (Utdanningsdirektoratet, 2020b). Muntlige- og skriveferdigheter er viktig for å kunne kommunisere ideer og drøfte matematiske problemer, strategier og løsninger med andre. Skriveferdigheter i matematikk innebærer å kunne beskrive og forklare sammenhenger, oppdagelser og ideer ved hjelp av hensiktsmessige representasjoner (Utdanningsdirektoratet, 2020b).

Leseferdigheter i matematikk er en viktig ferdighet når elevene skal løse tekstoppgaver i matematikk. Det å kunne lese i matematikk er sentralt for å kunne forstå matematikkspråket som skiller seg ut fra dagligspråket med bruken av symboler, faglig begreper og graden av presisjon. Videre innebærer det å kunne lese i matematikk å skape mening i tekster, sortere informasjon, analysere og vurdere form og innhold samt å sammenfatte informasjon. Å lese matematikk handler om å finne og bruke informasjon i komplekse tekster med avansert symbolspråk og begrepsbruk (Utdanningsdirektoratet, 2020b). Jeg kommer tilbake til hvordan leseferdigheter har innvirkning for bruken av representasjoner i matematikk i delkapittel 2.3 om bruk av representasjoner i løsningen av tekstoppgaver samt i analyse- og diskusjonskapitlet.

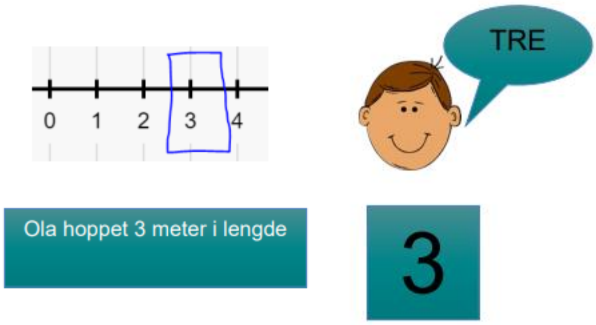
2.2 Representasjoner i matematikk

Representasjon er et kjerneelement i læreplanen LK20 og en del av den matematiske kompetansen. Både læreplanen og forskjellige kompetansemodeller fremhever viktigheten av representasjonskompetanse som nødvendig for å kunne mestre å anvende matematikkfaget.

Men hva ligger i begrepet representasjoner i matematikk?

2.2.1 Representasjoner i læreplanen i matematikk, LK20

Læreplanen i matematikk, LK20 definerer representasjoner som en måte å uttrykke matematiske begreper, sammenhenger og problemer på. Representasjoner kan være konkrete, kontekstuelle, visuelle, verbale og symbolske (Utdanningsdirektoratet, 2020c). For eksempel kan mengden tre representeres ved hjelp av tallinje, en kontekst, verbalt eller skrive tre med tallsymbolet 3. Dette er illustrert i figur 2.3.



Figur 2.3. Ulike representasjoner av mengden tre (Realfagsløyper, 2018, s. 3)

2.2.2 Forskningens definisjon av begrepet representasjon

Det er flere forskere som har beskrevet hva som ligger i begrepet representasjoner i matematikk. Lesh et. al. (1987) definerer representasjoner som elevenes ytre, altså observerbare utførelsesformer av interne konseptualiseringer av det matematiske objektet (Lesh et. al., 1987, s. 33). Duval (2006) på sin side sier at representasjoner i matematikk er «noe» som står for noe annet. Dette «noe» kan ifølge Duval inneholde elevenes tro og forestillinger, men også misoppfatninger som en får tilgang til gjennom elevers arbeid eller muntlige forklaringer. Representasjoner er også tegn og hvordan de er satt sammen i henhold til regler for å beskrive matematiske prosesser og fenomener. De brukes som verktøy for å formidle og tilegne kunnskap (Duval, 2006, s. 103 – 104). De ulike representasjoner av matematiske objekter, fenomener og ideer bidrar derfor til elevenes begrepsforståelse, kommunikasjon og problemløsing (Duval, 2006, s. 104).

2.2.3 Betydningen av representasjoner i matematikk

Matematiske objekter er abstrakte og er kun tilgjengelig gjennom ulike representasjoner av objekter (Duval, 2006, s. 104). Representasjoner og visualisering er derfor kjernen til forståelsen av matematikk (Duval 1999, s. 3).

Når man løser et matematisk problem så formes i hjernen de kognitive bildene eller tankeprosessene av et matematisk objekt, altså en slags intern representasjon. Dette kommuniseres gjennom tegn og symboler som har bestemt betydning og som kan uttrykkes fysisk. De fysiske representasjonene som kan benyttes i kommunikasjon med hverandre kaller Duval for semiotiske representasjoner. De semiotiske representasjoner knyttes til tegn, derfor kalles de semiotiske (Hana, 2014, s. 132). Vi kommuniserer vår forståelse av matematikk gjennom semiotiske representasjoner (Duval 2006, s. 104). Bruk av semiotiske representasjoner er derfor viktig både for matematisk tenkning og for forståelsen av matematikk. Matematisk aktivitet innebærer alltid å erstatte en semiotisk representasjon med en annen (Duval, 1999, s. 4 & Duval, 2006, s. 106-107). Det avgjørende spørsmålet for læring av matematikk er evnen til å bruke representasjoner på egen hånd (Duval, 2017 s.1).

Å lære matematikk reiser problemer med forståelse av faget som ikke observeres i andre kunnskapsområder (Duval, 2017 s.1). Men hva er grunnen til at enkelte elever har problemer med forståelsen av matematikk?

For å forstå dette ser Duval på om måten å tenke matematikk på er det samme som i andre kunnskapsområder. Han omtaler tre forhold som kjennetegner matematisk aktivitet fra et kognitivt synspunkt og som skiller det fra andre fag. De tre forholdene han nevner er: de semiotiske representasjoner, det kognitive paradokset og den store variasjonen av semiotiske representasjoner brukt i matematikk (Duval 2006, s. 106-107).

Det første forholdet som kjennetegner matematikk og som skiller matematikk fra andre fag er semiotiske representasjoner. Duval sier at utviklingen av semiotiske representasjoner var en vesentlig betingelse for utvikling av matematisk tankegang. Ingen form for matematisk handling kan bli utført uten å benytte seg av semiotiske representasjoner. I motsetning til andre vitenskapsområder er semiotiske representasjoner kjernen i matematisk aktivitet (Duval 2006, s. 106-107).

Det andre forholdet som skiller matematikk fra andre vitenskaper, er det Duval kaller for det kognitive paradokset. Matematiske objekter er i motsetning til fenomener i for eksempel fysikk og kjemi aldri tilgjengelig ved sansing eller med instrumenter som for eksempel mikroskop, teleskop og andre måleapparater. For eksempel en funksjon er ikke noe vi kan observere i naturen, eller ta og føle på. Den eneste måten å få tilgang til en funksjon som er et matematisk objekt, er ved å bruke tegn og andre semiotiske representasjoner. Matematiske objekter krever derfor alltid bruk av semiotiske representasjoner. Samtidig må man ikke forveksle det matematiske objektet som representeres med den semiotiske representasjonen som brukes (Duval, 2006, s. 107). Altså at man må kunne forstå at representasjon er kun en representasjon av objektet og ikke selve objektet. Det kognitive paradokset får størst betydning når vi kommuniserer matematikk og lærer matematikk.

Det tredje forholdet som kjennetegner matematikk, er den store variasjonen av semiotiske representasjoner brukt i matematikk. Matematikk er det faget der det finnes det største utvalget av semiotiske representasjoner, for eksempel naturlig språk, både muntlig og skriftlig, og det som er mer spesifikt for matematikk som algebraiske notasjoner. Grunnen til det er at enhver matematisk aktivitet krever forskjellige semiotiske representasjoner som fritt kan brukes i forhold til oppgaven som skal løses. Noen matematiske prosesser er enklere å utføre i et semiotisk system framfor et annet, og noen kan bli utført kun i et system (Duval, 2006, s. 108). Alt avhengig av hva som er formålet med den matematiske aktiviteten, da ulike representasjoner egner seg til ulike formål. Hvis vi vil finne tilnærmet verdi, så er grafer ofte enklere å bruke enn funksjonsuttrykk. For å få den eksakte verdien, egner derimot funksjonsuttrykk seg bedre (Hana, 2014, s. 157).

Lesh et. al. (1983) gjennomførte et forsøk blant en gruppe grunnskoleelever fra fjerde til åttende trinn hvor de løste forskjellige oppgaver i matematikk, blant annet tekstoppgaver. De observerte at elevene ofte endret representasjoner for å komme fram til en løsning og sjeldent benyttet seg av kun en representasjon. Bruk av representasjoner i problemløsning er en aktiv prosess der eleven skifter mellom forskjellige representasjoner. Ofte brukte elevene også to eller flere representasjoner samtidig for å komme fram til løsningen (Lesh et al., 1983, s. 296).

Duval sier også at i mange tilfeller er det ikke bare et representasjonssystem som må brukes, men minst to. Dette kan også være et problem for matematikkforståelsen blant elever. Han sier at grunnen til det er at det er en utfordring for elever å gjenkjenne det samme representerte objektet fremstilt gjennom forskjellige representasjonssystemer (Duval, 2006, s. 108). Et eksempel kan være fremstilling av en ligning som blir representert både som en graf og som en algebraisk notasjon. Evnen til å foreta en endring fra en representasjon til en annen, er viktig for forståelse av matematikk (Duval, 2006, s. 107). Lesh et. al. kom fram til at gode problemløsere blant elevene var de som lærte seg å velge passende representasjon til en bestemt situasjon (Lesh et al., 1983, s. 281).

2.2.4 Klassifisering av semiotiske register

Det er flere forskere, blant annet Lesh og Duval som har klassifisert representasjoner i ulike registre. I min masteroppgave skal jeg beskrive Duval sin klassifisering av representasjoner i ulike registre. Denne klassifiseringen av representasjoner skal jeg bruke som et utgangspunkt for analysen av de innsamlede data fra forsøket.

Duval skiller i sitt klassifiseringssystem mellom fire semiotiske registre etter hvor vidt de er diskursive eller ikke, eller hvor vidt de er monofunksjonelle eller multifunksjonelle (Duval, 2006, s. 110). Disse egenskapene bestemmer spesifikke representasjonsmåter og transformasjoner av representasjoner og gir verktøy for analyse av tankeprosessene som er involvert i matematisk aktivitet (Duval, 2006, s. 111). Disse registrene går fram av figur 2.4.

I et diskursivt register kan matematiske utsagn uttrykkes muntlig og skriftlig med og uten symboler. I dette registret finner vi naturlig språk, både muntlig og skriftlig som for eksempel navngiving av objektene, resonnementer, forklaringer, tekstoppgaver, og symbolske system som beregninger med tallsymboler (Duval, 2017, s. 84 – 85). Innen det ikke-diskursive registret finner vi ikoniske framstillinger som tegninger, skisser og ikke-ikoniske fremstillinger som geometriske figurer, kartesiske grafer, diagrammer og tabeller (Duval, 2017, s. 85).

Duval skiller også på om hvorvidt semiotiske registre er multifunksjonelle eller monofunksjonelle. Det monofunksjonelle registret er spesifikt for matematikk, da de fleste prosessene i dette registret foregår i form av algoritmer. I dette registeret finnes det symbolske system, for eksempel matematiske beregninger, kartesiske grafer og diagrammer (Duval, 2006, s. 109 & Duval, 2017, s. 84 – 85). Da prosessene innenfor det monofunksjonelle registret er algoritmiske beskrives de gjennom instrukser med bestemte regler for hvilke operasjoner som er lovlige (Hana, 2014, s. 145). I det multifunksjonelle registret kan ikke prosesser bli gjort om til algoritmer. Dette fordi under dette registret kommer naturlig språk, både muntlig og skriftlig samt ikoniske bilder og ikke-ikoniske geometriske figurer (Duval, 2006, s. 109). I motsetning til det monofunksjonelle registret er det ikke noen klare regler på hva som er lov å gjøre eller ikke gjøre innenfor et multifunksjonelt register (Hana, 2014, s. 145). Språket i det multifunksjonelle registret har en viktig rolle da det oppfyller den gjensidige kommunikasjon mellom læreren og elevene, og gir forklaringer til behandlinger i det monofunksjonelle registret (Duval, 2017, s. 84 & s. 90). Men språk kan også være kilden til misforståelser i matematikk fordi det brukes i alle problemformuleringer og ofte der hvor det kreves kunnskapsanvendelse fra elevene (Duval, 2017, s. 90). Duval sier at den kognitive avstanden mellom naturlig språk og de andre registrene kan gjøre det vanskelig å konvertere utsagn i det naturlige språket til for eksempel symbolspråk. I slike tilfeller kreves det bruk av det Duval kaller for hjelperepresentasjoner «Auxiliary Transition Representations», som i figur 2.4 vises som en ekstra overgang mellom det multifunksjonelle og det monofunksjonelle registret. Han sier at dette kan være todimensjonale representasjoner i det ikke-diskursive registret, for eksempel tegning (Duval, 2017, s. 90).

	DISCURSIVE Registers *Linearity based on succession* to produce and organize sequences of words or symbols	NON-DISCURSIVE Registers *Simultaneous apprehension of a two-dimensional organization of nD figural units*
MULTIFUNCTIONAL registers : *the transformations of the expressions are NON-ALGORITHMIC*	**NATURAL LANGUAGES.** *Three hierarchically included operations* (naming the objects, enunciation, and reasoning) *with their corresponding meaning units* *Two phenomenological modes of production:* oral or written	**ICONIC : IMAGES** *freehand production and internal conservation of topological relations characteristic of parts of the object.* **NON-ICONIC : GEOMETRICAL FIGURES.** *Three independent operations:* instrumental construction, mereological reconfiguration and deconstruction of the 2D dimensional shapes.
	(Auxiliary transitional representations *for free external operations*)	
MONOFUNCTIONAL: Registers: *the transformations of the expressions are ALGORITHMIC*	**THE SYMBOLIC WRITING** *for an unlimited substitution operation:* numbering system, algebraic writing, formal languages) *A single phenomenological mode of production:* writing	**CARTESIAN GRAPHS, DIAGRAMS** *strokes and arrow joining marks or nodes* For the graphs :operations of zooming, interpolation, change of axis.

Figur 2.4. Duval sin klassifisering av semiotisk registre (Duval, 2017, s. 85)

I sin forskning på representasjoner identifiserte Duval fire ulike semiotiske registre. Han sier samtidig at fra et matematisk synspunkt er et enkelt register tilstrekkelig (Duval, 2017, s. 83). Dette fordi en matematisk begrunnelse eller bevis er basert på en behandling innenfor et register. Men for å analysere matematisk aktivitet med formål for å lære eller undervise, kan vi ikke bare fokusere på et register hvor de matematiske behandlingene gir løsningen på problemet som stilles. For å kunne forstå matematikk er det behov for en koordinert mobilisering av flere registre. Med andre ord sier Duval, i matematikk tenker vi aldri i et enkelt register, men flere samtidig, selv om de eksplisitte produksjonene favoriserer et enkelt register (Duval, 2017, s. 83).

2.2.5 Transformasjoner – behandlinger og overganger

Det matematiske objektet kan representeres på mange ulike måter og ofte kan det være enklere å løse et matematisk problem ved å benytte en bestemt representasjon. Dette fordi ulike representasjoner belyser ulike aspekter ved et objekt. (Hana, 2014, s. 147). For å løse et matematisk problem må en derfor veksle mellom representasjoner i ulike registre, for eksempel fra naturlig språk til algebraisk uttrykk, og at man forandrer på representasjoner innad i samme register når man for eksempel regner ut et algebraisk uttrykk. Hana sier «*å veksle mellom og forandre på representasjoner kalles transformasjoner mellom representasjoner*» (Hana, 2014, s. 147). Transformasjoner er helt sentrale i klassifiseringene til Duval.

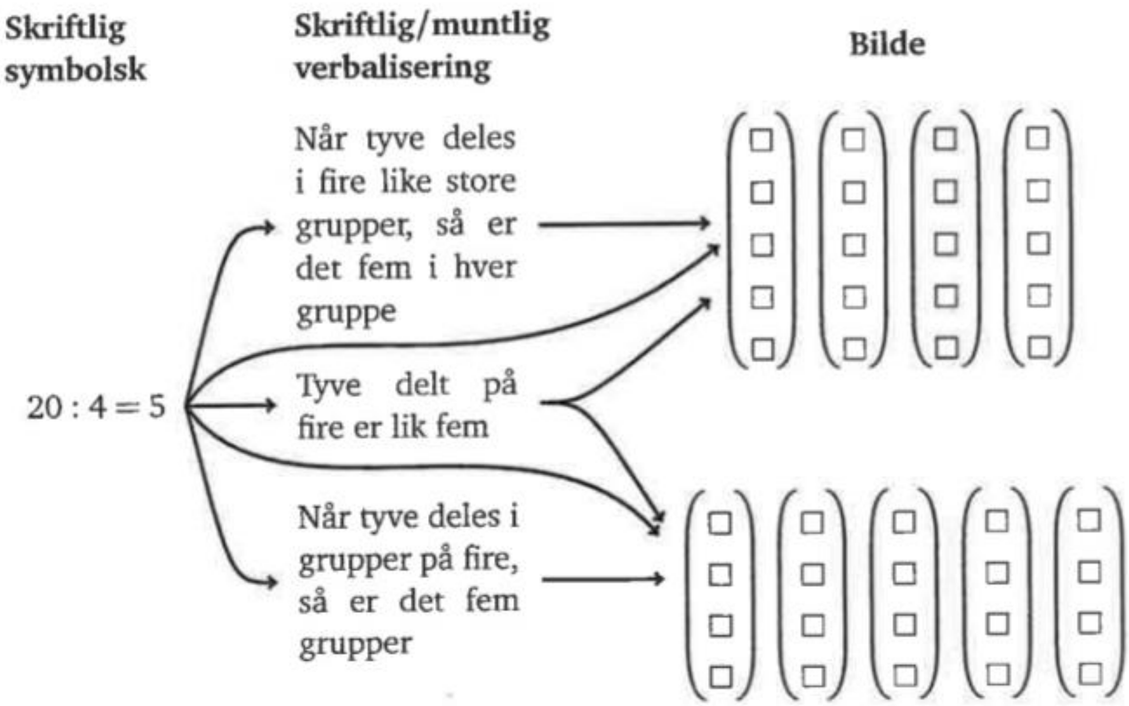
Ifølge Duval består matematisk aktivitet i å transformere semiotiske representasjoner til andre semiotiske representasjoner, og på denne måten få ny informasjon eller kunnskap for å løse matematiske problemer (Duval, 2017, s. 67). Duval skiller mellom to typer transformasjoner, behandlinger og overganger.

Behandlinger er transformasjoner innenfor et og samme register. Hva slags behandlinger som kan utføres er i hovedsak avhengig av mulighetene for semiotisk transformasjon som er spesifikt for det registre som benyttes (Duval, 2006, s. 111). For eksempel kan ligningen 2x+12=16 løses ved hjelp av algoritmer innenfor det diskursive monofunksjonelle registret. I det diskursive multifunksjonelle registeret kan for eksempel muntlig språk gjøres om til skriftlig språk. Et eksempel på behandling i det ikke-diskursive monofunksjonelle registret er å omgjøre en tabell for x og y verdier til en graf.

Overganger er transformasjoner av representasjoner mellom to ulike registre uten å endre det matematiske objektet som blir betegnet (Duval, 2006, s. 112). I figur 2.4 er overganger representert med piler. Eksempel på en overgang er å gå fra et funksjonsuttrykk i det diskursive monofunksjonelle registret til en graf i det ikke-diskursive monofunksjonelle registret. Et annet eksempel er å gå fra muntlig eller skriftlig språk i det diskursive multifunksjonelle registre til funksjonsuttrykk i det diskursive monofunksjonelle registret. Duval sier at overganger er en transformasjon av representasjoner som er mer komplekse enn behandlinger. Dette fordi et hvert skifte av register krever en gjenkjennelse av samme objekt i et annet register hvor innholdet kan være veldig forskjellig (Duval, 2006, s. 112). Duvals viktigste poeng knyttet til overganger og behandlinger er: «*Om behandling er viktigst fra et matematisk synspunkt, så er det overgang som i grunnen er den avgjørende faktoren for* *læring*» (Duval, 2006, s. 103, min oversettelse). Matematikkundervisning bør derfor også inneholde tilstrekkelig mange muligheter for å arbeide med overganger mellom ulike representasjoner.

Lesh et. al. er også opptatt av transformasjoner mellom ulike representasjoner. Han understreker at ved matematisk læring og problemløsning er representasjoner ikke bare viktige i seg selv, men også overganger mellom dem samt behandlinger innenfor et system (Lesh et. al., 1987, s. 34). Lesh et. al. (1987) sier at det å kunne transformere et begrep fra et register til et annet er en viktig del av forståelsen av et begrep. Gode problemløsere er de som er fleksible i bruken av forskjellige relevante representasjonssystemer og instinktivt bytter til den mest praktiske representasjonen på et gitt tidspunkt i løsningsprosessen (Lesh et. al., 1987, s. 37).

I forbindelse med overganger mellom ulike registre skiller Duval mellom kongruente og ikke-kongruente overganger. Ved kongruente overganger er det en «direkte oversettelse» fra et semiotisk register til en annet. Det vil si en en-til-en relasjon fra startrepresentasjonen til sluttrepresentasjonen. Når det ikke er en en-til-en-relasjon mellom startrepresentasjonen og sluttrepresentasjonen har vi det han kaller for en ikke-kongruent overgang (Duval, 2006, s. 122). I figur 2.5 nedenfor er kongruente overganger mellom semiotiske registre illustrert med rette piler. Ikke-kongruente overganger mellom semiotiske registre er illustrert med bøyde piler. Duval hevder at ikke-kongruente overganger er for mange elever en vanskelig barriere når de lærer seg matematikk. Det innebærer at mange elever ser på to forskjellige representasjoner av samme objekt som om det skulle være to forskjellige matematiske objekter. Dette fører til at mange elever har vansker med å gå fra et register og over til et annet (Duval, 2006, s. 123-124). Et eksempel på dette er å gå fra grafen av en funksjon til den algebraiske likningen av funksjonen, eller fra tekst til funksjon. For kongruente overganger er både startrepresentasjonen og sluttrepresentasjonen så like at eleven ser på en overgang mellom de to ulike semiotiske systemene som en enkel koding (Duval, 2006, s. 122).



Figur 2.5. Eksempler på kongruente (illustrert med rette piler) og ikke-kongruente (illustrert med bøyde piler) overganger, (Hana, 2014, s. 153).

2.3 Bruk av representasjoner i løsningen av tekstoppgaver

2.3.1 Tekstoppgaver i matematikk

I min studie skal jeg spesielt se på hvordan elevene bruker representasjoner i forbindelse med løsning av tekstoppgaver. Men hva slags type matematikkoppgaver er tekstoppgaver?

Ifølge Nortvedt er tekstoppgaver i matematikk, oppgaver der elevene selv med utgangspunkt i teksten må finne fram til hvordan oppgaven kan løses (Nortvedt, 2015). Matematiske tekster er multimodale eller sammensatte, og i tekstoppgaver inngår gjerne tekster som er skrevet med en blanding av naturlig språk og symbolspråk. Tekst omfatter også diagrammer, tabeller, figurer, illustrasjoner og tegninger. Ifølge Nordbakke er disse meningsskapende ressurser, da de tilfører viktig informasjon til oppgaveteksten (Nordbakke, 2014, s. 100). Pind sier at i tekstoppgaver er matematikken innlemmet i oppgaveteksten (Pind, 2011, s. 32). Det krever en viss matematikkompetanse for å løse en tekstoppgave, da matematikkens spesielle språk med faglig begrep, tegn og symboler er annerledes enn dagligspråket. Det å lære seg det matematiske språket er ifølge Pind en vesentlig del av det å lære matematikk (Pind, 2011, s. 19 – 20). Begreper og begrepsforståelse står derfor i en særstilling i matematikkfaget

(Nordbakke, 2014, s. 104). Oppgaveteksten inneholder ofte mye informasjon og en del ord og begreper som sjelden brukes eller har egen betydning i dagligtale. For eksempel ordet «rot», «potens», «funksjon» og «forhold» har en annen betydning i matematikk enn i dagligtale (Pind, 2011, s. 21). Et annet eksempel kan være begrepet «addisjon» som brukes kun i matematikk og kan være fremmed for elever, da det ikke er naturlig del av deres ordforråd. Ifølge Nordbakke innebærer lesing i matematikk avkoding av teksten med de matematiske symbolene, samt tolking og forståelse av teksten. Det avgjørende for forståelsen er at eleven behersker det matematiske språket med tilhørende begreper. Det er kun på denne måten det skapes mentale representasjoner av det oppgaveteksten beskriver (Nordbakke, 2014, s. 99).

Tekstoppgaver brukes til ulike formål i undervisningen. Dels brukes de til å øve på innøvde regneteknikker, problemløsning og modellering, men også for å utforske matematiske sammenhenger når nytt stoff skal læres (Nortvedt, 2015). Uavhengig av disse formålene må eleven kunne lese og forstå teksten i oppgaven før den kan løses. Her må eleven trekke veksler på både matematisk kompetanse og generelle lesestrategier når de leser tekstoppgaver (Nortvedt, 2015).

Det å forstå en oppgave, ifølge Nortvedt, *«vil si at eleven gjennom lesingen danner seg en mental modell av det matematiske problemet som ligger innbakt i teksten»* (Nortvedt, 2015). Denne mentale modellen inneholder elevens matematiske modell som eleven bruker til å løse oppgaven. Elevens mentale matematiske modell kan inneholde meningen i oppgaven, men dersom eleven ikke har lykkes med å forstå teksten vil elevens modell inneholde feil (Nortvedt, 2015). Hun sier videre at oppgaver som inneholder skjult eller irrelevant informasjon kan være utfordrende for elever. I slike oppgaver må eleven forme en plan for hvordan oppgaven kan løses, før eleven gjennomfører de beregningene som er nødvendige. På slutten av oppgaveløsningen bør eleven vurdere om svaret er rimelig ut i fra resultater av de beregningene som er utført og ut i fra problemstillingen i oppgaven. Ifølge Nortvedt vurderer elevene ofte ikke svaret og dermed kan et meningsløst svar bli akseptert (Nortvedt, 2015).

Nortvedt har i to studier sett på sammenhengen mellom leseforståelse og løsning av tekstoppgaver. Disse studiene viser at enkelte elever kan mislykkes med oppgaveløsingen fordi de tolker teksten i oppgavene feil og på grunn av dette ikke oppfatter hva oppgaven faktisk går ut på (Nortvedt, 2015). Ifølge Nortvedt leser mange elever oppgaveteksten overflatisk. De fokuserer i større grad på at de skal regne, det vil si løse oppgaven, enn på å forstå hva oppgaven handler om (Nortvedt, 2015).

Nortvedt sier at mistolkning av nøkkelord som «hver», «til sammen» eller «mer enn» fører til feil i oppgaveløsningen. Disse nøkkelordene brukes på forskjellige måter avhengig av om det er en ettstegsoppgave eller en flerstegsoppgave eleven skal løse. Med en ettstegsoppgave menes en oppgave som kan løses ved hjelp av en av de fire regneartene. Med en flerstegsoppgave menes en oppgave som løses ved hjelp av en kombinasjon av de fire regneartene. Disse nøkkelordene forteller ofte hvilken operasjon som skal gjennomføres i en ettstegsoppgave der for eksempel ordet «hver» kan fortelle at noe skal fordeles likt på et antall personer. Når de samme nøkkelordene opptrer i en flerstegsoppgave, forteller de snarere om relasjon mellom mengder eller personer. Dersom elevene tolker disse som opperasjonsord blir resultatet av oppgaveløsingen feil (Nortvedt, 2015). Nortvedt sier at for elever som sliter med tolkning av nøkkelord, kan det være lurt å arbeide med hvordan nøkkelord brukes i matematiske tekster (Nortvedt, 2015).

2.3.2 Naturlig språk som representasjon

Ifølge Duval har naturlig språk i matematikk en spesiell rolle i det diskursive registre. Dette fordi språk brukes til å formulere definisjoner, læresetninger, resonnementer, tekstoppgaver og begrunne løsninger. I undervisningen brukes naturlig språk i alle problemformuleringer der det kreves kunnskapsanvendelse fra elevene. Språk i matematikk kan derfor ofte være en kilde til misforståelser og forårsaker problemer blant annet med forståelsen av tekstoppgaver (Duval, 2017, s. 90).

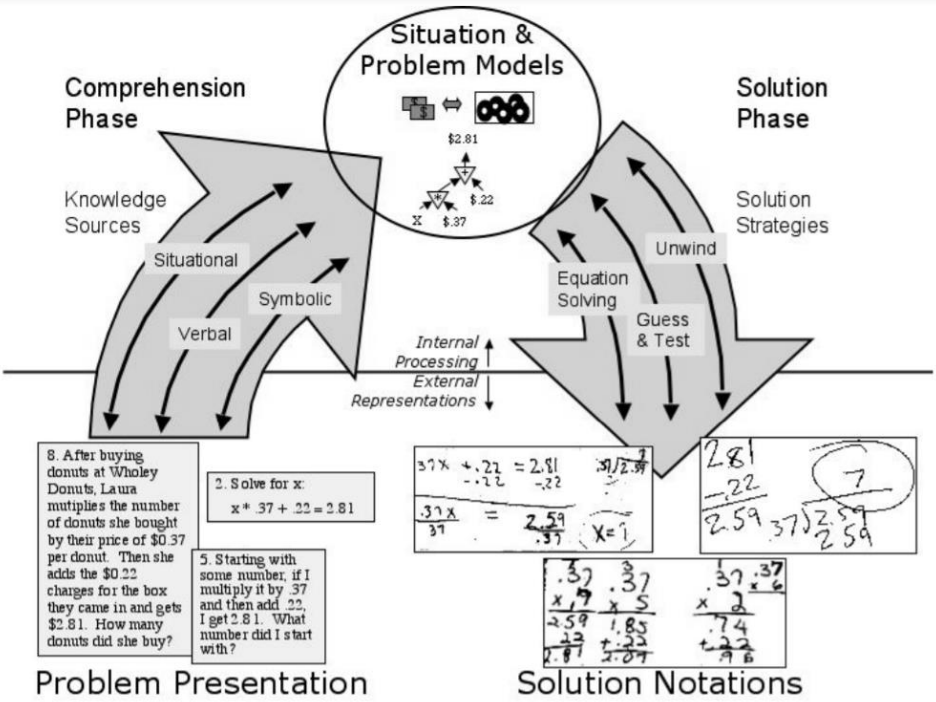
Ifølge Duval er det en betydelig kognitiv avstand mellom det naturlige språket og de andre registrene, også de kognitive registrene som er spesifikke for matematisk eller logisk behandling (Duval, 2017, s. 90). Det gjør det vanskelig å konvertere utsagn i det naturlige språket direkte til de andre registrene, særlig når det ikke er en en-til-en relasjon mellom disse to registrene. I slike tilfeller mener Duval at elevene trenger å bruke hjelperepresentasjoner «Auxiliary Transition Representations». Disse hjelperepresentasjonene kan nås ved å konvertere den diskursive representasjonen til en to dimensjonal representasjon i det ikke-diskursive registre (Duval, 2017, s. 96). Altså at når eleven tolker en tekstoppgave er det en fordel å lage en tegning, figur, tabell eller liknende, slikt at det blir lettere å forstå sammenhengen mellom naturlig språk i oppgaveteksten og for eksempel symbolspråk i funksjonsuttrykket. Hjelperepresentasjonene blir et redskap som kan brukes for å tolke representasjoner i de diskursive registrene for eksempel tekst, for å kunne se sammenheng mellom det multifunksjonelle og det monofunksjonelle registret.

2.3.3 Forståelsesfasen og løsningsfasen

Koedinger og Nathan har forsket blant annet på virkningen av representasjoner på matematiske resonnement i forbindelse med tekstoppgaveløsning. En generell oppfatning blant elevene er at tekstoppgaver innenfor aritmetikk og algebra er vanskelig å løse (Koedinger & Nathan, 2004, s. 130). Samtidig så peker Kongelf i sin doktorgradsavhandling (2019) på at land som gjør det godt i matematikk har et sterkt fokus på problemløsning. Han viser da særlig til Singapore som scorer høyt på de internasjonale testene PISA og TIMMS. Der blir problemløsning betraktet som kjernen i matematikkfaget (Kongelf, 2019, s. 14).

Prosessen med løsning av tekstoppgaver kan ifølge Koedinger og Nathan deles inn i en forståelsesfase og en løsningsfase (Koedinger & Nathan, 2004, s. 131). I forståelsesfasen tolker elevene oppgaveteksten og skaper tilsvarende interne representasjoner av problemstillingen som er uttrykt i tekstoppgaven. Målet med denne fasen er å forstå situasjonen som er beskrevet i tekstoppgaven. I løsningsfasen utfører elevene behandlinger eller overganger av de interne og eksterne representasjonene for å komme fram til en løsning (Koedinger & Nathan, 2004, s. 131). Denne oppfatningen av hvordan elever tolker en oppgavetekst finner vi også hos Nordtvedt som er beskrevet i delkapitlet 2.3.1 om tekstoppgaver i matematikk og hva det innebærer å forstå en oppgave. En slik oppfatning kan jeg også finne igjen hos Duval som er omtalt i delkapitlet 2.2.3 om betydningen av representasjoner i matematikk, der det er beskrevet hvordan elevene tenker når de løser et matematisk problem.

Forståelsesfasen og løsningsfasen er ofte sammenflettet når elevene løser oppgaven stykkevis. Dette ved at de deler oppgaven opp i mindre deler eller setninger, og deretter lager en ekstern representasjon for denne delen av oppgaven. For eksempel som en aritmetisk utregning eller som et algebraisk uttrykk. Så gjentar de en slik operasjon for neste del av oppgaven. Grunnen til dette er at det kan hjelpe elevene til å få med seg alt i oppgaveteksten (Koedinger & Nathan, 2004, s. 131).



Figur 2.6. Prosessen for løsning av tekstoppgaver til Koedinger og Nathan (Koedinger & Nathan, 2004, s. 132).

Figur 2.6 visualiserer og fremstiller sammenhengen mellom forståelsesfasen og løsningsfasen. I forståelsesfasen tolker elevene oppgaveteksten de får presentert. Deres tolkning kommuniseres ved hjelp av en forklarende representasjon, for eksempel verbal eller ved hjelp av algoritmer. Når elevene har forstått oppgaven velger de en løsningsstrategi for å løse oppgaven. Dette kalles løsningsfasen. Løsningen kommuniseres med en ekstern representasjon, i dette tilfellet en algoritme. Både i forståelsesfasen og i løsningsfasen skjer det overganger mellom interne og eksterne representasjoner og i figur 2.6 illustreres dette med piler.

Forståelsesfasen er viktig i forbindelse med tekstoppgaveløsning og det er gjort studier som viser at feil i forståelsesfasen forklarer ofte problemløsningsvansker (Koedinger & Nathan, 2004, s. 132). Det vises blant annet til studier som viste flere løsningsfeil i aritmetiske tekstoppgaver med inkonsistent språk (inconsistent language). For eksempel med oppgaver når det i teksten står «mer enn» og «flere enn» hvor det i utgangspunktet kreves subtraksjon for å løse oppgaven (Koedinger & Nathan, 2004, s. 133).

Når det gjelder løsning av tekstoppgaver viser Koedinger og Nathan til forskjellige løsningsstrategier som er vanlig å bruke i forbindelse med løsning av tekstoppgaver. En av disse strategiene er den normative strategien, også kalt «translation to algebra and solve algebraically» (oversett og løs) strategien. Her oversetter eleven det som står i oppgaveteksten til et algebraisk uttrykk og løser det algebraisk. De andre strategiene som er vanlig å bruke kaller Koedinger og Nathan for uformelle strategier. En av disse er «guess and test» (prøve og feile) strategien. I denne strategien gjetter elevene på den ukjente verdien og sammenligner resultatet med ønsket resultat i problemstillingen. Hvis resultatet blir feil prøver de igjen. En annen uformell strategi er «unwind» (arbeide baklengs). Eleven arbeider baklengs for å finne den ukjente startverdien. Dette innebærer å reversere prosessen som er beskrevet i oppgaven (Koedinger & Nathan, 2004, s. 145 – 146).

2.3.4 Problemløsningsstrategier

Koedinger og Nathan beskriver prosessen for løsning av tekstoppgaver og sier at i løsningsfasen velger elevene en løsningsstrategi for å løse oppgavene. Ifølge Klaveness et. al. (2019) er det viktig at elevene har kjennskap til forskjellige strategier for problemløsning når de jobber problemløsende. Dette gjør det lettere for elevene å komme i gang med løsningen av oppgavene (Klaveness et. al., 2019, s. 186). Klaveness et. al. viser også til at land som gjør det godt i matematikk har et stort fokus på problemløsning, ved for eksempel å vektlegge spesifikke strategier for problemløsning (Klaveness et. al., 2019, s. 184).

Nedenfor er det listet opp noen eksempler på problemløsningsstrategier som er beskrevet i Klaveness et. al. som elevene bør få kjennskap til. Noen av disse er også beskrevet av Koedinger og Nathan og de er nevnt i delkapittel 2.3.3:

- «Å forenkle problemet», som for eksempel å bruke mindre tall til å begynne med, slik at man kan regne det ut i hodet. Vi kan bruke positive tall i stedet for negative tall. Man kan bruke situasjon som er mer kjent eller dele oppgaven i flere deler og løse delene hver for seg (Klaveness et. al., 2019, s. 186).
- «Å prøve og feile», som for eksempel å prøve seg fram med ulike verdier for å komme fram til svaret. Strategien involverer kvalifisert gjetting før man utfører beregningene. (Klaveness et. al., 2019, s. 188).

- «Å tegne for å løse problemer», som for eksempel å visualisere et problem i oppgaven gjennom egne tegninger. Strategien hjelper eleven å komme videre i løsningsprosessen og gir innsyn i elevens matematiske forståelse (Klaveness et. al., 2019, s. 190).
- «Visualisering ved hjelp av blokktegning». Med dette menes at eleven bruker blokktegning for å visualisere problemet i oppgaven, slik at det blir lettere for eleven å se hvordan oppgaven kan løses. Dessuten brukes blokktegning for å regne ut svaret i oppgaven (Klaveness et. al., 2019, s. 192)
- «Å tenke baklengs». Denne strategien brukes ofte når man vet sluttsvaret, men ikke den ukjente startverdien i oppgaven. Fordelen med strategien er at den hjelper til å styrke forståelsen av sammenhenger mellom regnearter (Klaveness et. al., 2019, s. 200).

2.3.5 Elevene leser bare tall i tekstoppgaver

Koedinger og Nathan som omtalt tidligere deler prosessen med løsning av tekstoppgaver inn i en forståelsesfase og en løsningsfase. I forståelsesfasen tolker eleven oppgaveteksten og målet med denne fasen er å forstå situasjonen som er beskrevet i tekstoppgaven. Denne fasen er veldig viktig for løsningen av oppgaven og forskningen viser at allerede i denne fasen gjør mange elever feil (Koedinger & Nathan, 2004, s. 131 – 132). En av grunnene til disse feilene er at enkelte elever leser bare tall i oppgaveteksten.

Blum i sin artikkel fra 2015 henviser til en PISA-undersøkelse som viser at hele 49% av elevene på 10. trinn leser bare tallene i en tekstoppgave. Et eksempel det refereres til er «Rocke konsert» oppgaven der elevene skal finne ut antall publikum det er plass til på en konsert. I OECD var det bare 26% av elevene som hadde riktig svar. Av de som svarte feil var det hele 49% som beregnet antallet ut ifra tall de hadde sett i oppgaveteksten. Det er empirisk dokumentert at elevene «*ignorerer sammenhenger, bare trekker ut all data fra teksten og beregner noe i henhold til et kjent skjema*» (Blum, 2015, s. 78 – 79). Blum sier at det er vel dokumentert i forskningen til blant annet Schoenfeld og Verschaffel at når elevene løser en aritmetisk tekstoppgave, så leser de bare tall og bruker algoritmiske beregninger uten en realistisk betraktning eller sunn fornuft (Blum, 2015, s. 79).

Et annet kjent eksempel på det er matematikkoppgaver på kinesisk som Botten presenterte for elever, studenter og lærere. Det viste seg at de «løser» oppgavene uten å skjønne språket, kun trekker ut tall fra oppgaveteksten og utfører en regneoperasjon. Botten sier at mange elever løser tekstoppgaver der teksten er norsk, på samme måte som de løste den kinesiske oppgaven. «*De skummer vekk teksten, finner fram tallene og gjør det de finner mest fornuftig med tallene*» (Botten, 2003, s. 79 - 81).

I dette kapittelet har jeg presentert teori som jeg mener er viktig for å kunne svare på forskningsspørsmålet i min masteroppgave. Denne teorien vil være utgangpunktet for analysen av datamateriale som jeg samlet under forsøket på skolen. Før jeg skal presentere analysen min skal jeg gjøre rede for metodevalget for min studie.

Kapittel 3 Metode

Metode handler om hvordan en skal gå fram for å skaffe informasjon om virkeligheten. Den omfavner metode for innsamling av informasjon, metode for hvordan denne informasjonen kan analyseres og hvilke svar den gir oss (Christoffersen & Johannessen, 2018, s. 16).

I dette kapitlet skal jeg begrunne valg av metode for min forskning og reflektere rundt valget. Jeg skal beskrive hvordan data ble samlet inn og analysert. Jeg skal også ta for meg spørsmålet rundt validiteten og reliabiliteten samt forskningsetiske vurderinger knyttet til min studie. Jeg skal avslutte kapitlet med presentasjon av oppgaver som er valgt til studien.

3.1 Valg av metode og metoderefleksjon

Denne studien har til hensikt å undersøke og analysere hvordan elevene bruker representasjoner og hvordan de gjennomfører overganger mellom representasjoner i forbindelse med løsning av tekstoppgaver. I denne sammenheng skal jeg også undersøke hvordan elevene tolker tekstoppgaver og hvilke representasjoner de bruker i forbindelse med overganger fra tekst til andre representasjoner av matematiske objekter. Jeg ønsker å finne ut hvordan elevene tenker og resonnerer når de løser tekstoppgaver og hvilke utfordringer de møter på veien til løsningen. Jeg fikk mulighet til å utføre min studie på en 10. klasse, og på grunn av dette ble både tekstoppgaver og undersøkelsen min tilpasset 10. klassetrinn. Forskningsspørsmålet for masteroppgaven er: Hvordan bruker elevene på 10. trinn forskjellige representasjoner og gjennomfører overganger i arbeid med tekstoppgaver?

Innen utdanningsforskning anvendes samfunnsvitenskapelig forskningsmetoder og man jobber ofte ut fra et skille mellom kvalitative og kvantitative forskningsmetoder. Ved kvalitative metoder samles inn data i form av tekst, der informasjonen hentes fra blant annet intervjuer og observasjoner ofte med få informanter (Høgheim, 2020, s. 29). Metoden har stor fleksibilitet på grunn av nærhet til forskningsfeltet. Ved kvantitative metoder derimot samles inn data i form av tall, slik som spørreundersøkelser og standardiserte tekster, ofte med mange informanter (Høgheim, 2020, s. 29). Metoden er lite fleksibel på grunn av avstand til forskningsfeltet. Med bakgrunn i de overnevnte hensyn, har jeg valgt en kvalitativ metode for min forskning.

Hensikten med min studie er å finne ut hvordan elevene tenker og resonnerer når de løser tekstoppgaver. Det er derfor nødvendig for meg å studere hvordan elevene jobber med tekstoppgavene og høre hvordan de tenker. Dette kan jeg oppnå ved å observere og lytte til den enkelte elev. Observasjon og samtale er en datainnsamlingsmetode som inngår i kvalitativ metode og som jeg mener egner seg best til det formålet.

For å samle inn data observerte jeg derfor hvordan en gruppe elever løste tekstoppgaver. Elevene fikk utdelt et oppgavesett de skulle jobbe med individuelt. Etter at elevene ble ferdig med oppgaveløsningen ble det gjennomført en felles gjennomgang. Elevene forklarte hvordan de tenkte når de løste oppgavene og begrunnet sine valg. Jeg gjorde også feltnotater av hva jeg observerte under forsøket.

Christoffersen og Johannessen deler forskernes feltrolle i deltagende og ikke deltagende observasjon (Christoffersen & Johannessen, 2018, s. 68). Min rolle var en deltakende observasjon, da jeg var til stede under hele forsøket, observerte gruppen på nært hold og var tilgjengelig for spørsmål. Jeg satte også i gang aktiviteten og gjennomførte samtalene etter at elevene ble ferdig med det skriftlige arbeidet. Ellers jobbet elevene selvstendig under oppgaveløsningen.

Datamateriale som ble samlet til studien var elevenes besvarelser, lydopptak tatt under forsøket og feltnotater. Det er den type materiale som samles inn under kvalitativ forskning. Ved en kvalitativ metode har vi ifølge Høgheim mulighet til å samle inn mye og detaljert informasjon fra utvalgte personer, og på den måten finne mønstre og trekke konklusjoner ut fra våre funn (Høgheim, 2020, s. 30). Dette er også hensikten med min forskning.

Kvalitativ studie karakteriseres også med at det er få informanter som deltar i forsøket (Høgheim, 2020, s. 29). I min forskning var det mest hensiktsmessig å gå i dybden i datamateriale med færre informanter enn å forske på hele klassen. Med færre informanter hadde jeg også mulighet til å studere i dybden elevens forklaringer i form av både muntlig ytringer og skriftlig arbeid.

En fordel med å bruke kvalitativ metode er at metoden også er veldig fleksibel. Metoden tillater i større grad mer spontanitet og tilpasning enn kvantitativ metode når det kommer til interaksjonene mellom forsker og deltagere (Christoffersen & Johannessen, 2018, s. 17). Det er nærhet til dem som studeres som bidrar til fleksibiliteten i kvalitativ metode (Høgheim, 2020, s. 29). Under forsøket sto jeg fritt til å stille spørsmål til elevene og kunne tilpasse dem til elevenes besvarelser. Jeg har på denne måten samlet inn datamateriale som jeg ikke kunne ha gjort gjennom standardiserte spørsmålskjema. Jeg kunne både følge med på hvordan elevene løste oppgavene og høre på elevenes forklaringer. Det ga meg også mulighet til å tilpasse spørsmål ved gjennomgangen av oppgavene på slutten av forsøket. I den forbindelse kunne jeg også undersøke og avklare ting jeg hadde lurt på underveis i forsøket. Samtidig har metoden en svakhet i at min deltagelse kunne påvirke atferden til informanten, noe som kan utgjøre en feilkilde i de innsamlede dataene.

Metoder for hvordan data samles inn i kvalitative studier har sine styrker og svakheter. Dette kan ha innvirkning på både validiteten og reliabiliteten til studie. Dette kommer jeg tilbake til i delkapitlet om validitet og reliabilitet i min studie.

3.2 Deltagerutvalg

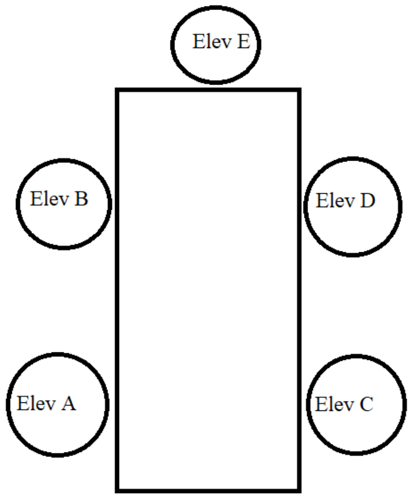
Det som kjennetegner kvalitativ metode, er at man prøver å få mye data ved hjelp av et begrenset antall informanter. Rådende prinsippet for utvelgelsen av informanter i kvalitative studier bør derfor være hensiktsmessighet når det gjelder kriteriene for utvalg (Christoffersen & Johannessen, 2018, s. 49 og 57).

I min studie ønsket jeg å undersøke hva som kjennetegner elevers arbeid med matematiske representasjoner, og mente at det var mest hensiktsmessig å begrense forskningen til et klassetrinn. Dette for å ha en mest mulig homogen gruppe når det gjelder bakgrunnskunnskaper i matematikk. Et av utvelgelses kriteriene var derfor at deltakerne skulle være elever på et og samme klassetrinn. Utover det stilte jeg ikke noen spesielle krav til hvilke elever som skulle delta. Jeg tenkte at det mest hensiktsmessige er å velge deltakere som ønsker å delta, er engasjerte og nysgjerrig på å være med i studien. Dette mente jeg ville bidra til at jeg kunne få mest mulig ut av forsøket.

Jeg opprettet kontakt med en ungdomsskole i Viken tidlig på høsten 2021 via en lærer jeg kjente fra før. Skolen stilte seg positivt til studien. I samråd med meg ble det valgt at elever fra 10. trinn skulle delta i forsøket. Deltakelsen skulle basere seg på frivillighet og jeg fikk tilbakemeldt at det var flere elever som ønsket å delta. Jeg ønsket opprinnelig fire informanter, men det endte opp med fem, fire jenter og en gutt. Deltagerne i min studie ble derfor fem elever på 10. trinn på en ungdomsskole i Viken.

3.3 Kontekst og gjennomføring av datainnsamling

Til mitt forsøk fikk jeg utdelt et lite grupperom. I dette rommet var det et bord stort nok til at elevene kunne sitte to på hver side. Hver elev ville da ha en ved siden av seg, samt en ovenfor seg. Etter planen skulle det være fire elever med i forsøket, men ettersom det var stor popularitet blant elevene for å delta, endte jeg opp med fem informanter istedenfor fire. Den siste eleven ble da sittende på enden av bordet mellom to andre elever som satt på sidene. Det var ca. en meter avstand mellom elevene på sidene og ca. en meter avstand mellom elevene ovenfor hverandre. På den enden der det satt tre elever ble det selvfølgelig mindre avstand. Måten elevene satt på kan ha hatt en påvirkning på hvordan de har svart på oppgavene, ettersom det ikke var mye hinder for at de kunne se hva naboen hadde gjort. Det optimale ville vært å få et større rom hvor det var mulighet til at elevene kunne sitte mer spredt i rommet. Hvordan elevene satt ved bordet vises i figur 3.1 under.



Figur 3.1. Hvordan eleven satt

Det var for øvrig ikke noen andre ytre påvirkninger som lysforhold, ventilasjon eller støy som var forstyrrende for deltakerne i forsøket.

Elevene fikk utdelt et oppgavesett som de skulle jobbe med individuelt. I henhold til prinsippet om personvern skal ikke elevene kunne gjenkjennes i min masteroppgave eller kunne knyttes til besvarelsene de har levert. Elevenes besvarelser ble derfor anonymisert ved at deres navn ikke ble ført opp på oppgavesettet. Navnene ble erstattet med bokstavene A, B, C, D og E. For min egen del noterte jeg i feltnotatet hvilken elev som var henholdsvis A, B, C, D og E. Videre i min masteroppgave vil elevene kun bli representert med bokstaver. Dette for å ivareta elevenes anonymitet.

Før elevene satte i gang med oppgavene hadde jeg en gjennomgang med dem der jeg forklarte hva min studie handlet om og hva jeg ønsket av dem som deltagere. Jeg vektla at undersøkelsen ikke skulle teste om de klarte å løse oppgavene riktig, men å se på hvilke måter de velger å løse dem på og hvordan de tenker når de løser oppgavene. Jeg ba derfor elevene om å vise full utregning når de jobbet med oppgavene slik at jeg hadde mulighet til å kunne se hvordan de hadde kommet fram til svaret.

Elevene ble også informert om at det ville bli tatt lydopptak under forsøket, for øvrig den samme informasjonen de fikk i samtykkeskjemaet (vedlegg 1). Dette i henhold til forskningsetiske retningslinjer om informasjonsplikt (NESH, 2021). Når elevene begynte å jobbe med oppgavene plasserte jeg mobilen som tok opp lyd på en høy plass bakerst i grupperommet, slik at den kunne få med seg mest mulig lyd uten at den var veldig synlig for elevene. Under oppgaveløsningen gikk jeg samtidig rundt og observerte elevene og skrev ned korte notater av hva jeg observerte.

I min opprinnelige plan for datainnsamlingen hadde jeg planlagt å gå rundt under oppgaveløsningen å spørre elevene hvordan de tenkte mens de løste oppgavene. Denne planen forkastet jeg med en gang, da jeg så at elevene jobbet veldig bra med oppgavene. Min vurdering var at elevene kunne bli forstyrret av at jeg gikk rundt og spurte dem hvordan de tenkte. Dessuten satt elevene såpass nær hverandre at de kunne bli påvirket av hva de andre svarte når de forklarte høyt. Jeg tok en rask beslutning og bestemte meg for heller å ta en felles gjennomgang etter oppgaveløsningen. På den måten ble elevenes mulighet til å påvirke hverandres løsninger redusert, samtidig som jeg kunne få en forklaring på hvordan hver av dem hadde tenkt når de løste oppgavene. Elev E ble ikke med på den felles gjennomgangen. Dette fordi han måtte gå tidlig, så jeg var nødt til å ta en individuell gjennomgang med han før de andre elevene var ferdig med sine oppgaver.

Elev B ble tidlig ferdig med oppgavene, så jeg utfordret henne til å løse en av oppgaven på en annen måte. Hun løste derfor oppgave 1 på nytt.

Når alle elevene var ferdige startet vi med en gjennomgang av oppgavene. Jeg fortalte dem at vi skal ta en oppsummering av oppgavene og spurte om det var noen som hadde lyst til å starte med å fortelle hvordan de hadde løst oppgavene. Jeg presiserte også ovenfor elevene at om de ikke ønsket å fortelle hvordan de hadde løst oppgavene kunne de slippe å gjøre det.

Dette for at de ikke skulle føle seg presset til å delta i gjennomgangen. Elev D meldte seg frivillig først til å fortelle hvordan hun hadde løst oppgave 1. Uten noen innblanding fra meg valgte elev C som satt ved siden av elev D å fortelle hvordan hun hadde løst oppgaven, deretter elev A som satt ovenfor elev C og til slutt elev B som satt ved siden av elev A. Denne rekkefølgen var den samme under gjennomgangen av alle oppgavene. Elevene ble avbrutt to ganger under gjennomgangen av oppgave 3, da kontaktlærer skulle gi en beskjed. Dette var mens elevene C og D hold på med sine oppsummeringer av oppgaven. Etter gjennomgangen av oppgave 3 begynte jeg å nærme meg tiden som var avsatt til dette forsøket, slik at gjennomgangen av oppgave 4 og 5 ikke kunne være like grundig som de andre oppgavene. Jeg mener likevel at vi fikk gått grundig nok gjennom de to siste oppgavene, selv om det måtte gjøres litt fortere. Dette mener jeg ikke har gått ut over kvaliteten på gjennomgangen.

Etter gjennomgangen av alle oppgavene var forsøket ferdig og jeg takket elevene for deres deltakelse. Jeg samlet inn alle oppgavearkene til elevene og sorterte dem i hver sin bunke etter hvilken elev som hadde løst den.

Hele forsøket varte i 1 time og 15 minutter.

3.4 Metode for analyse av data

De kvalitative data som samles inn under forsøket skal analyseres og tolkes. Det å analysere data innebærer å dele datamaterialet inn i mindre elementer for å finne et mønster eller avdekke mening. Gjennom tolkningen setter vi vårt datamateriale inn i en større sammenheng ved å ta utgangspunkt i teori og se på funnene i lys av denne teorien (Christoffersen & Johannessen, 2018, s. 94).

Hvordan eleven bruker representasjoner i løsningen av tekstoppgaver ble studert gjennom en slik kvalitativ analyse av både skriftlige besvarelser gitt av elevene i forbindelse med løsning av tekstoppgavene, feltnotater gjort under forsøket samt lydopptak av gjennomgangen av oppgavene.

Som nevnt gjorde jeg feltnotater under forsøket. Disse notatene delte jeg opp etter hvilke observasjoner som ble gjort. En del bestod av observasjoner for hver elev, og den andre delen bestod av generelle observasjoner av hele forsøket. Etter forsøket ble notatene gjennomgått, sortert og knyttet til hver av oppgavene og hver elev. Feltnotater ble analysert sammen med det øvrige datamateriale.

Etter forsøket ble lydopptaket transkribert (vedlegg 3). Altså at jeg omformet muntlig datamateriale til tekst (Høgheim, 2020, s. 133). Ettersom elevene ikke sa noe under selve oppgaveløsningen, ble kun gjennomgangen etter oppgaveløsningen transkribert. For å gjøre det oversiktlig for meg selv delte jeg transkripsjonen inn i seks deler, en for hver av de fem oppgavene og en del for elev E som var nødt til å ha en egen gjennomgang. Jeg markerte tydelig hvem som kom med hvilke utsagn. Ifølge Høgheim skal transkripsjonen være så nær det muntlige språket som mulig. Det vil si å inkludere ordlyder som «hmmm» og «mhm» (Høgheim, 2020, s. 133). Jeg har derfor sørget for at min transkripsjon av hva elevene sa under forsøket gjengir det muntlige språket så nært som mulig. Jeg transkriberte ordrett hva elevene sa, hadde med ordlyder som «hmmm» og «mhm» samt pauser mellom ordene. Pausene i transkripsjonen ble skrevet som pause sammen med antall sekunder den varte og satt i parentes: f.eks. (pause 2 sek). Ved å gjøre transkripsjonen så nært som mulig det muntlige språket, ga det meg datamateriale uten fortolkning som jeg kunne bruke under selve analysen av funn.

Etter at lydopptaket hadde blitt transkribert begynte jeg å analysere i dybden de skriftlige besvarelsene til elevene parallelt med transkripsjon og feltnotater. Dette ble gjort for hver oppgave og for hver elev. Det ble store mengder av datamateriale som skulle gjennomgås og for å få en bedre oversikt systematiserte jeg data ved hjelp av tabeller.

I tråd med at under analysen skal man dele datamateriale i mindre elementer begynte jeg analysen med å se på oppgaveløsningsprosessen og identifisere hvert trinn i denne prosessen. Dette har jeg gjort for hver oppgave og for hver elev. Jeg identifiserte hvilke representasjoner hver av elevene brukte og hvilke overganger og behandlinger som ble tatt i bruk for å komme fram til løsningen. Rekkefølge på overgangene og behandlingene ble nummerert. Jeg tok utgangspunkt i Duval sitt semiotiske register og laget en tabell som var tilpasset dette registret. Jeg førte opp mine funn i denne tabellen med detaljerte beskrivelser av løsningsprosessen. Tabellen hjalp meg å systematisere datamateriale på en oversiktlig måte. Jeg laget i tillegg en kolonne for kommentarer der jeg skrev opp hva jeg la merke til under oppgaveløsningen. Dette hovedsakelig med bakgrunn i feltnotater, men også elevenes besvarelser og transkripsjonen av gjennomgangen. Denne oversikten var starten på analyseprosessen min og målet var å bearbeide og systematisere funn og se etter mønster.

Jeg har også utført en analyse av hvordan hver enkelt elev bruker representasjoner. På bakgrunn av denne analysen laget jeg en oversikt per elev samlet for alle oppgaver. Jeg brukte også tabell for å systematisere dette. Både representasjoner og overganger elevene brukte ble identifisert og nummerert etter hvilken rekkefølge de var tatt i bruk. I tillegg satte jeg opp om eleven hadde fått til oppgaven eller ikke. Dette for å kunne se om jeg fant noe mønster i bruken av representasjoner og for å se om det er noen forskjell på løsningssprossen hos elevene, eller om noen elever skiller seg spesielt ut i bruken av bestemte representasjoner. Eksempel på en slik tabell vises i figur 3.2 for elev A der jeg presenterer elevens bruk av representasjoner og overganger samlet for alle oppgaver.

Tegnforklaring til tabellen i figur 3.2:
x – valgt representasjon
(tall) – rekkefølge på valgt representasjon eller overgang/behandling

Representasjon / Oppgave	Skriftlig Naturlig språk	Aritmetikk	Algebra	Tegning	Tabell	Graf	Besvarelse
1	x (4)	x (1) og (3)			x (2)		Riktig
2	x (1) og (4)	x (2) og (3)					Riktig
3		x (2)	x (1)				Riktig
4	x (1)	x (3)		x (2)			Riktig
5	x (2) og (4)	x (3)	x (1)				Feil

Figur 3.2. Elev A - bruk av representasjoner og overganger for alle oppgaver.

Målet med masteroppgaven er å forstå hvordan elevene tenker når de løser tekstoppgaver og ifølge Duval kommuniserer elevene sin forståelse ved hjelp av representasjoner de bruker (Duval 2006, s. 104). I den siste fasen av analyseprosessen har jeg derfor igjen tatt utgangspunkt i Duval sitt semiotiske register for klassifisering av representasjoner, og laget tabeller som på oversiktlig måte viser hvilke representasjoner elevene bruker i henhold til dette registeret. Denne klassifiseringen er ifølge Duval selv et godt verktøy for analyse av matematisk aktivitet (Duval, 2006, s. 111). Eksempler på slike tabeller vises i figur 3.3 og figur 3.4. Overganger og behandlinger elevene utfører i forbindelse med oppgaveløsning vises i tabellene som tall i parentes, henholdsvis (1), (2) osv. Tallrekkefølgen gjenspeiler rekkefølgen av valgt representasjon. I analysen er selve oppgaveteksten sett på som en startrepresentasjon for hver av oppgavene.

Oppgave 1 Mor og sønn

Elev A	Diskursive	Ikke-diskursive
Multifunksjonelle	Oppgaveteksten (startrepresentasjon) Skriftlig naturlig språk (4)	
Monofunksjonelle	Aritmetikk (1) og (3)	Tabell (2)

Figur 3.3. Elev A – bruk av representasjoner og overganger i oppgave 1 kategorisert etter Duval sitt semiotiske register

Oppgave 4 Stigen

Elev A	Diskursive	Ikke-diskursive
Multifunksjonelle	Oppgaveteksten (startrepresentasjon) Skriftlig naturlig språk (1)	Tegning (2)
Monofunksjonelle	Symboler: Aritmetikk (3)	

Figur 3.4. Elev A – bruk av representasjoner og overganger i oppgave 4 kategorisert etter Duval sitt semiotiske register

Deretter har jeg gjennomført analyse med fokus på hvordan de enkelte elevene brukte representasjoner og hvilke strategier de brukte i løsningen av oppgavene. Jeg har sett på overganger og behandlinger som ble brukt i elevenes besvarelser og sammenliknet representasjoner før og etter konvertering. Dette for å se om de representerer det samme objektet. Jeg har analysert elevenes skriftlige besvarelser parallelt med deres forklaringer som fremgår av transkripsjonen. Dette for å få svar på hvordan enkelte representasjoner ble brukt og hvorfor de har utført enkelte overganger eller behandlinger. Dette for å finne ut hvordan de tenkte når de løste oppgavene og hvordan de har forstått oppgavene. Elevenes feil ble analysert for å studere hva som kan være årsaken til feilen og tolke dette i lys av teorien. Den transkriberte samtalen med elevene fra gjennomgangen av oppgavene ble analysert for å få bedre forståelse for hvordan elevene har tenk og resonert under oppgaveløsningen.

Funn fra analysen ble tolket i lys av teori fra kapitel 2. Både analysen og funn for hver enkelt oppgave er beskrevet i analysekapitlet. De hovedfunnene som etter min mening er mest interessante og gir svar på forskningsspørsmålet er diskutert i kapitel 5 «Drøfting».

3.5 Validitet og reliabilitet

I forbindelse med min masteroppgave gjennomførte jeg en empirisk forskning. Datamaterialet som ble samlet inn under forsøket besto av elevenes skriftlige oppgavebesvarelser, elevenes forklaringer og begrunnelser for valgt løsning samt mine egne notater fra forsøket. Ifølge Christoffersen og Johannessen er ikke datamateriale og empiri selve virkeligheten, men de representerer virkeligheten. De utgjør et bindeledd mellom virkeligheten og analysen og tolkningen av virkeligheten (Christoffersen & Johannessen, 2018, s. 21-22).

Et sentralt spørsmål ved forskning er derfor hvor godt og/eller relevant det innsamlede datamateriale representerer fenomenet som ønskes undersøkt. I forskningen brukes i denne sammenheng begrepet validitet, som betyr gyldighet (Christoffersen & Johannessen, 2018, s. 24). Et annet grunnleggende spørsmål er hvor pålitelig data er, som betegnes som reliabilitet, eller pålitelighet. Reliabilitet knytter seg til nøyaktigheten av undersøkelsens data. Altså hvilke data som brukes, måten de samles inn på og hvordan de bearbeides (Christoffersen & Johannessen, 2018, s. 23).

Høgheim sier at vurdering av validiteten ikke følger noen fastsatte regler eller prinsipper, men handler om vurderingen av styrker og svakheter ved egen forskning (Høgheim, 2020, s. 80). I den forbindelse skal jeg nå drøfte graden av validiteten i min forskning.

Ved vurderingen av validitet ønsker jeg blant annet å ta hensyn til det som kalles begrepsvaliditet, altså om jeg faktisk fanger det fenomenet jeg forsker på (Høgheim, 2020, s. 81). Det dreier seg om relasjonen mellom fenomenet, altså elevenes bruk av representasjoner og det datamateriale jeg samlet inn under forsøket. Er dataene gode og dermed valide representasjoner av det fenomenet jeg forsker på (Christoffersen & Johannessen, 2018, s. 24)?

Som nevnt tidligere skal jeg i min masteroppgave se på hvordan elever på 10. trinn tar i bruk representasjoner og gjennomfører overganger i forbindelse med tekstoppgaver. Målet er å kunne forstå hvordan elevene resonnerer og tenker når de løser oppgavene. Hvordan elevene resonnerer og tenker er ikke noe man kan se direkte. Samtidig kommuniserer elevene sin forståelse av matematikk gjennom representasjoner av matematiske objekter de bruker (Duval

2006, s. 104). For å kunne undersøke dette fenomenet valgte jeg problemløsningsoppgaver som var tilpasset 10. trinn. Jeg valgte disse oppgavene fordi de ikke har noen bestemt metode for å kunne løses på og innbyr til resonering og bruk av forskjellige representasjoner. Ifølge Klaveness et. al. er bruk av forskjellige representasjoner en viktig del av løsningen i problemløsningsoppgaver (Klaveness et. al., 2019, s. 178). Oppgavene elevene fikk utdelt var derfor etter min vurdering relevante i forhold til spørsmålet jeg skulle undersøke. Dessuten er datamateriale i min studie dokumentert ved elevenes individuelle oppgavebesvarelser. Videre består dokumentasjonen av lydopptak av gjennomført muntlig gjennomgang med alle elevene som senere ble transkribert. I tillegg inngår i datamateriale feltnotater av observasjoner under forsøket. Jeg mener at det er en god relasjonen mellom fenomenet, altså hvordan elevene bruker representasjoner og det datamateriale jeg samlet inn under forsøket. Jeg mener at det innsamlede datamaterialet utgjør et godt grunnlag for å undersøke problemstillingen i min studie og at dette representerer en styrke i undersøkelsen og dermed for studiets validitet.

Studie er gjennomført ved hjelp av observasjon og en samtale med elevene på slutten av forsøket. De to datainnsamlingsmetodene innebærer nærhet til elevene og har derfor både styrker og svakheter. Nærhet bidrar til at studie har høyre grad av fleksibilitet, samtidig kan nærhet påvirke dem jeg forsker på og kan på den måten svekke validiteten. Elevene kan føle seg ukomfortable i settingen og det kan påvirke både deres atferd og svar, noe som kan utgjøre en feilkilde i de innsamlede dataene. Dessuten kan mitt nærvær oppleves som press til å delta i undersøkelsen. Jeg har likevel ikke observert at elevene ble stresset eller nervøse under forsøket. De elevene som var med, hadde lyst til å delta. Mitt inntrykk var at de oppførte seg naturlig og jeg tror ikke at mitt nærvær har påvirket svarene deres.

Ved kvalitativ metode skjer ofte fortolkning og analyse parallelt med datainnsamling. Dette gjelder særlig når en gjør feltnotater underveis i observasjonen, men også under samtalen. Ulike forskere kan legge vekt på ulike forhold i tolkningen og analysen av datamateriale, og på den måten kan komme til ulike resultater. Dette er også et forhold som kan svekke validiteten i en kvalitativ undersøkelse (Christoffersen & Johannessen, 2018, s. 71). Jeg gjorde notater underveis i forøket og mine notater inneholder hovedsakelig beskrivelser av det jeg observerte mens elevene holdt på med oppgavene. Mine notater inneholder ikke opplysninger om det som ble sagt under forsøket, da samtalene ble tatt opp på lydopptak. For å kunne unngå eventuelle feiltolkninger gjennomførte jeg en gjennomgang av oppgaveløsningene på slutten av forsøket. Denne gjennomgangen skulle bidra til at elevene kunne forklare sine løsningsmetoder. Jeg kunne også sjekke ut om mine notater fanget virkeligheten. Dette er en styrke som kan bidra til å øke validiteten. Samtidig hadde en slik gjennomgangen også en svakhet. I den direkte dialogen kunne elevene blitt påvirket av mine spørsmål samtidig så kunne de også blitt påvirket av svar fra de andre elevene. Dette kan også utgjøre en feilkilde i de innsamlede dataene og svekke validiteten.

For å kunne dokumentere hva som ble sagt tok jeg lydopptak både under oppgaveløsningen og den felles gjennomgangen av oppgavene. Lydopptak ga meg mulighet til å kunne bevare alle samtaler uten fortolkning. Feltnotater av slike samtaler kunne vært preget av min egen tolkning og analyse, da det ikke vil være mulig å få med seg alt som ble sagt. Notering kan også være et hinder for å gjøre en god observasjon. Selv om lydopptak har mange fordeler er jeg likevel klar over at det kunne være med på å påvirke hva elevene har sagt, da ikke alle føler seg like komfortable med å bli tatt opp. Dette kunne påvirke kvaliteten til de samlede data og svekke validiteten. Likevel så det ikke ut til at elevene var stresset eller nervøse under forsøket. Mitt inntrykk var at de oppførte seg naturlig og jeg tror ikke at det har påvirket svarene deres.

Et annet viktig aspekt er at datamateriale som jeg samlet inn representerer kun besvarelser til de fem informantene som deltok i forsøket. Selv om jeg gikk i dybden i datamateriale så er det vanskelig å si noe om de resultatene jeg fikk er gyldige for andre enn de som deltok i forsøket. Det kan hende at jeg kunne ha fått helt andre svar fra andre elever i den samme klassen eller en annen skole. Dette hensynet har sammenheng med generaliserbarhet eller ytre validitet og handler om hvorvidt slutningene gjelder for flere enn de som har deltatt i forskningen (Høgheim, 2020, s. 82). Ut ifra dette hensynet kan jeg si at det er vanskelig å generalisere funn i min studie, da det var få deltakere med i forsøket.

Ifølge Christoffersen og Johannessen er det forskjellige måter å teste relabiliteten på en forskning. En av måtene er at flere forskere undersøker samme fenomen. Dersom flere forskere kommer fram til samme resultat kan man si det er høy relabilitet (Christoffersen & Johannessen, 2018 s. 23). I min masteroppgave har jeg ivaretatt muligheten for relabiliteten ved å beskrive metoden og måten forsøket har blitt gjennomført på samt presentert oppgaver som ble gitt. Andre forskere kan derfor ta utgangspunkt i samme opplegg som jeg har hatt for min masteroppgave, og på den måten gjennomføre et tilsvarende forsøk. Ved å sammenligne resultatene kan en si noen om relabiliteten.

Reliabilitet knytter seg også til nøyaktigheten i de data som undersøkes. Hvilke data som brukes, måten de samles inn på og hvordan de bearbeides (Christoffersen & Johannessen, 2018 s. 23). En svakhet i min undesøkelse kan være at elevene ikke forklarte hvordan de tenkte i det øyeblikket de holdet på med å løse oppgavene, men at det ble gjort etter oppgaveløsningen. Gitt at hensikten er å få mest nøyaktig forklaring på hvordan elevene tenker burde jeg bedt dem å forklare mens de jobbet med oppgavene. Dette ville ha styrket reliabiliteten, samtidig av hensynet til at elevenes besvarelser ikke skulle bli påvirket av hverandres svar valgte jeg likevel i stedet å ha en felles gjennomgang etter at elevene var ferdig med oppgaveløsningene. Jeg er derfor klar over at dette kan ha svekket reliabiliteten.

3.6 Forskningsetiske vurderinger

Ifølge forskningsetikkloven skal forskere opptre med aktsomhet for å sikre at all forskning skjer i henhold til etiske normer. Dette gjelder også under forberedelser til forskning, rapportering av forskning og andre forskningsrelaterte aktiviteter (Forskningsetikkloven, 2017, § 4). Den nasjonale forskningsetiske komité for samfunnsvitenskap og humaniora (NESH) har utviklet forskningsetiske retningslinjer som anvendes for utdanningsvitenskap. Disse forskningsetiske retningslinjene gjelder også for studenter som utfører forskning (NESH, 2021). På bakgrunn av dette har jeg ansvar for å ivareta forskningsetikken når jeg arbeider med min masteroppgave, og jeg må følge regler og etiske normer som gjelder for vitenskapelig forskning under hele forskningsprosessen.

Kvalitative studier preges av nærhet til informanten. Ansvar for personer som deltar i forskningen stiller spesielle etiske krav både under datainnsamlingen og når resultatene skal fortolkes og presenteres. I følge NESH skal forskerne arbeide ut ifra generell respekt for menneskeverd. Dette skal ivaretas gjennom respekt for likeverd, hensynet til deres personlig integritet, sikre frihet og selvbestemmelse og beskytte mot risiko for urimelige belastninger (NESH, 2021).

Deltakelse i forskningen skal være frivillig og det må innhentes et informert samtykke fra forskningsdeltagerne (NESH, 2021). Med informert samtykke menes at de som deltar i forskningen har fått både tilstrekkelig og forståelig informasjon om hva det innebærer å være deltaker i forskningen (NESH, 2021). Informasjonen er viktig slik at de som deltar forstår hvorfor de er med, og kan ta et valg om å delta i forskningen. Frivillig deltakelse innebærer at de som er med i forskningen deltar uten ytre press eller begrensning av valgfrihet, og kan når som helst trekke seg fra undersøkelsen uten begrunnelse (NESH, 2021).

I tråd med dette prinsippet har jeg i forkant av forsøket sendt via skolen et samtykkeskjema med informasjon til de aktuelle elevenes foresatte (vedlegg 1). I samtykkeskjemaet ble det informert om hva som er formålet med studie og hva det innebærer for eleven å delta. Det ble informert om hvordan forsøket skal gjennomføres og at det er frivillig å delta. Elevene kunne trekke tilbake samtykket når som helst under studien uten å oppgi noen grunn og uten noen konsekvenser for dem. Videre ble det opplyst om at det vil bli tatt lydopptak av samtaler og at dette skal bli slettet når studien er ferdig. Samtykkeskjemaet ble underskrevet av samtlige informanters foreldre.

Barn som deltar i forskning har krav på beskyttelse (NESH, 2021). Elevene skal ha alderstilpasset informasjon og det er også nødvendig med aksept fra elevene for å delta i forskningen, selv om foreldrene har gitt samtykke. Elevene har rett til å bli hørt (NESH, 2021). I tillegg til samtykkeskjema til foreldre har jeg derfor under oppstarten av førsøket informert elevene om hvordan forsøket skal gjennomføres og hva som er deres rolle i undersøkelsen. Jeg opplyste en gang til at det er frivillig å delta i forsøket, slikt at det ikke skulle oppleves som press og de kan bestemme selv om de vil delta. Jeg har imidlertid registrert at elevene var nysgjerrige og var ivrige for å komme i gang.

I følge NESH har forskeren et ansvar for ikke å utsette forskningsdeltagere for urimelige belastninger eller ubehag (NESH, 2021). Jeg har derfor et ansvar for å unngå at elevene blir utsatt for noen form for ubehag i forbindelse med forsøket mitt. Da dette var en liten gruppe på fem elever, kunne elever som eventuelt sliter med matematikk bli mer synlig. Det å ikke mestre oppgavene kan oppleves som ubehagelig. Jeg har derfor før førsøket gjort det klart at målet med undersøkelsen var å se hvilke fremgangsmåter de brukte når de løste oppgavene og ikke om oppgavene var løst riktig eller i hvilket tempo de jobbet. Jeg har lyttet til alle kommentarer og opplevde at elevene følte seg trygge og jobbet med oppgavene selvstendig.

Det juridiske kravet om behandling av personopplysninger er hjemlet i personopplysningsloven. Det ligger i prinsippet om personvern at forskningsdeltagernes anonymitet skal være ivaretatt i forskningen. Alle personlige opplysninger skal være avidentifisert, det vil si at data anonymiseres og at deltakerne ikke skal kunne identifiseres i forskningen og formidlingen av forskningsmaterialet (NESH, 2021). Jeg har derfor sørget for at elevene som deltok i forskningen min ikke skal kunne gjenkjennes. For å anonymisere informantene har navnene blitt byttet ut med bokstavene A, B, C, D og E, samt at skolen også har blitt anonymisert. Jeg har også taushetsplikt om data som samles inn.

På grunn av at jeg skulle ta lydopptak under forsøket, krevde studien meldeplikt til personvernombudet for forskning ved Norsk Senter for Forskningsdata (NSD). Jeg har derfor den 30.08.2021 sendt inn et meldeskjema til NSD, som vurderte om behandlingen av personopplysninger i prosjektet mitt er i samsvar med personvernlovgivningen. Lagring av lydopptakene har blitt gjort etter USNs lagringsguide. Lydopptakene ble tatt opp på Nettskjema sin diktafonapp og ble lagret på eget område på Nettskjema.no. Når masteroppgaven er ferdig, skal alle lydopptakene slettes. Meldeskjemaet ble godkjent av NSD 05.10.2021 og masteroppgaven ble tildelt prosjektnummer 683847 (vedlegg 2). Jeg kunne dermed gjennomføre mitt forsøk som planlagt.

3.7 Oppgavene brukt i studien

Elevene fikk utdelt et oppgavesett med problemløsningsoppgaver tilpasset 10. trinn. Teksten i hver oppgave består av en blanding av ord og tall. Hver av oppgavene inneholder også en illustrasjon som er knyttet til innholdet i oppgaven.

Med problemløsningsoppgaver menes oppgaver i matematikk hvor det ikke er en bestemt metode for å løse oppgaven. Det som er problemløsning for en elev, kan være en rutineoppgave for en annen elev. (Klaveness et. al., 2019, s. 178). Hva som er en problemløsningsoppgave, er derfor relativt i forhold til kompetansen til eleven som skal løse oppgaven. Oppgavene som er brukt i min studie ble hentet fra nettstedet Matematikk.org, og de var merket problemløsningsoppgaver tilpasset 10. trinn.

Bruk av forskjellige representasjoner er ifølge Klaveness et. al. en viktig del av det å løse problemløsningsoppgaver. På denne måten får elevene bruk for ulike representasjoner som muntlige og skriftlig resonnementer og forklaringer, tabeller, grafer eller tegninger (Klaveness et. al., 2019, s. 178). Da målet med min studie er å undersøke hvilke representasjoner elever bruker når de arbeider med tekstoppgaver, mener jeg derfor at problemløsningsoppgaver er godt egnet til studie.

I læreplanen LK20 er problemløsning et av kjerneelementene (Utdanningsdirektoratet, 2019). Her går det fram at elevene skal legge mer vekt på strategier og fremgangsmåter enn på selve løsningene (Utdanningsdirektoratet, 2020c). Dette var et av kriteriene når jeg så etter passende oppgaver. Det var viktig for meg å se på hvilke fremgangsmåter elevene brukte, hvordan de resonnerte og hvilke representasjoner de brukte i sine løsninger.

Nedenfor presenterer jeg oppgavene som er valgt for studien. Jeg har ikke lagt noen føringer for løsningsstrategier som skal brukes for å løse oppgavene. Elevene sto fritt til å løse oppgavene på den måten de selv ønsker det.

Oppgave 1 Mor og sønn

Torkell er 13 år og mammaen er 38 år. Hvor mange år er det til Torkell er halvparten så gammel som mammaen?

Figur 3.5. Oppgave Mor og sønn (Matematikk.org, u. å.a)

Dette var den første oppgaven elevene skulle gjøre. Denne ble valgt til å være den første oppgaven fordi den har en lav inngangsterskel og kan løses på flere måter. Det vil si at oppgaven kan være enkel å komme i gang med for alle elever på forskjellige nivå i matematikk. Samtidig åpner oppgaven for flere kreative løsninger samt løsninger som krever mer avansert forståelse av matematikk, som for eksempel med å bruke to likninger med to ukjente. Å mestre allerede første oppgave vil gi elevene mer motivasjon til å gå løs på de andre oppgavene.

Oppgave 2 Riktige svar

På en prøve er det 120 oppgaver. For hver oppgave som er løst riktig får studenten 1 poeng og for hver som er løst feil, blir det trukket fra $\frac{1}{4}$ poeng.

Hvor mange oppgaver må studenten løse riktig for å få 100 poeng?

Figur 3.6. Oppgave Riktige svar (Matematikk.org, u. å.b)

Denne oppgaven kan være mer krevende enn den første oppgaven. Etter tidligere erfaring fra arbeid i skolen er matematikkoppgaver som involverer brøk mer krevende enn oppgaver med bare heltall. Denne oppgaven kan løses på to måter. Elever med høyere matematikkompetanse vil kunne løse oppgaven ved hjelp av algebra og sette opp to likninger med to ukjente. For elever med lavere matematikkompetanse åpner denne oppgave opp for muligheten til «prøve og feile» metoden. Her kan elevene teste ut forskjellige verdier som gir poeng og minuspoeng til de tilslutt kommer fram til det korrekte svaret.

Oppgave 3 Penger

Per Ivar og Anne Marie har tilsammen 66000 kroner. Per Ivar har 24000 kroner mer enn Anne Marie.

Hvor mye har hver av dem?

Figur 3.7. Oppgave Penger (Matematikk.org, u. å.c)

Det som kan være en problemløsningsoppgave for en elev, kan være en rutineoppgave for en annen (Klaveness et. al., 2019, s. 178). Denne oppgaven er et godt eksempel på dette. En elev som har jobbet mye med ligninger vil se på denne oppgaven som en rutineoppgave og finne hva som er det ukjente og sette opp en likning. Derimot en elev som ikke er så rutinert med likningssett vil heller prøve å finne andre metoder å løse oppgaven på, som for eksempel ved bruk av tegning. I denne oppgaven finner vi også det som Nortvedt kaller for nøkkelord «tilsammen», «mer enn» og «hver av dem» (Nortvedt, 2015). Koedinger og Nathan omtaler det som inkonsistent språk (Koedinger & Nathan, 2004, s. 132). Det vil si at i teksten står det «mer enn», men det kreves subtraksjon for å løse oppgaven uten bruk av likning. (For eksempel 66000 – 24000 = 42000, 42000 / 2 = 21000, 21000 + 24000 = 45000. Per Ivar har da 45000 og Anne Marie har 21000).

Oppgave 4 Stigen

Jeg lånte en gang en stige av naboen.

"Hvor lang er stigen?" spurte jeg.
Naboen, som var litt av en spøkefugl, sa:

"Den er 3 meter pluss en tredel av stigen".

Hvor lang var stigen egentlig?

Figur 3.8. Oppgave Stigen (Matematikk.org, u. å.d)

Denne oppgaven kan være blant de mest krevende i oppgavesettet. Ettersom den inneholder mye tekst samt at elevene må forholde seg til brøkregning. Samtidig er det åpent for mange forskjellige kreative metoder å løse denne oppgaven på.

Oppgave 5 Pommes frites med remulade

Morten kjøpte en porsjon pommes frites og ba om å få remulade på den. Det hele kostet 34 kr. Selve pommes frites kostet 30 kr mer enn remuladen.

Hvor mye kostet remuladen?

Figur 3.9. Oppgave Pommes frites med remulade (Matematikk.org, u. å.e)

Grunnen til at denne oppgaven ble valgt til slutt var at den besto av lite tekst og enklere tall enn de tidligere oppgavene. Denne oppgaven er mindre skremmende og er en fin måte å avslutte arbeidsøkten på. Samtidig må elevene passe på at de får med seg all informasjonen som er oppgitt og leser teksten nøye. Oppgaven inneholder også det Nortvedt kaller for nøkkelordet «mer enn», som kan være utfordrende for elevene dersom de ikke tolker oppgaven riktig (Nortvedt, 2015). Etter første øyekast kan denne oppgaven lett misforstås og virke lettere enn den egentlig er. Av erfaring vil noen elever kun se på tallene og komme fram til et svar som ikke stemmer.

Denne oppgave har blitt endret på fra originalversjonen som finnes på Matematikk.org. I denne versjonen var prisen på pommes fritesen 10 kroner og det hele kostet 11 kroner. Jeg har hevet prisene slik at de passer bedre med dagens priser. Dette fordi de lave prisene kunne være et forstyrrelseselement, da de kunne få mer oppmerksomhet fra elevene enn selve oppgaveløsningen.

4 Analyse

I dette kapitlet skal jeg beskrive og analysere det kvalitative datamaterialet fra min studie med tanke på å finne svar på forskningsspørsmålet mitt: Hvordan bruker elevene på 10. trinn forskjellige representasjoner og gjennomfører overganger i arbeid med tekstoppgaver?

Datamateriale skal analyseres i lys av teori i kapitel 2 og vil bli gjort for hver oppgave elevene fikk utdelt. På slutten av kapittelet skal jeg oppsummere analysen av de fem oppgavene og trekke fram hovedfunnene fra analysen.

Analysen er gjort med utgangspunkt i kvalitativ datamateriale som ble samlet inn under forsøket. Dette datamateriale består av elevenes skriftlige besvarelser på oppgavene de fikk utdelt, transkripsjon av lydopptak fra gjennomgangen av oppgavene og egne feltnotater. Med utgangspunkt i datamaterialet skal jeg beskrive hvordan elevene løste oppgavene trinn for trinn. Hvilke representasjoner, overganger og behandlinger de benyttet seg av og hvordan. Jeg skal også beskrive og analysere hvilke feil som kan oppstå når elevene arbeider med tekstoppgaver, hvilke utfordringer de møter på samt hva som er årsaken til disse.

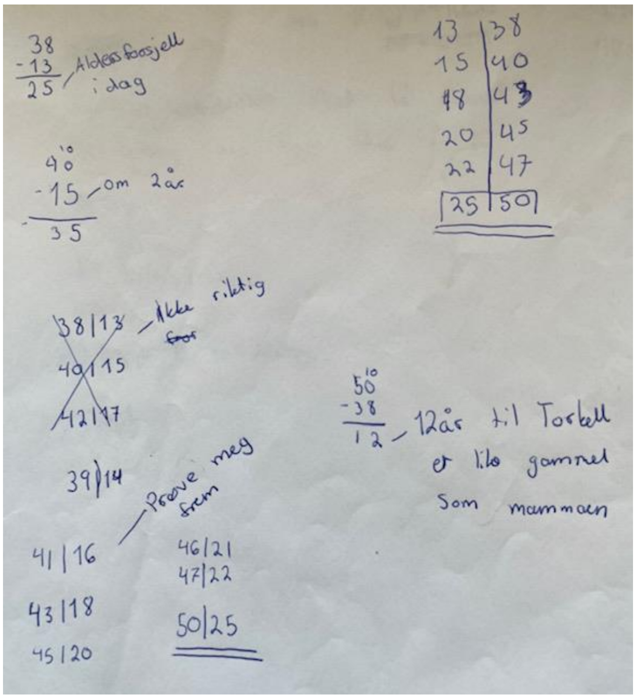
Analysen er gjennomført med utgangspunkt i Duval sin klassifisering av representasjoner i forskjellige semiotiske registre, da jeg mener at det gir en oversiktlig presentasjon og et godt utgangspunkt for den videre analysen. Klassifiseringen til Duval er ifølge forskeren selv, gjennomført ut i fra et matematisk og pedagogisk synspunkt. Duval mener at denne klassifiseringen gir et godt verktøy for å analysere tankeprosessene som er involvert i matematisk aktivitet og for å identifisere roten til problemene med matematisk forståelse (Duval, 2006, s. 111). Både tolkningen og analysen er basert på et teoretisk perspektiv og jeg skal også støtte meg på andre forskere som er nevnt i teorikapitlet.

Som tidligere nevnt i metodekapitlet fikk elevene utdelt et oppgavesett med fem problemløsningsoppgaver tilpasset 10. trinn. Teksten i hver oppgave består av en blanding av ord og tall. Hver av oppgavene inneholder også en illustrasjon knyttet til innholdet i tekstoppgaven. Det var fem elever som deltok i forsøket.

4.1 Beskrivelse og analyse av oppgave 1 - Mor og sønn

I denne oppgaven skal elevene finne ut hvor mange år det er til Torkell er halvparten så gammel som moren. Elevene kom fort i gang med oppgaveløsningen, og det er i denne oppgaven de har vist størst variasjon i bruken av representasjoner sammenlignet med de andre oppgavene. De har også valgt forskjellige tilnærminger på hvordan de skal starte med oppgaven.

Elev A begynte oppgaven med aritmetikk ved å utføre en subtraksjon. Dette for å finne aldersforskjell mellom mor og Torkell i dag. Eleven prøvde deretter å finne differansen mellom alderen til mor og Torkell om to år. Dette gjorde hun ved først å øke alderen som er oppgitt i oppgaveteksten med to. Hun subtraherte de to tallene, men utregningen ble feil. Som neste steg prøvde eleven seg fram med ulike tall som hun presenterte i to forskjellige tabeller. Hun førte opp alderen til Torkell i den ene kolonnen og alderen til moren i den andre kolonnen. I den første tabellen økte hun hver rad med en eller to i begge kolonnene. I den andre tabellen økte hun hver rad med to eller tre i begge kolonnene. På denne måten kom eleven fram til at når Torkell er 25 år så er moren 50 år, altså er Torkell halvparten så gammel som moren. For å komme fram til svaret på oppgaven subtraherte hun alderen til moren med alder oppgitt i oppgaveteksten. Eleven avsluttet med å forklare skriftlig svaret sitt. Elev A sin besvarelse vises i figur 4.1.

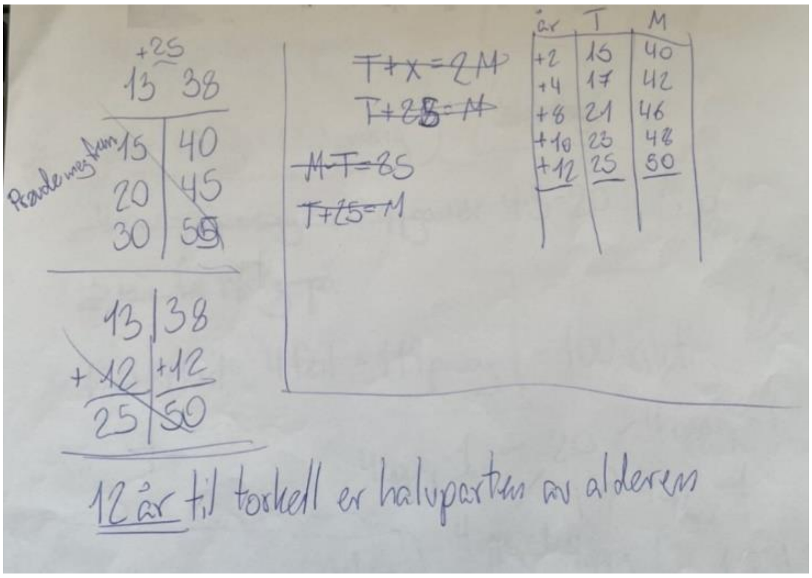


Figur 4.1. Elev A – løsning av oppgave 1.

Hvis jeg tar utgangspunkt i Duval sitt semiotiske register, så forblir eleven i det diskursive registret ved å gjøre overgang fra oppgaveteksten rett til det symbolske språket i det monfunksjonelle registre, altså registret for matematiske behandlinger. Hun utførte en behandling i form av et subtraksjonstykke for å finne aldersforskjellen. Da hun fant ut at det var lurt å benytte seg av tabell, gjorde eleven en overgang fra det diskursive til det ikke-diskursive registre. Tabellen brukte hun som en hjelperepresentasjon for å få oversikt over tall og informasjon. Ved hjelp av tabell kunne hun på en oversiktlig måte visualisere hvordan alderen øker for hvert år, helt til Torkell er halvparten så gammel som moren.

Elev B startet derimot oppgaven med å sette opp en tabell og prøvde seg fram med ulike tall for alderen til mor og Torkell i hver sin kolonne. Hun startet med alderen i dag og økte verdien likt på begge sider i tabellen. Hun sa: «*…jeg prøvde meg fram først…».* Deretter resonerte hun seg fram til at det er nyttig å se på aldersforskjellen mellom dem, «*Så tenkte jeg, oi kanskje jeg bør sjekke aldersforskjellen å se om det kan hjelpe meg med noe*». «*Og da fant jeg ut at det var 25 år, og da måtte jeg bruke det til noe*». Både ut i fra transkripsjonen og besvarelsen kan jeg se at eleven resonerte seg fram til resultatet. Hun konkluderte skriftlig at det er 12 år til Torkell er halvparten av morens alder. Det er tydelig at eleven så sammenhenger i oppgaven og resonerte riktig. Hun brukte tabell for å hjelpe seg fram til svaret.

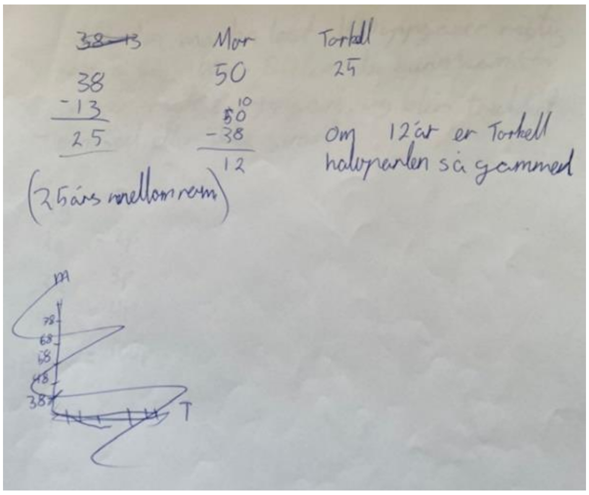
Eleven ble ferdig med alle oppgavene før de andre elevene og jeg utfordret henne til å anvende andre representasjoner og løse denne oppgaven på en annen måte. Når eleven løste oppgaven på nytt, satte hun opp to likninger med to ukjente. Hun prøvde seg fram, men ga opp med å bruke denne representasjonen. Eleven satte opp en ny tabell. Denne var mer detaljert sett i forhold til tabellen hun satte opp i den tidligere løsningen. Tabellen hadde tre kolonner, en for hvor mange år hun la til, en for alderen til moren og en for alderen til Torkell. Den hadde også flere rader med intervall for antall år. Grunnen til at den nye tabellen hadde flere detaljer antar jeg kan ha sammenheng med at eleven allerede visste svaret på oppgaven og bruket denne kunnskapen. Figur 4.2 viser hvordan hun har løst oppgaven.



Figur 4.2. Elev B – løsning av oppgave 1. Første utregning til venstre. Andre utregning til høyre.

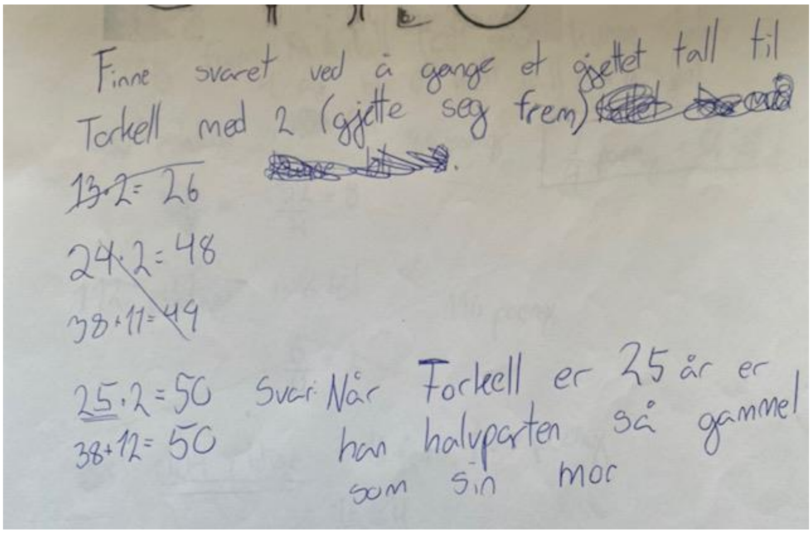
Det ser ut til at både elev A og B så nytten av å benytte seg av tabeller i løsningen av denne oppgaven. Ifølge Duval er noen matematiske prosesser enklere å utføre i et semiotisk system framfor et annet (Duval, 2006, s. 108). Tabell er en representasjon som elevene brukte for å prøve seg fram med ulike verdier på en oversiktlig og systematisk måte. Det hjalp dem å se sammenhengen mellom alderen til moren og Torkell og visualisere hvordan alderen øker for hvert år. De forskjellige tabellene elevene A og B brukte har elementer av hjelperepresentasjoner som er omtalt i artikkelen til Duval fra 2017. Duval sier at det kan være utfordrende med overgang fra naturlig språk til symbolspråk i det diskursive registret og bruk av en hjelperepresentasjon i det ikke-diskursive registret kan hjelpe eleven med denne overgangen (Duval, 2017, s. 90). I dette tilfellet ble tabell brukt. Dette har elevene hatt god nytte av. Lesh et. al. sier dessuten at gode problemløsere blant elevene er de som har lært seg å velge passende representasjoner til riktig situasjon (Lesh et al., 1983, s. 281).

Elev D i likhet med elev B utførte også en overgang til det ikke-diskursive registret, i henhold til Duvals klassifisering. Hun startet oppgaven med en graf. Hun satte opp alderen til Torkell som x-akse og moren sin alder som y-akse. Eleven kom ikke videre med denne grafen og forkastet fort denne representasjonen. Deretter resonerte hun at hun må finne aldersforskjellen mellom mor og Torkell. Hun bruker subtraksjon for å finne aldersforskjellen. Hun sa «…*og fant ut at det var aldersforskjellen, og da tenkte jeg med en gang at 50 er dobbelt så mye som 25…*». Deretter brukte hun aldersforskjellen for å kunne beregne svaret. Ifølge Hana er det viktig å bruke hensiktsmessig representasjon i forhold til oppgaven som skal løses (Hana, 2014, s. 159). I dette tilfelle oppdaget eleven raskt at graf ikke egnet seg for å finne løsningen på oppgaven og forkastet den. Figur 4.3 viser elevens løsning av oppgave 1.



Figur 4.3. Elev D – løsning av oppgave 1.

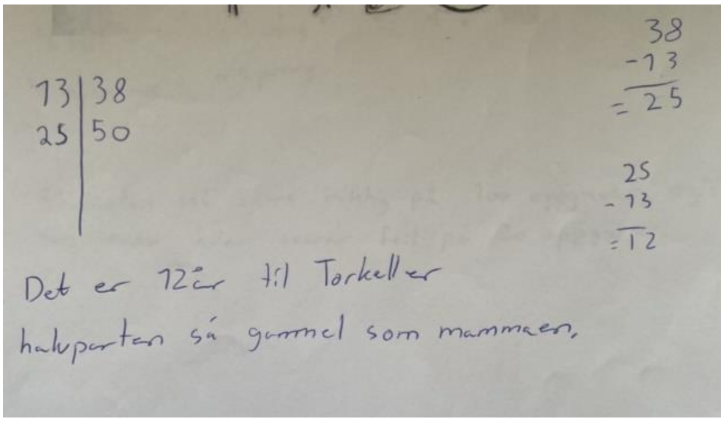
Elev C startet oppgaven ved at hun laget sin egen skriftlige forklaring på hvordan hun skulle gå fram for å løse oppgaven. Hun var den eneste av elevene som valgte å bruke multiplikasjon for å finne ut når Torkell er halvparten så gammel som moren. I tillegg regnet eleven ikke ut aldersforskjellen på bakgrunn av tall oppgitt i oppgaven. Hun multipliserte derimot ulike verdier for alderen til Torkell med to til han er 24 år. Hun så at dette er om 11 år og bruker addisjon og finner ut at morens alder blir da 49 år. Eleven så at dette blir akkurat for lite og øker alderen til Torkell med ett år. Ut i fra dette så hun nå at alderen til sønnen er halvparten av alderen til moren. Eleven avsluttet med å forklare skriftlig svaret. Figur 4.4 viser elevens løsning av oppgave 1.



Figur 4.4. Elev C – løsning av oppgave 1.

Med utgangspunkt i Duval sine registre, ser jeg at elev C utfører en behandling innenfor det multifunksjonelle og diskursive registret ved å lage en egen skriftlig forklaring på hvordan hun skal gå fram for å løse oppgaven. Ved å bruke naturlig språk ble det lett for henne å forstå oppgaveteksten og få en oversikt over hva som skulle gjøres i oppgaven. En slik skriftlig beskrivelse er nyttig for oppgaveløsningen ved at den hjelper eleven til å ordne tankene (Knudtzon, 2019, s. 153). Jeg kan se at denne beskrivelsen har hun senere oversatt til symbolspråk.

Elev E startet oppgaven med å sette opp en forklaring med tall for hva alderen til Torkell og moren er i dag. Han satte deretter opp et subtraksjonsstykke der han trakk alderen til Torkell fra morens alder og fant ut at aldersforskjellen var 25. Han satte deretter opp alderen til Torkell som 25 og så at moren må være 50 år. Da er Torkell halvparten av alderen til moren. Deretter fant han ut hvor mange år det er til Torkell er 25 ved å trekke 13 fra 25. Han kom fram til svaret 12 og forklarte med naturlig skriftlig språk svaret på oppgaven. I figur 4.5 ser vi løsningen til elev E.



Figur 4.5. Elev E – løsning av oppgave 1.

I likhet med elev C brukte elev E kun det diskursive registret for å løse oppgaven. Han laget en enkel forklaring der han bruker tall. Det ser ut som eleven har resonert riktig og han så derfor ikke behov for noen hjelperepresentasjoner. Han kom fram til svaret ved hjelp av noen aritmetiske behandlinger i det monofunksjonelle registret.

En strategi som elevene A, B og C har benyttet seg av i denne oppgaven var «prøve og feile» strategien. Det vil si at elevene prøvde seg fram med ulike verdier til de kom fram til et ønsket resultat i oppgaven. Elevene A og B hadde en veldig lik metode for å prøve seg fram på. Begge brukte en tabell og satte alderen til moren i den ene kolonnen og alderen til Torkell i den andre kolonnen, for så i hver rad addere samme verdi i begge kolonnene. Elev A fortsatte med «prøve og feile» strategien helt til hun kom fram til at alderen til Torkell var halvparten av moren. Elev B brukte denne strategien i starten av oppgaveløsningen. Istedenfor å bruke den helt til hun kom fram til det ønskede resultatet, satte hun inn tre verdier i hver kolonne. Da den siste verdien overskred det ønskede resultatet, så eleven etter et annet mønster som kunne hjelpe henne til å løse oppgaven og sa: «*Oi kanskje jeg bør sjekke aldersforskjellen å se om det kan hjelpe meg med noe*». Eleven gikk da bort i fra «prøv og feile» strategien og over til addisjon. Når elev B ble utfordret til å løse oppgaven på en annen måte prøvde hun først å sette opp en likning med to ukjente. Hun gikk ikke videre med denne likningen. Eleven benyttet heller en «prøve og feile» strategi en gang til. I tillegg til en kolonne for alderen til moren og en for alderen til Torkell, tok hun også med en kolonne som viser hvor mye som ble lagt til på hver rad. Hun fortsatte med denne tabellen helt til hun kom fram til at alderen til Torkell er halvparten av alderen til moren.

Elev C har i motsetning til elevene A og B ikke «prøvet og feilet» med en tabell, men heller «prøvet og feilet» med å multiplisere gjettet alder til Torkell med to. Hun prøvde først å multiplisere 13 med 2, deretter multipliserte hun 24 med 2. Da så eleven at om 11 år er moren 49 år. Hun prøvde da å multiplisere alderen til Torkell når han er 25 med 2, og kom fram til at når Torkell er 25 er han halvparten så gammel som moren. Hun har da gjettet seg fram med tre multiplikasjonstykker til hun kom fram til et ønsket resultat.

Ifølge Klaveness et. al. (2019) er denne strategien ikke så enkel som den høres ut. Den krever at eleven utfører en kvalifisert gjetting før de utøver beregningene, for så å justere gjettingen igjen og deretter sjekke om det ønskede resultatet er oppnådd. De må i tillegg avgjøre om svaret er for lavt eller for høyt (Klaveness et. al. 2019, s. 188). Jeg kunne observere at elevene har gjort en kvalifisert gjetting. Dette ved at de prøvde seg fram med realistiske tall. Følgende uttalelse fra elev C i transkripsjonen i forbindelse med gjennomgangen av oppgave 1 viser dette:
«*Jeg tok 13 ganger 2, så ble det alt for lite, 24 ganger 2 som ble 48, ehhh (pause 2 sek). Nå føler jeg jeg har gjort feil her. Men jeg har funnet ut at 25 ganger 2 er 50 og han er 25 om 12 år og 38 pluss 12 er 50.*»
For å kunne gjøre en kvalifisert gjetting så må man ut ifra oppgaveteksten forstå hva man skal gjette på. Jeg kan se at samtlige elever som brukte denne strategien har forstått oppgaveteksten slik at de var i stand til å utføre en kvalifisert gjetting.

Elev A og B hadde nytte av å bruke tabell i kombinasjon med «prøve og feile» strategi for å systematisere aldersforskjellen til mor og Torkell. Klaveness et. al. sier at tabeller kan være en måte å systematisere informasjon på og en måte å systematisere en «prøve og feile» strategi på (Klaveness et. al., 2019, s. 194).

Som jeg nevnte innledningsvis i analysen, er dette oppgaven der det ble benyttet flest representasjoner og overganger i oppgaveløsningen. Oppgaven kan også løses ved hjelp av likning. Elev B var den eneste som forsøkte å ta i bruk likning for å løse oppgaven, men fikk det ikke til. Elevene valgte heller andre passende representasjoner og benyttet en «prøve og feile» strategi for å løse oppgaven. Dersom de hadde sett for seg en løsning med likning, kunne de gå direkte ifra naturlig språk i oppgaveteksten til en algoritme og dermed beveget seg kun i det diskursive registre. Elevene er kjent med å løse likninger, men det er tydelig at de ikke så for seg denne måten å løse oppgaven på. Det som kjennetegner matematikk i motsetning til andre fag, er den store variasjonen av semiotiske representasjoner som kan brukes fritt i matematikken. Noen matematiske prosesser er enklere å utføre i et semiotisk system framfor et annet (Duval, 2006, s. 108). Det er tydelig at for elevene som deltok i forsøket var andre representasjoner enn likning enklere å bruke. Den store variasjonen av representasjoner ser også ut til å være en fordel, da oppgaven kan løses på forskjellige måter. Lesh et. al. har kommet fram til at elever som arbeider med tekstoppgaver, sjelden benytter seg av kun en representasjon. De bruker ofte to eller flere samtidig (Lesh et. al., 1983, s. 296).

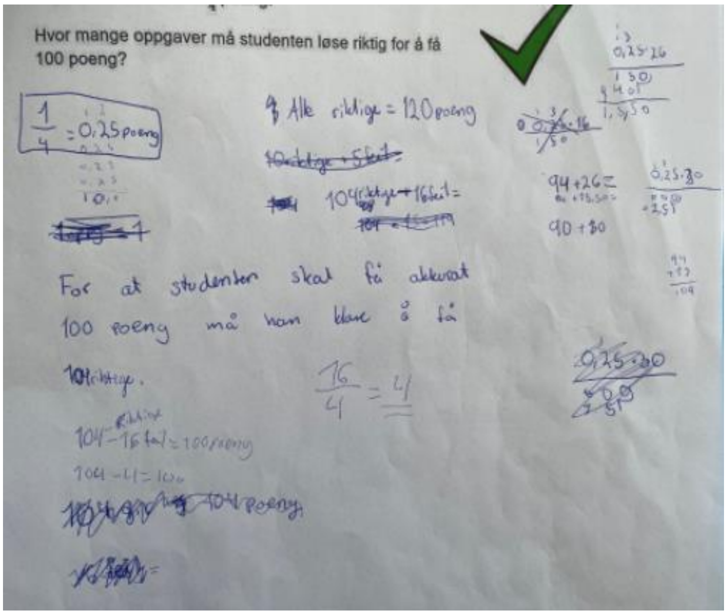
4.2 Beskrivelse og analyse av oppgave 2 - Riktige svar

I denne oppgaven skal elevene finne ut hvor mange riktige svar en student trenger for å få 100 poeng på en prøve, gitt at riktig svar gir 1 poeng og feil svar minus ¼ poeng.

Samtlige elever begynte oppgaveløsningen med å forklare oppgaveteksten med egne ord. De beskrev hva som ga poeng og hva som ga minuspoeng. I tillegg nevnte elev C i sin besvarelse hvilken strategi hun skulle bruke for å løse oppgaven. Under gjennomgangen av oppgaveløsningen sa elev B følgende om hvordan hun resonerte når hun brukte skriftlig representasjon: «*Det første jeg startet med var å skrive ned sånn at jeg har en oversikt over hvor mange poeng eller hvor mange oppgaver gir så mye poeng*».

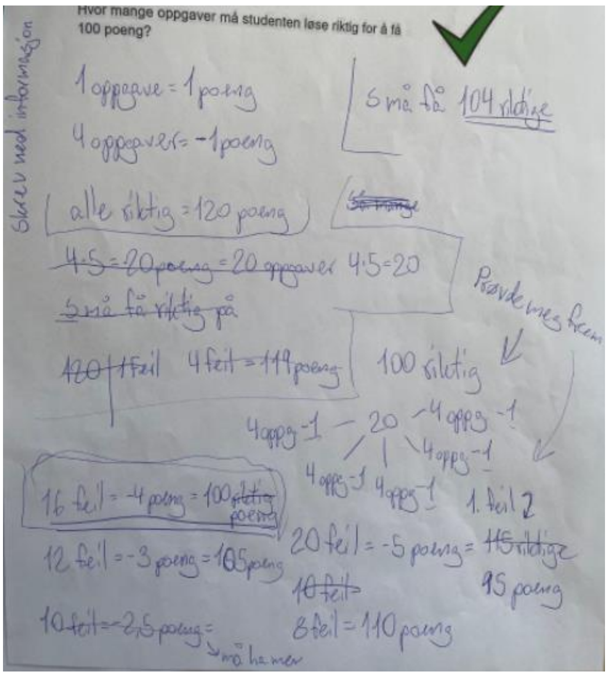
Å bruke verbal representasjon i form av en skriftlig forklaring kan være nyttig i forbindelse med tekstoppgaveløsningen. Knudtzon sier at fordelen med den type representasjon er at det hjelper eleven å ordne tankene og er den representasjonen alle elevene kan begynne med (Knudtzon, 2019, s. 153).

Videre valgte elevene litt forskjellige strategier for hvordan de skulle gå fram med oppgaveløsningen. Oppgaveteksten inneholder brøken ¼ og elev A gjorde om brøken til desimaltallet 0,25. Hun prøvde og feilet med å multiplisere ulike verdier med desimaltallet 0,25 for på den måten å kunne finne antall minuspoeng for feil svar. Hun sa «*... prøvde meg fram og det var litt for mye, og det var litt for lite*». Elev A prøvde til slutt med 104 riktige og 16 feil. Eleven dividerte deretter 16 med 4 og fant ut at det ga 4 poeng i trekk. Hun kom fram til svaret ved å subtrahere 104 riktige med 4 og avsluttet med å forklare svaret sitt skriftlig. I figur 4.6 vises oppgaveløsningen til elev A.



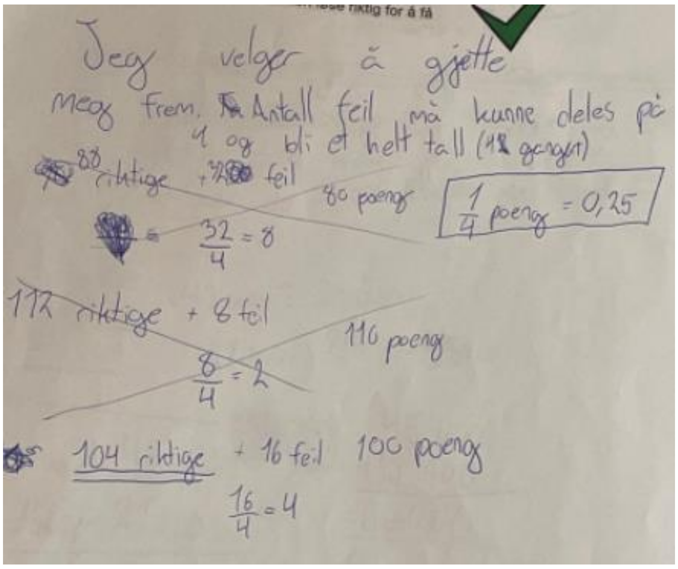
Figur 4.6. Elev A – løsning av oppgave 2.

Elev B brukte også multiplikasjon i oppgaveløsningen. Hun gjorde dette for å se hvor mye 4 feil gir, men innså at det var feil framgangsmåte. Eleven skrev i sin besvarelse «*prøver meg fram*». Hun prøvde seg da fram med å se hvor mange minus poeng hun fikk ved ulike antall feil svar. Disse verdiene representerte hun med tall og ord. Hun prøvde seg først med 20 feil og så at det ikke gikk. Deretter med 10 feil og skrev «*må ha mer*». Til slutt prøvde hun seg med 16 feil og kom fram til ønsket resultat. I figur 4.7 vises oppgaveløsningen til elev B.



Figur 4.7. Elev B – løsning av oppgave 2.

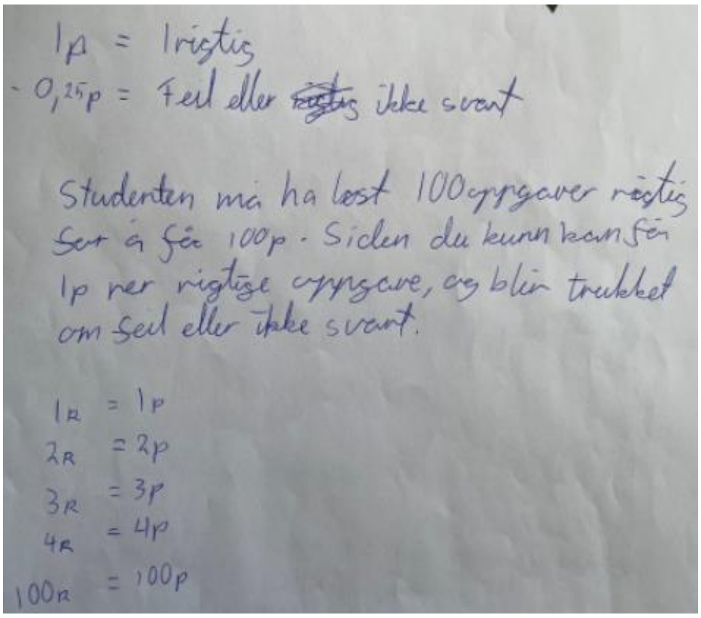
Elev C innledet besvarelsen sin med å skrive: «*Jeg velger å gjette meg frem*». Det ser ut til at eleven ved tolkningen av oppgaven valgte en løsningsstrategi som hun kommuniserte i forklarende tekst. Hun benyttet dermed «prøve og feile» strategien for å komme fram til svaret. I motsetning til elev A og B brukte hun divisjon av brøk for å prøve seg fram. Først prøvde hun med 32 feil og så at det ble for mye, deretter prøvde hun seg med 8 feil og så at det ble for lite. Til slutt prøvde hun seg med 16 feil og så at det ga riktig svar. I figur 4.8 vises oppgaveløsningen til elev C.



Figur 4.8. Elev C – løsning av oppgave 2.

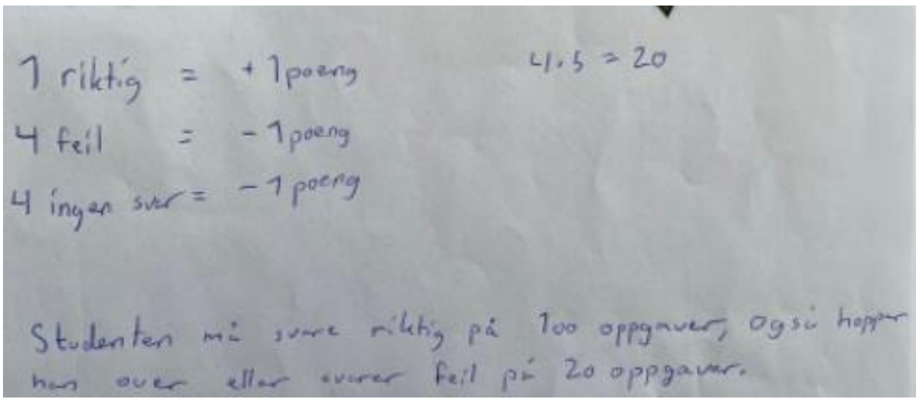
Analysen av datamateriale viser at elevene A, B og C brukte «prøve og feile» strategien. Det vil si at elevene prøvde seg fram med ulike verdier for feil svar og riktig svar til de kom fram til det ønskede resultatet i oppgaven, altså 100 poeng. Jeg kunne også observere at elevene A, B og C utførte en kvalifisert gjetting før beregning, slik det er beskrevet hos Klaveness et. al. (2019). Dette ved at de så om svarene de kom fram til var for høye eller for lave i forhold til det ønskede resultatet og justerte sine neste gjettinger etter det. Da det trekkes ¼ poeng for feil svar, brukte elevene B og C tall som er delelig med fire for at svaret skulle bli et heltall. Elev C skrev i sin oppgaveløsning: «*Jeg velger å gjette meg frem, antall feil må kunne deles på 4 og bli et heltall*». De tre elevene som brukte «prøve og feile» metoden har kommet til riktig resultat.

Elevene D og E valgte derimot ikke «prøve og feile» strategien. Elev D begynte slik de andre elevene har gjort med en forklarende tekst og omgjøring av brøken ¼ til desimaltallet 0,25. Imidlertid ble desimaltallet ikke brukt videre i løsningen av oppgaven. Videre kom eleven med et skriftlig resonnement om hvor mange poeng studenten får ved 100 riktige svar. I tillegg til dette satte hun opp en oversikt over hvor mange poeng en får ved et gitt antall riktige svar. Til dette brukte hun både bokstav- og tallsymboler som representasjoner. Hun kom ikke videre med oppgaven etter dette. I figur 4.9 vises oppgaveløsningen til elev D.



Figur 4.9. Elev D – løsning av oppgave 2

Elev E fikk heller ikke til denne oppgaven. Eleven startet også med å sette opp skriftlig hva som gir poeng og hva som gir minuspoeng. Deretter satte han opp et multiplikasjonsstykke der han multipliserte 4 med 5. Han avsluttet oppgaven med et skriftlig svar som er feil. I figur 4.10 vises oppgaveløsningen til elev E.



Figur 4.10. Elev E – løsning av oppgave 2

Elev D og E klarte altså ikke å løse oppgaven. De begynte oppgaveløsningen som de andre elevene med å lage en skriftlig forklaring. Samtidig så ser det ut til at når de kommer til løsningsfasen i oppgaven, så finner de ikke på noen strategi for å løse resten av oppgaven. Disse elevene brukte ikke «prøve og feile» strategien som ble brukt av de tre andre. Grunnen til det kan være at denne strategien krever at elevene utfører en kvalifisert gjetting før de foretar beregningene (Klaveness et. al., 2019, s. 188). Som nevnt over forsto de to elevene sammenhengen mellom brøk, desimaltall og divisjon, men de klarte ikke å bruke denne kunnskapen til kvalifisert gjetting. Hvis vi bruker modellen til Koedinger & Nathan (Koedinger & Nathan, 2004, s. 132), så bør elevene returnere til forståelsesfasen, lese oppgaven på nytt, danne seg et kognitiv bildet av problemstillingen og deretter velge en strategi for å løse oppgaven.

Ved løsningen av denne oppgaven har samtlige elever holdt seg til det diskursive semiotiske registret til Duval, der de vekslet mellom det multifunksjonelle og monofunksjonelle registret. Samtidig valgte elevene forskjellige tilnærminger på hvordan oppgaven skal løses, selv om de kun beveget seg i det diskursive registre. Som nevnt tidligere gjorde elevene A, C og D om brøken ¼ til desimaltallet 0,25. Det ser ut som omgjøringen fra brøk til desimaltall uføres i forbindelse med tolkning av oppgaven. Selv om elevene B og E ikke utførte en slik omgjøring av brøken, viste de til forståelse av sammenhengen mellom brøk og divisjon. De resonnerte seg fram til at dersom studenten blir trukket ¼ poeng for feil svar så gir 4 feil minus ett poeng. Fra elevenes besvarelser ser jeg at samtlige forstår sammenheng mellom brøk, desimaltall og divisjon. Har kan jeg sitere elev C sin forklaring: «*…antall feil må kunne deles på fire for at det skal bli et heltall*» eller når både elev B og E skriver i sin besvarelse *«4 oppgaver = - 1 poeng»*.

Jeg vil også bemerke at det var kun elev A som brukte omgjort verdi av brøken ¼, altså desimaltallet 0,25 videre i løsningen av oppgaven ved at hun «prøvde seg fram» og multipliserte ulike verdier med desimaltallet 0,25 for på denne måten å kunne finne minuspoeng for feil svar. For elevene C og D var derimot omregning av brøken til desimaltall kun en instrumentell behandling, da de ikke brukte desimaltallet 0,25 videre i løsningen av oppgaven. Ifølge Blum trekker elevene ofte tall ut av en tekstoppgave og beregner noe etter et kjent skjema (Blum, 2015, s. 78-79). Her ser det ut til at elevene gjorde om brøken etter kjent regel uten å reflektere om de trengte denne omgjøringen videre i oppgaveløsningen.

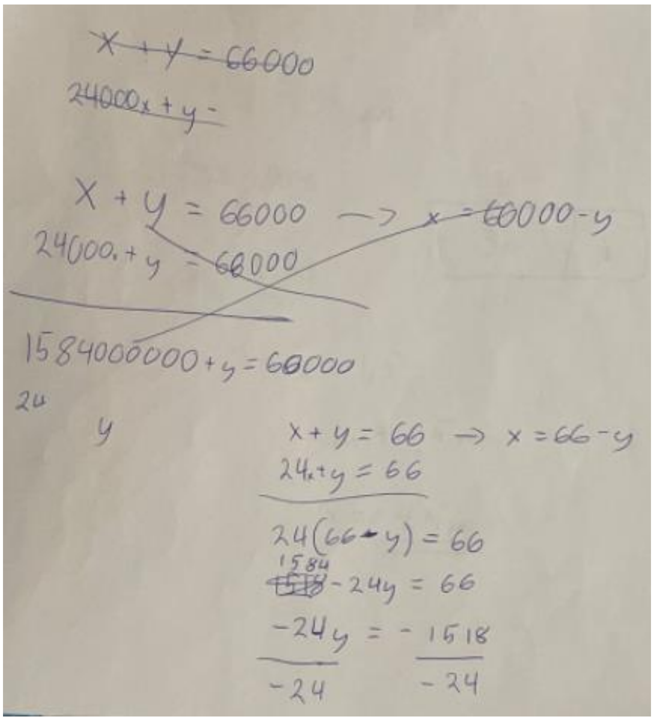
4.3 Beskrivelse og analyse av oppgave 3 - Penger

I denne oppgaven skal elevene finne ut hvor mye penger Per Ivar og Anne Marie har hver. Oppgaven kan løses ved hjelp av en likning og kan være en rutine oppgave for elever som mestrer denne type beregninger. Feiltolkning av oppgaveteksten førte likevel til feil i oppgaveløsningen for to av elevene som benyttet seg av likning.

Det var elevene B, D og E som valgte å bruke likning som løsningsmetode i denne oppgaven. De valgte å sette opp to likninger med to ukjente. Elevene D og E klarte likevel ikke å få til riktig løsning. De startet riktig med å sette opp første likning $x + y = 66000$, men når de satte opp likning to tolket elevene «mer enn» i oppgaveteksten som multiplikasjon i stedet for addisjon. Elev D forklarte det slik under gjennomgangen av oppgaven: «…*siden Per Ivar hadde 24000 mere så var da han 24000x*….». De to elevene satte opp $24000x + y = 66000$ i sine besvarelser. Dette var feil oppsett og som videre førte til feil svar. Valget av multiplikasjon som en løsningsmetode i stedet for addisjon medførte at både elev D og E endte til slutt med veldig høye tall. Begge elevene forkortet ligningene ved å fjerne nullene slik at de sto igjen med $x + y = 66$ og $24x + y = 66$.

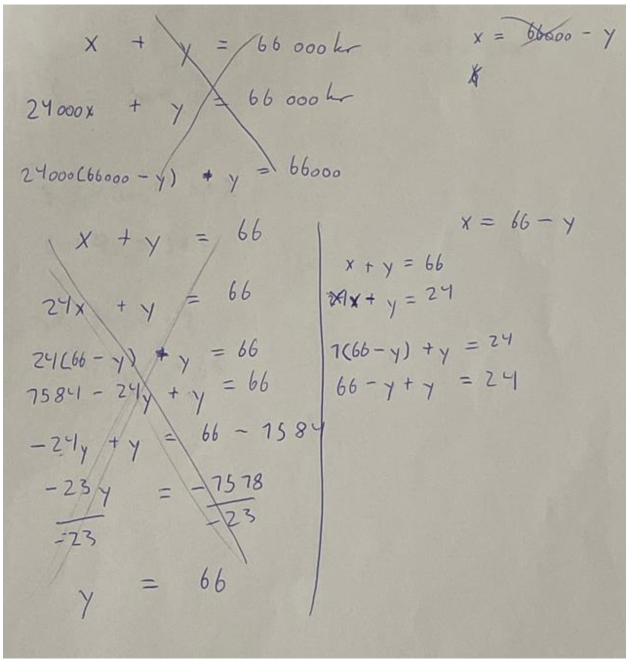
Elevene D og E har nokså lik fremgangsmåte i sine oppgaveløsninger. Siden disse elevene satt ved siden av hverandre kan det derfor være mulig at de har sett på hverandres løsning. Det ser ut som elev D kan ha skrevet fra elev E sin besvarelse, ettersom hun har noen veldig små x-er bak tallene som tyder på at de kan ha kommet inn i etterkant. I den videre løsningen valgte hver av dem forskjellige måter å løse likningene på.

Når elev D la inn verdien for x inn i likningen $24x + y = 66$ gjorde hun en ny feil. Hun glemte den siste y-en. Eleven sto da igjen med likningen $24(66 – y) = 66$. Hun får ikke til likningen og gir opp med å løse oppgaven. I figur 4.11 vises oppgaveløsningen til elev D.



Figur 4.11. Elev D – løsning av oppgave 3

Elev E regnet ut y verdien og kom til et resultat der y = 66 som er et ulogisk svar. Dette fordi oppgaveteksten forutsetter at Per Ivar har 24000 kroner mer enn Anne Marie. Beregningen fører derimot til at Anne Marie ender opp med hele beløpet som innebærer at Per Ivar står igjen med null. Eleven forstod at dette var feil og prøvde med en ny likning. Han endret likningen fra 24x + y = 66 til x + y = 24 og endte opp med x + y = 66 og x + y = 24. Når han løste likningene mistet han alle y-ene og sto igjen med 66 = 24. Eleven så at dette ikke gikk og ga opp. Han sa: «…*jeg fant ikke likning som jeg kunne bruke*». I figur 4.12 vises oppgaveløsningen til elev E.



Figur 4.12. Elev E - løsning av oppgave 3

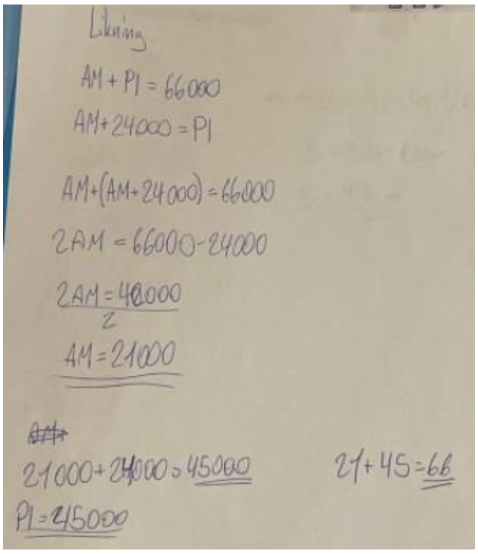
Feil oppsett av likning tyder på at både elev D og elev E tolket oppgaveteksten feil. De klarte derfor ikke overgangen fra naturlig skriftlig språk i oppgaveteksten til symbol språk i funksjonsuttrykket. I oppgaveteksten brukes uttrykket «mer enn» som elevene har oversatt feil og satte opp likning med multiplikasjon i stedet for addisjon.

Nortvedt i sin artikkel fra 2015 skriver om sammenheng mellom leseforståelse og oppgaveløsning og at mistolking av nøkkelord som «mer enn» fører til feil i oppgaveløsningen (Nortvedt, 2015). Nøkkelordet «mer enn» kan tolkes på forskjellige måter, enten som et ord som forteller hvilken operasjon som skal gjennomføres eller et ord som forteller om relasjoner mellom mengder og personer (Nortvedt, 2015). I dette tilfelle bør elevene lese «mer enn» som relasjon mellom mengder og addere mengder i stedet for å multiplisere dem. Koedinger og Nathan omtaler ord som «mer enn» brukt i tekstoppgaver som inkonsistent språk. Slike ord kan føre til mistolkning av oppgaveteksten, som igjen kan forklare problemløsningsvansker (Koedinger & Nathan, 2004, s. 132 – 133).

Duval sier at det er en betydelige kognitiv avstand mellom naturlig språk og de andre kognitive registre som er spesifikke for matematisk eller logisk behandling (Duval, 2017, s. 90). Dette gjør det derfor vanskelig å konvertere utsagn fra det naturlige språket i oppgaveteksten til symbolspråket i likningen. Dette finner jeg igjen hos de to elevene D og E. I slike tilfeller mener Duval at eleven bør konvertere teksten til en to dimensjonal hjelperepresentasjon i det ikke diskursive registre (Duval, 2017, s. 96). Altså en representasjon som kan brukes til visualisering, for eksempel en tegning eller en figur. Hos Klaveness et. al. er bruk av tegning omtalt som en problemløsningsstrategi, «å tegne for å løse problemet» (Klaveness et. al., 2019, s. 190). I løsningen av denne oppgaven kunne elevene med fordel brukt en type tegning kalt «blokktegning». «Blokktegning» er også en problemløsningsstrategi for å visualisere oppgaveteksten (Klaveness et. al., 2019, s. 192). Uansett hvilken av de nevnte strategiene de ville ha benyttet seg av, så kunne elevene ha hatt nytte av å bruke visualisering.

I oppgaven ble elevene presentert for høye tall, 24000 og 66000. I tillegg som nevnt tidligere valgte elevene D og E feil løsningsmetode når de satte opp likningene. Dette medførte at de multipliserte de høye tallene i stedet for å addere dem. For å kunne håndtere de høye tallene valgte disse elevene å forkorte tallene ved å fjerne nullene. De sto da igjen med tallene 24 og 66 som var enklere å håndtere. Forkorting av tallene i en oppgave er et av grepene som inngår i strategien «å forenkle problemet». «Å forenkle problemet» er en av problemløsningsstrategiene som elevene bør kjenne til når de jobber problemløsende (Klaveness et. al., 2019, s. 186). Elevene D og E valgte altså å bruke denne strategien som var nyttig ut i fra hvordan de hadde satt opp likningene. Dette gjorde at elevene fikk tall som de kunne håndtere. Samtidig så hjalp det heller ikke å få riktig svar i dette tilfelle, da likningen ble satt opp feil.

Elev B var den eneste av de tre elevene som tok i bruk to likninger med to ukjente som fikk til oppgaven. Istedenfor å bruke x og y som ukjent i likningen valgte hun bokstavene AM for Anne Marie og bokstavene PI for Per Ivar. Enkelte elever kan mistolke dette som to ukjente multiplisert med hverandre, men en slik representasjon for de ukjente verdiene har fungert bra for denne eleven. I figur 4.13 vises oppgaveløsningen til elev B.

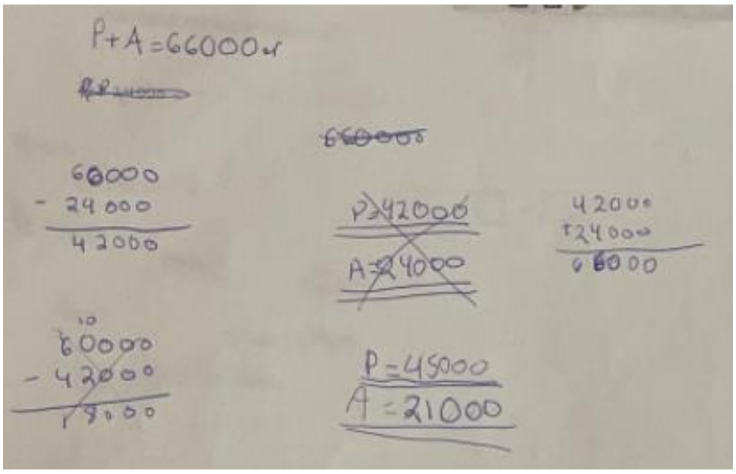


Figur 4.13. Elev B - løsning av oppgave 3

Elev B tolket oppgaveteksten riktig. Hun klarte dermed overgangen fra naturlig språk i oppgaveteksten til symbolspråk i funksjonsuttrykket, da hun satte opp to likninger med to ukjente. Hun gjennomførte deretter behandlinger i det monofunksjonelle registre som er spesifikt for matematiske beregninger (Duval, 2017, s. 84). Det matematiske objektet kan representeres på ulike måter og i ulike registre, men noen ganger er det slik at et matematisk problem er enklere å løse ved en bestemt representasjon (Hana, 2014, s. 147). Denne oppgaven kunne løses i det monofunksjonelle registret ved hjelp av algebra, altså med to likninger med to ukjente. Elev B mestret godt denne regnemetoden og for henne var det enklere å løse oppgaven kun ved hjelp av en representasjon.

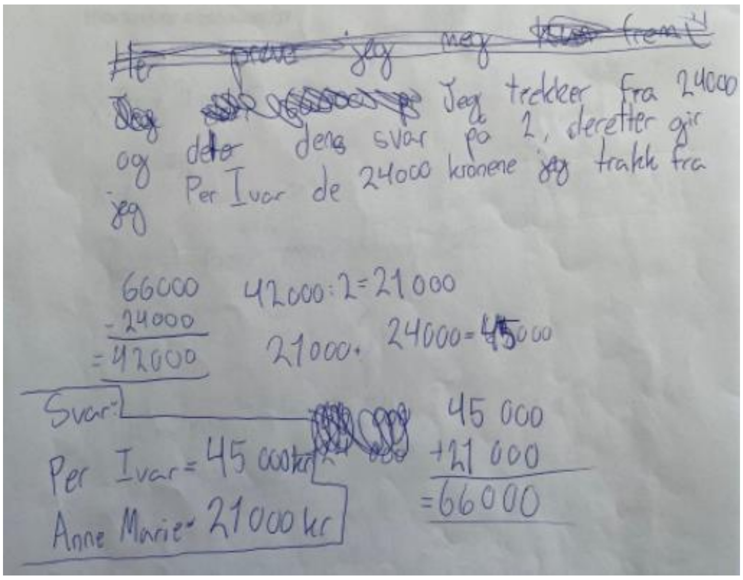
I likhet med elev B klarte elevene A og C å løse oppgaven riktig. Men i motsetning til de andre elevene brukte de ikke funksjon, men løste oppgaven ved hjelp av aritmetikk. Samtidig valgte elevene A og C forskjellige fremgangsmåter for å løse oppgaven.

Elev A startet løsningen med å sette opp en likning med to ukjente, der hun satte opp Per Ivar og Anne Marie som ukjente. Hun fullførte imidlertid ikke likningen og endret metode til aritmetikk. Hun brukte subtraksjon og addisjon for å komme fram til svaret. Eleven skrev ikke ned alle mellomregningene sine, men kom fram til riktig svar. I figur 4.14 vises oppgaveløsningen til elev A.



Figur 4.14. Elev A - løsning av oppgave 3

Elev C brukte også aritmetikk i oppgaveløsningen. Hun startet oppgaven med å forklare skriftlig hva hun skulle gjøre for å komme fram til svaret. Ved å bruke en forklarende tekst som representasjon laget hun en beskrivelse for hva som skal gjøres i oppgaven og på denne måten ble det lettere for henne å forstå oppgaveteksten. Ifølge Knudtzon hjelper en verbal representasjon eleven til å ordne tankene (Knudtzon, 2019, s. 153). Videre i løsningen brukte hun aritmetikk ved å ta i bruk subtraksjon, divisjon og deretter addisjon. I figur 4.15 vises oppgaveløsningen til elev C.



Figur 4.15. Elev C – løsning av oppgave 3

Analysen av besvarelsene til elevene A og C viste at begge benyttet seg av strategien «å tenke baklengs» (Klaveness et. al., 2019, s. 200). Denne strategien beskrives også hos Koedinger og Nathan der den på engelsk kalles «Unwinde» strategi (Koedinger & Nathan, 2004, s. 145 – 146). Strategien brukes ofte når man vet hva sluttsvaret er, men ikke utgangspunktet. De to elevene som brukte «å tenke baklengs» strategien har kommet til riktig svar. Ifølge Klaveness et. al. er alternativet til å tenke baklengs å bruke likning. Dette var det alternativet de tre andre elevene valgte. Av disse var det kun en elev som klarte å løs oppgaven riktig.

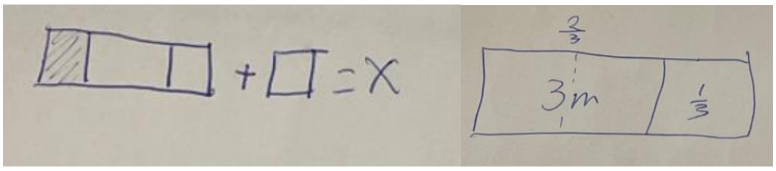
Ved løsningen av denne oppgaven har samtlige elever benyttet seg av representasjoner kun i Duval sitt diskursive register. Analysen viser også at det er i denne oppgaven det har vært minst variasjon i bruken av representasjoner. Elevene B, D og E utførte kun en overgang fra startrepresentasjonen, altså fra oppgaveteksten til algebra i det monofunksjonelle registret, der de setter opp en likning. Elevene A og C brukte en annen løsningsstrategi og gjennomførte to overganger. Elev A gjør en overgang til det monfunksjonelle registre og startet løsningen med en likning. Hun fullfører ikke likningen og endrer metode til aritmetikk. Elev C startet i det multifunksjonelle registret med en skriftlig forklaring. Hun gjorde deretter en overgang til det monfunksjonelle registret og løste oppgaven med bruk av aritmetikk og «tenke baklengs» strategien.

Det som kjennetegner matematikk, er den store variasjonen av representasjoner som elevene fritt kan benytte når de løser oppgaver. Samtidig er noen matematiske prosesser enklere å utføre i et semiotisk system framfor et annet, og noen kan bli utført kun i et system (Hana, 2014, s. 157). Analyse av denne oppgaven viser at noen av elevene klarte å løse oppgaven ved å benytte kun en kategori av representasjoner. Samtidig viser analysen også at noen elever med fordel burde ha benyttet flere representasjoner.

4.4 Beskrivelse og analyse av oppgave 4 - Stigen

I denne oppgaven skal elevene finne lengden på en stige. Elevene valgte forskjellige fremgangsmåter for å løse oppgaven, og «Stigen» er den eneste oppgaven der de tok i bruk tegning som en representasjon i sin oppgaveløsning. Grunnen til det kan være at oppgaveteksten inneholder en illustrasjon av en stige som kan være en invitasjon til å ta i bruk tegning som en av representasjonene. Ellers kan oppgaven også løses ved hjelp av en likning.

Det var elev A og elev D som visualiserte ved å bruke tegning i oppgaveløsningen. De startet oppgaveløsningen med å forklare ved hjelp av naturlig språk og symboler hvor lang stigen er. Da det brukes brøk i oppgaveteksten, har elev D også gjort om brøken til desimaltall og til prosent. Denne omregningen av brøk har hun ikke brukt videre i utregningene sine. Deretter visualiserte begge elevene problemstillingen i oppgaveteksten med hver sin tegning av stigen. Selv om tegningene skal visualisere samme problemstilling, så er de likevel forskjellige, se figur 4.16.

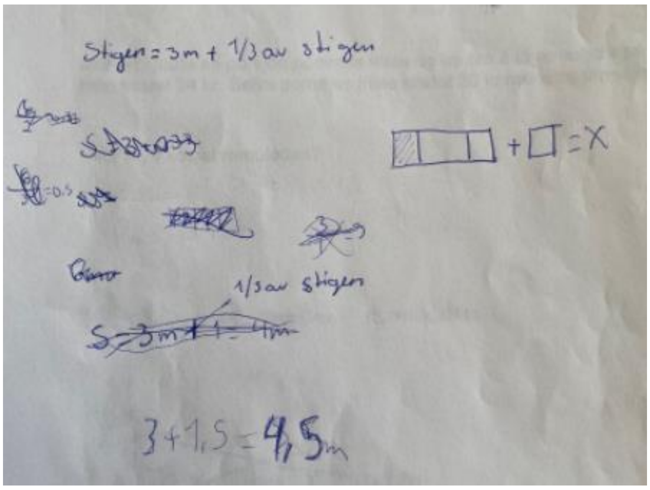


Figur 4.16. Tegningen til elev A til venstre og tegningen til elev D til høyre.

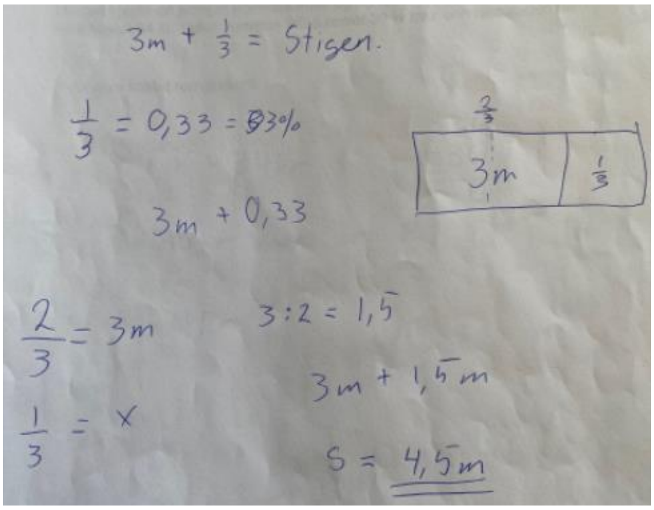
Tegningen til elev A kan tolkes på to måter. En tegning som illustrerer stigen som består av tre deler med en skravert del pluss en firkant. Eller at det skraverte området er tatt bort av den første biten for så å bli erstattet med det siste kvadratet. Eleven selv forklarte slik hvordan hun tenkte: «…*prøvde å tegne en liten tegning her hvor man liksom ser at det er stigen pluss det måtte være 1/3. Så jeg kom frem til at det var 3 pluss 1,5*».

Elev D derimot tegnet stigen bestående av tre deler og merket tydelig av at 2/3 utgjør tre meter. Da kan man lett se at 1/3 er 1,5 m. Under gjennomgangen av oppgaven forklarte eleven tegningen på denne måten: «…*Den tegningen av stigen så var det da 3 meter. Det var den pluss den 1/3 delen. Det var bare for å illustrere at de 3 meterne er 2/3. Så bare delte jeg den i to.*».

Elevene representerte deretter lengden på stigen ved hjelp av en aritmetisk beregning, der de kom fram til den egentlige lengen på stigen. Figur 4.17 viser løsningen av oppgaven til elev A og figur 4.18 viser løsningen av oppgaven til elev D.



Figur 4.17. Elev A – løsning av oppgave 4.



Figur 4.18. Elev D – løsning av oppgave 4.

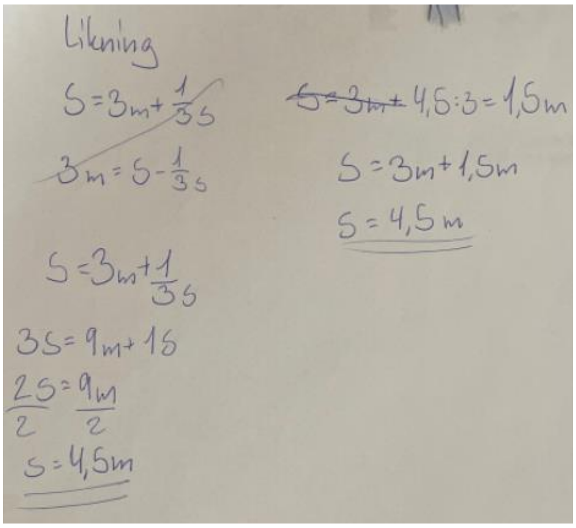
Hvis en tar utgangspunkt i Duval (2017) sin klassifisering av det semiotiske registret, så er fremgangsmåten i oppgaveløsningen nokså lik hos begge elevene. De startet i det multifunksjonelle registret med en skriftlig forklaring i form av tekst. Elev D gjorde deretter en overgang til det monofunksjonelle registret for så å gjøre en behandling i forbindelse med omgjøring av brøk. Deretter gjorde begge elevene en overgang til det ikke-diskursive multifunksjonelle registeret som inneholder ikoniske fremstillinger som blant annet tegninger. Formålet med denne overgangen var å kunne visualisere ved hjelp av en tegning det matematiske problemet som lå innbakt i oppgaveteksten. Dette for å få hjelp til tolkning av oppgaveteksten. Elevene har dermed tatt i bruk en hjelperepresentasjon slik det beskrives av Duval (2017).

Disse tegningene kan også karakteriseres som blokktegninger som omtales av Klaveness et. al. (2019). Elevene har delt en blokk opp i tre deler der to av delene til sammen er tre meter, mens den resterende delen er 1/3 av den ukjente lengden. Klaveness et. al. sier at ved hjelp av slike tegninger kan oppgaver visualiseres slik at det blir lettere for eleven å se hvordan de kan løses. (Klaveness et. al., 2019, s. 192). «Blokktegning» er en problemløsningsstrategi som også kalles «model method» eller «Singapore metode» som brukes til visualisering av problemstillinger i tekstoppgaver. Blokktegninger kan også brukes i selve utregningen (Klaveness et. al., 2019, s. 192).

I min studie brukte elevene A og D blokktegninger i forbindelse med visualisering, slik elev D sa når jeg spurte henne om hun kunne forklare hjelpetegningen sin, «*Det var bare for å illustrere at de tre meterne er to tredeler*». Elevene var ikke klar over at det var noe som het «blokkmetoden» eller «Singaporemetoden» når de løste denne oppgaven, og var overrasket over at det var en velkjent metode som brukes i Singapore.

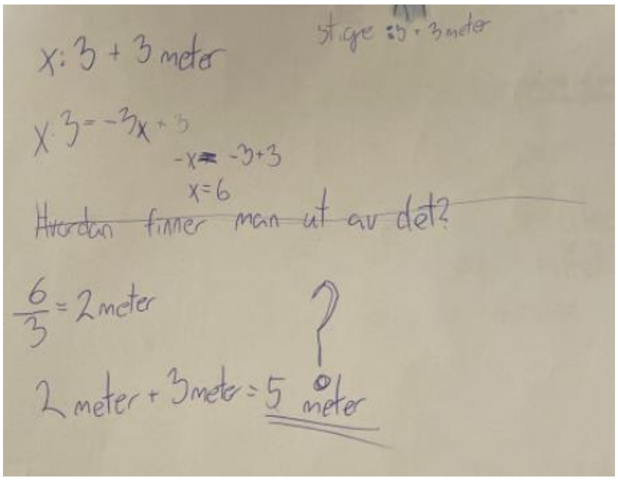
De tre andre elevene har ikke benyttet seg av tegning som hjelperepresentasjon i oppgaveløsningen. De valgte litt forskjellige fremgangsmåter for å løse oppgaven.

Elevene B og C valgte likning som løsningsmetode. Eleven B lyktes med denne metoden. Hun tolket oppgaveteksten riktig og satte opp et korrekt algebraisk uttrykk. Eleven sa at grunnen til at hun valgte likning var fordi hun liker å bruke likninger. Hun sa: *«Jeg som er så glad i ligninger så løste jeg den på en ligning»*. Likningen inneholdt brøken 1/3 og hun valgte å multiplisere alle leddene med nevneren i brøken. Dette gjorde hun for å forenkle likningen. Hun sa: «*…jeg liker ikke å regne med tredjedeler så jeg bare tok hele ligningen å gjorde den tre ganger så stor*.». Til slutt foretok hun en behandling for å kontrollere om svaret var riktig. Det så ut som at eleven behersket regler for løsning av likning. I figur 4.19 vises oppgaveløsningen til elev B.



Figur 4.19. Elev B – løsning av oppgave 4.

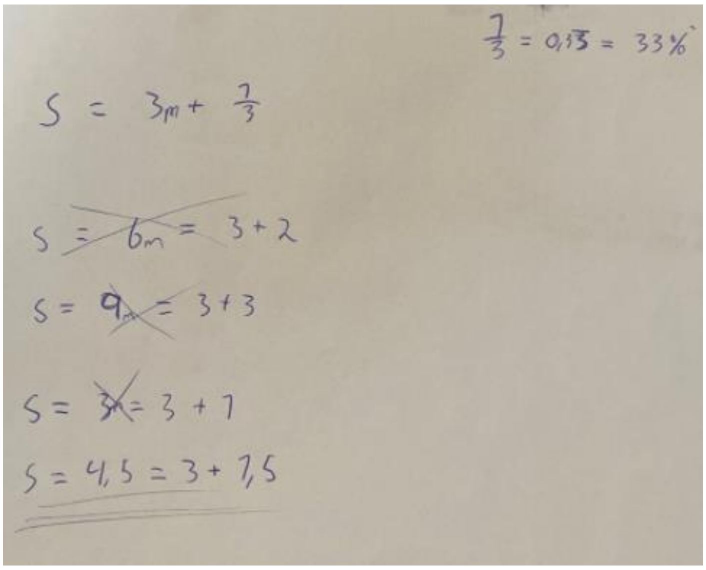
Elev C hadde derimot problemer med bruk av likning som løsningsmetode. Det ser ut til at hun tolket oppgaveteksten feil, altså at hun tolket teksten direkte og satte derfor opp en likning som var feil. Hun utførte deretter noen behandlinger og prøvde å løse likningen med «egne» regneregler. Eleven satte deretter opp et divisjonstykke. Eleven presenterte svaret skriftlig, men sa samtidig at svaret kan være feil. «*Det vet jeg ikke var riktig*». Eleven hadde problemer med å sette opp en korrekt likning, hun sa: «*…jeg prøvde flere ganger og det fungerte ikke.*». I figur 4.20 vises oppgaveløsningen til elev C.



Figur 4.20. Elev C – løsning av oppgave 4.

Koedinger og Nathan viser til at feil i forståelsesfasen av en tekstoppgave ofte kan forklare problemløsningsvansker (Koedinger & Nathan, 2004, s. 132). Her kan jeg igjen støtte meg på Duval som sier at overgang fra naturlig språk til symbolspråk ofte kan være utfordrende for elevene, særlig hvis det ikke er en-til-en forhold mellom representasjoner (Duval, 2017, s. 90). I slike tilfeller kan bruk av en hjelperepresentasjon i det ikke-diskursive registret hjelpe eleven med denne overgangen (Duval, 2017, s. 96). En tegning kan være en slik hjelperepresentasjon. Det kan hende at elev C ville hatt nytte av å bruke en hjelpetegning for å sette opp riktig likning, slikt som elevene A og D hadde gjort.

Elev E derimot valgte en helt annen strategi for å løse oppgaven. Han brukte «prøve og feile» strategien. I likhet med elev D gjorde han om brøken til desimaltall og til prosent. Denne omgjøringen av brøken brukte han ikke videre i utregningen. Han satte opp en likning i form av symbolspråk på bakgrunn av hans tolkning av oppgaveteksten. Denne likningen var ikke satt opp riktig, da han ikke multipliserte den ukjente lengden med 1/3. Så valgte eleven «prøve og feile» strategien for den videre løsningen av oppgaven. Med utgangspunkt i likningen prøvde han seg fram med å sette ulike verdier for lengden av stigen. Han beregnet deretter 1/3 av lengden han tok utgangspunkt i, for så å addere denne verdien med 3. På den måten så han om likningen var sann. Når likningen var sann er stigen 4,5 meter som er lik 3 meter pluss 1,5 meter. I figur 4.21 vises oppgaveløsningen til elev E.



Figur 4.21. Elev E – løsning av oppgave 4.

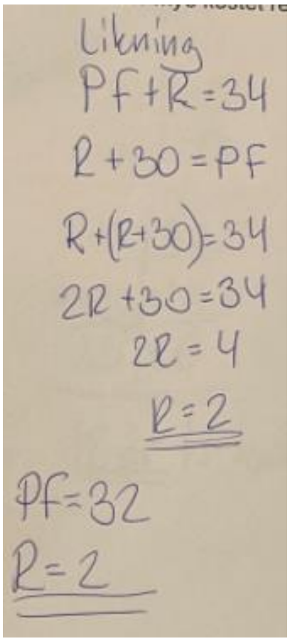
Elevene B, C og E brukte ikke tegning som representasjon i sine løsninger og dermed utførte alle sine overganger i forbindelse med oppgaveløsningen kun i det diskursive registret.

Elevene utførte beregninger i det monofunksjonelle registret for matematiske beregninger. Elev B brukte kun algebra, mens elev C og E vekslet mellom algebra og aritmetikk i sine beregninger.

4.5 Beskrivelse og analyse av oppgave 5 - Pommes frites med remulade

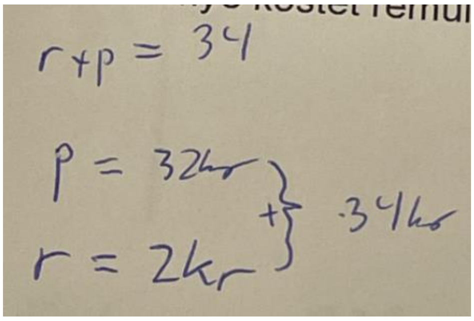
I denne oppgaven fikk elevene vite at pommes frites med remulade kostet 34 kroner, mens selve pommes fritesen kostet 30 kroner mer enn remuladen. Elevene skulle da finne ut hvor mye remuladen kostet. Dette var den oppgaven de fleste løste feil. Enkelte elever syntes at den var veldig enkel. Det viste seg imidlertid at ikke alle elevene leste nøye gjennom oppgaveteksten og tolket den derfor feil. Dette førte til feil løsning for disse elevene.

Elev B tolket oppgaveteksten riktig og valgte å bruke to likninger med to ukjente. Hun regnet ut likningen, altså gjennomførte en behandling av likningen og fikk riktig resultat. I figur 4.22 vises oppgaveløsningen til elev B.



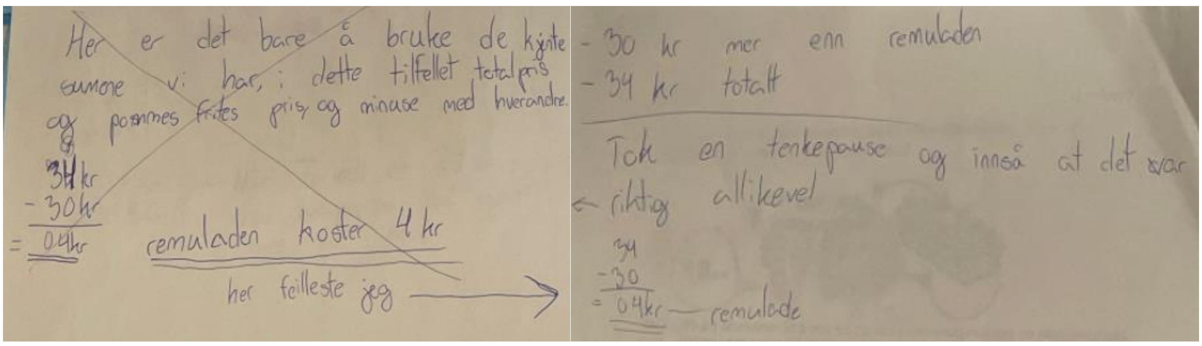
Figur 4.22. Elev B sin løsning av oppgave 5, med to likninger med to ukjente.

Elev E kom også fram til riktig resultat. Han satte derimot opp en likning med to ukjente, men han foretok ingen behandling av likningen. Det var dessuten ikke mulig å gjennomføre en behandling, da han ikke satte opp likning nummer to. Han skrev opp resultatet og fortalte under gjennomgangen at oppgaven ikke var så vanskelig. Eleven forklarte det slik: «*Her er det ikke så vanskelig da, fordi 30 kroner mer enn remuladen*». Han sier videre: «*Koster remuladen bare 2 kroner koster pommes frites 30 kroner mer, så blir det 32*». Det ser ut til at eleven har forstått oppgaven og «så» at det er 30 mellom 32 og 2. I figur 4.23 vises oppgaveløsningen til elev E.



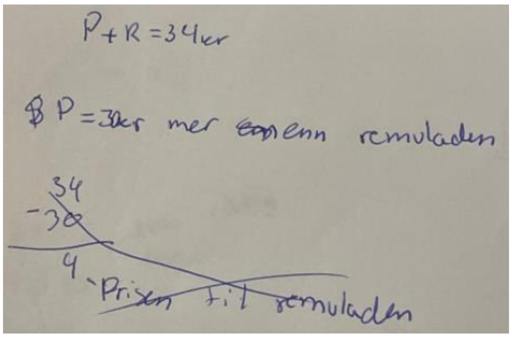
Figur 4.23. Elev E sin løsning av oppgave 5.

Det ser ut til at elevene A, C og D tolket oppgaveteksten feil. Elev C begynte med at hun brukte skriftlig naturlig språk som første representasjon og laget en skriftlig forklaring på hvordan hun skulle gå fram for å løse oppgaven. Forklaringen viser at hun leste bare tall når hun tolket oppgaveteksten. Hun skrev: «*Her er det bare å bruke de kjente summene vi har, i dette tilfellet totalpris og pommes frites pris, og minuse med hverandre*.» Deretter utførte hun en subtraksjon og kom fram til at remuladen kostet fire kroner. Hun var ikke sikker på om denne besvarelsen var riktig og prøvde å løse oppgaven på nytt, men kom fram til den samme utregningen og svaret som hun fikk først. Hun konkluderte med at svaret var riktig. I figur 4.24 vises oppgaveløsningen til elev C.

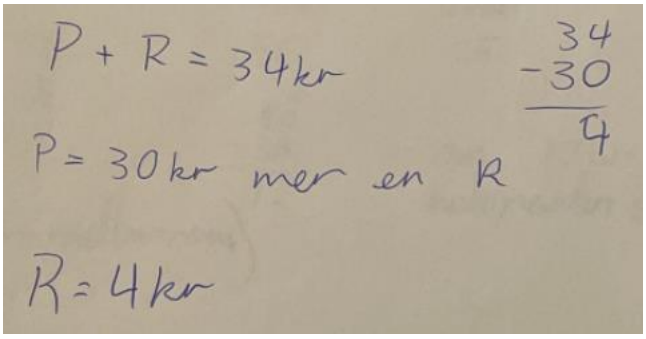


Figur 4.24. Elev C sin løsning av oppgave 5.

Elevene A og D satte opp en likning med to ukjente, kostanden for pommes frites og remuladen. Deretter laget de en forklaring ved hjelp av symboler og tekst hvor mye pommes frites koster. For å komme fram til hvor mye remuladen kostet utførte de et subtraksjonsstykke med tall som er oppgitt i oppgaveteksten. De avsluttet med skriftlig svar. I figur 4.26 og figur 4.27 vises oppgaveløsningene til henholdsvis elev A og D.



Figur 4.26. Elev A sin løsning.



Figur 4.27. Elev D sin løsning.

Analysen av elevene A, C og D sine besvarelser viser at de tolket oppgaveteksten feil. Det kan være forskjellige grunner til det. Den ene kan være at elevene leste bare tallene i oppgaveteksten uten å lese nøye gjennom hele oppgaven. Dette er en kjent feil som elever gjør. Det er empirisk vel dokumentert gjennom forskning i mange land (Blum, 2015, s. 79). Blum i sin artikkel fra 2015 refererer til en PISA undersøkelse som viser at hele 49% av elevene på 10. trinn leser bare tallene i en tekstoppgave (Blum, 2015, s. 79). Det ser ut som denne feilen også ble gjort i denne oppgaven, da de tre eleven A, C og D beregnet prisen for remuladen bare ved å plukke ut tall fra oppgaveteksten. Dette samsvarer med det Blum skriver i sin artikkelen at «*Elevene ignorerer sammenhenger, bare trekker ut all data fra teksten og beregner noe i henhold til et kjent skjema*» (Blum, 2015, s. 79).

En annen grunn til feiltolkning er bruk av uttrykket «mer enn» i oppgaveteksten, som kan være vanskelig å tolke for elevene. I oppgaveteksten står det «… pommes frites koster 30 kr mer enn remuladen».

Det er flere forskere, blant annet Nortvedt og Koedinger og Nathan, som tar opp utfordringer med uttrykket «mer enn» i oppgavetekster som kan tolkes på forskjellige måter. Nortvedt sier at dette uttrykket enten kan referere til en direkte handling, altså hvilken regneoperasjon som skal gjennomføres, eller om det refererer til en relasjon (Nortvedt, 2015). I denne oppgaven betydde uttrykket «mer enn» en relasjonen mellom prisen for pommes frites og prisen for remuladen. De to elevene reflekterte ikke over innholdet i teksten og leste dette uttrykket som et opperasjonsord. De subtraherte derfor de to beløpene som er oppgitt i oppgaven. Dette er feil løsningsmetode og dermed ble oppgaveløsingen også feil.

Ifølge Koedinger og Nathan er slike spesifikke uttrykk i oppgaveteksten er eksempel på inkonsistent språk som kan føre til feil i forståelsesfasen av oppgaveløsningen. Dette kan igjen forklare feil som gjøres i løsningsfasen (Koedinger & Nathan, 2004, s. 132-133). Dette kan også sammenliknes med det Duval kaller for ikke-kongruent overgang. Elevene ved overgang fra naturlig tekst til symbolspråk oversetter direkte, selv om det ikke finnes en-til-en forhold mellom de to representasjonene i det diskursive registre (Duval, 2006, s. 123). Her burde eleven ha brukt en hjelperepresentasjon i det ikke-diskursive registret slik Duval anbefaler i slike tilfeller (Duval, 2017, s. 90).

Analysen av datamaterialet viser at i forbindelse med løsningen av denne oppgaven har samtlige elever benyttet seg av representasjoner i det diskursive registret til Duval. Tre av elevene bruker tekst som representasjon i forbindelse med forklaringen, beskrivelser og svar på oppgaveløsningen. Ellers benytter elevene algebra og aritmetikk. Analysen viser også at det var i denne oppgaven som de fleste elevene ikke fikk riktig svar.

4.6 Oppsummering

Jeg har nå beskrevet og analysert datamaterialet fra studien for hver av de fem oppgavene elevene har løst. Jeg vil nå oppsummere min analyse ved å trekke fram hovedfunnene fra analysen som jeg mener er mest interessante og som viser et felles mønster. Disse funnene vil jeg drøfte nærmere i kapitel 5.

Jeg vil trekke fram følgende hovedfunn fra analysen:

- Elevene viser variasjon i bruken av representasjoner når de løser tekstoppgaver. Elevene bruker sjelden kun en representasjon i oppgaveløsningen.
- De representasjonene som elevene benyttet seg mest av i min studie var aritmetikk og algebra. Samtidig viser analysen at de elevene som benyttet seg av algebra i oppgaveløsningen var de som ofte ikke fikk til oppgaven.
- Det er en sammenheng mellom leseforståelse og hvordan oppgaven blir tolket og løst, altså hvilke representasjoner elevene bruker og hvordan de brukes. Analysen viser et

mønster hos de elevene som satte opp feil likning. Det er disse elevene som tolket oppgaveteksten feil eller ufullstendig. Her kan det spesielt trekkes fram:

    - Feil forståelse av nøkkelord som «mer enn».
    - Elevene ignorerer sammenhenger og leser bare tall i oppgaveteksten.

- Elevene som brukte hjelperepresentasjoner eller løsningsstrategier var blant de som klarte å løse oppgavene riktig. Her kan jeg nevne bruk av tegninger og tabeller samt «prøve og feile» strategi eller «tenke baklengs» strategi.
- Mange elever benyttet naturlig skriftlig språk som representasjon i oppgaveløsningen når de beskrev hvordan de tenkte og resonnerte. Elevene laget forklarende tekster om hvordan de tolket oppgaven eller hvordan de skulle gå fram for å løse oppgaven. De har også brukt korte beskrivelser underveis i løsningen.

5 Drøfting

I analysekapitlet har jeg beskrevet og analysert datamaterialet fra min studie, og på slutten av analysen i delkapitlet «Oppsummering» har jeg presentert hovedfunn fra analysen.

I dette kapitlet vil jeg drøfte disse hovedfunnene fra analysen og se på disse i forhold til mitt forskningsspørsmål som er: Hvordan bruker elevene på 10. trinn forskjellige representasjoner og gjennomfører overganger i arbeid med tekstoppgaver?

5.1 Variasjon i bruken av representasjoner

Funn fra analysen viser variasjon i bruken av representasjoner når elevene løser tekstoppgaver. De bruker sjelden kun en representasjon i oppgaveløsningen.

Variasjon i bruken av ulike representasjoner i forbindelse med tekstoppgaveløsning samsvarer med forskningen til både Lesh et. al., Duval og Hana.

Lesh et. al., har også sett på bruken av representasjon i tekstoppgaveløsning. Han har kommet fram til at elever som arbeider med tekstoppgaver, sjelden benytter seg av kun en representasjon. De bruker ofte to eller flere samtidig (Lesh et al., 1983, s. 296). Dette finner jeg også hos Duval som sier at i mange tilfeller er det ikke bare et representasjonssystem, men mist to som må brukes for å løse oppgaven (Duval, 2006, s.108). Lesh et. al. sier videre at bruk av representasjoner i problemløsning er en aktiv prosess der elever skifter mellom forskjellige representasjoner (Lesh et al., 1983, s. 296). Det samme finner jeg igjen hos Duval som sier at matematisk aktivitet som inngår i oppgaveløsningen alltid innebærer å erstatte en semiotisk representasjon med en annen (Duval, 2006, s. 106-107). Dette kunne jeg observere i min studie. Elevene som deltok i studien, tok også i bruk ulike representasjoner og vekslet mellom dem når de løste de fem tekstoppgavene de fikk. De brukte naturlig skriftlig språk, aritmetikk, algebra, tabeller og tegninger. De fleste elevene benyttet flere representasjoner for å komme fram til en løsning. For eksempel at de startet med forklarende tekst, deretter gjorde de en overgang til en aritmetisk beregning eller et algebraisk uttrykk, utførte beregningene for så å avslutte med et skriftlig svar. Samtidig var det kun noen få som benyttet seg av kun en representasjon. Funn i min studie viser at de gangene kun en representasjon ble valgt var det algebra for å sette opp en likning. Når eleven mestrer bruk av likning, kan denne representasjonen være tilstrekkelig for løsning av oppgaven. Ifølge Hana er det noen ganger enklere å løse oppgaven ved bruk av en bestemt representasjon, selv om det matematiske objektet kan representeres på ulike måter (Hana, 2014, s. 147). De elevene i min studie som mestret bruk av likning klarte å løse oppgaven ved bruk av kun en representasjon. Likevel viser analysen at de fleste måtte benytte seg av flere representasjoner for å komme fram til et svar. Samtidig de som ikke mestret likningen burde med fordel bruke flere representasjoner, selv om de benyttet kun en. Ved å bruke flere representasjoner ville det kunne hjelpe dem med løsningen av oppgaven. Som Duval sier, at for å forstå matematikk er det ofte behov for å bruke flere representasjoner, selv om en oppgave favoriserer kun bruk av en representasjon (Duval, 2017, s. 83).

Videre viser funn at representasjonene elevene valgte varierte fra oppgave til oppgave. I oppgaven «Mor og sønn» var det naturlig for enkelte elever å benytte seg av tabeller, mens i oppgaven «Stigen» har noen valgt tegning og noen valgte å sette opp likning. Mange benyttet naturlig språk i skriftlig forklaringer og resonnementer. Både Duval (2006) og Hana sier at ulike representasjoner egner seg til ulike formål, alt avhengig av hva som er formålet med aktiviteten (Duval, 2006, s.108 & Hana, 2014, s. 157). Dette kunne jeg også se i min studie. Elevene benyttet seg av representasjoner ut ifra hva de selv mente var mest hensiktsmessig for å finne svar på oppgaven.

5.2 Bruk av aritmetikk og algebra som representasjon

De representasjonene elevene benyttet seg mest av i min studie var aritmetikk og algebra. Dette er ikke så unaturlig da aritmetikk og algebra benyttes i prosedyrer for å utføre matematiske beregninger. Samtidig viser funn at de elevene som benyttet seg av algebra i oppgaveløsningen var de som ofte ikke fikk til oppgaven.

Funn viser at aritmetikk ble brukt i alle oppgaver i forbindelse med matematiske operasjoner der de fire regnearter ble brukt. Aritmetikk ble brukt i forbindelse med beregninger som ble utført i det Duval kaller det monofunksjonelle diskursive registre der elevene benyttet de kjente prosedyrene for behandling. Prosedyrene som skal utføreres er avhengig av både hvilken representasjon som benyttes og hvilken operasjon prosedyren skal utføre (Duval, 2006, s. 111). Analyse av funn viser at elevene mestret prosedyrene for de fire regneartene. Jeg vil også bemerke at aritmetikk ofte ble brukt i kombinasjon med problemløsningsstrategier som for eksempel «prøve og feile» strategi i oppgavene «Mor og sønn» og «Riktige svar», og «å tenke baklengs» strategien i oppgaven «Penger». De elevene som benyttet aritmetikk i kombinasjon med problemløsningsstrategier, fikk til oppgavene.

Alle oppgavene kunne også løses ved hjelp av algebra, og denne løsningsmetoden ble benyttet i tre av oppgavene der enkelte elever prøvde å sette opp likninger. Samtidig viser funn fra analysen av elevenes besvarelser, at blant de elevene som benyttet seg av likning var de som ofte ikke fikk til oppgaven.

De oppgavene der blant annet likning ble brukt var «Penger», «Stigen» og «Pommes frites med remulade». Både i oppgaven «Penger» og oppgaven «Stigen » var det tre av elevene som prøvde å sette opp likning, men det var kun en av dem som gjorde det riktig. I oppgaven «Pommes frites med remulade» var det fire elever som prøvde seg med likning, men det var kun en av dem som fullførte oppgaven med bruk av denne metoden. De tre andre brukte ikke likningen videre i utregningen. Felles mønster for de elevene som ikke lyktes med likning var at de mistolket oppgaveteksten og satte dermed opp en feil likning.

Analysen av elevenes besvarelser tyder på at overgangen mellom naturlig språk i oppgaveteksten og symbolspråk i likningen kunne være utfordrende for disse elevene, og dette førte i sin tur til at likninger ble satt opp feil. Ifølge Duval er det en betydelig kognitiv avstand mellom naturlig språk og de andre kognitive registre som er spesifikke for matematisk eller logisk behandling. Dette gjør at språk i oppgavetekster kan være kilden til misforståelser, fordi det brukes formuleringer og begreper der det kreves kunnskapsanvendelse fra elevene (Duval, 2017, s. 90). Det kan derfor være vanskelig å konvertere innholdet i oppgaveteksten som presenteres med naturlig språk til symbolspråket i likningen. Samtidig skal elevene arbeide med likninger på skolen, da algebra inngår i de matematiske kunnskapsområdene som er et av kjerneelementene i matematikk (Utdanningsdirektoratet, 2020c). Elevene skal utvikle sin kompetanse innenfor de forskjellige matematiske kunnskapsområdene ved hjelp av blant annet representasjoner (Regjeringen.no, 2018b). Det vil si at elevene bør bruke flere representasjoner når de jobber med likninger i tekstoppgaver og på den måten kunne utvikle sin kompetanse innen algebra. Lærere bør derfor oppfordre elevene til å bruke hjelperepresentasjoner i form av tegning eller annen visualisering slik at det blir lettere for dem å tolke og å forstå oppgaveteksten samt se mønster og sammenhenger i oppgaven. Ifølge Klaveness et. al. vil elevene gjennom en slik visualisering av oppgaven med egne tegninger kunne danne seg et mentalt forestillingsbilde, som er en forutsetning for matematisk tankegang. I tillegg vil det kunne gi innsyn i elevenes matematiske forståelse (Klaveness et. al., 2019, s. 190). Jeg skal diskutere bruk av visualisering og andre strategier i delkapitlet 5.4.

5.3 Tolkning av oppgavetekst og leseforståelse

Funn viser at det er en sammenheng mellom leseforståelse og hvordan oppgaven blir tolket og deretter løst. Altså at det er sammenheng mellom leseforståelse og bruken av representasjoner i oppgaveløsningen. Analysen av datamateriale i min studie viser til et felles mønster hos elevene som satte opp feil likning. Det var disse elevene som tolket oppgaveteksten feil. Dette medførte at de hadde problemer med overgangen fra naturlig språk i oppgaveteksten til symbolspråk i likningen.

Nortvedt har sett på sammenhengen mellom leseforståelse og løsning av tekstoppgaver. I slike oppgaver må eleven ut fra teksten finne ut hvordan oppgaven skal løses. Hun viser til at enkelte elever ikke får til tekstoppgaver fordi de tolker språket i teksten feil og oppfatter ikke hva oppgaven går ut på (Nortvedt, 2015). Dette har jeg også funnet i min studie i løsninger til oppgavene «Penger», «Stigen» og «Pommes frites med remulade» der enkelte elever tolket språket i oppgaven feil.

Det matematiske språket i tekstoppgaver har sin egen terminologi og det kan brukes uttrykk som kan tolkes ulikt avhengig av konteksten. Det er også slik Pind sier, at «*i tekstoppgaver er matematikk innlemmet i oppgaveteksten*» og det krever en viss matematikkompetanse for å løse en tekstoppgave (Pind, 2011, s. 32). Analyse av datamateriale i min studie viser at det var mistolkning av uttrykket «mer enn» i oppgaveteksten som førte til feil løsning av oppgavene «Penger» og «Pommes frites med remulade». Bruk av uttrykket «mer enn» omtales av både Nortvedt og Koedinger og Nathan. Nordtvedt sier at nøkkelord som «mer enn» i oppgavetekster kan tolkes på forskjellige måter og kan referere enten til en handling, altså hvilken operasjon som skal gjennomføres, eller til relasjoner mellom mengder og personer (Nortvedt, 2015). Koedinger og Nathan omtaler slike uttrykk for inkonsistent språk som kan skape vansker i løsningsfasen når de misforstås (Koedinger & Nathan, 2004 s. 132). Inkonsistent språk kan også sammenliknes med ikke-kongruente overganger i Duval sin forskning. Altså at det ikke er en-til-en forhold mellom naturlig språk og de andre representasjonene språket skal konverteres til (Duval, 2006, s. 122). I min studie tolket noen av elevene nøkkelordet «mer enn» som et opperasjonsord og ikke som en relasjon mellom mengder. Dette førte til at noen elever satte opp feil matematisk uttrykk for å løse oppgaven. I oppgaven «Penger» har noen brukt multiplikasjon i likningen de satte opp, da de trodde at «mer enn» betyr å multiplisere. Det som var riktig i dette tilfelle var å foreta en addisjon. I oppgaven «Pommes frites med remulade» brukte noen subtraksjon i stedet for å sette opp likning.

Andre funn som har sammenheng med leseforståelse av tekstoppgaver, tyder på at noen elever leste bare tall i oppgaveteksten uten å forstå hele konteksten. Dette ser jeg i oppgaven «Pommes frites med remulade» der noen av elevene trekker ut tallene fra oppgaveteksten og utfører en regneoperasjon samtidig som de ignorer sammenhenger i teksten. Det at elevene ofte bare leser tall i tekstoppgaver er en kjent feil som er omtalt av mange forskere. Nortvedt sier at elevene fokuserer i større grad på at de skal regne, det vil si løse oppgaven, enn på å forstå hva oppgaven handler om (Nortvedt, 2015). Matematikkoppgave på kinesisk, er et kjent eksempel på det. Her vises det til at elevene «løser» oppgaven uten å skjønne språk, kun trekker ut tall fra oppgaveteksten og utfører en regneoperasjon. Botten sier at enkelte elever løser tekstoppgaver der teksten er på norsk på samme måte som de løser den kinesiske oppgaven. Han sier: «*De skummer vekk teksten, finner fram tallene og gjør det de finner mest fornuftig med tallene*» (Botten, 2003, s. 79 - 81). Blum i sin artikkel, viser blant annet til funn fra PISA-undersøkelsen og forskningen til Schoenfeld og Verschaffel der det er empirisk dokumentert at elevene ignorerer sammenhenger, bare trekker ut all data fra teksten og beregner noe i henhold til et kjent skjema (Blum, 2015, s. 78 - 79). Dette mønstre så jeg også hos noen elever når de løste oppgaven «Pommes frites med remulade». Dette var en oppgave som elevene oppfattet som enkel og noen av dem trakk bare ut tallene fra oppgaveteksten og utførte en regneoperasjon uten å se på sammenhenger i teksten.

Koedinger og Nathan vektlegger viktigheten av forståelsesfasen i oppgaveløsningsprosessen for tekstoppgaver. Det er i denne fasen at eleven gjennom lesing av oppgaveteksten danner seg et kognitivt bilde av problemstillingen som kommuniseres ved hjelp representasjoner i løsningsfasen. De viser til at feil i løsningsfasen ofte kan forklares med feil i forståelsesfasen (Koedinger & Nathan, 2004 s. 132). Dette kunne jeg finne igjen i analysen av elevenes besvarelser i min studie, som i den nevnte oppgaven «Pommes frites med remulade». Der kan jeg tydelig se at feil forståelse av oppgaveteksten forårsaket feil i løsningsfasen.

Funn fra min studie viser at det er en sammenheng mellom leseforståelse og hvordan oppgaven blir tolket og hvilke representasjoner eleven velger i sin løsning. Ifølge Nordbakke er det avgjørende for forståelsen av en tekstoppgave at eleven behersker det matematiske språket, fordi det er kun på denne måten det kan skapes mentale representasjoner av det oppgaveteksten beskriver (Nordbakke, 2014, s. 99). Nortvedt understreker viktigheten av leseforståelse i matematikk og anbefaler at det øves med lesing i matematikk. Å arbeide med lesestrategier kan hjelpe eleven med å forstå teksten bedre. Elevene i min studie hadde blant annet problemer med tolkning av nøkkelordet «mer enn». Nortvedt trekker fram lesestrategien «å lete etter nøkkelord i teksten» (Nortvedt, 2015). Hun mener at det kan være lurt å arbeide med hvordan nøkkelord brukes i matematiske tekster. Denne strategien går ut på at elevene i forbindelse med oppgaveløsning leter bevist etter nøkkelordene. Eleven skal reflektere over om nøkkelordet refererer til løsningsmetode eller om det refererer til relasjonen mellom personer og mengder (Nortvedt, 2015). Læreren bør legge til rette for undervisning med oppgaver som inneholder nøkkelord, slik at elevene får øvet på bruken av slike ord og på denne måten får bedre leseforståelse. Læreren bør også velge tekstoppgaver med ikke-kongruente overganger mellom startrepresentasjon, altså oppgaveteksten, og sluttrepresentasjon som kan være en likning. Altså oppgaver som er utformet på den måten at eleven ikke bare kan utføre en direkte oversettelse for å kunne løse oppgaven. På denne måten vil elevene venne seg til at de må lese teksten nøye, se på sammenhenger og ikke bare trekke ut tall fra oppgaven.

Ellers vil jeg i denne sammenheng også nevne læreplanen i matematikk LK20 som peker på viktigheten av leseferdigheter som en av de grunnleggende ferdigheter i matematikk. Det å kunne lese matematikk er å kunne skape mening i tekster samt å kunne finne og sortere informasjonen, analysere og vurdere innhold. Videre å kunne bruke informasjon i tekster med avansert symbolspråk og begrepsbruk (Utdanningsdirektoratet, 2020b). Disse ferdighetene er sentrale for forståelsen av en tekstoppgave. Utvikling av faglig kompetanse i matematikk skal skje i samspill med utviklingen av leseferdigheter i faget (Utdanningsdirektoratet, 2020e). Læreren bør derfor ifølge læreplanen legge til rette undervisningen i matematikk slik at eleven får utvikle sine leseferdigheter.

5.4 Visualisering og bruk av andre løsningsstrategier

Funn fra analysen viser at de elevene som brukte hjelperepresentasjoner eller løsningsstrategier var de som klarte å løse oppgavene riktig.

Analysen av datamateriale viser at i oppgaven «Stigen» har to elever tatt i bruk visualisering ved hjelp av tegning og i oppgaven «Mor og sønn» har to elever systematisert informasjon i oppgaveteksten ved bruk av tabell. Elevene brukte tabell for å prøve seg fram med ulike verdier. Tabellen ble også brukt slik at de på en oversiktlig måte kunne systematisere og visualisere hvordan alderen øker for hvert år. Det ser ut som at valget av «prøve og feile» strategi gjorde at de tok i bruk tabell som representasjon. Fordelen med tabell som en representasjon i denne oppgaven var at den hjalp elevene til å sette opp tall på en ordnet og systematisk måte. Samtidig kunne også informasjonen bevares slik at de kunne sammenligne tall på en oversiktlig måte.

Tegninger ble brukt for å visualisere problemstillingen i oppgaveteksten. Disse tegningene lignet på det som kan kategoriseres som blokktegning, da tegningene besto av blokker som var inndelt i mindre deler. Klaveness et. al. sier at ved hjelp av slike tegninger kan problemer visualiseres, slik at det blir lettere å se hvordan oppgaven skal løses (Klaveness et. al., 2019, s. 192). De to elevene som brukte tegning fikk til oppgaven, noe som tilsier at det også ville vært nyttig for andre elever.

Duval peker også på viktigheten av visualisering for forståelsen av matematikk (Duval, 1999, s. 3). Både tabeller og tegninger er representasjoner som befinner seg i Duvals ikke-diskursive register. Duval mener at elevene i løsningen av tekstoppgaver bør benytte seg av representasjoner i dette registret og bruke det som hjelperepresentasjoner i forbindelse med overganger fra oppgavetekst til andre representasjoner (Duval, 2017, s. 90). Selv om både tabell og tegning hadde egenskaper av hjelperepresentasjoner så kan jeg se at de ble brukt på forskjellige måter i oppgaveløsningsprosessen til elevene. Tabell ble brukt som hjelp i beregningen, mens tegning ble bruk som hjelp til å forstå problemstillingen i oppgaveteksten. Bruk av tabeller og tegninger som hjelperepresentasjon viste seg å være til hjelp, da elevene som brukte dette fikk til oppgavene. Det viste seg også at bruk av tabeller i kombinasjon med «prøve og feile» strategi var et godt valg, da elevene kunne prøve seg fram med ulike verdier på en oversiktlig og systematisk måte. Klaveness et. al. sier at tabeller kan være en måte å systematisere informasjon på og en måte å systematisere en «prøve og feile» strategi på (Klaveness et. al., 2019, s. 194). «Sett inn i en tabell» er også en problemløsningsstrategi (Klaveness et. al., 2019, s. 188).

Selv om både tabell og tegning viste seg å være til hjelp i oppgaveløsningen, mener jeg at det var få elever i min studie som benyttet seg av slike representasjoner. Oppgavene jeg valgte til forsøket var problemløsningsoppgaver tilpasset 10. trinn. Dette var oppgaver som skulle innby til å bruke forskjellige representasjoner og særlig til visualisering. Det ble samtidig brukt lite visualisering i oppgaveløsningene. I land der problemløsning har større plass i undervisningen, for eksempel Singapore, er visualisering viktig i forbindelse med oppgaveløsning. Så langt det er mulig skal elevene tegne, lage diagram og tabeller eller visualisere ved hjelp av blokktegninger (Klaveness et. al., 2019, s. 192). Singapore oppnår generelt gode resultater på internasjonale tester som PISA og TIMMS (Kongelf, 2019, s. 14). Jeg mener at visualisering bør få større plass i undervisningen, da visualisering er viktig for forståelsen av matematikk. Lærer bør derfor legge til rette med oppgaver som innbyr til bruk av visualisering og i tillegg oppfordre elevene til å gjøre det, for eksempel slik Klaveness et. al. foreslår å bruke oppgaver der tegning er til hjelp for å finne løsning eller der tegning er avgjørende for å finne svaret (Klaveness et. al., 2019, s. 190). Elevene i min studie kjente ikke til «blokktegning» metoden. Singapore har gode erfaringer med bruken av denne metoden. Jeg antar derfor at det ville vært nyttig at elevene hadde lært denne metoden slik at det kunne hjelpe dem med visualisering av oppgaven, og dermed bidra også til bedre oppgaveforståelse.

«Prøve og feile» strategien ble brukt i løsningen av tre oppgaver. I tillegg til «Mor og sønn» oppgaven, ble også strategien brukt i løsningen av oppgaven «Riktige svar». I begge oppgavene var det tre elever som benyttet strategien. Det var også en av elevene som benyttet denne strategien i oppgaven «Stigen». Eleven prøvde seg først med likning i denne oppgaven uten å lykkes med løsningen. Han fikk til slutt riktig svar ved å bruke «prøve og feile» strategi. I løsningen av de nevnte oppgavene ble denne strategien brukt både i kombinasjon med tabell og uten. Samtlige elever som brukte denne strategien, løste oppgavene riktig. For å lykkes med denne strategien kreves det at elevene utfører en kvalifisert gjetting før de utfører beregningene. Gjettingen må ofte justeres i flere runder, deretter skal det sjekkes om det ønskede resultatet er oppnådd (Klaveness et. al., 2019, s. 188). For å kunne utføre kvalifisert gjetting kreves det derfor at elevene har forstått oppgaveteksten, altså at elevene vet hva oppgaven går ut på og hva de skal gjette på. Jeg kunne observere i min studie at elevene prøvde seg fram med realistiske tall og klarte å komme fram til riktig svar. Metoden var litt tidskrevende, men var et godt alternativ til algebra.

I oppgaven «Penger» benyttet to elever strategien «å tenke baklengs». De andre elevene som ikke benyttet denne strategien, brukte likning. Denne strategien er ofte et godt alternativ for de som ikke klarer å sette opp en likning og løse den (Klaveness et. al., 2019, s. 200), og dette kunne jeg observere i mitt forsøk. De elevene som valgte denne strategien, løste oppgaven riktig. Samtidig var det kun en av dem som satte opp likning som klarte å løse oppgaven.

Funn fra mitt forsøk viser at de elevene som brukte hjelperepresentasjoner eller løsningsstrategier klarte å løse oppgavene riktig. Det å legge mer vekt i undervisningen på bruken av hjelperepresentasjoner og løsningsstrategier kan hjelpe elevene å mestre tekstoppgaver. For at elevene skal kunne lære de forskjellige løsningsstrategiene bør læreren velge oppgaver i undervisningen som kan løses ved bruk av disse løsningsstrategiene (Klaveness et. al., 2019, s. 184). Elevene bør derfor jobbe mer med problemløsningsoppgaver. Problemløsningsoppgaver som innbyr til utforskning og visualisering kan bidra til at elevene over tid kan utvikle forståelse av innhold og sammenhenger i matematikk. Utforskning og problemløsning er et av kjerneelementene i den nye læreplanen LK20. I land som gjør det godt i matematikk og scorer høyt på de internasjonale testene PISA og TIMMS, for eksempel Singapore, blir problemløsning betraktet som kjernen i matematikkfaget (Kongelf, 2019, s. 14).

5.5 Elevers bruk av naturlig språk som representasjon

Funn fra analysen viser at mange elever benyttet naturlig skriftlig språk som representasjon i oppgaveløsningen når de beskrev hvordan de tenkte og resonnerte. Elevene laget forklarende tekster om hvordan de tolket oppgaven eller hvordan de skulle gå fram for å løse oppgaven. Tekstene elevene skrev besto ofte av en blanding av både ord, bokstaver og tall. De brukte også korte beskrivelser underveis i løsningen, ofte i tilknytning til symboler, og noen avsluttet oppgaven med tekst. Ifølge Duval har språket i det multifunksjonelle registret en viktig rolle, der det brukes til kommunikasjon, formulering av resonnementer og gir forklaringer til behandlinger i det monofunksjonelle registret (Duval, 2017. s. 84 & s. 90). I oppgaven «Riktige svar» startet samtlige elever med å forklare oppgaveteksten med egne ord som en første representasjon. Det hjalp dem til å samle tankene og å få oversikt over hva som skal gjøres i oppgaven. Slike forklarende tekster har også «avslørt» misforståelser i enkelte elevers tolkning av oppgaveteksten. I forklaringen til en av elevene i oppgaven «Pommes frites med remulade» gikk det tydelig fram av at hun leste bare tall i oppgaveteksten.

Når vi vet hvor vanskelig det er for enkelte elever å forstå oppgaveteksten kan det å bruke verbal representasjon i form av en skriftlig forklaring være nyttig for forståelsen av teksten i oppgaven. Det kan også være oppklarende for eleven å bruke sitt eget språk før de setter i gang med utregningene (Nordbakke, 2014, s. 96). Knudtzon sier at fordelen med den type representasjon er at det hjelper eleven å ordne tankene og er den representasjonen alle elever kan begynne med. Slike egne tekster kan senere oversettes til symbolspråk (Knudtzon, 2019, s. 153). Dette gjorde en av elevene i oppgaven «Mor og sønn» der hun byttet ut ord i sin forklarende tekst med matematiske symboler. Hun klarte å løse oppgaven på den måten. Da bruk av egne forklarende tekster er en representasjon alle elever kan begynne med, bør læreren oppfordre elevene til å starte oppgaveløsningen med en beskrivelse med egne ord om hvordan de tenker. Dette vil sette i gang en tankeprosess rundt problemstillingen i oppgaven, og på den måten kan dette hjelpe elevene å forstå hva oppgaven går ut på. Læreplanen LK20 sier at «*å kunne skrive i matematikk er et redskap for å utvikle egne tanker og egen læring*» (Utdanningsdirektoratet, 2020b). Ellers skal utvikling av representasjonskompetanse skje i samspill med utviklingen av skriveferdigheter, da det «å *kunne skrive i matematikk innebærer å beskrive og forklare sammenhenger, oppdagelser og ideer ved hjelp av hensiktsmessige representasjoner*» (Utdanningsdirektoratet, 2020b).

6 Avslutning

I denne studien ønsket jeg å få svar på spørsmålet: Hvordan bruker elevene på 10. trinn forskjellige representasjoner og gjennomfører overganger i arbeid med tekstoppgaver?

For å kunne svare på forskningsspørsmålet har jeg basert min studie på kvalitative forskningsmetoder. Data ble samlet inn gjennom en deltakende observasjon og samtaler med elever i en 10. klasse. Datamateriale består av elevenes besvarelser, lydopptak av samtaler med elevene og feltnotater. Lydopptaket ble transkribert. Under analysen ble alt datamateriale gjennomgått og tolket i lys av teori.

6.1 Konklusjon

Funn i min studie viser at det er en sammenheng mellom leseforståelse og hvordan elevene bruker representasjoner i løsningen av tekstoppgaver.

Analysen av datamateriale viser at de elevene som tolket oppgaveteksten feil var også de som ikke lyktes med oppgaven. Dette kom til syne ved at enkelte elever på bakgrunn av sin tolkning satte opp en feil fremgangsmåte for løsning av oppgaven. Altså at de gjennom representasjonene de brukte kommuniserte sin misoppfatning av oppgaveteksten.

Ut fra analysen av datamateriale kunne jeg se at enkelte elever ikke klarte å oversette fra tekst i oppgaven til en likning når det ikke er kongruent overgang mellom oppgaveteksten og likning. Funn viser at det var særlig nøkkelord i oppgaveteksten som «mer enn» som enkelte elever tolket feil og at enkelte elever leste bare tall i oppgaveteksten. Dette førte til at disse elevene satte opp feil matematisk uttrykk for å løse oppgaven.

Disse funnene viser at leseforståelse i matematikk er sentral ved løsningen av tekstoppgaver. Dette understrekker at det er viktig å jobbe med grunnleggende leseferdigheter i matematikk for at elever skal lykkes med tekstoppgaver.

Studien viser også at visualisering eller bruk av løsningsstrategier hjelper eleven med både forståelse og løsning av tekstoppgaven. De elevene i min studie som brukte tegning, tabeller og andre løsningsstrategier var blant de som klarte å løse oppgavene riktig. Samtidig var det de elevene som valgte å sette opp likning som oftest ikke fikk til oppgaven. Det å lære å bruke visualisering eller andre strategier for problemløsning kan være til hjelp for elevene til å velge riktig representasjon for å kunne løse tekstoppgaver. Læreren bør derfor velge oppgaver der det er hensiktsmessig å bruke visualisering eller andre løsningsstrategier. For å forstå oppgaveteksten bør læreren også oppfordre eleven til å bruke visualisering istedenfor å gå rett på likning. Det å lære seg å bruke representasjoner som visualiserer problemløsningen i oppgaveteksten og veksle mellom ulike representasjoner vil kunne bidra til å styrke elevens representasjonskompetanse. Det i sin tur vil bidra til styrking av matematisk kompetanse, da det å kunne bruke ulike representasjoner er en viktig del av denne kompetansen.

6.2 Metodiske begrensninger

Som en metodisk begrensning vil jeg trekke fram forhold rundt konteksten som forsøket ble gjennomført under. Forsøket foregikk på et lite grupperom der elevene satt forholdvis tett. En del av førsøket var at elevene skulle forklare hvordan de tenkte når de løste tekstoppgaver. På grunn av de satt forholdsvis tett valgte jeg å ta gjennomgangen av oppgaveløsningen på slutten av forsøket. Dette for at elevene ikke skulle bli påvirket av hverandre under oppgaveløsningen. For å få mest mulig nøyaktig opplysninger om hvordan elevene hadde tenkt ville det optimale vært at forklaringene ble gitt mens de løste oppgavene og ikke etter at de ble ferdig med oppgavene. Dette kan utgjøre en svakhet i min undesøkelse og som samtidig kan svekke reliabiliteten.

En annen begrensning er at datamateriale som jeg samlet inn representerer kun besvarelser til de fem informantene som deltok i forsøket. Selv om jeg analyserte i dybden funn i datamateriale er det vanskelig å si om de resultatene jeg fikk er gyldige for andre enn de som deltok i forsøket. Forskning på andre elever kunne ha gitt andre svar. Det er derfor vanskelig å generalisere mine resultater og dette svekker den ytre validiteten av min studie.

6.3 For videre forskning

Gjennom min studie har jeg fått innblikk i hvor viktig leseforståelsen er i forbindelse med løsning av tekstoppgaver i matematikk og valg av passende representasjoner. Som fremtidig lærer ville det derfor være interessant for meg å forske videre på hvordan jeg kan hjelpe elevene til å utvikle denne ferdigheten.

Litteraturliste

Blum, W. (2015). Quality Teaching of Mathematical Modelling: What Do We Know, What Can We Do? *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education*. (s.73 – 96). https://www.researchgate.net/publication/299822354_Quality_Teaching_of_Mathematical_Modelling_What_Do_We_Know_What_Can_We_Do

Botten, G. (2003). *Meningsfylt matematikk – Nærhet og Engasjement i Læringen.* (2. utg). Caspar Forlag.

Christoffersen, L. & Johannessen, A. (2018). *Forskningsmetode for Lærerutdanningene.* (utg. 2). Abstrakt forlag.

Duval, R (1999). *Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking. Basic Issues for Learning.* https://eric.ed.gov/?id=ED466379

Duval, R (2006). A cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*, 103-131. https://link.springer.com/article/10.1007/s10649-006-0400-z

Duval, R. (2017). *Understanding the Mathematical Way of Thinking – The Registers of Semiotic Representations.* Springer.

Forskningsetikkloven. (2017). *Lov om organisering av forskningsetisk arbeid.* (LOV-2006-06-30-56). Lovdata. https://lovdata.no/dokument/NL/lov/2017-04-28-23

Hana, G. M. (2014). *Matematiske Tenkemåter.* Caspar forlag.

Høgheim, S. (2020). *Masteroppgaven i GLU.* Fagbokforlaget.

Knudtzon, S. H. (2019). Elever representerer sine matematiske ideer når frosker hopper. I Klaveness, E. (Red.), *101 grep for å aktivisere elever i matematikk – matematikkdidaktikk i teori og praksis.* (s. 133-158). Fagbokforlaget

Koedinger, K. R. & Nathan, M. J. (2004). The real story behind story problems: Effects of representations on quantitative reasoning. *The Journal of the Learning Sciences*, 13(2), 129-164. https://www.researchgate.net/publication/251283611_The_Real_Story_Behind_Story_Problems_Effects_of_Representations_on_Quantitative_Reasoning

Kongelf, T. R. (2019). *Matematisk innhold og matematiske metoder i lærebøker brukt på ungdomstrinnet i Norge: Gullgruve eller fallgruve for utvikling av matematisk kompetanse i problemløsning og algebra?.* [Doktorgradsavhandling]. Universitetet i Agder.

Klaveness, E. (Red.)., Karlsen, L & Kverndokken, K. (2019). *101 grep for å aktivisere elever i matematikk – matematikkdidaktikk i teori og praksis.* (utg. 1) Fagbokforlaget.

Lesh, R., Landau, M. & Hamilton, E. (1983). Conceptual Models and Applied Mathematical Problem-Solving Research. I Lash, R. & Landau, M., *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*. (s. 264-343). Academic Press.

Lesh, R., Post, T. & Behr, M. (1987). Representations and Translations among Representations in Mathematics Learning and Problem Solving. *Problems of Representations in the Teaching and Learning of Mathematics.* 33-40

Matematikk.org. (u.å.a). *Tekstnøtt: Mor og sønn.* Hentet 1. november 2021 fra. https://www.matematikk.org/tekstnott.html?tid=105041

Matematikk.org. (u.å.c). *Tekstnøtt: Penger.* Hentet 1. november 2021 fra. https://www.matematikk.org/tekstnott.html?tid=105044

Matematikk.org. (u.å.e). *Tekstnøtt: Pommes frites med remulade*. Hentet 1. november 2021 fra. https://www.matematikk.org/tekstnott.html?tid=105096

Matematikk.org. (u.å.b). *Tekstnøtt: Riktige svar.* Hentet 1. november 2021 fra. https://www.matematikk.org/tekstnott.html?tid=189974

Matematikk.org. (u.å.d). *Tekstnøtt: Stigen.* Hentet 1.november 2021 fra. https://www.matematikk.org/tekstnott.html?tid=105098

NESH. (2021, 16. desember). *Forskningsetiske retningslinjer for samfunnsvitenskap og humaniora.* De nasjonale forskningsetiske komiteene. https://www.forskningsetikk.no/retningslinjer/hum-sam/forskningsetiske-retningslinjer-for-samfunnsvitenskap-humaniora-juss-og-teologi/

Niss, M. & Jensen, T.H. (2002). *Kompetencer og matematiklæring.* Ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark. Uddannelsesstyrelsens temahæfteserie nr. 18 – 2002.

Nordbakke, M. (2014). Grunnleggende ferdigheter i matematikk. I K. Skovholt (Red.), *Innføring i grunnleggende ferdigheter : praktisk arbeid på fagenes premisser* (s. 88-125). Cappelen Damm akademisk.

Nortvedt, G. A. (2015, 6. Juli). *Leseforståelse og matematikk*. Utdanningsforskning.no. https://utdanningsforskning.no/artikler/2013/leseforstaelse-og-matematikk/

Pind, P. (2011). *Håndbok i matematikkundervisning.* (1. utg.). Cappelen Damm AS.

Realfagsløyper. (2018) *Representasjoner i matematikk.* Realfagsloyper.no https://realfagsloyper.no/sites/default/files/2018-12/Hva%20er%20representasjoner%20i%20matematikk%2018.11.29_0.pdf

Regjeringen.no. (2018a, 26. juni). *Fornyer innholdet i skolen.* https://www.regjeringen.no/no/dokumentarkiv/regjeringen-solberg/aktuelt-regjeringen-solberg/kd/pressemeldinger/2018/fornyer-innholdet-i-skolen/id2606028/?expand=factbox2606064

Regjeringen.no. (2018b, 26. juni). *Kjerneelementer i fag*. Hentet fra. https://www.regjeringen.no/contentassets/3d659278ae55449f9d8373fff5de4f65/kjerneelementer-i-fag-for-utforming-av-lareplaner-for-fag-i-lk20-og-lk20s-fastsatt-av-kd.pdf

Utdanningsdirektoratet. (2020a). *Fagrelevans og sentrale verdiar (MAT01-05).* Fastsatt som forskrift. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020. https://www.udir.no/lk20/mat01-05/om-faget/fagets-relevans-og-verdier

Utdanningsdirektoratet. (2020b). *Grunnleggende ferdigheter (MAT01-05).* Fastsatt som forskrift. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020. https://www.udir.no/lk20/mat01-05/om-faget/grunnleggende-ferdigheter?lang=nob

Utdanningsdirektoratet. (2019). *Hva er kjerneelementer*. https://www.udir.no/laring-og-trivsel/lareplanverket/stotte/hva-er-kjerneelementer/

Utdanningsdirektoratet. (2020c). *Kjerneelementer.* Fastsatt som forskrift. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020. https://www.udir.no/lk20/mat01-05/om-faget/kjerneelementer?lang=nob

Utdanningsdirektoratet. (2020d). *Overordnet del – Kompetansene i faget.* Fastsatt som forskrift. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020.

https://www.udir.no/lk20/overordnet-del/prinsipper-for-laring-utvikling-og-danning/kompetanse-i-fagene/

Utdanningsdirektoratet. (2020e). *Overordnet del – Grunnleggende ferdigheter.* Fastsatt som forskrift. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020. https://www.udir.no/lk20/overordnet-del/prinsipper-for-laring-utvikling-og-danning/grunnleggende-ferdigheter/?kode=mat01-05&lang=nob

Vedlegg 1: Samtykkeskjema

Vil du at ditt barn deltar i forskningsprosjektet

"Bruk av matematiske representasjoner i arbeid med tekstoppgaver"

Dette er et spørsmål til deg om ditt barn kan delta i et forskningsprosjekt hvor formålet med studie er å se på hvordan elever bruker forskjellige representasjoner i arbeid med tekstoppgaver i matematikk.

I dette skrivet gir vi deg informasjon om målene for prosjektet og hva deltakelse vil innebære for deg.

Formål

Formålet med prosjektet er en kvalitativ studie av elevers forståelse av tekstoppgaver. Dette skal gjøres ved observasjon og analyse av bruken av forskjellige representasjoner i forbindelse med oppgaveløsingen. Studie skal gjennomføres som en egen undervisningssøkt på ca. 1 time.

Dette studiet gjennomføres for å samle inn datamateriale for min masteroppgave i matematikk ved Universitetet Sørøst – Norge.

Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?

Universitetet Sørøst – Norge er ansvarlig for prosjektet.

Hvorfor får du spørsmål om å delta?

Du blir spurt om ditt barn kan delta fordi matematikklærer har sagt seg villig til å la meg komme i matematikktimene å låne noen elever i forbindelse med min masteroppgave.

Hva innebærer det for deg å delta?

Når elevene deltar i prosjektarbeidet betyr det at de skal arbeide i en gruppe på 4 elever og løse matematikkoppgaver. Oppgavene elevene skal arbeide med er innenfor tema de har lært tidligere. Det vil bli gjort lydopptak av elevene, samt tatt bilde av oppgaveløsningene. Jeg skal være til stede under elevenes arbeid, og jeg kommer til å gå rundt å observere elevene og ta notater av hva de diskuterer om oppgavene.

Det er frivillig å delta

Det er frivillig å delta i prosjektet. Hvis ditt barn velger å delta, kan du når som helst trekke samtykket tilbake uten å oppgi noen grunn. Alle dine personopplysninger vil da bli slettet. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for ditt barn hvis du ikke vil delta eller senere velger å trekke deg. Det vil heller ikke påvirke ditt barns forhold til skolen om du velger å trekke deg.

Ditt personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker dine opplysninger

Vi vil bare bruke opplysningene om deg til formålene vi har fortalt om i dette skrivet. Vi behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket. Data som publiseres i masteroppgaven vil være anonymisert og vil ikke kunne knyttes til enkeltdeltagere.

Hva skjer med opplysningene dine når vi avslutter forskningsprosjektet?

Lydopptakene vil bli slettet når prosjektet er avsluttet, noe som etter planen er i juni 2022.

Dine rettigheter

Så lenge du kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:

- innsyn i hvilke personopplysninger som er registrert om deg, og å få utlevert en kopi av opplysningene,
- å få rettet personopplysninger om deg,
- å få slettet personopplysninger om deg, og
- å sende klage til Datatilsynet om behandlingen av dine personopplysninger.

Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om deg?

Vi behandler opplysninger om deg basert på ditt samtykke.

På oppdrag fra Universitetet Sørøst – Norge har NSD – Norsk senter for forskningsdata AS vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Hvor kan jeg finne ut mer?

Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:

- Masterstudent eller veilederne

Vårt personvernombud:

Hvis du har spørsmål knyttet til NSD sin vurdering av prosjektet, kan du ta kontakt med:

- NSD – Norsk senter for forskningsdata AS på epost (personverntjenester@nsd.no) eller på telefon: 55 58 21 17.

Med vennlig hilsen

Prosjektansvarlig *Student*

Samtykkeerklæring

Jeg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet «Bruk av matematiske representasjoner i arbeid med tekstoppgaver», og har fått anledning til å stille spørsmål. Jeg samtykker til:

☐ At mitt barn deltar i aktiviteter knyttet til studiet

Navn på elev

Jeg samtykker til at mine opplysninger behandles frem til prosjektet er avsluttet

----

(Foreldres/foresattes signatur, dato)

Vedlegg 2: Godkjenning fra NSD

Meldeskjema / Masteroppgave / Vurdering

Vurdering

Referansenummer
683847

Prosjekttittel
Masteroppgave

Behandlingsansvarlig institusjon
Universitetet i Sørøst-Norge / Fakultet for humaniora, idrett- og utdanningsvitenskap / Institutt for matematikk og naturfag

Prosjektperiode
11.10.2021 - 30.06.2022

Meldeskjema

Dato	**Type**
05.10.2021	Standard

Kommentar
Det er vår vurdering at behandlingen av personopplysninger i prosjektet vil være i samsvar med personvernlovgivningen så fremt den gjennomføres i tråd med det som er dokumentert i meldeskjemaet den 05.10.2021 med vedlegg. Behandlingen kan starte.

TYPE OPPLYSNINGER OG VARIGHET
Prosjektet vil behandle alminnelige kategorier av personopplysninger frem til 30.06.2022.

LOVLIG GRUNNLAG
Prosjektet vil innhente samtykke fra foresatte til behandlingen av personopplysninger om elevene. Vår vurdering er at prosjektet legger opp til et samtykke i samsvar med kravene i art. 4 og 7, ved at det er en frivillig, spesifikk, informert og utvetydig bekreftelse som kan dokumenteres, og som foresatte kan trekke tilbake.

Lovlig grunnlag for behandlingen vil dermed være foresattes samtykke, jf. personvernforordningen art. 6 nr. 1 bokstav a.

PERSONVERNPRINSIPPER
NSD vurderer at den planlagte behandlingen av personopplysninger vil følge prinsippene i personvernforordningen om:

- lovlighet, rettferdighet og åpenhet (art. 5.1 a), ved at foresatte får tilfredsstillende informasjon om og samtykker til behandlingen
- formålsbegrensning (art. 5.1 b), ved at personopplysninger samles inn for spesifikke, uttrykkelig angitte og berettigede formål, og ikke viderebehandles til nye uforenlige formål
- dataminimering (art. 5.1 c), ved at det kun behandles opplysninger som er adekvate, relevante og nødvendige for formålet med prosjektet
- lagringsbegrensning (art. 5.1 e), ved at personopplysningene ikke lagres lengre enn nødvendig for å oppfylle formålet

DE REGISTRERTES RETTIGHETER
NSD vurderer at informasjonen om behandlingen som de registrerte og deres foresatte vil motta oppfyller lovens krav til form og innhold, jf. art. 12.1 og art. 13.

Så lenge de registrerte kan identifiseres i datamaterialet vil de ha følgende rettigheter: innsyn (art. 15), retting (art. 16), sletting (art. 17), begrensning (art. 18) og dataportabilitet (art. 20).

Vi minner om at hvis en registrert/foresatt tar kontakt om sine/barnets rettigheter, har behandlingsansvarlig institusjon plikt til å svare innen en måned.

FØLG DIN INSTITUSJONS RETNINGSLINJER
NSD legger til grunn at behandlingen oppfyller kravene i personvernforordningen om riktighet (art. 5.1 d), integritet og konfidensialitet (art. 5.1. f) og sikkerhet (art. 32).

For å forsikre dere om at kravene oppfylles, må dere følge interne retningslinjer og eventuelt rådføre dere med behandlingsansvarlig institusjon.

MELD VESENTLIGE ENDRINGER
Dersom det skjer vesentlige endringer i behandlingen av personopplysninger, kan det være nødvendig å melde dette til NSD ved å

Dersom det skjer vesentlige endringer i behandlingen av personopplysninger, kan det være nødvendig å melde dette til NSD ved å oppdatere meldeskjemaet. Før du melder inn en endring, oppfordrer vi deg til å lese om hvilke type endringer det er nødvendig å melde:
https://www.nsd.no/personverntjenester/fylle-ut-meldeskjema-for-personopplysninger/melde-endringer-i-meldeskjema
Du må vente på svar fra NSD før endringen gjennomføres.

OPPFØLGING AV PROSJEKTET
NSD vil følge opp ved planlagt avslutning for å avklare om behandlingen av personopplysningene er avsluttet.

Kontaktperson hos NSD: [redacted]
Lykke til med prosjektet!

Vedlegg 3: Transkripsjon av lydopptak

Opptak 1

Informant E var nødt til å dra tidligere fra forsøket, så jeg spurte kandidaten om å forklare hva han hadde gjort.

Første klipp fra 32:52

Meg: Kan du forklare hvordan du har tenkt når du har løst oppgavene?
E: mhmm. (Viser oppgave 1). Ok. Her tok jeg bare (pause 1 sek) resultat typ, sant. Tok jeg bare 25 for jeg viste….. (klarer ikke helt å forklare)
Meg: Du prøvde og feile?
E: Ja
Meg: Du hadde flaks med at det var det første du tok?
E: Ja. Så jeg tenkte egentlig bare enkelt at det kunne dobles ut.
Meg: mhmm
E: Og, så blir det 12 ehmm 40, 50 pluss 2, så blir det 2 her, det blir 12. Her blir det også 12. 3 pluss 2 er 5 og 1 pluss 1 er 2 (Forstyrrelser i bakgrunnen, får ikke hørt) begge to er 25 og 50.
Meg: Så det du tenkte var at du tok et rundt tall emm det nærmeste runde tallet…..
E: Til at det skulle gå
Meg: Kunne du forklare en gang til?
E: ehh, jeg vist at det ikke skulle være 15. Fordi 15 pluss 15 er 30. Sant? Og 20 minus 40 går ikke (Forstyrrelser i bakgrunnen, får ikke hørt) så jeg går bare nedover et hakk.
Meg: Du gikk nedover?
E: Eller oppover blir det, så jeg ender på 25 og 50

Fra 34:37
E: Viser oppgave 2
Meg: Hvordan gjorde du den?
E: Her tok jeg egentlig bare poengene totalt. Så ¼ (vanskelig å forstå) så 4 ganger 5 blir jo 20. Så han kan løse 100 oppgaver og håpe på å ikke svare feil på 20. Men det hvis du ser vekk i fra sjansen for at han svarer feil.
Meg: På den oppgaven så burde det også vært sagt at hvis personen ikke svarer får han også minus ¼ poeng.
E: Ja.
Meg: Hvor mange riktige må han ha da

E: Hvis han ikke svarer?

Meg: Hvor mye må han ha for å få akkurat 100 poeng hvis han får minus ¼ poeng hvis han ikke svarer og minus ¼ poeng hvis han svarer feil?

E: Da blir det feil da?

Meg: Jeg ser at du har tenkt riktig (ser på arket: 1 riktig = +1, 4 feil = -1, 4 ingen svar = -1). Hvor mange riktige må han da ha for å få 100 poeng? Hvis han da svarer riktig på 100 oppgaver.

E: Åja

Meg: Hvor mange poeng får han da?

E: Det tenkte jeg ikke på, da får han minus 5, ja, men det rekker jeg ikke å gjøre nå.

Meg: Kunne vi se fort på de andre?

Fra 36:50

E: Viser oppgave 3

E: Den rakk jeg ikke å gjøre

Meg: Du prøvde å løse med likning?

E: Ja, jeg fant ikke likning som jeg kunne bruke

Meg: Okey

E: Jeg prøvde og feile

Fra 37:07

E: Viser oppgave 4

E: Her tok jeg også prøving og feiling

Meg: Prøving og feiling?

E: Hvis stigen er i tregangen vil den ikke gå opp.

Meg: Okey

Så jeg tenkte å prøve med på 4, kanskje det er noe der, men jeg tok 1/3 av 4/2 (uklart å høre hva som blir sagt)

Meg: Okey, mhmm

E: Da blir det jo, stigen er 4,5 meter, så da blir en tredel av 4,5 er 1,5.

Meg: Ja

E: Dette her tenkte jeg riktig.

Meg: Du tenkte at dette her blir altså, altså det som mangler da er 1/3

E: Ja

Meg: Ikke 1/3 av 3, men 1/3 av hele stigen?
E: mhmm

Fra 38:03
E: Viser oppgave 5
E: Her er det ikke så vanskelig da, fordi 30 kroner mer enn remuladen
Meg: mhmm
E: Koster remuladen bare 2 kroner koster pommes frites 30 kroner mer, så blir det 32

Opptak 2

Felles gjennomgang med kandidat A, B, C og D.

Elevene diskuterer seg imellom hvordan de har løst oppgavene.

Fra 1:55
Gjennomgang av oppgave 1
D: Det jeg først tenkte var å finne ut hva aldersforskjellene nå er. Og da tok jeg 38 minus 13 og fant 25 og fant ut at det var aldersforskjellen, og da tenkte jeg med en gang at 50 er dobbelt så mye som 25.
Meg: mhmm
D: Så da måtte jeg bare finne ut av hvor mange år det var fra ehh 38 til 50. Som da var 12.
Meg: Er den noen som har regnet det på en annen måte?
C: Jeg gjorde på en måte det sammen, men ikke helt fordi jeg tok 13 ganger 2 som jeg fant ut var 26. Og så prøvde jeg meg egentlig frem med 24 ganger to og de ble 48. Og det var 11 år, så da ble det 49 og da var det bare et tall og da innser jeg at hvis 25 ganger 2 så blir det 50. Så når han er 25 er det halvparten av moren.
Meg: Ja
C: Dette ble veldig rotete
Meg: kan du forklare en gang til?
C: Jeg egentlig bare prøvde meg fram
Meg: mhmm
C: Jeg tok 13 ganger 2, så ble det alt for lite, 24 ganger 2 som ble 48, ehhh (pause 2 sek). Nå føler jeg jeg har gjort feil her. Men jeg har funnet ut at 25 ganger 2 er 50 og han er 25 om 12 år og 38 pluss 12 er 50.

Meg: Ja
C: Så når han er 25 er moren 50, da er han halvparten så gammel. Det var det jeg prøvde å si, jeg bare rota meg bort
A: Jeg gjorde det egentlig ganske likt. Jeg fant først aldersforskjellen i dag, å så prøvde jeg meg bare fram med ulike tall.
Meg: Du satte opp en tabell?
A: Ja. (pause 2 sek) Så fant jeg aldersforskjellen mellom de to.
B: Det jeg gjorde var egentlig motsatt av de andre, jeg prøvde meg fram først og så fant jeg ut aldersforskjellen. Så jeg bare prøvde meg frem med litt tall, og så tenkte jeg Oi kanskje jeg bør sjekke aldersforskjellen å se om det kan hjelpe meg med noe. Og da fant jeg ut at det var 25 år og da måtte jeg bruke det til noe. Så da fant jeg ut av hvor mange år er det til Torkell er 25. Når han er 25 er det 25 år til moren eller (pause 1 sek) så er det 25 års forskjell. Og det blir 25 pluss 25 er 50

Fra 6:09
Gjennomgang av oppgave 2
D: Her tror jeg jeg bomma lit. Jeg tenkte at hvis man da kun kan få et poeng når man har løst en riktig, man får ikke et halvt poeng for eksempel hvis man har svart feil da. Man må ha løst 100 oppgaver riktig for å få 100 poeng, men det gjorde liksom ikke det. Fordi da 20 andre oppgaver er det antall feil (pause 2 sek) ja ehh. Fordi det er minus 0.25 poeng på hver av de man har svart feil eller ikke svart noe og det blir ikke (pause 1 sek) ja nei.
C: Jeg valgte bare å gjette meg fram, men jeg tenkte at antall feil må kunne deles med 4 for å bli et helt tall. Så jeg måtte tenke at det jeg skulle dele på måtte passe i 2 gangen. Så jeg startet med 88 riktige og 32 feil. Emm da blir det 32 delt på 4 som er 8. Og da ble det bare 80 poeng.
Meg: Okey
C: Så da tenkte jeg å øke litt da til 112 pluss 8 feil og da tok jeg 8 delt på 4 som er 2 og da ble det 110 poeng som er for mye. Så tenkte jeg at det måtte være noe mellom der, så bare gjetta jeg med 104 riktige og 16 feil, da tok jeg 16 delt på 4 som er 4 og 104 minus 4 er 100.
Meg: Ja bra. Har dere gjort det på en annen måte (refererer til A og B)
A: Egentlig. Først så tenkte jeg sånn du (D) tenkte, at man bare trenger 100 riktige, men så tenkte jeg at det ikke kan være så enkelt. Det går ikke, så jeg gjorde det samme som (C) og prøvde meg fram og det var litt for mye og det var litt for lite.
B: Det første jeg startet med var å skrive ned sånn at jeg har en oversikt over hvor mange poeng eller hvor mange oppgaver gir så mye poeng. Og så prøvde jeg å finne hvor mange,

vent da, jeg skrev 4 ganger 5. Fire feil det gir minus et poeng så 4 oppgaver ganger 5 så blir det minus 20 poeng, men den strøk jeg ut siden jeg tror det ble feil. Å så tenkte jeg at hvis man får hundre riktig og 20 feil så må man ha 4 oppgaver 5 ganger for å få minus 1 poeng, men det strøk jeg også ut. (Pause 1 sek) Og så prøvde jeg meg litt fram hvor mange feil man må ha, hvor mange poeng blir det trukket fra helheten, siden hvis man svarer feil på for eksempel 5 oppgaver så kan han ikke få riktig på flere (pause 1 sek). Når jeg ser på det skjønner ikke jeg helt hvordan jeg har gjort det selv. Ehhh, hvis han får 20 feil så blir det minus 5 poeng, men det blir ikke 105 riktige så han får minus 5 poeng så det blir 95 poeng. Da prøvde jeg med 8 feil, men det gå 110 poeng. Ehh 10 feil da får man minus 2,5 poeng. Det går ikke siden det ikke blir et helt tall. Og så prøvde jeg meg til 12 feil altså opp med 4 gangen og da ble det minus 3 poeng som gå 105 poeng i helheten, å da prøvde jeg med 16 feil som gå minus 4 poeng som gå 100 riktige.

Fra 12:33

Gjennomgang av oppgave 3:

Meg: Hvordan har du løst den?

D: Jeg har prøvd å løse med likningssett, men der kom jeg (Pause 1 sek) eller det jeg fant ut da var at Per Ivar og Anne Mari til sammen da hadde 66000 (Blir avbrutt av lærer som skal gi en beskjed). Så prøvde jeg da å, siden Per Ivar hadde 24000 mere så var da han 24000x + y = 66000, men så ble det da veldig store tall når jeg prøvde å løse likningsettet, jeg vet ikke hvor stort tall det er, det skal jeg ikke prøve å si. Da prøvde jeg å korte ned, eller fjerne nullene for å få et mindre tall å da kom jeg til kommatall som jeg skjønte var litt feil.

C: Jeg valgte å…. (Avbrutt igjen på grunn av en beskjed)

C: Jeg tenkte at først så tar jeg å trekker 24000 fra 66000 å deler det svare på 2. Å deretter gir jeg Per Ivar de 24000. Så tok jeg 66000 minus 24000 som er 42000. 42000 delt på 2 er 21000, som betyr at Anne Marie har 21000. 21000 + 24000 er 45000 som vil si at Per Ivar har 45000. 45000 pluss 21000 er 66000.

Meg: Hvordan gjorde dere det (A og B)

A: Jeg tenkte egentlig akkurat likt som deg (C), ja det var egentlig helt likt som henne

B: Jeg tror også jeg gjorde det ganske likt jeg bare satt det opp litt annerledes. Fordi jeg satt opp at Anne Marie pluss Per Ivar er 66000 og Anne Marie pluss 24000 er Per Ivar. Så da satte jeg inn med innsetningsmetoden Anne Marie pluss Anne Marie pluss 24000 er 66000.

(Forklarer hele utregningen)

Gjennomgang av oppgave 4

Fra 1:51

D: Ja, her stusset jeg litt først egentlig og så kom jeg på at det er 3 meter pluss 1/3 av stigen så det vil da si at de tre meterne er 2/3 av stigen, så var det bare å dele de på 2 for å finne ut av hva 1/3 er. Og det var 1.5 så 3 meter pluss 1.5 meter er 4.5 meter.

Meg: Du har laget en interessant tegning der også, kan du forklare den?

D: Ehh ja, den tegningen er stigen så var det da tre meter. Det var den pluss den 1/3 delene. Det var bare for å illustrere at de tre meterne er to tredeler. Så bare delte jeg den i to.

C: Jeg tenkte at man skulle ta x som var stigen delt på 3 pluss 3 meter. Emm og du vet ikke, 6 delt på 3 er lik minus 3x, men jeg vet ikke hvor jeg har fått det fra, så tenkte jeg at minus x er lik minus tre pluss 3 så da er lik 6. Det vet jeg ikke var riktig, men jeg prøvde flere ganger og det fungerte ikke.

A: Jeg tenkte eller jeg tok liksom at den var 3 meter pluss 1/3. Ehhh så da tenkte jeg at det var, det måtte være 3 meter pluss ett eller annet. Ehh og da (pause 2 sek) prøvde jeg å tegne liksom (pause 2 sek) prøvde å tegne en liten tegning her hvor man liksom ser at det er stigen pluss det måtte være 1/3. Så jeg kom fram til at det var 3 pluss 1.5 så det blir 5,5 nei 4,5.

B: Jeg som er så glad i ligninger så løste jeg den på en ligning. Ehhh å da satte jeg at stigen er tre meter pluss 1/3 av stigen. Men jeg liker ikke å regne med tredjedeler så jeg bare tok hele ligningen å gjorde den tre ganger så stor. Så blir det tre stiger er 9 meter pluss en stige. Så det blir da 2 stiger er 9 meter og 1 stige er 4,5 meter. Og 4.5 (pause 1 sek) delt på 3 er 1.5 meter altså 1/3 av hele stigen altså 1.5. Så 3 meter pluss 1.5 er 4.5.

Gjennomgang av oppgave 5:

Fra 5.55

D: Ja her var det da så enkelt at emm (pause 1 sek) når Morten kjøpte pommes frittes og remuladen så var det til sammen 34 kroner også sett bare pommes frittes kostet 30 kroner mer enn remuladen. Så var det da at P pluss R er 34 kroner og P er lik 30 kroner mer enn R. Så da var det 34 minus 30 som er lik 4. Så er remuladen 4 kroner.

C: Jeg tenkte smart, men dumt, men smart. Fordi jeg feilleste oppgaven så jeg bare startet. Her er det bare å bruke de kjente summene her, i dette tilfellet totalpris og pommes frites prisen, så jeg vet at selve pommes frites prisen koster 30 kroner med eller uten remuladen. Emm så jeg tok jo da 34 minus 30 som er 4 kroner, så tenkte jeg remuladen koster 4 kroner. Og så ser jeg at jeg feilleste og da måtte jeg gjøre hele oppgaven på nytt. Da tok jeg at det er 30 mer enn remuladen og 34 til sammen. Så tok jeg en tenkepause å innså at det var riktig

allikevel.
B: Er det bare jeg som har tenkt annerledes?
C: (Spør A) Endte du også opp på 4?
A: Jeg endte også opp på 4. Men jeg føler at den er litt for lett til at det skal bli 4 kroner.
B: Jeg brukte likning igjen. At pommes frites pluss remulade er 34 kroner. Remulade pluss 30 er pommes frites. Så remulade pluss remulade pluss 30 som er pommes frites blir 34. 2 remulader pluss 30 blir 34. 2 remulader er 4 en remulade er 2.
D: Hvor blir det av de siste 2 kronene da?
B: Nei se. Fordi pommes frites er 30 kroner mer enn remuladen. Altså remuladen pluss 30 de skal altså være en sum. Pommes frites skal være 30 kroner mer enn remuladen, men den skal fortsatt ha verdien til remuladen.

Det ble knapt med tid på slutten, så de siste oppgavene måtte bli gjennomgått fort.