Universitetet i Sørøst-Norge
Fakultet for humaniora, idretts- og utdanningsvitenskap
–

Mastergradsavhandling
Studieprogram: masterprogrammet i grunnskolelærerutdanningen trinn 1-7
Vår 2022

Ulrikke Nesheim Heldal

Hvordan blir matematikk kommunisert i arbeidet med rike oppgaver i små grupper?

En kvalitativ studie av elevers kommunikasjon i arbeidet med rike oppgaver i matematikk

Universitetet i Sørøst-Norge
Fakultet for humaniora, idretts- og utdanningsvitenskap
Institutt for matematikk og naturfag
Postboks 235
3603 Kongsberg

http://www.usn.no

Denne avhandlingen representerer 45 studiepoeng

Sammendrag

Formålet med denne studien er å undersøke hvordan elever kommuniserer seg imellom når de samarbeider om rike oppgaver i matematikk. Kommunikasjon blir i denne studien definert bredt ved å se på hvordan elevene kommuniserer ved hjelp av verbalt språk, gester og representasjoner. Problemstillingen for studien er: «Hvordan blir matematikk kommunisert i arbeidet med rike oppgaver i små grupper?». For å besvare problemstillingen har studien tatt utgangspunkt i tre mindre forskningsspørsmål: «Hvordan kommuniserer elevene verbalt?», «Hvordan kommuniserer elevene ved hjelp av gester?» og «Hvilke representasjoner bruker elevene for å uttrykke matematiske ideer?». Bakgrunnen for problemstillingen er fagfornyelsen i den norske skolen. I Læreplanverket for kunnskapsløftet 2020 ble det i matematikk introdusert kjerneelementer som *utforskning og problemløsning* og *resonering og argumentasjon* (Utdanningsdirektoratet, 2020a). Muntlighet har fått enda større plass enn tidligere i den nye læreplanen for matematikk. Dette gjelder også for grunnskolelærerutdanningen, der det har vært stort fokus på matematiske samtale (Nilssen & Høynes, 2020).

Dette er en kvalitativ kasus-studie som ved hjelp av video-observasjon ser nærmere på hvordan elever kommuniserer når de arbeider med rike oppgaver i små grupper på tre elever. De fem elevgruppene blir analysert ved deduktiv analyse der Alexanders fem prinsipper for dialogisk undervisning (Alexander, 2018) sammen med McNeills kategorisering av gester (McNeill, 2005) og Leshs kategorisering av representasjoner (Lesh, Post, & Behr, 1987) danner analysens teorigrunnlag.

Funn fra studien viser at elevers verbale kommunikasjon er lite produktiv ved at elevene bruker mange ord på å uttrykke lite meningsinnhold. Dialogen er lite strukturert og målrettet. Videre viser denne studien at gester brukes aktivt i kommunikasjonen og fungerer som brobygger mellom det verbale språket og representasjoner. Elevene bruker ulike representasjoner i problemløsnings-prosessen, derav ikoniske modeller, erfaringsbaserte situasjoner og skriftlig språk.

Forord

Denne masteroppgaven markerer slutten på en lang studietid. Noen ganger har det føltes uendelig langt frem til målstreken. Underveis har jeg flere ganger stilt meg selv, og andre, spørsmål om hva som er hensikten med denne studien. Nå kan jeg derimot si at gjennom arbeidet med masteroppgaven har jeg erfart og reflektert omkring sentrale prinsipper som ligger til grunn i forskning. Dette gjør meg bedre rustet til å videreutvikle egen praksis i profesjonsfelleskapet gjennom kjennskap til, og erfaring med forskningsarbeid. Ved å ta erfaringene fra dette arbeidet med inn i profesjonen vil forhåpentligvis terskelen for å oppsøke og ta i bruk ny og oppdatert forskning være lav, og gir kanskje også motivasjon til å foreta egne, mindre undersøkelser og refleksjoner i skolehverdagen.

På den lange veien har jeg hatt god støtte i familie og venner. En særlig takk til samboeren min Mogens som mer enn noen andre har stått sammen med meg i oppturene og nedturene. Videre må jeg takke alle de fantastiske medstudentene mine i kollokviegruppa som har hjulpet med faglige innspill, så vel som mange gode samtaler og koselige stunder på campus og zoom. En ekstra stor takk til Jane Helen som i masterløpet har vært viktig for både prestasjon og motivasjon. Jeg håper vi kan dele erfaringer og refleksjoner også i fremtiden.

Tusen takk Monica, Hanne, Helga og Hoffy som har vært praksislærere gjennom mine år på grunnskolelærerutdanningen, og som har tilrettelagt for at jeg kan prøve ut den nye kunnskapen og kompetansen i klasserommet deres. Videre må jeg også takke de flotte elevene som har bidratt som informanter i dette forskningsprosjektet. Avslutningsvis vil jeg takke veilederen min Aud Kjæret for god hjelp gjennom hele denne prosessen. Tilbakemeldinger jeg har fått har vært veldig nyttige og lærerike. Dine oppmuntrende ord har vært viktig for å holde motivasjonen og pågangsmotet oppe.

Haugesund, mai 2022
Ulrikke Nesheim Heldal

Innholdsfortegnelse

1 Innledning

1.1 Bakgrunn og problemstilling

Arbeidet med muntlighet i matematikkfaget er ikke nytt i den norske skolen. Forskning datert tilbake på 80- og 90-tallet viser at det å kommunisere i matematikk er viktig for å utvikle matematisk forståelse (Nilssen & Høynes, 2020, pp. 188-191). I den norske skolen ble det «å kunne uttrykke seg muntlig» definert som en grunnleggende ferdighet allerede i 2004, og har siden LK06 vært sentralt i alle fag (Kunnskapsdepartementet, 2004). Med fagfornyelsen 2020 har likevel arbeidet med muntlighet i matematikkfaget fått en enda større plass enn tidligere. I den nye læreplanen står det i introduksjonen til matematikkfaget, fagrelevans og sentrale verdier, at «Matematikk skal bidra til at elevane utviklar eit presist språk for resonnering, kritisk tenking og kommunikasjon gjennom abstraksjon og generalisering. Matematikk skal førebu elevane på eit samfunn og arbeidsliv i utvikling ved å gi dei kompetanse i utforsking og problemløysing.» (Utdanningsdirektoratet, 2020a, p. 2). Gjennom fagets kjerneelement, representasjon og kommunikasjon, understrekes muntlighet i faget ytterligere ved at kommunikasjon i faget handler om hvordan elevene bruker det matematiske språket i samtaler, argumentasjon og resonnement (Utdanningsdirektoratet, 2020a). Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020, ofte forkortet til LK20, tvinger dermed frem en endring i matematikkundervisningen, i en retning av at elevene nå skal utvikle det Skemp (1976) definerte som relasjonell forståelse i matematikk (Skemp, 1976). Dette oppnås blant annet gjennom muntlig argumentasjon og resonnering, og er derfor en viktig del av den matematiske kompetansen fremtidens elever skal utvikle gjennom sin skolegang (NOU 2015: 8, 2015).

I denne oppgaven skal kommunikasjon i matematikkfaget utforskes gjennom tre perspektiver; hvordan elevene kommuniserer verbalt, ved hjelp av gester og bruk av ulike representasjoner. De tre perspektivene i seg selv er godt etablert med utgangspunkt i teori og forskning. Likevel er det interessant å undersøke hvordan disse tre perspektivene samspiller og kommer til utrykk i det samspillet.

~~M~~untlighet i matematikkfaget av stor personlig interesse. Arbeidet med den nye læreplanen har naturligvis ligget til grunn gjennom hele den 5-årige grunnskolelæreutdanningen ved Universitetet i Sørøst-Norge. I matematikkfaget har vi særlig arbeidet med kommunikasjon i matematikk, både gjennom matematisk samtale i klasserommet og i mindre grupper. Erfaringene mine fra praksis i barneskolen er at matematisk kommunikasjon er krevende både for elever og lærere, og at det krever kompetanse i nettopp dette for å lykkes. Med dette som utgangspunkt ønsker jeg gjennom arbeidet med masteroppgaven å se nærmere på hvordan elever kommuniserer matematisk. Jeg ønsker å gå videre med det jeg har arbeidet med tidligere, og utvide perspektivet. Gjennom tidligere arbeid med dette har jeg i all hovedsak kun definert muntlig resonnering og argumentasjon som kommunikasjon i matematikk. I masteroppgaven ønsker jeg å utvide dette slik at matematisk kommunikasjon også omhandler non-verbal kommunikasjon og representasjon. Dermed lyder problemstillingen min som følger: «Hvordan blir matematikk kommunisert i arbeidet med rike oppgaver i små grupper?»

Kommunikasjon defineres her som «Menneskelig kommunikasjon kan defineres som det å dele tanker med andre individer, på en overlagt og uforbeholden måte». Dette innebærer at en person som ønsker å kommunisere noe, har en tanke som hun ønsker å formidle. Dette gjør hun ved å produsere ord eller handlinger, eller en kombinasjon av disse, med et mål om at de ønskede mottakerne skal forstå hennes meningsinnhold.» (Hagemann, 2009). I denne definisjonen foreligger altså muntlig kommunikasjon, så vel som non-verbal kommunikasjon som gester (Bjuland, Cestari, & Borgeresen, 2008). Med utgangspunkt i dette perspektivet er det også relevant å se på hvilke representasjoner elevene bruker som støtte i å uttrykke seg matematisk, samt å underbygge sin muntlig resonnering (Lesh et al., 1987). For å bygge opp under problemstillingen kommer jeg til å arbeide mer konkret med tre forskningsspørsmål:

Hvordan kommuniserer elevene verbalt?
Hvordan kommuniserer elevene ved hjelp av gester?
Hvilke representasjoner bruker elevene for å uttrykke matematiske ideer?

Målet er å få en innsikt i hvordan elevene kommuniserer slik at jeg kan bruke dette inn i min yrkesprofesjon senere. Det vil være nyttig for meg å gjenkjenne de ulike måtene slik at jeg i min undervisning kan modellere matematisk kommunikasjon ved hjelp av de verktøyene og metodene, som igjen kan overføres til elevene slik at de utvikler sin matematiske kompetanse.

1.2 Oppgavens oppbygging

Denne masteroppgaven er skrevet med utgangspunkt i IMRoD-struktur (Dalland, 2017, p. 163). *Innledningsvis* blir oppgavens problemstilling presentert og forankret i tidligere forskning og teori. Deretter følger *metodekapittel* som tar for seg metodiske valg og fremgangsmåte i datainnsamlingen, så vel som kritiske perspektiver på metodevalg og sentrale spørsmål innen forskningsetikk. Videre presenteres funn og *resultater* i et eget kapittel med utgangspunkt i deduktiv analyse. Funnen som blir presentert og analyser danner utgangspunktet for det neste kapittelet som er *drøfting* av hovedfunn og avvik hvor det drøftes opp mot de tre sentrale forskningsspørsmålene. Avslutningsvis konkluderes det hvor en reflekterer rundt funn og hvordan de impliserer egen yrkesutøvelse, så vel som refleksjoner om videre arbeid på feltet.

2 Teorikapittel

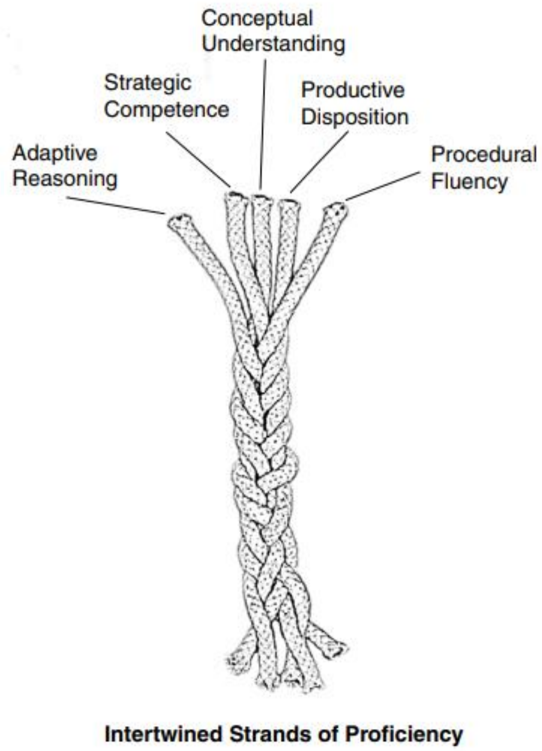
I dette kapittelet vil jeg etablere det teoretiske rammeverket som ligger til grunn for dette forskningsprosjektet. Det gjøres ved å definere hva som menes med verbal kommunikasjon, representasjoner og non-verbal kommunikasjon. Det er nødvendig med en tydelig avgrensing for å sikre at datamaterialet som brukes i analysen er relevant for å kunne svare på oppgavens problemstilling. Jeg skal se nærmere på hvordan elevene uttrykker sine matematiske resonnementer og ideer ved hjelp av verbal kommunikasjon. I dette ligger det også hvordan de argumenterer for dette, samt hvordan de andre elevene i gruppa responderer på dette. Jeg skal også se på muntlighet som en representasjon, og hvordan verbalt språk, både formelt og uformelt brukes til å forklare ulike representasjoner. Videre skal jeg se på hvordan elever bruker andre, og ulike representasjoner for å utrykke matematiske objekt og hvordan de veksler mellom representasjoner. Som siste av tre perspektiver skal jeg også se hvordan elevene utrykker seg non-verbalt ved hjelp av gester, og hvordan gester underbygger det verbale og de ulike representasjonene.

Målet med matematikkundervisning er å legge til rette for at elevene utvikler sin matematiske kompetanse. Kompetanse kan defineres som summen av kunnskap, ferdigheter og holdninger som anvendes i en gitt kontekst. Kompetanse er mer enn kunnskap og ferdigheter og kan i grove trekk sees på som evnen til å mobilisere kunnskap og ferdigheter (NOU 2018: 2, 2018). Overordnet del i læreplanen legger også denne definisjonen til grunn.

> Kompetanse er å kunne tilegne seg og anvende kunnskaper og ferdigheter til å mestre utfordringer og løse oppgave i kjente og ukjente sammenhenger og situasjoner. Kompetansen innebærer forståelse og evne til refleksjon og kritisk tenking (Kunnskapsdepartementet, 2020).

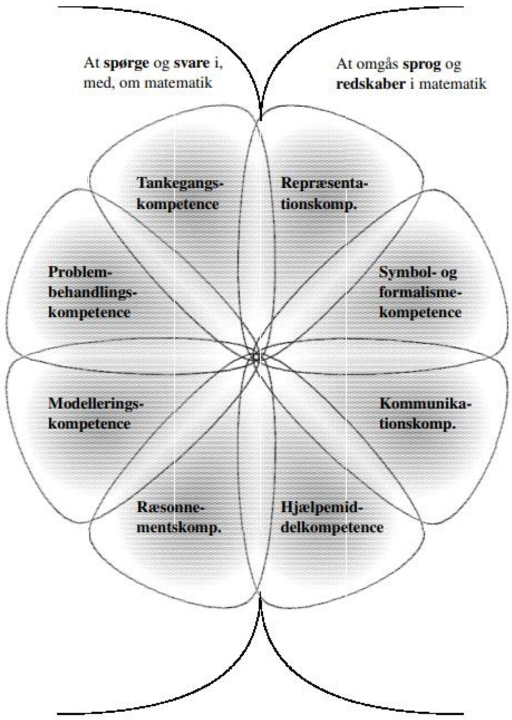
I motsetning til den generelle definisjonen, utvider læreplanverket prinsippet om kontekst til å gjelde både kjente og ukjente sammenhenger. Richard Skemp, professor i matematikkdidaktikk, definerer denne forskjellen ved å skille mellom instrumentell og relasjonell forståelse i matematikk (Skemp, 1976). Instrumentell forståelse i matematikk handler om å kunne regler, formler og algoritmer for å kunne løse de matematiske oppgavene. Dersom konteksten er kjent vil elevene ved å bruke algoritmene riktig finne løsningen. Problemene dukker derimot opp når elevene står overfor en ukjent kontekst der algoritmene ikke lenger fungerer slik det er vant med. Elevene som har utviklet relasjonell forståelse i matematikk kan sammenhengene og relasjonene mellom de forskjellige steg i algoritmen. På denne måte kan de også bruke algoritmene mer fleksibelt og de klarer å finne andre metoder og strategier for å komme frem til løsningen (Nosrati & Wæge, 2015,

p. 4). Det må derimot ikke forstås som verken eller. For å utvikle kompetanse i matematikk er det viktig å utvikle både instrumentell og relasjonell forståelse. Det er særlig to modeller som ligger til grunn når en snakker matematisk kompetanse. Trådmodellen til Kilpatrick med flere viser til ulike delkompetanser som er avgjørende for utviklingen av matematisk kompetanse.



Figur 2.1 - Trådmodellen viser de fem delkomponentene i matematisk kompetanse. (Kilpatrick, Swafford, & Findell, 2001, p. 5).

Trådmodellen til Kilpatrick med flere tar for seg fem delkompetanser som til norsk kan oversettes som resonnering, anvendelse, forståelse, engasjement og beregning (Kilpatrick et al., 2001). Tidligere forskning har altså etablert hvilke delkompetanser som ansees som er avgjørende for at elevene skal utvikle god kompetanse i matematikk. NOU 2015: 8, Fremtidens skole, ligger til grunn for utarbeidelsen av det nye læreplanverket som ble gjeldende i den norske skolen fra høsten 2020. Utredingen har lagt tidligere forskning om hva som skaper forutsetninger til læring til grunn (NOU 2015: 8, 2015, p. 20). I denne utredningen blir Kilpatricks trådmodell og de fem delkompetansene gjort rede for (Kilpatrick et al., 2001, p. 57). I læreplanverket for kunnskapsløftet kommer disse til uttrykk gjennom de fem kjerneelementene utforsking og problemløsning, modellering og avvendinger, resonering og argumentasjon, representasjon og kommunikasjon, og abstraksjon og generalisering (Utdanningsdirektoratet, 2020a). Kjerneelementene er utvidet fra trådmodellen til Kilpatrick slik at det ikke er unaturlig å anta at modellen til Mogens Niss og Tomas H. Jensen og deres åtte delkomponentene også har blitt vektlagt uten at det kommer eksplisitt frem i utredingen.



Figur 1.2 - Modell over åtte delkompetanser i matematisk kompetanse (Niss & Jensen, 2002, p. 45).

Dersom en ser nærmere på de tre kjerneelementene utforskning og problemløsing, resonnering og argumentasjon, og representasjon og kommunikasjon så vil arbeidet med disse kjerneelementene i stor grad legge opp til sosial interaksjon mellom elevene. Dette understrekes også i læreplanen for matematikkfaget, om fagrelevans og sentrale verdier, hvor det blant annet står eksplisitt: «Matematikk skal bidra til at elevane utviklar evne til å jobbe sjølvstendig og samarbeide med andre gjennom utforsking og problemløysing….» (Utdanningsdirektoratet, 2020a). Muntlighet i matematikkfaget er ikke nytt i den norske skolen, noe jeg skal kommer nærmere innpå senere. Kjerneelementene legger likevel til grunn at det skal vektlegges i enda større grad enn tidligere. Dette kan forankres i faglitteratur datert tilbake til 1970-tallet (Stray & Wittek, 2014, p. 298). Ideene til Lev Vygotskys kan derimot dateres tilbake til tidlig 1900-tallet (Stray & Wittek, 2014, p. 286). Vygotskys bidrag til skoleforskning handler om «den sosiale bevissthet» og handler om læring skjer i en sosial kontekst der barn gjør seg erfaringer gjennom interaksjon med andre, hvorpå disse erfaringene transformeres til kognitive strukturer Dette skjer blant annet ved å bruke språket som medierende middel der språket objektiverer ideer slik at det blir tilgjengelig for andre (Stray & Wittek, 2014, pp. 288-290).

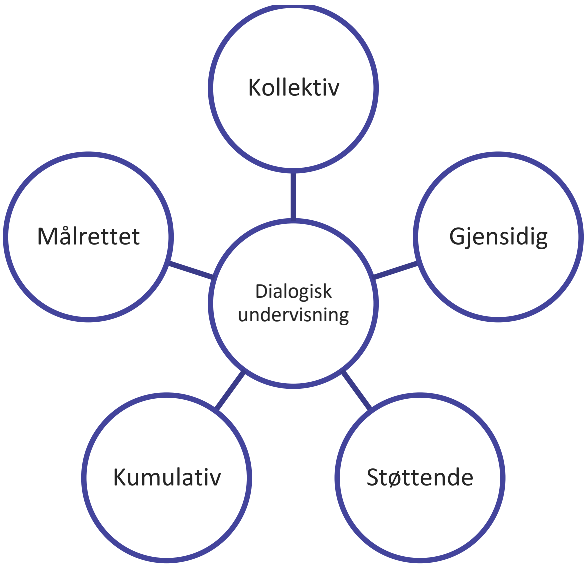
Som grunnlag for denne oppgaven kan vi dermed oppsummere at det legges til rette for læring når det arbeide med matematiske delkompetanser, eller kjerneelement, i en sosial kontekst. På denne måten oppnår elevene instrumentell og relasjonell forståelse i matematikk.

2.1 Muntlig resonnering og argumentasjon

> *Muntlige ferdigheter i matematikk handler om å skape mening gjennom å samtale og diskutere i og om matematikk. (Utdanningsdirektoratet, 2020a, p. 4)*

Som nevnt tidligere er ikke muntlighet i matematikk noe nytt i den norske skolen. Sosiokulturell læringsteori her lenge satt sitt preg på den de nasjonale læreplanene i den norske skolen (Stray & Wittek, 2014, pp. 133-148). Allerede i LK06 blir muntlige ferdigheter omtalt som «å skape mening gjennom å lytte, tale og samtale om matematikk. Det innebærer å gjøre seg opp en mening, stille spørsmål og argumentere ved hjelp av både uformelt språk, fagterminologi og begrepsbruk (Utdanningsdirektoratet, 2006, p. 4). Likevel bringer den nye læreplanen med seg noen nye elementer som forsterker muntlighet i matematikken. Muntlige ferdigheter i matematikk handler om å skape mening gjennom å samtale og diskutere i og om matematikk. Videre innebærer dette kommunisere og drøfte matematiske problem, strategier og løsninger med andre (Utdanningsdirektoratet, 2020a, p. 4). I kompetansemålene for de ulike trinnene går dette igjen ved at det brukes verb som utforske, eksperimentere, beskrive, forklare, formulere, diskutere, utvikle og tolke. Matematikkfaget har altså endret seg til å kunne forberede elevene på fremtidens samfunn. Et samfunn som «stiller en rekke nye krav til deltakelse i arbeidsliv, organisasjonsliv og i hjem og fritid.» (NOU 2015: 8, 2015, p. 7). I det tverrfaglige temaet *demokrati og medborgerskap* står det eksplisitt at i matematikk handler dette om å gi elevene den kompetansen som trengs for å analysere og argumentere på bakgrunn av tall og data slik at de kan delta i samfunnsdebatten, og være seg bevisst på matematiske forutsetninger og premisser som ligger til grunn for ulike avgjørelser i deres liv og i samfunnet (Utdanningsdirektoratet, 2020a, p. 4).

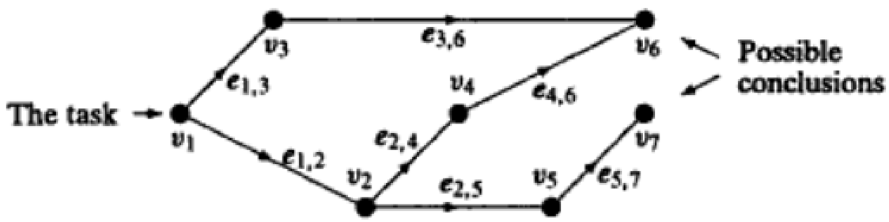
Ideen om at læring skjer i sosial kontekst stammer som sagt fra Vygotsky (Stray & Wittek, 2014, pp. 288-289). I Thinking and Speech utdypes en ide om at tale er en forløper for indre tale og kan brukes til å utlede dens egenskaper (Veer & Zavershneva, 2018, p. 103). Dermed kan muntlig kommunikasjon ansees som en brobygger som uttrykker indre, mentale resonnement og ideer. Med dette som utgangspunkt er det derfor også naturlig å se på hvordan det å uttrykke tanker og ideer muntlig kan føre til læring i matematikk. Dette skjer ved at mennesker, gjennom muntlig kommunikasjon, evner å tenke kreativt og produktivt sammen (Littleton & Mercer, 2013, p. 12). Det å uttrykke resonnement og matematiske ideer i felleskap er altså viktig for å utvikle relasjonell forståelse i matematikk (Skemp, 1976). I kjerneelementet *resonnering og argumentering* blir resonnering definert som elevens evne til å kunne følge, vurdere og forstå matematiske tenkerekker, mens argumentasjon, i korte trekk, handler om å begrunne dette (Utdanningsdirektoratet, 2020a, p. 3). Elevene må altså kunne uttrykke seg matematisk. Dette innebærer at elevene anvender matematisk språk i samtaler, argumentasjon og resonnementer (Utdanningsdirektoratet, 2020a, p. 3). Dermed ser en altså at den nye læreplanen utvikler matematikkfaget i retning av mer dialogisk læring, gjennom blant annet den matematiske samtalen som det legges stor vekt på i grunnskolelærerutdanningen (Kazemi, Hintz, Birkeland, & Jørgenssen, 2019; Stray & Wittek, 2014, pp. 149-161). En viktig forutsetning her er lærernes kompetanse innen nettopp dette. Det er nemlig ingen automatikk i at kommunikasjon i matematikkfaget gir bedre læring (Sfard & Kieran, 2001, p. 42). I sin studie ble Sfard og Kieran nødt til å revidere noen av de grunnleggende forutsetningene for studien. Det var nemlig ikke gitt læring gjennom samtale faktisk gir økt læring. Dette begrunner de i kvaliteten på samarbeidet og at elevenes ineffektive kommunikasjon var lite nyttig elevens læring og i noen tilfeller også direkte unyttig (Sfard & Kieran, 2001, p. 70). Lærerne har derfor et ansvar for å legge til rette for, og modellere i matematiske samtaler slik at det legges til rette for en læringssituasjon (Kazemi et al., 2019). Alexander peker på fem nøkkelprinsipper som legger til rette for læring gjennom dialogisk undervisning.



Figur 2.3 – fem nøkkelprinsipper for dialogisk undervisning (Alexander, 2018)

Det første prinsippet, *kollektiv*, handler om at det må foregå i fellesskap, enten i hel klasse eller mindre grupper. Videre må det være *gjensidig* ved at elevene lytter til hverandre, deler tanker og ideer samt. vurderer de nye ideene. En annen viktig forutsetning er at det er *støttende*, det vil si at det er etablerte og trygge rammer hvor det er lov å gjøre «feil», samt hjelpe hverandre til å oppnå en felles forståelse. For å drive frem læring må prinsippet om at dialogen er *kumulativ* ligge til grunn. Med dette menes at elevene bygger videre på egen og hverandres ideer og tankerekker og argumenterer for dette. Det siste prinsipper handler om at samtalen må være *målrettet*, det vil si at samtalen er planlagt og strukturert (Alexander, 2018; Nilssen & Høynes, 2020). Videre må det derfor utvikles og etableres gode sosiomatematiske normer, det vil si normer som er unike for deltakelse i matematikk, og da særlig den matematiske samtalen (Yackel & Cobb, 1996). En sosiokulturell norm kan for eksempel være at man lytter og venter på tur når andre prater. Det er dermed ikke unikt for deltakelse i matematiske samtaler. Eksempler på sosiomatematiske normer er derimot normer som bidrar positivt inn mot den matematiske samtalen og legger til rette for læring. Et eksempel på dette kan være at elevene alltid skal begrunne og argumentere for svar eller påstander.

Teorigrunnlaget for analysen i denne oppgaven baserer seg på Kilpatrick m.fl. sin definisjon av adaptiv resonnering, dvs. det å tenke logisk om forholdet mellom konseptuelle ideer og kontekst (Kilpatrick et al., 2001, pp. 129-131). Videre peker de på adaptiv resonnering som limet og ledestjernen som styrer læring. I motsetning til mange andre forestillinger om matematisk resonnering er ikke denne definisjonen begrenset til formelle bevis og andre former for deduktivt resonnement. Kilpatrick m.fl. har en beredere forstilling som inkluderer uformell forklaring samt intuitivt og induktivt resonnement basert på mønster, analogi og metafor (Kilpatrick et al., 2001, pp. 129-131). Denne brede definisjonen samsvarer også med et av forskningsspørsmålene i dette prosjektet «Hvordan kommuniserer elevene verbalt». Ved å benytte en bred tilnærming vil en altså favne både formell og uformell resonnering som kommer til uttrykk gjennom verbalt språk. I dette ligger det også til grunn en avgrensing der kun bidrag som tar elevene videre i prosessen fra oppgave til løsningen blir vurdert i analysen (Lithner, 2008). Ved å se på verbal kommunikasjon som overordnet, og ved å legge denne avgrensingen til grunn mener jeg derfor at det ikke er hensiktsmessig å gå ytterligere inn på kategorisering av resonnering i henhold til rammeverket til Jannotte og Kieran (Jeannotte & Kieran, 2017).



Figur 2.4 - Problemløsing illustrert ved ulike retninger som leder til en løsning (Lithner, 2008, p. 258)

2.2 Gestikulering som uttrykksform

«The first sign of language is usually a gesture" (Kenneally, 2007, p. 133)

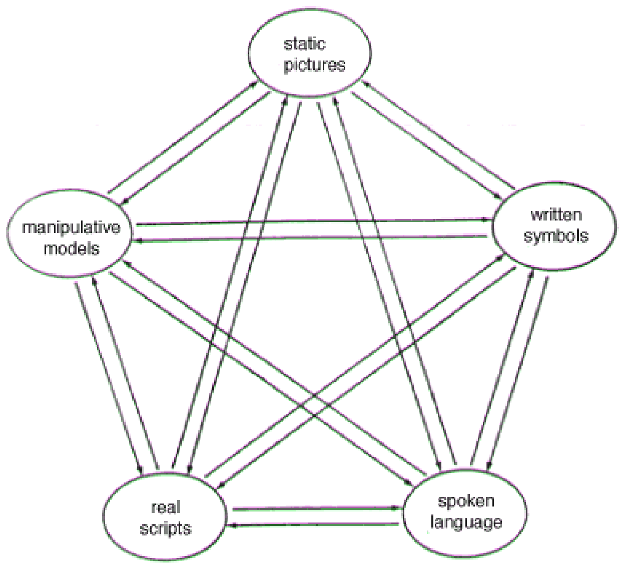
Kjernen i denne masteroppgaven er kommunikasjon i et vidt perspektiv som omhandler både ord og handlinger (Hagemann, 2009). Målet er å se hvordan elevene kommuniserer seg imellom ved å utrykke seg muntlig, kroppslig og ved hjelp av representasjoner. Det er nettopp et poeng å se hvordan elevene uttrykker seg multimodalt (Radford, 2009). Kroppslige handlinger blir i denne oppgaven avgrenset til gester. Gester er bevegelse med hånden eller amen og kan brukes både som tilrettelegger for verbale uttrykk, så vel som en naturlig del av det verbale uttrykket (Nilstun, 2009; Radford, 2009, p. 113). Uavhengig av syn på gestenes rolle så er det bred enighet i fagmiljøet at gester er en viktig komponent når det kommer til å uttrykke seg matematisk (Arzarello, Robutti, & Thomas, 2015; McNeill, 2005; Radford, 2009, p. 113). Lemke hevder at matematikk kan kun læres og formidles som en integrert komponent av et større meningsbærende system som inkluderer naturlig språk og visuell representasjon (Lemke, 2003, p. 1). Verbal og non-verbale uttrykk må altså ses som komponenter i den helhetlige kommunikasjonen og kan, i likhet med representasjoner, fungere som brobrobygger mellom de det kognitive indre og de matematiske ideene som utrykkes, og kan inkludere noe som den andre komponenten ikke klarer å utrykke (Bjuland et al., 2008, p. 272; McNeill, 2005, p. 79; Radford, 2009, p. 113). Likevel mener Radford at en må definere tenking utover det kognitive. Han mener at tekning foregår både i hode og gjennom språk, kropp og verktøy (Radford, 2009, p. 113). Dersom legger dette premisset til grunn spiller gester en sentral rolle i elevers kommunikasjon i matematikk. I artikkelen kommer flere perspektiver på gester til syne, hvorav gester blir sett i lys av matematisk dyktighet. Det hevdes at dyktige matematikere ikke har behov for å bruke gester i sin kommunikasjon. Radford mener på sin side at elever er i en læringsposisjon og at gester dermed kan supplere for denne manglende kompetansen (Radford, 2009, p. 122).

Tidligere ble gester kategorisert som ikoniske (iconic), metaforiske (metaphoric), deiktisk og bankende (beat) (McNeill, 2005). I senere tid har en gått bort fra denne kategoriseringen og heller vurdere gestene ut fra dimensjonen av kategoriene (Bjuland et al., 2008). Det er likevel nyttig å ta utgangspunkt i denne kategoriseringen for å definere ulike gester. McNiell definerer *ikoniske* gester som gester som følger tale og som ligner på det vi snakker om. For eksempel vise størrelsen på et objekt. *Metaforiske* gester representerer abstrakte begrep. For eksempel «vær så snill» som gestikuleres ved å sette hendene sammen. Videre *er deiktiske* gester definert som pekende bevegelser, som for eksempel det å peke på konkreter eller illustrasjoner. Den siste kategoriseringen er b*ankende* gester defineres av intensiteten av gestene. Hyppig og gjentakende peking viser for eksempel til at en ønsker oppmerksomhet rundt noe (McNeill, 2005).

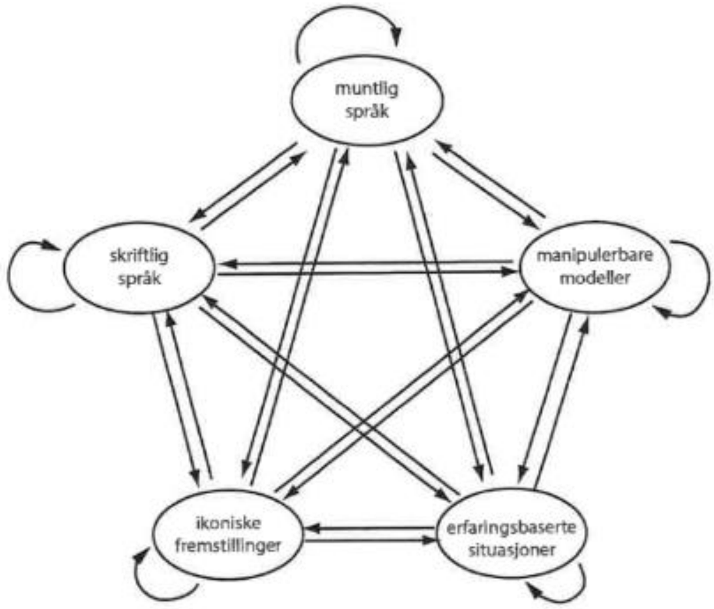
2.3 Representasjoner

Om behandling er viktigst fra et matematisk synspunkt, så er det overgangene som i grunnen er den avgjørende faktoren for læring (Duval, 2006, p. 105).

Arbeid med representasjoner er viktig for å utvikle relasjonell forståelse i matematikk (Svingen, 2018, p. 3). I følge Hana er «en representasjon noe som står for noe annet» (Hana, 2014, p. 131). I matematikk handler dette om at representasjoner er et utrykk for et matematisk objekt og brukes til å kommunisere matematikk (Hana, 2014, p. 139). Representasjoner og kommunikasjon henger altså nøye sammen, noe vi også ser i den nye læreplanen i matematikk. Under kjerneelementet *representasjon og kommunikasjon* står det at representasjoner handler om å utrykke matematikk, og at representasjoner kan være konkrete, kontekstuelle, visuelle, verbale og symbolske (Utdanningsdirektoratet, 2020a, p. 3).



Figur 2.4 – Illustrasjon av de ulike representasjonene (Lesh et al., 1987, p. 34)



Figur 2.5 – Oversettelse av illustrasjonen gjengitt i figur 5. (Hana, 2014, p. 132)

Modellen viser en klassifisering av fem ulike register, utviklet av Lesh med flere (Lesh et al., 1987). Modellen til høyre er oversatt til norsk av Hana (2014). Modellene viser kun til eksterne representasjoner, altså representasjoner som kan uttrykkes fysisk (Hana, 2014, p. 132). Modellen viser ulike representasjoner i matematikk og viser til samspillet mellom disse.

- *Real scripts* → *erfaringsbaserte situasjoner:* Handler det om at elevene bruker egne erfaringer og setter det matematiske problemet inn i en kontekst elevene kan relatere til. Dette er særlig viktig i kritisk matematikkundervisning hvor elever interesser settes høyt og hvor erfaringene kan også fungere som referanse opp mot argumentasjon og validering (Andersson, Valero, & Meaney, 2015; Skovsmose & Nielsen, 1996).

- *Manipulative models* → *manipulerbare modeller:* Dette gjelder bruk av konkretiseringsmateriell og andre visuelle hjelpemidler som kan manipuleres. Det kan være centikuber, tierstav, mynter og lignende. I den norske skolen er det tradisjon for å bruke konkretiseringsmateriell i begynneropplæringen og mer symbolske representasjoner jo eldre man blir (Svingen, 2018, p. 7).

- *Static pictures* → *ikoniske modeller:* Dette innebærer bruk av bilder og illustrasjoner. Det kan være gitt i oppgaven eller elevene kan selv tegne for å illustrere det matematiske objektet. Et argument for å bruke bilder og/eller illustrasjoner i oppgavene som tildeles elevene er at det matematiske innholdet i oppgaven blir gjort tydelig for elevene og kan dermed fungere som kognitiv støtte til å generere matematiske ideer og resonnement (Sullivan, Clarke, & Clarke, 2012, pp. 23, 37).

- *Written symols* → *skriftlig språk:* Omfatter skriftlig matematiske symboler og skriftlige forklaringer. Tradisjonelt sett vil nok dette komme til syne i norske klasserom ved at elevene skriver i tilhørende arbeidsbok og/eller egen kladdebok/kladdeark. I tenkende klasserom benyttes derimot whiteboard. Ved å benytte whiteboard til å skrive skriftlig matematiske symboler og forklaringer, så vel som illustrasjoner, konkluderer Liljedahl med at elevene er mer ivrige til å begynne, det er mer diskusjon i gruppa, en ser økt deltakelse blant elevene og elevene er mer utholdende (Liljedahl, 2016, p. 370). Årsaken til dette hevder han ligger i verktøyets natur ved at whiteboard ikke er permanent og at det er enkelt for dem å viske vekk. Dermed er terskelen lavere for elevene slik at de prøver mer, og de prøver raskere.

- *Spoken language* → *muntlig språk:* Muntlig verbal kommunikasjon, både formell og uformell. Dette er utdypet i kapittel 2.1, *muntlig resonnering og argumentasjon.*

Arbeid med representasjoner er viktig for elevens forståelse i matematikk (Duval, 2006, p. 107). Det er gjennom arbeid med ulike representasjoner læringsmulighetene ligger. Ved å arbeide med ulike representasjoner vil elevene oppdage egenskaper ved det matematiske objektet og se sammenhengen mellom disse. Da utvikler elevene relasjonell forståelse i matematikk (Skemp, 1976). Det er derimot ikke gitt at arbeid med representasjoner gir økt læringsutbytte. Systematisk arbeid med veiledning fra lærer er viktig. Her gjelder det å finne balanse mellom fortalt kunnskap om representasjoner ved at lærer viser og forklarer, og at elevene får utforske selv. Det er nettopp et poeng i at elevene får rom til å tenke og skape mening selv (Svingen, 2018). Arbeid med representasjoner skjer gjennom behandling og overgang (Lesh et al., 1987, p. 34). Med utgangspunkt i modellene over kan vi si at behandling skjer innen hvert register (hver spiss i modellen), mens en overgang skjer når en beveger seg fra et register til et annet. Det er viktig å arbeide med begge perspektiver (Lesh et al., 1987).

I det tidligere kapittelet *muntlig resonnering og argumentasjon* har jeg utdypet hva jeg i all hovedsak kommer til å vektlegge i den muntlige kommunikasjonen i denne oppgaven. Likevel vil det også være viktig å se på hvordan det muntlige språket brukes til å støtte opp under de andre representasjonene, så vel som hvordan det brukes i sammenheng med gester. Mange ser muntlig språk utelukkende som oversettelsen eller avkodingen av en representasjon til en annen. Duval mener derimot at muntlig språk fungerer på en mye mer kompleks måte enn oversettelse eller avkoding alene. (Duval, 2006, pp. 112-114). Muntlig språk blir dermed bruk som støtte for overgangen mellom ulike representasjoner, og spiller derfor en særdeles viktig rolle i arbeid med representasjoner når det arbeides i små grupper. Med utgangspunkt i dette, og tidligere avgrensinger kan vi si at muntlig språk trekkes ut som en overordnet representasjon i denne oppgaven.

3 Metodekapittel

I dette kapittelet skal jeg utdype metodevalg og andre vurderinger som ligger til grunn for denne masteroppgaven. Metode omhandler i korte trekk prosessen mellom spørsmålet og svaret som ligge til grunn for forskningssituasjonen. Det handler om hvordan vi kan eller bør gå frem for å skape kunnskap (Høgheim, 2020, p. 27). I dette ligger det altså en rekke gjennomtenkte beslutninger med formål om å tjene oppgavens hensikt på best mulig måte. Det være seg valg av metode, strategi for datainnsamlingen, refleksjoner rundt forskerrollen og etiske problemstillinger, så vel som reliabilitet og validitet.

3.1 Metodisk overblikk og valg

«Mennesket eksisterer ikke bare i naturvitenskapens firedimensjonale univers (rom, stoff, tid og hastighet), men i et femdimensjonalt univers der den femte dimensjonen er betydnings- eller meningsdimensjonen» (Dalland, 2017, p. 44).

Den femte dimensjonen er et bilde på skillet mellom naturvitenskap og humanvitenskap, eller sagt på en enklere måte, skillet mellom forklarende og forstående vitenskap (Dalland, 2017, p. 44). Forstående vitenskap kalles hermeneutisk der kjernen er å tolke noe som har mening (Kvarv, 2021, p. 83). I humaniora handler det om å få en dypere forståelse av menneskelige aktiviteter, det vil si meningsfulle fenomener (Kvarv, 2021, p. 83). Målet er altså å få en dypere forståelse for elevenes kommunikasjon i matematikkfaget. For å komme dit må en tenke gjennom og vurdere konkrete og praktiske sider ved forskningen. Dette kalles for forskningsdesign og vil bli presentert i dette kapittelet (Kvarv, 2021, p. 121).

3.1.1 Valg av kvalitativ tilnærming

For å få denne innsikten må en velge en metode som på en hensiktsmessig måte gir svar på de forskningsspørsmålene en stiller. Metoden må altså samsvare med intensjonen. I dette tilfellet skal jeg se nærmere på hvordan elever kommuniserer seg imellom når de arbeider i små grupper med rike oppgaver. Jeg skal altså forsøke å få en innsikt i en menneskelig, sosial aktivitet, den femte dimensjonen. Arbeidsmaterialet er altså språklig formidlet mening der en skal se på hvordan elever uttrykker indre handlinger som tanker, ideer og resonnement gjennom ytre handlinger som muntlig kommunikasjon, kroppslig kommunikasjon gjennom gester, samt bruken av representasjoner.

(Kvarv, 2021, p. 148). For å forstå denne sosiale aktiviteten er jeg nødt til å høre og se hva som blir sagt og gjort. Dermed har jeg konkludert med at observasjon som metode er mest hensiktsmessig i denne sammenheng (Høgheim, 2020, p. 134). Observasjon som metode kan være både kvantitativ og kvalitativ da det i korte trekk handler om å iaktta noe eller noen på en systematisk og oppmerksom måte (Kvarv, 2021, p. 173). I denne oppgaven derimot er det et poeng å begrense seg. Hensikten er å gå i dybden og forstå fenomenet i seg selv, ikke fenomenets omfang og utbredelse (Kvarv, 2021, pp. 156-157). Det er også her vi skiller mellom kvalitative og kvantitative teknikker. Mens kvantitative metoder går i bredden og ser på data som kan la seg tallefeste og/eller måle, handler kvalitative metoder om å gå i dybden og fange opp mening (Dalland, 2017, p. 53). Grunnlaget en får for å bedre forstå det helhetlige bilde er en klar styrke ved kvalitative teknikker (Kvarv, 2021, p. 158). Case-studie eller kasusstudie er vanlig i kvalitative forskningsdesign (Kvarv, 2021, p. 128). Denne typen studie har som mål å fremskaffe rik og detaljert kunnskap om et eller flere kasus (Høgheim, 2020, p. 147). Et kasus kan defineres som en enhet eller et tilfelle. I denne sammenheng defineres kasus som en gruppe elever. Totalt dreier det seg om fem ulike kasus. Målet er å trekk ut generell kunnskap om fenomener som er felles for de fem kasusene (Høgheim, 2020, p. 148).

3.1.2 Observasjon som metode

Observasjon som metode gir en unik mulighet til å iaktta hvordan mennesker samhandler i en gitt kontekst (Dalland, 2017, p. 97). Denne metoden gir også mulighet til informasjon fra grupper som kanskje ikke er i stand til å uttrykke seg på en hensiktsmessig måte, som for eksempel elever i barneskolen (Kvarv, 2021, p. 172). Utgangspunktet er et tradisjonelt forskningsdesign med åpen, ikke-deltakende observasjon. Det innebærer blant annet at forskeren observerer «utenfra» og at informantene er gjort kjent med undersøkelsen, formålet, og forskeren som gjennomfører undersøkelsen (Kvarv, 2021, p. 173). Som nevnt tidligere ligger kvalitativ tilnærming til grunn. Dermed skal observasjonen begrenses til en kasusstudie av få grupper og gjennomføres over et kort tidsrom (Bjørndalen, 2013, p. 162).

Ettersom det er tre forskningsspørsmål som ligger til grunn i denne oppgaven vil det tas video- og lydopptak av observasjonene. Argumentasjonen som ligger til grunn er ganske enkelt mangel på kompetanse og erfaring innen systematisk observasjon, så vel som omfanget av det som skal observeres. I observasjonen skal jeg se på både muntlig kommunikasjon, kroppslige gester og bruken av matematiske representasjoner. Alle funger som delkomponenter i den helhetlige kommunikasjonen og foregår i stor grad på samme tid. Dermed blir det krevende å få med seg det helhetlige bilde både auditivt og visuelt. «Lydopptakeren hevdes å ha hatt samme betydning for studiet av samtaler som mikroskopet hadde for biologien (Psathas, 1995). Charlie Ginsburgs oppfinnelse av videoopptakeren i 1951 gav forskere et enda mer avansert mikroskop» (Bjørndalen, 2013, p. 158). Videoobservasjon er altså et viktig og godt redskap som egner seg godt til observasjon av sosiale aktiviteter. Bjørndalen peker blant annet på at videoopptak skiller seg fra vanlig observasjon ved at videoopptaket evner å ta inn over seg alle observasjonene, i motsetning til de menneskelige sansene. Videre kan man også redusere feilkilder ettersom man har muligheten til å se gjennom datamaterialet flere ganger, så vel som forskertriangulering (Bjørndalen, 2013, p. 159). Til tross for mange fordeler er det naturligvis også en del begrensinger ved denne metoden. Dette kommer jeg tilbake til under kapittelet metodekritikk.

3.1.3 Valg av oppgave

Dette forskningsprosjektet er at kasusstudie av elevgrupper på mellomtrinnet (Høgheim, 2020, pp. 147-149). Elevene skal arbeide med en oppgave i matematikk, hvorpå jeg skal se hvordan elevene kommuniserer om å løse denne oppgaven. Velbegrunnet valg av matematisk oppgave har derfor vært viktig i dette forskningsprosjektet. Det er nettopp gjennom matematiske oppgaver mulighetene til læring blir gjort tilgjengelig for elevene (Sullivan et al., 2012, p. 14). Videre peker Sullivan, med flere, i sin artikkel på aspekter ved oppgaver som i størst grad legger til rette for dette. De peker på komplekse og kontekstuelle oppgaver som stimulerer til konstruksjon av kognitive nettverk, resonnering, kreativitet og refleksjon. Dette er som nevnt tidligere matematisk kompetanse som anerkjennes høyt i kjerneelementene i fagfornyelsen og som i stor grad fokuserer på fremtidens skole og hvilken kompetanse elevene trenger for å kunne delta i det fremtidige samfunnet (Kunnskapsdepartementet, 2020) (NOU 2015: 8, 2015).

I dag brukes åpne oppgaver, rike oppgaver, problemløsningsoppgaver med flere om hverandre som en betegnelse på oppgaver som ivaretar hele eller deler av nettopp dette. Det gjør det derfor krevende å komme opp med en enkelt definisjon som dekker alle. Yeo prøver i sin artikkel å ta utgangspunkt i oppgavens åpenhet i ulike deler av prosessen, som for eksempel åpen løsning, åpent mål, åpen strategi og metode (Yeo, 2017). For å forstå hva som menes med åpne problemer tar Pehkonen utgangspunkt i det motsatte, nemlig lukkede oppgaver. En oppgave er lukket hvis start og slutt er lukket (Pehkonen, 1997). Tradisjonelle drilloppgaver faller under denne kategorien der målet er å produsere riktig svar.

I denne oppgaven brukes definisjonen rike oppgaver, og defineres av følgende kriterier:

1. Problemet skal introdusere viktige matematiske ideer eller løsningsstrategier.
2. Problemet skal være lett å forstå. Alle skal kunne komme i gang og ha muligheter til å arbeide med det.
3. Problemet skal være utfordrende, anstrengende og kunne ta tid.
4. Problemet skal kunne løses på ulike måter, med ulike strategier og representasjoner.
5. Problemet skal kunne initiere en matematisk diskusjon som omfatter ulike strategier, representasjoner og matematiske ideer.
6. Problemet skal fungere som brobygger mellom ulike matematiske områder.
7. Problemet skal kunne lede elever og lærere til å formulere nye interessante problemer.

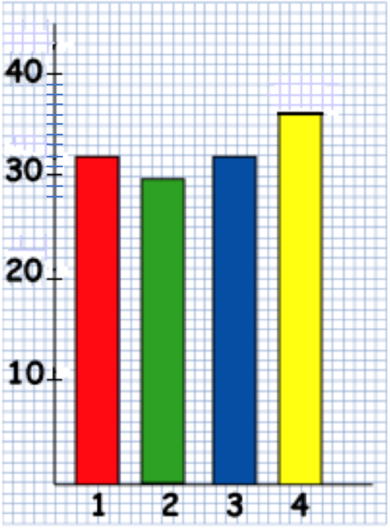
(Hedrén, Taflin, & Hagland, 2005)

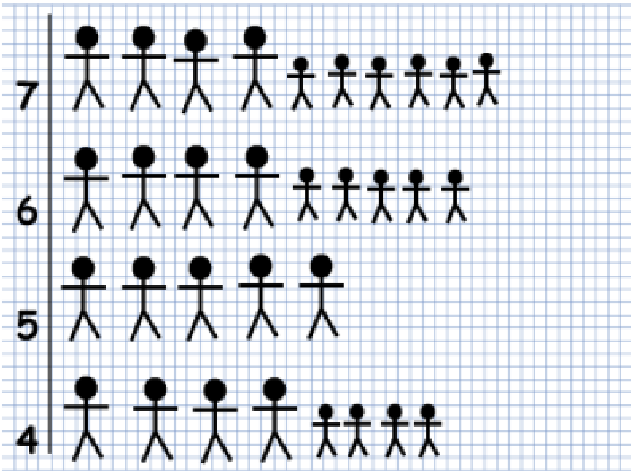
Med dette utgangspunktet falt valg av oppgave på en kompleks statistikkoppgave hentet fra Matematikksenterets LIST-oppgaver (Matematikksenteret). Denne oppgaven dekker flere av kriteriene for rike oppgaver ved at den blant annet er utfordrende, kan løses på ulike måter og kan initiere til diskusjon. Ordlyden på oppgaven lyder som følger:

4. klasse laget diagrammer. Benjamin, Ali, Katrine og Charlie bestemte seg for å lage diagrammer som viste størrelsen på de sju klassene på skolen. De gikk på kontoret for å få oversikt over antall elever i alle de andre klassene. Benjamin og Ali skrev ned tallene for 1., 2. og 3. klasse. Katrine og Charlie skrev ned tallene for 5., 6. og 7. klasse. Selvfølgelig visste alle hvor mange elever de var i 4. klasse.

Benjamin og Ali tegnet et søylediagram.
Det så sånn ut:

Katrine og Charlie bestemte seg for å lage sitt diagram på en annen måte.
De tegnet det slik:





Figur 2.1 - Skjermdump av de ikoniske modellene i oppgaveteksten gitt til elevene.

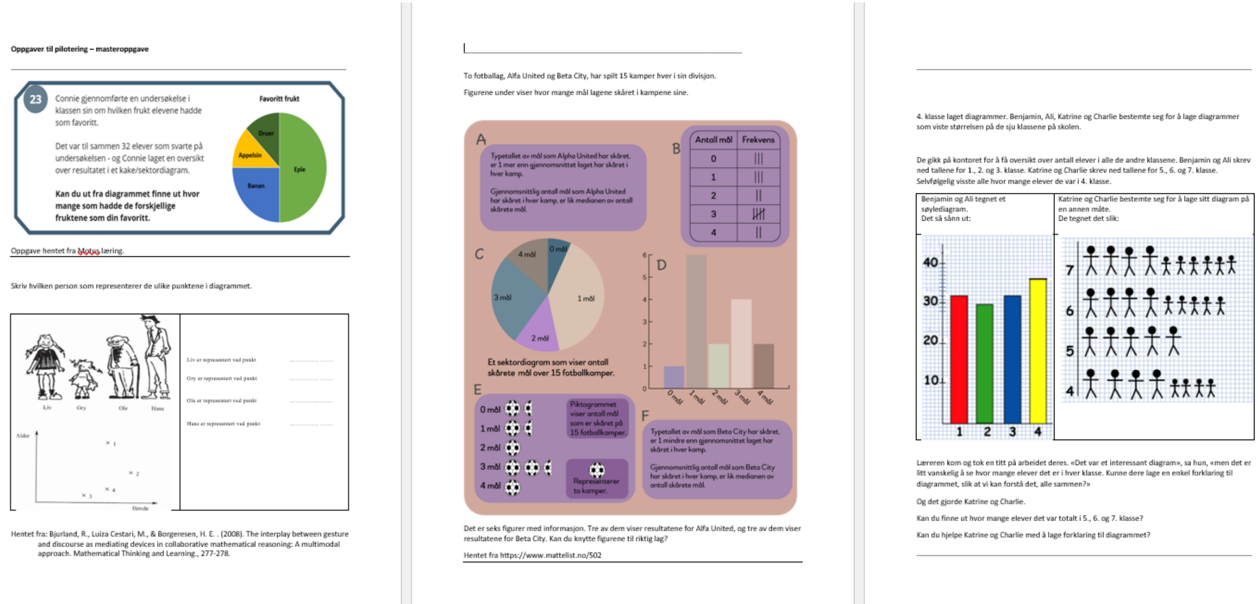
(Matematikksenteret).

Læreren kom og tok en titt på arbeidet deres. «Det var et interessant diagram», sa hun, «men det er litt vanskelig å se hvor mange elever det er i hver klasse. Kunne dere lage en enkel forklaring til diagrammet, slik at vi kan forstå det, alle sammen?» Og det gjorde Katrine og Charlie.

Kan du finne ut hvor mange elever det var totalt i 5., 6. og 7. klasse?
Kan du hjelpe Katrine og Charlie med å lage forklaring til diagrammet?

Denne oppgaven har enda en positiv side ved at det brukes representasjoner i oppgaven. Ved å bruke illustrasjoner i presentasjonen blir den matematiske kjernen i oppgaven gjort tydelig for elevene (Sullivan et al., 2012, p. 23). Illustrasjonene er direkte knyttet til problemet som elevene skal arbeide med, og kan dermed fungere som kognitiv støtte slik at elevene kan generere matematiske ideer og resonnement (Sullivan et al., 2012, p. 37).
Som nevnt innledningsvis har matematikkfaget endret seg ut fra hvilke styringsdokumenter som ligger til grunn. I fagfornyelsen har det blitt en dreining fra den tradisjonelle matematikkundervisningen med fokus på mengdetrening med lukkede oppgaver til arbeid med oppgaver som i større grad krever matematisk resonnement og bruk av ulik matematisk kompetanse (NOU 2015: 8, 2015). Dette kan forankres i at utvalget bak fagfornyelsen særlig har vektlagt

fagdidaktisk forskning og at denne endringen dermed tar utgangspunkt i noe av den tidligere forskningen som ble presentert i dette kapittelet. (NOU 2015: 8, 2015, p. 12). Likevel samsvarer det ikke alltid mellom teori og praksis. Det er verdt å merke seg at implementeringen av fagfornyelsen har foregått parallelt med en verdensomfattende pandemi som i stor grad har påvirket skolehverdagen i to år. Dermed må en også ta høyde for at ikke alle har like mye erfaring med slike komplekse oppgaver, selv om de nye styringsdokumentene tilsier det. For å sikre at oppgaven som skal brukes i denne kasusstudien ville fungere på en tilfredsstillende måte valgte jeg derfor å pilotere fire ulike oppgaver på 6. trinn i forkant av datainnsamlingen. På denne måte kunne jeg selv observere og lytte til elevenes erfaringer i arbeidet med de ulike oppgavene og dermed fatte en beslutning basert på dette. Oppgavene tar utgangspunkt i statistikk som overordnet tema.



Figur 3.2 – skjermdump av de ulike oppgavene som ble pilotert i 6.klasse.

Elevene på 6.trinn konkluderte raskt med at oppgaven om frukt var for enkel, og at oppgaven om fotballresultatene var for vanskelig. Sistnevnte ble beskrevet som «vanskelig, kjedelig og tung». Dermed sto vi igjen med oppgaven om korrelasjon mellom høyde og alder, og antall elever på de ulike trinnene. Elevene omtalte disse oppgavene som «kjekke». Gjennomgangen på slutten av timen viste også at samtlige hadde løst oppgaven, dog på ulike måter. Etter en gjennomgang av elevbesvarelsene konkluderte jeg med å bruke oppgaven om antall elever på de ulike trinnene i dette prosjektet (se vedlegg for nærmere beskrivelse av oppgaven). Denne oppgaven var kompleks og krevende nok, så vel som at elevgruppene kom frem til ulike løsninger. I tråd med det teoretiske rammeverket som ligger til grunn for gode oppgaver i matematikk som jeg tidligere har utdypet i teorikapittelet.

.

3.2 Metodiske valg innenfor observasjon

3.2.1 Forskerrollen og observasjonens rammer

Forskerrollen i dette forskningsprosjektet er definert som åpen, ikke-deltakende videoobservasjon (Kvarv, 2021). I dette ligger det at aktørene er gjort kjent med formålet og at de har samtykket til deltakelse (Kvarv, 2021, p. 173). I forkant av observasjonene var jeg på besøk i de to klassene for å informere om forskningsprosjektet og presentere meg for feltet (Dalland, 2017, p. 101). Hensikten var naturligvis å rekruttere deltakere til forskningsprosjektet, men viktigst av alt var å informere om hva et slik samtykke innebærer for elevene og hvordan de eventuelt trekker samtykket underveis i prosessen. Dette er et viktig etisk prinsipp om å ta elevens stemme på alvor om frivillig deltakelse. Dette kommer jeg tilbake til i kapittelet etiske betraktninger.

Videre er forskerrollen begrenset til å kun være ikke-deltakende observatør(Kvarv, 2021). Dermed skal jeg i min forskerrolle være diskret og i så lite grad som mulig være til sjenanse for informantene. Selve observasjonen ble foretatt på et lukket grupperom hvor kun samtykkende deltakere var til stede, en gruppe bestående av tre elever om gangen. Jeg plasserte meg i et hjørne vendt mot elevene slik at det var mulig å få god oversikt over den verbale, non-verbale kommunikasjonen som utartet, så vel som de ulike representasjonene de brukte i prosessen.

Denne forskerrollen kan påvirke elevene ved at avstanden mellom informanter og forskeren blir stor og med lite eller ingen interaksjon. Dette kan påvirke observasjonene negativt på flere måter som jeg kommer tilbake til i et senere kapittel. Dette er derimot en mulig negativ konsekvens ved denne forskerrollen på generelt grunnlag. Faktumet i dette forskningsprosjektet er at observatør og informanter har en relasjon som strekker seg tilbake over et års tid, og som dermed trolig vil gjøre avstanden mindre. Elevene ble kjent med observatør gjennom to praksisperioder skoleåret 2020/2021. I tillegg har jeg arbeidet som vikar i ettertid og har dermed jevnlig truffet på elevene i skolegården så vel som i klasserommet. Relasjonen mellom observatør og informanter er dermed etablert og kan karakteriseres som god, noe som jeg anser som en styrke.

3.2.2 Teknologiske hjelpemidler

For å gjennomføre videobservasjonen brukte jeg et videokamera med lokal lagring på minnebrikke. I søknaden til NSD hadde jeg skrevet at jeg skulle bruke iPad med lokal lagring (se vedlegg 1). Ettersom datamaterialet og elevenes personvern ble ivaretatt på lik linje, altså lokalt med svært begrenset tilgang, anså jeg at søknaden til NDS sto seg uten behov for å melde fra endringer. Årsaken til dette var utelukkende kvaliteten på kamera. Fra tidligere erfaringer med videoobservasjon har det vært utfordringer knyttet til kvaliteten på videomaterialet. Ettersom videoobservasjonen danner grunnlaget for hele forskningsprosjektet, mente jeg det var viktig å ta grep for å sikre dette. Ettersom perspektivet på kameraet var begrenset ble elevene også informert i forkant at det ikke var blyant og papir tilgjengelig, men at de kunne bruke whiteboard til dette dersom de ønsket. På denne måten kunne jeg følge elevenes resonnement i samtid fremfor å fotografere de matematiske utregningene på kladdearkene etterpå.

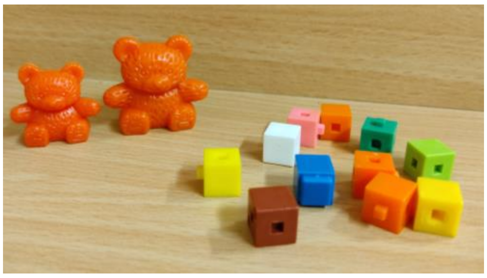
3.3 Praktisk gjennomføring

3.3.1 Valg av skole, trinn og informanter

På grunn av forskningsprosjektets omfang er informantene begrenset til et utvalg av 15 elever på 7.trinn ved en barneskole i Haugesund. Som nevnt tidligere har jeg god kjennskap til skolen og dens elever og det var derfor hensiktsmessig å gjennomføre observasjonene her. Elevene er valgt ut ved et enkelt tilfeldig utvalg (Dalland, 2017, p. 139). Samtlige elever på 7.trinn fikk forespørsel om å bli med ved at et skjema ble sendt hjem til foresatte (se vedlegg 2). I samråd med barnet kunne de foresatte som ønsket skrive under på samtykkeskjema. Ettersom elevene er under 18 år måtte foresatte signere, men det ble tydelig presisert i fremleggelsen at barnet skulle inkluderes i avgjørelsen og at samtykket kan trekkes av elevene når som helst i prosessen. Av de elevene som samtykket ble det trukket ut fem grupper bestående av tre elever på hver gruppe ved hjelp av tilfeldig gruppegenerator på nett. Av praktiske hensyn ble det trukket to og tre grupper fra hver klasse (A og B). Kjønn ble ikke hensyntatt i denne trekningen da det ikke ansees som verken nødvendig eller relevant med kjønnsfordeling for å kunne svare på forskningsspørsmålene. Elevenes navn er anonymisert. Navnene som forekommer i oppgaven er fiktive. Ola og Kari blir for eksempel navngitt ved Anders og Anna, deretter Bjørn og Berit osv.

3.3.2 Gjennomføring av observasjon

Gjennomføringen av observasjonen forløp seg på nyåret 2022. Alt datamateriale ble samlet inn på samme dag. Det ble notert ned beskrivelse og inntrykk av observasjonene umiddelbart etter hver enkelt gruppe (Dalland, 2017, p. 108). I forkant av observasjonen ble grupperommet klargjort for å tilrettelegge for fysiske representasjoner som presentert i teorikapittelet ved modeller av Lesh og Hana (Hana, 2014; Lesh et al., 1987). Ettersom det originale modellen er oversatt og utdypet i teorikapittelet brukes kun den norske oversettelsen videre. Erfaringsbaserte situasjoner kan knyttes til oppgavens ordlyd hvor elevene kan relatere til problemet ettersom det handler om å utforme statistiske diagrammer ut fra klassestørrelser. Manipulerbare modeller er i denne oppgaven tilgjengelig gjennom konkreter. I dette tilfellet ble figurer i to ulike størrelser gjort tilgengelig for elevene gjennom «bjørnefamilien». I tillegg kunne elevene benytte seg av centikuber.



Figur 3.3 – bilde av konkretiseringsmateriell som var tilgjengelige for elevene.

De ikoniske modellene i oppgaven er representert ved illustrasjonene av søylediagram og visuell fremstilling med figurer som ble brukt i presentasjonene av oppgaven. Skriftlig språk ble i denne oppgaven ivaretatt ved at tusjer ble lagt frem slik at elevene står fritt til å bruke whiteboard. Det ble også informert om at whiteboard erstattet papir på grunn av kameraets vinkel og plassering. Muntlig språk handler om all muntlig kommunikasjon. Som nevnt innledningsvis er dette et av tre perspektiver som undersøkes i denne oppgaven og kan dermed ses som en overordnet representasjon.

3.4 Bearbeiding og analyse av datamaterialet

3.4.1 Transkribering og etterarbeid

Ettersom datamaterialet ble samlet inn ved videoobservasjon var det nødvendig å transkribere observasjonene (Høgheim, 2020, p. 203). Problemstillingen var såpass kompleks at det ble nødvendig å transkribere ordrett det som ble sagt samt sette det hele i en kontekst med kroppslige uttrykk i form av gester og representasjoner. Ettersom det er et poeng å se samspillet mellom de tre var det også nødvendig å få frem alle deler av kommunikasjonen til enhver tid. Dermed ble det transkribert med utgangspunkt i en tabell:

Verbal kommunikasjon	**Gester**	**Representasjoner**

Figur 3.4 – tabell som ble bruk til transkripsjon

Deler av transkripsjonen er gjengitt i analysen. Elevene bruker mange ord på å formidle relativt lite innhold og bruker mange småord i dialogen. Dette har jeg prøvd å begrense ved å utelate det fra analysen ved å erstatte denne delen av dialogen med (…).

3.4.2 Analyseprosessen

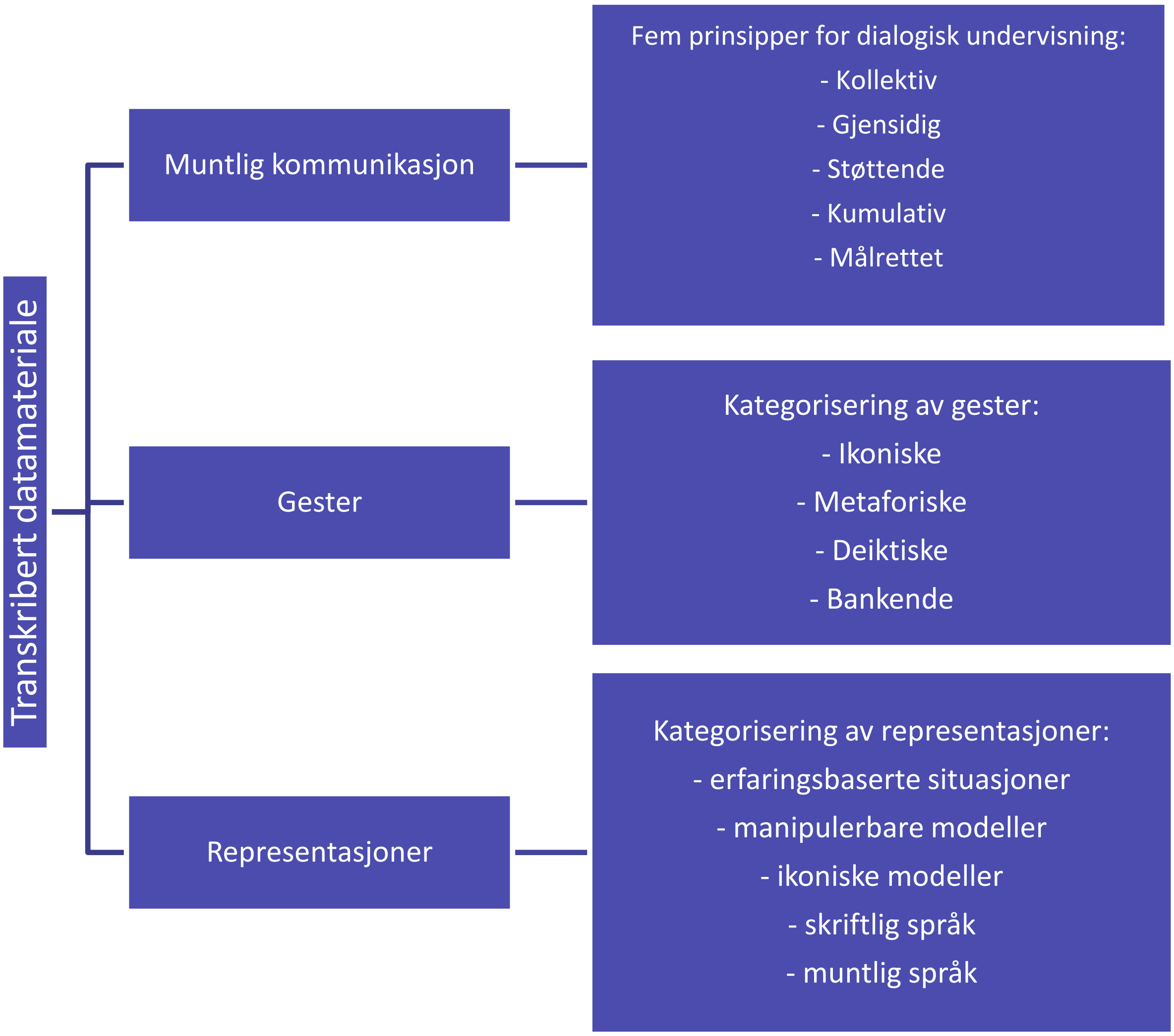
Det transkriberte datamaterialet ble lagt til grunn for en deduktiv analyse med utgangspunkt i teori rundt hver av de tre perspektivene (Høgheim, 2020, p. 208). Utgangspunktet for inndeling og kategorisering av analysen var de tre forskningsspørsmålene som ble presentert innledningsvis:

Hvordan kommuniserer elevene verbalt?
Hvordan kommuniserer elevene ved hjelp av gester?
Hvilke representasjoner bruker elevene for å utrykke matematiske ideer?

Gjennom arbeidet med analysen så jeg derimot at det ikke er hensiktsmessig ettersom de tre spørsmålene eller perspektivene i aller høyeste grad må sees i en sammenheng. Det blir unaturlig å se på gester uten den verbale konteksten de brukes i. Dette gjelder også for representasjoner. Dermed vil analysen deles opp i fire faser av prosessen, fra oppgaven deles ut til løsningen blir presentert.

Figur 3.5 - Illustrasjon av de fire stegene i problemløsningsprosessen (Lithner, 2008, pp. 257-258).

Innen de fire fasene ble det igjen kategorisert og kodet ut ifra det teoretiske rammeverket som lå til grunn. Deler av transkripsjonen er tatt med i analysen for å sette funnene i større kontekst. Dette er gjort med belegg med rot i tidligere argumentasjon om at det er lite hensiktsmessig å se på hver enkelt kategori isolert i denne sammenheng.



Figur 3.6 - Modell av den deduktive analyseprosessen.(Alexander, 2018, p. 566; Lesh et al., 1987, p. 34; McNeill, 2005, p. 76)

3.5 Etiske betraktninger og metodekritikk

I dette delkapittelet vil forskningsetiske- og metodiske retningslinjer belyses og drøftes.

3.5.1 Etiske betraktinger

Det er mange hensyn som skal tas i forskningsarbeid. Det viktigste er forskningsetiske prinsipper og retningslinjer. Det innebærer regler, verdier og normer som regulerer forskning og handler om beskyttelse og redelighet (Høgheim, 2020, pp. 85-86; Tangen, 2010, p. 318). I denne konteksten er det særlig etiske retningslinjer for forskningsdeltakere som må vektlegges tungt ettersom involverer barn. Dette er blant annet ivaretatt gjennom *forskningsetiske retningslinjer for samfunnsvitenskap og humaniora*, utarbeidet av De nasjonale forskningsetiske komiteene (NESH, 2021). Sentralt prinsippet om frivillig, informert samtykke og personvern.

3.5.1.1 Frivillig, informert samtykke

Frivillig, informert samtykke handler om at informantene skal får tilstrekkelig informasjon om forskningsprosjektet de bes om å delta i. Dette gjelder også for barn og unge. Til tross for at barn i barneskolealder er under 18 år er det et viktig etisk prinsipp at elevene selv samtykke for egen deltakelse, i tillegg til foresattes. Dette kommer tydelig frem i retningslinjene, kapittel B, punkt 17. Dette innebærer også at elevene i forskningsprosjektet kan trekke seg når som helst i prosessen, selv om foresatte har samtykket (NESH, 2021). Dette er et viktig prinsipp som må informeres om både gjennom skriftlig informasjon til barn og foresatte, men også ettertrykkelig til barna underveis i hele prosessen. Først når barna selv har fått tilstrekkelig og gjentakende informasjon i flere faser av prosessen ansees det som gyldig. Dette prinsippet ble ivaretatt slik som beskrevet i dette forskningsprosjektet ved at det i forkant ble sendt skriftlig informasjon og samtykkeskjema med hjem, i tillegg til muntlig informasjon og mulighet til å komme med spørsmål i klasserom i god tid før datainnsamling fant sted.

3.5.1.2 Personvern

Et premiss som ble lagt til grunn for denne oppgaven var at elevene ikke skulle kunne indentifiseres. Dermed er det også et viktig forskningsetisk prinsipp at dette innfris (NESH, 2021). Ettersom det ble gjort videoopptak av elevene var det særlig viktig å sikre at det kun var tilgjengelig for personer involvert i forskningsprosjektet. I forkant av datainnsamling ble det derfor sendt søknad til Norsk senter for forskningsdata (NSD) med avklaringer omkring dette (se vedlegg 1). Videre har også elevene fått fiktive navn, hvor dokument for avkoding er fysisk utskrift kun tilgjengelig for de involverte bak forskningsprosjektet. I dette ligger også prinsippet om taushetsplikt.

3.5.2 Metodekritikk

Foruten de etiske betraktningene er det også noen aspekter med metodevalget som må belyses og reflekteres over. Det innebærer kritiske refleksjoner knyttet til metode og gyldigheten av forskningsfunn. I forskningsterminologi kalles dette reliabilitet og validitet.

Reliabilitet betyr pålitelighet, og handler kort fortalt om nøyaktighet og hvor nøyaktig man måler det man sier man måler (Dalland, 2017, p. 40; Høgheim, 2020, p. 183). I dette forskningsprosjektet er intensjonen å se på hvordan elever kommuniserer i matematikk hvor kommunikasjon avgrenses til verbalt språk, gester og representasjoner. Ved å bruke kvalitativ metode og videoobservasjon som verktøy i dette arbeidet vil jeg påstå at det gjør det mulig å oppnå høy reliabilitet. Systematisk videoobservasjon som metode har vært avgjørende for analysearbeidet. Dette fordi det er mulig å gå tilbake i videoopptaket og se på datamaterialet ut fra de tre perspektivene. Det vil også kunne være kvalitetssikring ved at målingene kan vurderes av andre (Dalland, 2017, p. 119). Ettersom intensjonen i oppgaven var å se på hvilke representasjoner elevene brukte for å uttrykke og underbygge matematiske ideer, var det viktig å tilrettelegge for dette. Som nevnt tidligere ble grupperommet som ble brukt i observasjonene utstyrt med konkreter og det ble lagt til rette for at elevene kunne skrive på whiteboard. I arbeide med å velge oppgaver ble oppgaver med ikoniske modeller vektlagt (Sullivan et al., 2012, p. 23). I ettertid kan en stille spørsmål rundt dette valget og om de ikoniske modellene i oppgaven la for store føringer for hvilke representasjoner elevene brukte i arbeidet. Dermed kan en stille spørsmål om elevenes bruk av representasjoner er preget av dette og dermed ikke gir et nøyaktig bilde når det gjelder bruken av representasjoner.

Validitet handler kort fortalt om relevans og gyldighet (Dalland, 2017, p. 40). Det vil si at en har klart å måle det en har hatt intensjon om å måle (Kvarv, 2021, p. 144). Vi skiller mellom indre validitet og ytre validitet. Indre validitet handler om sikkerheten i tolkningen (Høgheim, 2020, p. 82). I systematisk observasjon er det særdeles viktig å skille mellom observasjon og tolkning (Tjora, 2017, p. 73). Det betyr at en må skille mellom hva som faktisk skjer og hva vi tror skjer. Ettersom det er mennesker som er ansvarlige er det alltid mulighet for feiltolkninger. Dalland nevner blant annet to situasjoner en skal være bevisste på. Det er lett å la seg sjarmere av informantene og dermed tolker handlingene mer positivt enn det er grunnlag for. Videre er det menneskelig at det positive blir lettere lagt merke til, og at det negative lettere blir oversett

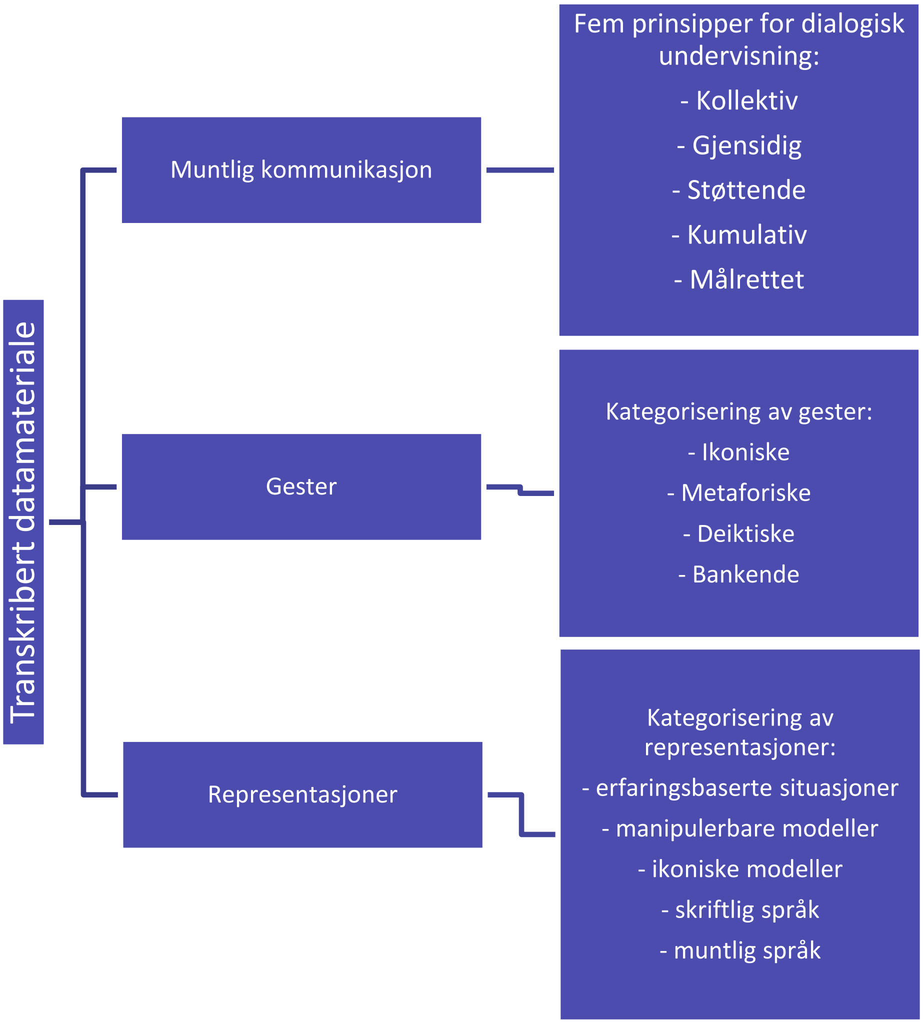
(Dalland, 2017, p. 116). Dette er kanskje særlig viktig i konfirmerende forskning (Høgheim, 2020, p. 97). Dette er derimot ivaretatt ved at alt videomateriale er transkribert ordrett i et skjema som tar for seg hvert av de tre perspektivene. Dermed er det ikke rom for tolkning utover det som står. På en annen siden er tolkning en viktig del analysearbeidet. Det som har vært krevende i dette forskningsprosjektet har vært å begrense bruk av transkripsjonen inn i analysen da kommunikasjon er dynamisk og de tre perspektivene må sees i lys av hverandre. I analysearbeidet har det vært viktig å fokusere på de tre forskningsspørsmålene som ligger til grunn for problemstilling. Dette fordi videoobservasjon som metode gir store mengder datamateriale og det er derfor viktig å kun se på det som er relevant for oppgaven. Det er derimot ikke en enkelt oppgave. Særlig fordi det ligger en forventing og motivasjon bak et forskningsprosjekt.

Ytre validitet handler i stor grad om generalisering og overførbarhet (Høgheim, 2020, p. 82). Kan man anta at slutningene som trekkes er gjeldende for andre enn de som har vært involvert? Dette er vanskelig å svare på fordi matematikkundervisningen varierer fra klasserom til klasserom og skole til skole. Dermed er det ikke gitt at en hadde kunne trekke de samme slutningene dersom en gjennomførte videoobservasjonene på en annen skole. Dette fordi det handler om elevenes forkunnskaper og erfaringer med bla. gruppearbeid, rike oppgaver og problemløsning, bruk av ulike representasjoner og lærers bevissthet knytte til gester. Likevel er kommunikasjonens rolle i matematikkfaget etablert gjennom den nye læreplanen (Utdanningsdirektoratet, 2020a). Funnene som er presentert i dette forskningsprosjektet vil dermed kunne bidra til refleksjoner rundt egen praksis, og dermed potensielt bidra til kompetanseheving.

Avslutningsvis i dette kapittelet er det hensiktsmessig å si litt om observasjonens rammer. Som nevnt tidligere i metodekapittelet så ble observasjonen gjennomført som åpen, ikke-deltakende observasjon (Kvarv, 2021, pp. 172-173). Elevene er dermed kjent med formålet med forskningsprosjektet så vel som de er klar over at de observeres og det tas videoopptak. Dette kan naturligvis forringe naturlig atferd (Kvarv, 2021, p. 173). Ettersom elevene er godt kjent observatør gjennom praksis og vikararbeid oppleves derimot atferden som tilnærmet normal.

4 Analyse

I dette kapittelet vil trender og avvik som kommer frem i datamaterialet presenteres. Hensikten med analyse er å trekke ut og tolke sentral informasjon for å kunne belyse forskningsspørsmål og/eller problemstillingen (Høgheim, 2020, p. 175). Som nevnt i kapittel 3.4.2 vil datamaterialet analyseres etter forhåndsbestemte kategorier, også kalt deduktiv analyse (Høgheim, 2020, p. 208). I denne analysen er det Alexanders fem prinsipper for dialogisk undervisning (Alexander, 2018) sammen med McNeills kategorisering av gester (McNeill, 2005) og Leshs kategorisering av representasjoner (Lesh et al., 1987) som danner analysens struktur.



Figur 4.1 - Modell av den deduktive analyseprosessen (Alexander, 2018, p. 566; Lesh et al., 1987, p. 34; McNeill, 2005, p. 76)

Analysen er delt opp i fire faser, tilsvarende Lithners fire steg i problemløsningsfasen (Lithner, 2008). Det er flere grunner til dette. Som nevnt tidligere i dette kapittelet er det nettopp et poeng at de tre perspektivene, verbal kommunikasjon, gester og representasjoner, sees i den konteksten de utrykkes i. Det er også et poeng å se på hvordan de ulike perspektivene kommer til uttrykk i de ulike fasene. Den første fasen i problemløsningsfasen, *elevene møter oppgaven*, strekker seg fra elevene får utdelt oppgaven til de har forstått oppgavens mål og hensikt. Deretter skal *elevene velge en strategi* som de skal bruke til å løse det matematiske problemet. Videre kommer fasen der *elevene anvender strategien*, det vil si at de gjør utregninger og lignende for å komme frem til en løsning. Avslutningsvis skal *elevene konkludere*.

4.1 Elevene møter oppgaven

Denne delen av prosessen skal elevene tolke og forstå oppgavens mål og hensikt. Denne delen strekker seg fra elevene får utdelt oppgaven til de kobler de to ikoniske modellene sammen.

Figur 4.1 – Illustrasjon som viser hvor elevene i problemløsningsprosessen (Lithner, 2008, pp. 257-258).

4.1.1 Gruppe 1: David, Emmanuel og Frans

Frans leser oppgaveteksten høyt og gjør dermed overgangen fra skriftlig språk til muntlig språk. Eleven fører fingeren under ordene når han leser, også kjent som lesefinger, for å orientere seg selv og muligens de andre om hvor han leser. Det som er særlig interessant med denne gruppen er at eleven leser teksten multimodalt. Frans leser altså av antall elever i 1, 2, 3 og 4 klasse som en naturlig del av oppgaveteksten og gjør dermed en naturlig overgang fra ikoniske modeller til muntlig språk. Utfordringen kommer når han skal gjøre det samme med den visuelle fremstillingen med figurer hvor han gir uttrykk for manglende forståelse:

<u>**Verbal kommunikasjon**</u>	<u>**Gester**</u>	<u>**Representasjoner**</u>
Frans: Benjamin og Ali tegnet et søylediagram. Det ser sånn ut. I første klasser var det 32 elever. I andre klasser var det 28 elever. Er det 28? Ja, 28		Bruker søylediagrammet i oppgaven til å finne frem til hvor mange elver det er i de ulike klassene

elever. I tredje klasser var det 31 elever. Er det 31 elever, nei 32 elever. Og i 4 klasse var det 36 eller noe sånn. Vet ikke, skal se nærmere på det etterpå.		.
Katrine og Charlie bestemte seg for å lage sitt diagram på en annen måte. De tegnet det slik. Syvende klasse…dette forstår jeg ikke akkurat det men?		Undersøker den visuelle fremstillingen med figurer.

En av elevene kommer med et forslag om at figurene har en verdi på ti og teller deretter med 10 om gangen samtidig som han flytter fingeren for hver gang. Ifølge det teoretiske rammeverket til McNeill defineres dette som deiktiske gester. Dette ser en også eksempel på når Emmanuel gjør koblingen mellom de to ikoniske modellene:

Verbal kommunikasjon	**Gester**	**Representasjoner**
Emmanuel: nei vent litt, gå på fjerde klasse der, fjerde klasse der. Hvis vi ser hvor mange elever det er der så kan vi se hvor mye en sånn betyr.	Holder pekefingeren på arket for å orientere de andre. Peker først på diagrammet, deretter på figurene.	Kobler søylediagrammet og den visuelle fremstillingen sammen.

4.1.2 Gruppe 2: Georg, Henrik og Dagny

Henrik leser oppgaveteksten høyt og gjør dermed overgangen fra skriftlig språk til muntlig språk. Både Henrik og Georg peker på den visuelle fremstillingen med figurer for å tydeliggjøre seg selv og de andre om hvilken illustrasjon det skal lages forklaring til. Dette kan også defineres som deiktisk gest. Henrik kommer med en påstand om hver figur har en verdi på to og viser dette ved en deiktisk gest på hver av figurene han teller på illustrasjonen på oppgavearket. Georg klarer ikke å følge med og utfordrer derfor Henriks resonnement ved å peke på en av figurene og stille spørsmål til Henriks påstand. Dette er et viktig prinsipp som kan defineres som støttende som er viktig i dialogisk undervisning:

Verbal kommunikasjon	Gester	Representasjoner
Henrik: Det er 10, det er 10, det er 10, det er 10.	Peker konstaterende på de store figurene i 7. klasse. Flytter fingeren for hver figur.	Viser til den visuelle fremstillingen med figurer.
Henrik: 10, 20, 30, 40, 1,2,3… 46.	Peker konstaterende på de store figurene i 7. klasse. Flytter fingeren for hver figur.	Viser til den visuelle fremstillingen med figurer.
Georg: Men hvorfor er det 10? Henrik: Hm?	Peker på en av de store figurene i 7.klasse	Viser til den visuelle fremstillingen med figurer.
Georg: Hvorfor sier du at det er 10?	Peker gjentakende på en av de store figurene i 7.klasse	Viser til den visuelle fremstillingen med figurer.
Henrik: jeg bare gjettet siden de er så svære.		
Georg: ler. Jeg tenker kanskje lærer, men det er jo ikke en klasse med bare lærere. Jo, det er sikkert stykker ja.	Peker på en av de store figurene i 7.klasse	Viser til den visuelle fremstillingen med figurer.
Henrik: ja, og siden det er seks der så kan det jo ikke være fem som er ganske vanlig tall så da må det være ti. Hvis ikke det er åtte eller noe sånn da. 1,2, 3, 4…	Drar pekefingeren under de små figurene i 7.klasse, deretter peker han på en av de store figurene i 7.klasse.	Viser til den visuelle fremstillingen med figurer.
Georg: 10, 40…	Bruker pekefingeren til å telle figurene i 7. klasse.	Viser til den visuelle fremstillingen med figurer.
Henrik: 46 elever.		
Georg: Det er i hele 7. trinn. Det var få folk.		

Her kommer begge guttene med en referanse som setter det hele i en kontekst. Henrik viser til størrelse, mens Georg drar referanse til lærer-elev og senere at det er «for få folk» til å være hele 7.trinn. Her gjør guttene en overgang til mentale representasjoner og erfaringsbaserte situasjoner, som uttrykkes verbalt. Videre argumenterer Henrik for at det er 10 elever i hver av de store figurene fordi det er seks små elever på 7.trinn og fem er «et vanlig tall». Dette tolker jeg som at han har en forventning om at denne oppgaven byr på noe uvanlig og kanskje vanskeligere enn det de de normalt møter i klasserommet, men dette blir bare spekulasjoner. Det som derimot kan stadfestes er Henriks håndbevegelser. Når han skal vise til de seks små figurene drar han pekefingeren horisontalt under figurene. Det kan defineres som en glidende deiktisk gest. Som en ser ut fra dialogen Henrik henvender seg til observatør når det gjelder valg av representasjoner. I den samme dialogen viser han til den visuelle fremstillingen med figurer hvor han peker gjentakende med pekefingeren. Denne gesten defineres som bankende. Det som er særlig interessant med denne gruppa er at de først ble oppmerksomme på informasjonen gitt i søylediagrammet etter at observatør gjorde dem oppmerksomme på det, og at det dermed vil være rimelig å anta at de var avhengige av støtte for å koble de to representasjonene sammen:

Verbal kommunikasjon	**Gester**	**Representasjoner**
Henrik: skal vi skrive ned svaret eller noe? (henviser til observatør)		
Observatør: dere kan gjerne skrive på tavla der hvis dere vil skrive noe ned.		Dagny: henter tusj til whiteboard
Henrik: Jeg trenger ikke å skrive.		
Georg: okei, ehm…		
Henrik: Det var bare det at vi skulle finne den der da, ikke sant? (henviser til observatør)	Peker gjentakende på den visuelle fremstillingen med figurer.	Viser til den visuelle fremstillingen med figurer.
Observatør: Dere skal finne ut hvor mange elever det er på hvert trinn.		
Georg: på hvert trinn?		
Henrik: I 1,2,3 også?	Peker på søylediagrammet.	Viser til søylediagrammet.
Observatør: 1, 2, 3, og 4. klarer dere å se ut i fra diagrammet.		
Georg: skal vi lage et diagram da?		
		Viser til søylediagrammet.

Henrik: åja, men da kan vi se på 4.klasse. 1,2,3,4.. Jeg klarer ikke å se, kan jeg få noe spisst?	Peker på søylediagrammet og bruker pekefingeren til å orientere seg og lese av.	
Georg: Hva prøver du å finne nå? Antallet i 4.klasse.		Viser til den visuelle fremstillingen med figurer for 4.klasse.
Henrik: ja, for da kan vi se hvordan de har tenkt der. For der står også 4.klasse	Peker den visuelle fremstillingen med figurer for 4.klasse.	Viser til søylediagrammet.
Georg: aha, det tenkte ikke jeg på. *(Hvisker: Jeg er ikke noe flink til dette da)*. Da kan du bare regne ut derfra da.	Peker på markeringen 40 ved y-aksen.	

Georg forstår ikke hva intensjonen til Henrik. Han stiller spørsmål om hva planen til Henrik. På denne måten er Henrik nødt til å uttrykke resonnementet enda tydeligere. Dette gjør han ved å gjøre deiktiske gester samtidig som han viser til den ikoniske modellen med figurene. Georgs respons tyder på at denne klargjøringen var avgjørende for at han kunne følge Henriks tankerekke. Her ser en altså to viktige prinsipper for dialogisk undervisning, støttende og gjensidig.

4.1.3 Gruppe 3: Berit, Celine og Carlos

Carlos tar umiddelbart initiativ til å hente konkretiseringsmateriell og peker på konkretene med pekefingeren, altså en deiktisk gest. Han velger kassen med små og store bamser. Deretter leser alle oppgaven inni seg. Carlos gir uttrykk for at han er «dritdårlig» på søylediagram. Allerede her møter elevene tre representasjoner: manipulerbare modeller, skriftlig språk og ikoniske modeller. Berit stiller spørsmål om de store figurene er voksne og små. Dette uttrykker hun samtidig som hun foretar seg to gester. Først peker på de store figurene og deretter små figurene i den visuelle fremstillingen, etterfulgt av at hun holder håndflaten vertikalt som kan tolkes som spørrende. Disse to gestene kan defineres som deiktisk og metaforiske

Verbal kommunikasjon	**Gester**	**Representasjoner**
Berit: Er det liksom voksne og det er barn eller?	Peker først på en av de store figurene i 6.klasse og deretter en liten figur i 7.klasse. Holder opp håndflaten vertikalt.	Viser til den visuelle fremstillingen med figurer.

Carlos fortsetter videre på Berit resonnement, kumulativt, om de store figurene kan være de eldste og gestikulerer først bankende og deretter deiktisk vertikalt nedover de store figurene i den den visuelle fremstillingen. Celine supplerer med å påpeke at det gjelder hele syvende trinn. For å orientere og understreke drar hun pekefingeren horisontalt langs figurene på 7.trinn som en glidende deiktisk gest:

Verbal kommunikasjon	**Gester**	**Representasjoner**
Carlos: Kan dette være de eldste da? 7, 6, 5, 4.	Peker førts gjentakende på en av de store figurene på 7. trinn deretter på de store figurene i hver klasse fra 6 ned til 4.	Viser til den visuelle fremstillingen med figurer.
Celine: ja, men det er hele syvende trinn.	Drar pekefingeren horisontalt under og langs figurene på 7 trinn.	Viser til den visuelle fremstillingen med figurer
Carlos: ja, da er noen lave da.		
Berit og Celine ler.		

Berit stiller spørsmål om hva som er målet ved oppgaven. Celine teller ved å gjøre deiktisk gest med pekefingeren (McNeill, 2005). Videre reflekterer hun over svaret. Dette kan tolkes som en refleksjon opp mot det Lesh karakteriserer som erfaringsbaserte situasjoner. Ettersom dette er en mellomstor skole, er klassestørrelsene på mellom 20-30 elever og dermed vil svaret kunne forkastes ut fra elevenes egen kontekst:

Verbal kommunikasjon	**Gester**	**Representasjoner**
Berit: skal vi bare telle de liksom?	Holder opp håndflaten vertikalt (spørrende)	
Celine: ja, men det er jo bare 1,2 3,4, 5. Er det fem personer i 5.klasse?	Bruker pekefingeren til å telle figurene i 5.klasse	Viser til den visuelle fremstillingen med figurer.

Carlos tar initiativ til å lese oppgaveteksten høyt og dermed gjør en overgang fra skriftlig til muntlig språk. Berit kontrer med å be de andre telle figurene i 7.klasse. Det viser hun ved deiktiske gester samtidig som hun teller figurer i 7.klasse. Carlos klarer ikke å følge Berits resonnement og stiller spørsmål. Celine bygger videre på Berits resonnement og foreslår at hver figur tilsvarer to elever. Dette viser hun ved å utføre en deiktisk gest i form av at hun peker på en av figurene i 7.klasse. Her ser vi eksempler på flere nøkkelprinsipper for dialogisk undervisning, støttende og kumulativ. En ser brudd på prinsippet om at dialogen er støttende ved at Carlos ikke får svar på det han lurer på og at de to andre dermed ikke forsøker å hjelpe han slik at de etablerer en felles forståelse. Celine på sin side tar over ved at hun kumulerer Berit tankerekke. Videre leser Carlos oppgaveteksten høyt og bruker pekefingeren som lesefinger og drar fingeren under ordende og flytter fingeren i en glidende bevegelse vertikalt som en glidende deiktisk gest. Underveis stopper han opp og peker med pekefingeren på søylediagrammet. Det er rimelig å anta at dette var for å orientere seg selv og de andre når en ser det verbale og gestikulerende uttrykket sammen. Berit peker med pekefingeren på oppgaveteksten som står under illustrasjonene og gjør oppmerksom på at det muligens står noe mer i oppgaven:

Verbal kommunikasjon	**Gester**	**Representasjoner**
Carlos: kanskje hvis vi leser høyt?		
Berit: ja, men bare tell de.	Bruker pekefingeren til å telle figurene i 7.klasse	Viser til den visuelle fremstillingen med figurer.
Carlos: ja, men hva mener du med det?		
Celine: ja, men er disse to personer da liksom?	Peker på en av de store figurene i 7.klasse.	Viser til den visuelle fremstillingen til figurer.
Berit: det er 10 stk.		
Celine: ja, men der er det fem.	Peker på figurene i 5.klasse.	Viser til den visuelle fremstillingen til figurer.
Carlos: 4. klasse laget diagrammer…….Benjamin og Ali tegnet et søylediagram. Det ser sånn ut.	Bruker pekefinger som lesefinger.	Viser til ordlyden i oppgaveteksten.
Carlos: det er nok…	Peker på søylen for 4.klasse søylediagrammet	Viser til søylediagrammet.
		Viser til oppgaveteksten.

Berit: ja, men det er sikkert noe nede der og.	Peker på oppgaveteksten under illustrasjonene.	

Carlos tar igjen ansvar for å lese oppgaveteksten høyt, mens de to andre prøver å finne verdien på figurene. Det foregår altså parallelle prosesser, noe som er brudd på prinsippet om gjensidighet. Målet med oppgaven blir tydeligere for elevene når Carlos leser høyt, men veien dit er fortsatt uklart. Nok en gang viser elevene til erfaringsbaserte situasjoner når det gjelder klasse – og trinnstørrelser og høyde på elevene når det gjelder den visuelle fremstillingen med figurer. Elevene bruker deiktiske gester aktivt for å orientere seg selv og andre. Elevene henvender seg til observatør for veiledning. Det er først nå elevene kobler de to illustrasjonene sammen. Detter kommer tydelig frem ved at Berit bruker deiktiske gester for å etablere og vise koblingen mellom de to illustrasjonene, eller de to ikoniske modellene. Ettersom observatør må gi ganske tydelige føringer er det derfor rimelig å anta at de var avhengige av hjelp for å løse oppgaven innen rimelig tid:

Verbal kommunikasjon	**Gester**	**Representasjoner**
Carlos: Læreren kom og tok en titt på arbeidet deres………Kan du finne ut hvor mange elever det var totalt i 5., 6. og 7. klasse?	Bruker pekefinger som lesefinger.	Viser til ordlyden i oppgaveteksten.
Celine: ja, 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12….24. Det er jo en klasse liksom. Dette arket ga ikke mening.	Bruker pekefingeren til å telle alle figurene i den visuelle fremstillingen med figurer.	Viser til den visuelle fremstillingen til figurer.
Carlos: er det liksom at dette er en klasse er alle disse til høyre eller er det flere klasser? (henvender seg til observatør).	Peker med pekefingeren på den visuelle fremstillingen med figurer.	Viser til den visuelle fremstillingen til figurer.
Berit: Det står jo her. 7, 6, 5, 4.	Peker først på oppgaveteksten over illustrasjonene. Deretter på den visuelle fremstillingen med figurer	Viser til oppgaveteksten og den visuelle fremstillingen til figurer.
Celine: Men er det sånn seriøst bare fem folk på trinnet i 5.klasse? (henviser til observatør)	Peker med pekefingeren på den visuelle fremstillingen med figurer for 5.klasse.	Viser til den visuelle fremstillingen til figurer.
Observatør: alle vet hvor mange det er i 4.klasse.		

Berit: ja, det er 1,2,3,4,5,6,7,8. (henviser til observatør).	Bruker pekefingeren til å telle figurene i 4.klasse	Viser til den visuelle fremstillingen til figurer.
Observatør: begge diagrammene viser 4.klasse. Hvor mange elever det er i 4.klasse.		
Celine: åja vent, vi har ikke sett på denne.	Peker med pekefingeren på søylen som viser 4.klasse i søylediagrammet	Viser til søylediagrammet.
Carlos: eh, jo.		
Celine: den har, nei vent, faen. Jeg trenger noe…	Bruker pekefingeren til å telle seg oppover y-aksen i søylediagrammet.	Viser til søylediagrammet.
Carlos: 31,32,33,34,35,35, 36.	Bruker pekefingeren til å telle seg oppover y-aksen i søylediagrammet.	Viser til søylediagrammet
Berit: 36 folk i 4. 36! (henviser til observatør.	Peker med pekefingeren på søylen som viser 4.klasse i søylediagrammet, deretter peker hun på den visuelle fremstillingen med figurer for 4.klasse.	Viser til søylediagrammet og den visuelle fremstillingen med figurer.
Celine: på trinnet?		
Berit: I klassen.		
Celine: hæ? Er det i klassen eller trinn? (henviser til observatør.		
Carlos: nei, det er trinn.		
Observatør: ikke heng dere for mye opp i det.		
Celine. Ok.		
Berit: 36, skal jeg bare skrive det.		Skriver 4= 36 på whiteboard.

Berit bruker skriftlig språk i form av matematiske symboler når hun skriver på whiteboard.

4.1.4 Gruppe 4: Jens, Ismail, Kjell

Elevene leser oppgave teksten hver for seg inni seg. Når alle er ferdig oppsummerer Ismail hva som er hensikten med oppgaven, og Kjell supplerer og bekrefter:

Verbal kommunikasjon	**Gester**	**Representasjoner**
Ismail: så vi skal finne ut det sant og forklare det på en litt annen måte.	Peker med pekefingeren på figurene flere ganger. Flytter fingen nedover for hvert trinn.	Viser til den visuelle fremstillingen.
	Ismail: bruke pekefingeren som lesefinger til å lese spørsmålene under illustrasjonene på nytt.	
Kjell: hvor mye det var totalt i femte, sjette og syvende.		Viser til ordlyden.
	Ismail: Bruker pekefingeren til å telle figurene i 7.klasse. Flytter bortover etter hvert som han teller.	Viser til den visuelle fremstillingen.
	Ismail: Bruker pekefingeren til å telle de små figurene i hver klasse. Flytter bortover og deretter nedover etter hvert som han teller.	Viser til den visuelle fremstillingen.

I denne delen av prosessen er Ismail allerede i gang med å orientere seg selv og de andre om den informasjonen som er tilgengelig. Han bruker deiktiske gester til dette, i tillegg bruker han pekefingeren aktivt når han teller figurene. Det blir etter hvert tydelig at veien til målet er uklart:

Verbal kommunikasjon	**Gester**	**Representasjoner**
Ismail: okei…der er det.. hvordan skal man gjøre denne da?		Viser til søylediagrammet.
Kjell: vi skulle bare plusse liksom…det er jo 1,2,3,4, 5 i femte klasse.	Bruker pekefingeren til å telle figurene i 5.klasse. Flytter bortover etter hvert som han teller.	Viser til den visuelle fremstillingen.
Kjell: 1,2,3,4, 5…		Viser til den visuelle fremstillingen.

	Bruker pekefingeren til å telle figurene i 6.klasse. Flytter bortover etter hvert som han teller.	

Ismail påpeker at figurene er av ulike størrelser. Jens mener at der ikke er av vesentlig betydning, mens Kjell er enig i Ismails resonnement. Kjell støtter Ismail ide og bidrar med forslag til hva som kan være verdien på figurene. Her ser vi eksempel på dialogisk undervisning ved prinsippet om dialogen er gjensidig og kumulativt. Den verbale kommunikasjonen suppleres med deiktiske gester i form av peking med pekefingeren på figurene i den ikoniske modellen. Kjell tar initiativ til å sjekke ut hypotesene opp mot søylediagrammet, Jens slenger seg på, men blir avbrutt av Ismail som tar over og konstaterer at det er 36 elever i 4.klasse. Her ser vi brudd på prinsippet om gjensidighet. Han viser denne koblingen ved hjelp av deiktiske gester som kobler de to ikoniske modellene sammen:

Verbal kommunikasjon	**Gester**	**Representasjoner**
Ismail: ja, men de er jo større enn de små der.	Peker med pekefingeren på de store figurene og deretter de små i 6.klasse.	Viser til den visuelle fremstillingen.
Jens: jeg tror ikke det er så mye forskjell.		
Kjell: ja, hva betyr det at de er større liksom?		
Ismail: det kan være at en sånn er 10, eller en sånn er 5, eller en sånn er 2.	Peker gjentakende tre ganger med pekefingeren på en av de store figurene i 4.klasse.	Viser til den visuelle fremstillingen.
Jens: jeg tror ikke det er forskjell egentlig.		
Ismail: ja, men altså, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.	Bruker pekefingeren til å telle figurene i 7.klasse. Flytter bortover etter hvert som han teller.	Viser til den visuelle fremstillingen.
Kjell: det kan jo ikke være 10 for her er det jo….	Bruker pekefingeren til å lese av søylediagrammet.	Viser til søylediagrammet.
Jens: ja men der er for…		

Ismail: Altså fjerde, der står det fjerde klasse.	Bruker pekefingeren til å peke på søyla for fjerde klasse i søylediagrammet.	Viser til søylediagrammet.
Ismail: I fjerde klasse så er det…31, 32, 33, 34, 35, 36.	Bruker pekefingeren til å lese av søylediagrammet.	Viser til søylediagrammet.
	Ismail: Legger pekefingeren under den første av de store figurene i 4.klasse.	Viser til den visuelle fremstillingen.

4.1.5 Gruppe 5: Anna, Bjørn og Ali

Elevene leser oppgaveteksten inni seg. Bjørn avbryter med å stille spørsmål til størrelsen på figurene. Dette kan karakteriseres som erfaringsbaserte situasjoner ved at han setter størrelsesforholdet opp mot en kjent kontekst ved lærer-elev:

Verbal kommunikasjon	**Gester**	**Representasjoner**
Bjørn: er det sånn at de store der er voksne? Også er det elevene eller?	Peker først med pekefingeren på de store figurene i 6.klasse, deretter på de små figurene i 6.klasse.	Viser til den visuelle fremstillingen med figurer.

Samtlige leser videre. Ali er først ferdig og begynner å telle langs y-aksen på søylediagrammet. Anna anerkjenner Alis handling og bygger videre på Alis intensjon om å lese søylediagrammet. Anna kumulerer Ali basert på gestene til Ali. Det er også rimelig å anta at elevene har arbeidet en del med søylediagram tidligere som gjør at elevene enklere kan gå i gang med å lese av informasjonen i denne ikoniske modellen. Elevene bruker pekefingeren aktivt og gjør deiktiske gester for å orientere seg selv og de andre om hvor de er i prosessen. Ali gir uttrykk for at det er vanskelig å lese av søylediagrammet og gjør en glidende deiktisk gest vertikalt over y-aksen for å understreke den verbale kommunikasjonen:

Verbal kommunikasjon	**Gester**	**Representasjoner**
Anna: jeg tror kanskje den er lettest å forstå.	Peker med pekefingeren på søylediagrammet. Peker på den gule søyla for 4.klasse.	Viser til søylediagrammet.
		Viser til søylediagrammet.

Ali: det er litt vanskelig å se…ehm.. de linjene så jeg klarer ikke å telle dem skikkelig.	Gestikulerer med den ene hånda i pausen (ehm). Drar fingeren opp og ned i lufta over y-aksen.	Viser til søylediagrammet.
Bjørn: den der er på 32.	Peker med pekefingeren på den røde søyla for 1.klasse.	

Elevene samarbeider om å lese av diagrammet. Deretter gjør samtlige elever overganger fra ulike representasjoner. Bjørn gjør en overgang fra ikoniske modeller til muntlig språk når han leser av søylediagrammer høyt for de to andre Han bruker pekefingeren og gjøre en deiktisk gest når han leser av søylediagrammet. Ali og Anna gjør en ytterligere overgang ved å gå fra muntlig språk til skriftlig språk ved å skrive matematiske symboler på tavla:

Verbal kommunikasjon	**Gester**	**Representasjoner**
Bjørn: nummer fire er 36.	Bjørn og Ali bruker pekefingeren til å lese av søyla til 4.klasse.	
Ali: ja, nummer fire er 36 da.	Reiser seg og går mot whiteboard.	
Bjørn: Nummer fire er 36. Nummer en og tre er 32 og nummer to er 29.	Bruker pekefingeren til å telle på y-aksen.	Ali: skriver 36 på whiteboard.
Anna: vi kan skrive fjerde klasse er 36.	Reiser seg og går mot whiteboard.	Ali: korrigerer etter innspill fra Anna. Legger til 4. slik at det står 4.36 på whiteboard.
Anna: og hva var en og tre? Var det 32? Bjørn: ja. Og 2 var 29		Anna: skriver 1. og 3. = 32. Ali: legger til 2.29 under det han har skrevet.

Elevene har så langt funnet ut hvor mange elever der er i 1, 2, 3, og 4 klasse ved å lese av søylediagrammet. Elevene er derimot usikre på hvordan de skal bruke denne informasjonen til å løse oppgaven. Elevene henvender seg til observatør for veiledning. Ettersom observatør må veilede en del før de kommer frem til fremgangsmåten er det rimelig å anta at de ikke hadde klart å løse oppgaven innen rimelig tide alene. Det er først etter flere oppfølgingsspørsmål fra observatør at Ali kobler de to ikoniske fremstillingene sammen. Dette gjør han ved å bruke deiktiske gester med tusjen som forlengelse til å peke på de to illustrasjonene.

Verbal kommunikasjon	Gester	Representasjoner
Ali: okei, skal vi gjøre… er de to forskjellige oppgaver eller betyr de det samme? (henviser til observatør.	Peker med pekefingeren på de to ulike oppgavene.	Viser til ordlyden i oppgaven.
Observatør: du må se på begge to for å finne løsningen.		
Ali: ah, okei.		
Ali: så det er å finne ut alle elevene i fire klassene? (henviser til observatør)	Holder oppe fire fingre.	Viser til ordlyden i oppgaven.
Observatør: hva står det i teksten da?		
Bjørn: ja, det er 30.		
Anna: det kan jo være at de består av….		
Observatør: har dere lest hele teksten helt ned?		
Ali: ja.		
(pause)		
Bjørn: altså, er alle de elever? For da er det ganske enkelt å…		
Anna: ja, men jeg tror kanskje de liksom betyr….	Drar pekefingeren under figurene i 6.klasse	Viser til den visuelle fremstillingen med figurer.
Ali: ja, men… der er fjerde klasse og der er fjerde klasse. Så det betyr at der så er det 36.	Peker med enden på tusjen først på den gule søyla i søylediagrammet, deretter på raden med figurer i 4.klasse. Peker deretter gjentakende to ganger på raden med figurer.	Viser til søylediagrammet. Viser til den visuelle fremstillingen med figurer.

Også her ser vi eksempel på brudd om gjensidighetsprinsippet i dialogisk undervisning ved at Anna blir overkjørt av Ali og Bjørn når hun kommer med innspill.

4.1.6 Oppsummering av fasen hvor elevene møter oppgaven

Av de fem gruppene var det to grupper som leste oppgaveteksten høyt i gruppa og tre grupper som leste oppgaven hver for seg. Gruppe 1, David, Emmanuel og Frans, leste oppgaveteksten høyt, og multimodalt, og koblet de to ikoniske modellene sammen uten hjelp. Gruppe 2, Georg, Henrik og Dagny, leste også oppgaveteksten høyt, men måtte ha hjelp for å koble de to modellene sammen. Gryppe 3, Berit, Celine og Carlos, og gruppe 5, Anna, Bjørn og Ali, leste oppgaven hver for seg og måtte ha hjelp til å koble de to ikoniske modellene sammen. Gruppe 4, Jens, Ismail og Kjell, leste oppgaven hver for seg og klarte å koble de to ikoniske modellene.

Samtlige grupper brukte de ikoniske modellene i oppgaven aktivt og var dominerende på lik linje som muntlig språk. En av gruppene hentet konkretiseringsmateriell, men brukte det ikke. To av gruppene skrev deler av informasjonen fra søylediagrammet på whiteboard og gjorde dermed overgang fra ikoniske modeller til muntlig språk til skriftlig språk i form av matematiske symboler. To av gruppene satte det hele inn i en kontekst og en så dermed eksempel på erfaringsbaserte situasjoner.

Samtlige grupper koblet de to ikoniske modellene sammen ved å bruke deiktiske gester. Deiktiske gester var dominerende og ble brukt til å orientere, påpeke og telle. Elevene brukte også lesefinger da de leste teksten, en glidende deiktisk gest. En så også eksempler på bankende og metaforiske gester.

Når det gjelder prinsippene om dialogisk undervisning så en flere eksempler på at dialogen er støttende, gjensidig og kumulativ. Samtidig så en også brudd på prinsippene om at dialogen må være støttende og gjensidig ved at det foregikk parallelle prosesser i gruppene.

4.2 Elevene velger strategi

Denne delen av prosessen handler om å finne en strategi for å utlede figurenes verdi. Denne fasen strekker seg fra elevene har etablert at det er 36 elever i 4.klasse til de har konkludert med verdien på de store og de små verdiene i den visuelle fremstillingen med figurer.

Figur 4.2 – Illustrasjon som viser hvor elevene i problemløsningsprosessen (Lithner, 2008, pp. 257-258).

4.2.1 Gruppe 1: David, Emmanuel og Frans

For å finne frem til verdien på figurene må elevene ta utgangspunkt i informasjonen gitt i søylediagrammet. Elevene har allerede etablert at det er 36 elever i fjerde klasse og må nå bruke den informasjonen til å finne verdien på de store og de små figurene i den visuelle fremstillingen med figurer. For å komme frem til svaret benytter elevene seg av en strategi med prøving og feiling hvor de prøver seg frem med ulike verdier til de finner en gyldig verdi:

Verbal kommunikasjon	**Gester**	**Representasjoner**
Frans: I fjerde klasse så var det 31, 32….. 36 elever i fjerde klasse ja.	Pekefinger glir langs y-aksen for å lese av søylediagrammet.	Bruker søylediagrammet i oppgaven til å finne frem til hvor mange elver det er i 4. klasse.
Emmanuel: Da kan dette være 6 da. 6, 12, 24.. det blir feil.	Peker på hver enkelt figur. Slipper opp og flytter fingen for hver gang.	Prøver seg frem til riktig verdi ved hjelp av den visuelle fremstillingen med figurer.
Frans: ja, men disse er sikkert mindre. Hvis du tar 24, 27, 28..	Drar pekefingeren frem og tilbake under de fire små figurene.	
Emmanuel: kanskje disse er 1 for eksempel?	Peker gjentakende på de små figurene.	
Frans: ja, det kan faktisk være det. Det er 34? hmm..Kanskje du tar ehh..	Peker på hver enkelt figur. Slipper opp og flytter fingen for hver gang.	

Ved denne strategien ser en eksempler på kumulativt prinsipp. Videre ser vi at gestene spiller en viktig del av kommunikasjonen ved at det har en orienterende funksjon, som er typisk for bankende og deiktiske gester. Dette gjelder også representasjoner og i dette tilfellet de ikoniske modellene som fungerer som støtte i kommunikasjonen, og som legger til rette for bruk av gester. Med dette mener jeg at ved å ha ikoniske modeller tilgjengelig blir det naturlig for elevene å bruke de aktivt i kommunikasjonen og at gester fungerer som bindeledd mellom muntlig språk og ikoniske modeller.

Verbal kommunikasjon	**Gester**	**Representasjoner**
David: Så man skal lage en enklere versjon?	Peker på den visuelle fremstillingen med små og store figurer.	
Emmanuel: man skal lage et sånn diagram på en måte.	Peker gjentakende på søylediagrammet (gjentakende beats).	Viser til søylediagrammet
Frans: Så når vi vet hvordan den løses ut så kan vi finne ut hvordan det blir.	Kobler de to diagrammene sammen ved å flytte pekefingen sidelengs mellom de fremstillingene.	Kobler søylediagrammet og den visuelle fremstillingen sammen.

David har så langt ikke vært delaktig i problemløsningsprosessen. Han stiller spørsmål til de to andre slik at de kan oppklare hva de tenker og gjør. De to gir derimot ulike svar om hva som er intensjonen med oppgaven. Ettersom det er ganske overfladiske forklaringer hvor de attpåtil ikke følger opp ytterligere for å sikre at David henger med vil jeg definere dette som svak oppnåelse når det kommer til prinsippet om at det skal være støttende. Dette har de heller ikke etablert intensjonen med oppgaven tidligere i prosessen. For å understreke koblingen mellom de to ikoniske modellene bruker Frans pekefingeren og gjør deiktiske gester mellom de to illustrasjonene.

Verbal kommunikasjon	**Gester**	**Representasjoner**
Frans: det kan jo også være at det bare er 0.5 fordi at 8, 16, 24, 32.	Drar fingeren under de små figurene.	Prøver seg frem til riktig verdi ved hjelp av den visuelle fremstillingen med figurer.
Emmanuel: De kan ikke ha halve elever, det blir jo….		
Frans: ja, det blir også dumt, men. 7, 14, 21, 28.	Peker på hver enkelt figur. Slipper opp og flytter fingen for hver gang.	Viser til den visuelle fremstillingen med figurer
Emmmanuel: nei, jeg har en ide, jeg har en ide, jeg har en ide, jeg har en ide. Siden dette var 46.	Peker på diagrammet med små og store figurer. Peker på søylediagrammet.	Viser til søylediagrammet.

Frans: 36. Nei, hvor mange er det? Det er… 36.	Drar pekefingeren vertikalt langs y-aksen for å lese av søylediagrammet.	Viser til søylediagrammet.
David: den plukker jeg opp etterpå.		David får øye på konkreter og henter kassen med centikuber. Tar en håndfull og mister på gulvet.
De to andre flirer.		
Frans: 36 elever.		
Emmanuel: Hvis det er 36 elever så er dette her 36 elever. Det betyr at dette her er….	Peker på søylediagrammet som viser antall elever i 4.klasse. Peker konstaterende med pekefingeren og drar under den visuelle fremstillingen med små og store figurer for fjerde klasse. Forflytter seg opp til femte klasse.	Viser til søylediagrammet. Viser til den visuelle fremstillingen med figurer
Frans: vent litt, hvis det er 36? 8, 16, 24, 32, 33,34,35,36.	Peker med begge pekefingrene på figurene i den visuelle fremstillingen. Teller	Viser til den visuelle fremstillingen med figurer
Emmanuel: det betyr at det er 8 og det er 1.	Peker konstaterende med pekefingeren på den store figuren og den lille figuren i den visuelle fremstillingen.	Viser til den visuelle fremstillingen med figurer
Frans: ja, hver sånn er 8 og hver sånn er 1.	Peker konstaterende med pekefingeren på den store figuren og den lille figuren i den visuelle fremstillingen.	Viser til den visuelle fremstillingen med figurer

Frans foreslår at de små figurene har en verdi på 0,5. Emmanuel argumenterer mot dette med utgangspunkt i at de ikke kan ha halve elever. Han setter dermed opp mot erfaringsbaserte situasjoner og en virkelig kontekst som gjør at de utelukker 0,5 som verdi. Her ser et eksempel på prinsippet om gjensidighet ved at Emmanuel anerkjenner Frans sin tankerekke, samtidig som en ser kumulativt prinsipp ved at Emmanuel går videre med Frans sin ide, og kommer med motargument. Deretter prøver de seg først med 7 og deretter med 8 som verdi for de store figurene. Deiktiske, glidende deiktiske og bankende gester er dominerende i denne fasen og har til hensikt å orientere og konstatere sammenhenger. Foruten de to ikoniske modellene, henter David manipulerbare modeller

eller konkreter i form av. Han tar derimot ikke i bruk konkretene som er verktøy eller hjelpemiddel i problemløsingen, men sitter og fikler med centikubesene uten mål og mening.

4.2.2 Gruppe 2: Georg, Henrik og Dagny.

Elevene konstaterer at det er 36 elever i 4.klasse ved å lese av søylediagrammet. Deretter skriver de tallet 36 på tavla. Elevene har gjort tre overganger fra ikoniske modeller → muntlig språk → skriftlig språk. Neste steg for elevene finne ut hvilken verdi de ulike figurene har. Til dette bruker de en strategi som består av prøve og feile:

Verbal kommunikasjon	**Gester**	**Representasjoner**
Henrik: Det er fire.	Drar pekefingeren under de fire små figurene.	Viser til den visuelle fremstillingen med figurer for 4.klasse.
Henrik: Hvis vi går ut fra at det er en. Georg: ja.	Peker gjentakende på en av de små figurene.	Viser til den visuelle fremstillingen med figurer for 4.klasse.
Henrik: Hvis det er fem på alle de da.	Peker på en av de store figurene i den visuelle fremstillingen med figurer for 4.klasse.	Viser til den visuelle fremstillingen med figurer for 4.klasse.
Henrik: ja, men det gir ikke mening for her har de tegnet bare fem sånne små.	Peker på de små figurene i den visuelle fremstillingen med figurer for 5.klasse.	Viser til den visuelle fremstillingen med figurer for 5.klasse.

Her ser vi at gester er en viktig del av kommunikasjonen og brukes i stor grad til å orientere seg selv og andre om hvor en er i tankerekken. Enkel deiktisk gest i form av peking er dominerende, men en ser også eksempler på glidende deiktisk gest samt bankende gester. I denne delen av prosessen støtter elevene seg også mye på den ikoniske modellen. Den brukes aktivt i telling der elevene forflytter pekefingeren horisontalt på illustrasjonen på arket. Elevene bemerker også størrelsesforskjellene på de to figurene. Dette kommer særlig til uttrykk på når de ser på femte klasse. Her mener Henrik at det «gir ikke mening» å bare ha fem små. Det er uklart hva han tenker med det. Det som er interessant er hvordan elevene justerer seg etter noen runder med prøving og feiling. Med utgangspunkt i at figurene kunne ha en verdi på 10 og 5 resonnerte de seg frem til at det måtte være en verdi som ligger imellom dette:

Verbal kommunikasjon	**Gester**	**Representasjoner**
Henrik: Og hvis det er 10 så blir det 40.	Peker på en av de store figurene i den visuelle fremstillingen med figurer for 4.klasse.	Viser til den visuelle fremstillingen med figurer for 4.klasse.
Georg: ja, men hvis de hadde vært 5 så hadde det blitt 20.	Legger hånden under den visuelle fremstillingen med figurer for 4.klasse.	Viser til den visuelle fremstillingen med figurer for 4.klasse.
Henrik: dette her kan ikke være 5 eller 10. 7 kanskje? 14, hva er 14 + 14?	Peker på de store figurene i den visuelle fremstillingen med figurer for 4.klasse.	Viser til den visuelle fremstillingen med figurer for 4.klasse.
Georg: eh, 28.		
Henrik: 8, 16, 32. Det blir 32.	Peker på de store figurene i den visuelle fremstillingen med figurer for 4.klasse. Forflytter samtidig som han teller.	Viser til den visuelle fremstillingen med figurer for 4.klasse.
Henrik: åjaa, det er 8 på hver sånn tror jeg.	Peker på de store figurene i den visuelle fremstillingen med figurer for 4.klasse.	Viser til den visuelle fremstillingen med figurer for 4.klasse.

Her ser vi at elevene bruker deiktiske gester aktivt og fungerer som bindeledd mellom muntlig verbalt språk og ikoniske modeller. Samspillet mellom de to elevene kan også defineres som gjensidig og kumulativt.

4.2.3 Gruppe 3: Berit, Celine og Carlos

På lik linje med de andre gruppene benytter også denne gruppen seg av strategien prøve og feile. Det er Berit som leder an og som forklarer de andre veien videre. Berit bidrar støttende i dialogen. Vi ser også at Berit kommer inn på løsningen ganske raskt, men at det forsvinner i de to andres resonnement:

Verbal kommunikasjon	**Gester**	**Representasjoner**
Berit: men, vi må finne ut hvordan dette blir 36 da.	Bruker tusjen til å peke sidelengs flere ganger under figurene i 4.klasse (slide). Slår pekefingeren i bordet flere ganger.	Viser til den visuelle fremstillingen med figurer.
Celine: åjaaa!		

Carlos: da kan det være 36 i alt da, kan det ikke det?		
Celina: da må vi finne ut hvordan dette…	Peker den visuelle fremstillingen med figurer.	
Carlos: ja, men kan det være 36 i alt?	Celine tar opp håndflaten mot Carlos.	Viser til den visuelle fremstillingen med figurer.
Celine: jo, jeg tror jeg vet, kanskje…nei.	Holder begge pekefingerene under de store figurene i 4.klasse.	Viser til den visuelle fremstillingen med figurer.
Berit: 8..		
Celine 10, 20.. jeg tenkte sånn 10, 20, 30, men kanskje 5,10,15,20.	Forflytter pekefingeren under de store figurene i 4.klasse etter hvert som hun teller.	Viser til den visuelle fremstillingen med figurer.
Berit: 25.		
Celine:nei, det går heller ikke.		
Carlos: 5, 10, 15, 20, hvilket tall var det, 36?	Forflytter pekefingeren under de store figurene i 4.klasse etter hvert som han teller.	Viser til den visuelle fremstillingen med figurer.

Med utgangspunkt i prinsippene for dialogisk undervisning ser vi at elevene bryter med dette ved at de ikke lytter og vurderer det Berit. Det kan defineres som brudd på prinsippet om gjensidighet. På den andre siden kan vi si at de til en viss grad kumulerer hverandre etterpå. Elevene bruker deiktiske gester aktivt til å koble muntlig språk og ikoniske modeller. Videre ser en også at elevene bruker mye tid på å drøfte figurenes størrelse:

Verbal kommunikasjon	**Gester**	**Representasjoner**
Carlos: kan det være de voksne da?		
(…)		
Celine: her er det jo ikke barn i klassen en gang.	Peker på figurene i 5.klasse.	Viser til den visuelle fremstillingen med figurer.
Berit og Celine ler.		
(…)		

Celine: nei, men.. tror du ikke de små betyr litt mindre da?		
Alle ler.		
Celine: hva?		
Carlos: jo, det kan være 6, 12, 18, 24, 2, 4, 6, 8. 8 + 24 er..	Peker på figurene i 4.klasse etter hvert som han teller.	Viser til den visuelle fremstillingen med figurer.
Celine: så alle er fire da?		
Berit: 36		
Carlos: er det det? Nei..		
Berit: nei, det er 32. Jeg er litt dum.		
Carlos: nei.		
Celine: ja, men så alle de små og de store skal bety fire da?	Peker først på de små figurene, deretter på de store figurene i 4.klasse	Viser til den visuelle fremstillingen med figurer.
Berit: ja, vi bare sier at de er fire.	Peker med tusjen på figurene i 4.klasse	Viser til den visuelle fremstillingen med figurer.

Elevene har en forventing til at størrelsesforholdet mellom de to figurene er avgjørende. Dette brukes også som argumentasjon for å forkaste at alle figurene har en verdi lik fire ettersom de små trolig betyr mindre som Celine påpeker. Her ser en at elevene gjør en overgang fra ikoniske modeller til muntlig språk og erfaringsbaserte situasjoner. De to andre ler av resonnementet til Celine som gjentatte ganger prøver å holde fast ved sitt perspektiv. Dette vil jeg påstå er et brudd på prinsippet om gjensidighet ved at de ikke anerkjenner Celines bidrag og de viser mangel på støtte. De lander til slutt på at hver figur har en verdi på 4, og som dermed gir 32 og ikke 36 elever i 4.klasse. Dette til tross for at Berit tidligere i prosessen har skrevet 4 = 36 på whiteboard. Muntlig språk overstyrer dermed arbeidet som er gjort tidligere ved å gå fra ikoniske modeller til skriftlig språk.

4.2.4 Gruppe 4: Jens, Ismail og Kjell

Guttene prøver seg frem ved ulike verdier på figurene. De benytter seg av prøve å feile strategi på lik linje som de andre gruppene. Det som derimot er interessant er at guttene presenterer en helt unik løsning:

Verbal kommunikasjon	**Gester**	**Representasjoner**
Ismail: 10, 20, 30, 40. 40 minus 4.	Bruker pekefingeren til å peke på en av de store figurene i 4.klasse. Flytter bortover etter hvert som han teller.	Viser til den visuelle fremstillingen.
Jens: 36.		
Ismail: det blir 36 så det kan være det, men jeg vet ikke helt.	Peker gjentakende på raden for 4.klasse	Viser til den visuelle fremstillingen.
Kjell: ja, da er det 8. Hvis de betyr 8 og de er 4. Det blir 36 til sammen.	Peker først på de store figurene og deretter på de små figurene i 4. klasse. Flytter fingeren bortover for hver figur.	Viser til den visuelle fremstillingen.
Jens: ja, men hva de store… en stor betyr 10 og de betyr minus.	Drar fingeren over de store figurene i 4.klasse. Peker deretter på raden med figurer i 4.klasse. Drar til slutt fingeren over de små figurene i 4.klasse.	Viser til den visuelle fremstillingen.
Ismail: ja, det var det jeg mente.		
Kjell: ja, det kan også gå.		

Elevene har så langt funnet frem til to ulike strategier eller metoder. De samarbeider godt og viser flere eksempler at dialogen er gjensidig og de kumulerer hverandre ved at de forklarer og argumenterer for tankerekken sin og bygger videre på hverandres innspill. De bruker deiktiske gester når de kobler muntlig språk og ikoniske modeller sammen. De klarer ikke å bli enige om hvilken strategi de skal gå for og henvender seg til observatør. Her skjer det noe kritisk, som dessverre kun kan skyldes på menneskelig feil fra observatør:

Verbal kommunikasjon	**Gester**	**Representasjoner**
Ismail: jeg vet ikke jeg. Hvilken skal vi ta?		

Kjell: det er jo litt rart at det skal være 8 så det kan jo være at det…

Jens: ja, men det er jo også rart å ta minus.

Kjell: ja, det er rart det og.

Ismail: om det er det samme hva man tar? Eller et det et (en løsning?) (henvender seg til observatør)

Observatør: dere er på riktig spor, men det er bare en av de tankene som er riktig.

Jens: jaaa…

Observatør: hvis det hjelper dere litt.

Kjell: så en av dem er riktig?

Observatør: ja, eller i hvert fall riktig tankegang. Det er flere løsninger på denne. Dere vet hva fjerde klasse er. Den er lik på begge diagrammene. Det er der dere må jobbe dere ut ifra.

Som nevnt tidligere i oppgaven ble oppgaven pilotert på et lavere trinn før selve datainnsamlingen. I tillegg har jeg prøvd å finne flere løsninger på oppgaven i tilfelle noe slik skulle forekomme. Dessverre hadde ikke observatør kommet frem til nettopp denne kreative løsningen. Veiledningen fra observatør er dermed svak med tanke på at oppgaven hadde flere løsninger og at begge strategiene er gyldige. Heldigvis forkaster ikke elevene denne ideen før de konkluderer. Dette vil jeg se nærmere på i neste delkapittel.

4.2.5 Gruppe 5: Anna, Bjørn og Ali

Nok en gang ser vi eksempler på strategien prøve å feil. Det som derimot er interessant er at elevene aldri feiler. De kommer frem til en mulig løsning på første forsøk:

Verbal kommunikasjon	**Gester**	**Representasjoner**

Ali: så da må vi finne ut hvor mye de store er verdt.	Drar tusjen horisontalt over raden med figurer i fjerde klasse.	Viser til den visuelle fremstillingen med figurer.
Bjørn: ehm, hva er det som har med gange.. så de fire der, de tenker vi er fire. Altså det er en tall. Det betyr at da blir det 32 til sammen på de.	Drar pekefingeren horisontalt frem og tilbake under de fire små figurene i 4.klasse. Legger de tre midterste fingrene under de store figurene i 4.klasse.	
Ali: ja, okei.		
Anna: 32 delt på fire da.		
Ali: 32. det er ått… det er		
Anna: det er seist…nei seis… det er åtte.		
Ali: ja, ja! Mumler utydelig. Da var det sånn jeg mente.	Reiser seg og går mot whiteboard.	
Anna: Vi kan sikkert tegne sånn.		Tegner en stor strekfigur på whiteboard.
Ali: nei, men okeiokei. Mumler utydelig.		
Anna: 8. Og så…		Skriver = 8 ved siden av. Tegner deretter en liten strekfigur og setter = 1 ved siden av.
Ali: ja, okei.		
Bjørn: så en sånn der er 8 og en sånn der er 1, ikke sant?	Peker først på en av de store figurene i 4.klasse, deretter på en av de små figurene i 4.klasse.	Viser til den visuelle fremstillingen med figurer.

Elevene kumulerer hverandres ideer slik at prosessen drives fremover. Av kroppslige uttrykk ser vi eksempler på deiktiske gester og glidende deiktiske gester. Når det gjelder representasjoner så ser en flere overganger og større mangfold i denne gruppa. Elevene gjør overganger fra ikoniske modeller på arket, altså figurene, til muntlig språk til ikoniske modeller og skriftlig språk på whiteboard. Det skriftlige språket er en kombinasjon av matematiske symboler og ikoniske modeller.

4.2.6 Oppsummering av fasen hvor elevene velger en strategi

Samtlige grupper benyttet seg av en strategi hvor de prøvet og feilet med mulige verdier på figurene. Den ikoniske modellen med figurer ble hyppig brukt i denne fasen av samtlige grupper. Elevene satte problemet inn i en kontekst også i denne fasen for å avgjøre gyldigheten i verdiene som ble foreslått. Dette kan defineres som erfaringsbaserte situasjoner. Elevene brukte whiteboard til å notere ned informasjonen de hadde funnet tidligere i prosessen. Dette gjorde de ved å bruke skriftlig språk som matematiske symboler i kombinasjon med ikoniske modeller i form av illustrasjoner av figurer. En av gruppene hentet konkretiseringsmateriell i form av centikuber, men det ble ikke brukt inn mot problemløsningsprosessen.

Deiktiske gester hadde en viktig rolle også i denne fasen. Dette kom til syne ved både deiktiske gester i form av peking, men også glidende deiktiske gester. Særlig fungerte de som bindeledd mellom det muntlige språket og de ikoniske modellene. En så også eksempler på bankende gester som brukes til å understreke.

I denne fasen var prinsippet om at dialogen skal være gjensidig og kumulativ dominerende i fire av fem grupper. I gruppe 3 så en flere eksempler som kan defineres som brudd på prinsippet om at dialogen er støttende og gjensidig. Den samme gruppa hadde problemer med å holde fokus og på veien endret de antall elever i 4.klasse fra 36 til 34 som dermed gir følgefeil videre. Det er for lite datamateriale til å konkludere med om dette er den eneste årsakssammenhengen, men det er likevel verdt å merke seg.

4.3 Elevene anvender strategien

Denne fasen strekker seg fra elevene har konkludert med figurenes verdi og anvender dette i prosessen med å finne ut hvor mange elever det var totalt i 5., 6. og 7.klasse.

Figur 4.3 – Illustrasjon som viser hvor elevene i problemløsningsprosessen (Lithner, 2008, pp. 257-258).

4.3.1 Gruppe 1: David, Emmanuel og Frans

Elevene fremstår som sikre i hva de skal gjøre, men er usikre på hvilke representasjoner som er mest hensiktsmessig for å løse oppgaven:

Verbal kommunikasjon	**Gester**	**Representasjoner**
Emmanuel: vi må lage et diagram da av hvordan de...	Peker på whiteboard.	Viser til whiteboard
Frans: ja, okei.		
Emmanuel: ellers kan vi bruke disse.	Tar tak i kassen med centikuber	Viser til centikuber
Frans: ja, vi kan bruke de.		
Emmanuel: okei 8… 40 i 5 klasse. 5 klasse har 40.	Bruker pekefingeren for å telle	Viser til den visuelle fremstillingen med figurer
David: skal du lage 40 sånne kuber?		
Frans: 5, 6, 7, 8, så bare setter vi de sånn oppå hverandre.	Fikler med centikuber. Bygger tårn i høyden.	Bruker centikuber.
Uklar mumling i munnen på hverandre.		
David: så kan Emmanuel finne de andre imens da mens vi gjør det her.		
Emmanuel: 8 gange 4 = 32. 33, 34, 35, 36, 37.	Bruker først lillefingeren til å gjøre utregningen ved å peke på figurene underveis. Bytter etter hvert over til tommelen.	Bruker den visuelle fremstillingen med figurer til å regne ut hvor mange elever det er i 6. klasse Viser til den visuelle fremstillingen med figurer
Emmanuel: 37 i sjette klasse.	Peker konstaterende med pekefingeren.	
Frans: 37. i sjette klasse. Og i 7? 8, 16, 24, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38.	Bruker begge pekefingrene i utregningen ved å peke på figurene underveis. David fikler fortsatt med multilinks.	Bruker den visuelle fremstillingen med figurer til å regne ut hvor mange elever det er i 7. klasse

Frans: men jeg bare skriver det opp på tavla.		Henviser til whiteboard.
Emmanuel: da lager jeg denne. Eller skal jeg skrive på tavle eller?	Henter flere centikuber.	Centikuber.
Frans: ja, vi skriver bare på tavla istedenfor, det er mye enklere.		David går mot whiteboard og tar opp tusjen for å skrive
David: Hvordan skal vi gjøre da?		David gir tusjen videre til Frans
Frans: vi lager et sånn diagram		

Emmanuel tar initiativ til å bruke konkreter i form av centikuber. Frans slenger seg på og forklarer til David hvordan de kan brukes. Dette er eksempler på prinsipper som gjensidighet, støttende og kumulativ. Han har dermed en forståelse for hvordan denne representasjonen kan brukes. Litt lenger ut i prosessen går Frans over til ikoniske modeller og skriftlig språk i form av matematiske symboler på whiteboard. Dette argumenterer han for ved å påpeke at det er «mye enklere». Det tolker jeg som at det er mindre arbeid, ettersom han tidligere har vist at forstår hvordan de skal brukes. Her lager han et nytt søylediagram tilsvarende det som viser 1., 2. 3. og 4.klasse, men for 4, 5, 6., 7. klasse på whiteboard:

Verbal kommunikasjon	**Gester**	**Representasjoner**
Frans: ok, da skriver vi bare…10, 20,		Tegner et søylediagram på whiteboard
Emmanuel: du trenger bare til 40, 40 er det høyeste.		
Frans: 1, 2, 3, 4... 10. 1, 2, 3, 4… 10. 1, 2, 3, 4, … 10. Sånn.		Tegner et søylediagram på whiteboard
Emmanuel: I fjerde klasse var det 36. Du trenger ikke å skrive det sånn som den da, du kan på en måte. 36 på fjerde klasse. 5 klasse har 40.	Emmanuel henvender seg til Frans og peker, men uklart hva han peker på.	Viser til whiteboard
David: så vi skal bare finne…		
Emmanuel: ja, 36 (henvender seg til Frans)	Bruker pekefinger til å telle seg oppover y-aksen	Tegner søyle for 4. klasse i søylediagrammer på whiteboard

Frans: 30, 31, 32 33, 34, 35, 36. Sånn.	Bruker pekefingeren til å telle seg oppover fra 30-36 på søylediagrammet.	
Emmanuel: 5 klasse har 40.		Tegner søyle for 5. klasse i søylediagrammer på whiteboard
Frans: 40 elever?		
Emmanuel: ja.	Peker på arket, men uklart hvor han peker helt konkret.	
David: akkurat 40?		
Emmanuel: ja.	Bruker lillefingeren til å telle	
David: få se da. Så vi skal bare finne ut 5, 6.. det som står der? Ikke de andre?		Viser til søylediagrammer i oppgaven
Emmanuel: ja. Sjette klasse har 31, 32, 33, 34, 35, 35, 37. 37.	Bruker pekefingeren til å telle seg frem til 37, samt holder fast på punktet 37 inntil han har tegnet ferdig søyla.	Tegner søyle for 6. klasse i søylediagrammer på whiteboard
Frans: 37 elever?		
Emmanuel: mhm. Og syvende klasse har 38.	Peker konstaterende på arket.	
Frans: 38?		
Emmanuel: ja.		Tegner søyle for 7. klasse i søylediagrammer på whiteboard

Emmanuel regner ut klassestørrelsene ved at han teller med lillefingeren sin i form av deiktiske gester. Frans viser det Emmanuel kommer frem til ved å tegne søylene i søylediagrammet. Han bruker også deiktiske gester i form av pekefingeren til å orientere seg og finne frem på søylediagrammet. De to guttene samarbeider og kumulerer hverandre. David prøver å engasjere seg i prosessen, men de to andre involverer han ikke i prosessen. Dette defineres som et brudd på prinsippet om at dialogen skal være støttende.

4.3.2 Gruppe 3: Georg, Henrik og Dagny

Georg tar initiativ til å lage et søylediagram. Georg gjør derfor en overgang fra ikoniske modeller på arket til muntlig- og skriftlig språk og nye ikoniske modeller på whiteboard:

Verbal kommunikasjon	**Gester**	**Representasjoner**

Henrik: hva er du du holder på med Georg?		
Georg: jeg holder på å lage sånn ting.	Peker på søylediagrammet og peker vertikalt opp og ned.	Viser til søylediagrammet på whiteboard.
Henrik: søylediagram, sånn som de har lagt der.	Peker to ganger på søylediagrammer på arket.	Viser til oppgavearket med illustrasjonene.
Georg: men jeg håper ikke jeg er for lav.		
Georg: ok, Henrik. Kan du regne ut hva som er det meste av folk som er der?	Peker på arket.	Viser til den visuelle fremstillingen med figurer.
Henrik: jeg tror det er 40 elever.		
Henrik: 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38.	Peker på de figurene i den visuelle fremstillingen med figurer. Forflytter samtidig som han teller.	Viser til den visuelle fremstillingen med figurer
Georg: var det 40?	Peker på arket.	Viser til den visuelle fremstillingen med figurer
Henrik: ja, det var klasse 5, femte klasse.		
Georg: starter vi med 4 da? Eller nei. Hva var det?		
Henrik: Det vet vi jo at er 36.	Peker på arket.	Viser til den visuelle fremstillingen med figurer.
Georg: ja, men det var disse vi skulle finne ut da.	Peker (gjentakende) på den visuelle fremstillingen med figurer.	Viser til den visuelle fremstillingen med figurer.
Henrik: ja, det er 40. Bare ta 4.klasse.	Peker på 5.klasse	
Georg: Da skriver jeg bare 4. Og så 20, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36.		
Henrik: sikkert.		
		Georg: tegner søylen til 4. klasse.

Dersom en ser på dialogen mellom Henrik og Georg så ser en at de to samarbeider godt sammen. Henrik utfyller og hjelper Georg der det er nødvendig, samtidig som Georg delegerer arbeidet med å regne ut til Henrik. Dette kan defineres som gjensidig og kumulerende. En ser også eksempel på at dialogen er støttende ved at Henrik spør og Georg forklarer. Henrik bruker deiktiske gester med pekefingeren når han teller figurene og gjør utregningene. I tillegg ser at både Henrik og Georg benytter seg av bankende gester med ulik intensitet. Georg bruker også en vertikal glidende deiktisk gest når han viser til søylediagrammet. Dagny arbeider litt i det «skjulte» ved at hun skriver det de to andre konkluderer med ved å bruke skriftlig språk i form av matematiske symboler på whiteboard.

4.3.3 Gruppe 4: Berit, Celine og Carlos

I forrige fase i problemløsningsprosessen skulle elevene utlede en verdi på figurene. I denne fasen skulle elevene anvende strategien eller konklusjonen om at hver figur (stor og liten) har en verdi lik 4 til å regne ut klassestørrelsene for 5., 6. og 7.klasse:

Verbal kommunikasjon	**Gester**	**Representasjoner**
Celine: da er det 20 i denne	Peker på figurene i 5.klasse	Viser til den visuelle fremstillingen med figurer. Berit skriver 5 = 20 på whiteboard.
Carlos: ja ok. 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40. Kan det passe? At det er 40 i 7.klasse? (henvender seg til observatør).	Peker på figurene i 7.klasse etter hvert som han teller.	Viser til den visuelle fremstillingen med figurer. Berit skriver 6 = 40 på whiteboard.
Berit: nei, men vent..		

Berit er i gang med å skrive antall elever i de ulike klassene på whiteboard ved skriftlig språk. Dessverre mister de tråden underveis og starter på nytt med å diskutere og resonnere seg frem til figurenes verdi. Carlos kommer med ideen om at det kan være et mønster:

Verbal kommunikasjon	**Gester**	**Representasjoner**
Carlos: det kan hende at det er et mønster da.		
Berit: jaaa…		

Celine: Denne er 36.	Peker på figurene i 6.klasse	Viser til den visuelle fremstillingen med figurer.
Carlos: Hvis det er 36.		
Berit: men hvis det er mønster, hva har den med det å gjøre?	Peker på figurene i 4.klasse	Viser til den visuelle fremstillingen med figurer.
Carlos: 8, 16, 24, 32, 40.	Peker på figurene i 5.klasse etter hvert som han teller.	Viser til den visuelle fremstillingen med figurer.
Celine: 40 i femte?		
Berit: 40 i…		
Celine: nei, det blir 20. 4, 8, 12…	Peker på figurene i 5.klasse etter hvert som hun teller.	Viser til den visuelle fremstillingen med figurer.
Carlos: nei, ser da, hvis vi går for 4 her. Så går vi opp til 8 her. Så dobler vi det, til 12. Det blir litt mye hvis det er 24 per mann.	Peker først på figurene i 4.klasse, deretter 5. klasse, 6.klasse og til slutt 7.klasse.	Viser til den visuelle fremstillingen med figurer.
Berit: jeg tror ikke det er 24 per sånn store da.	Peker gjentakende med tusjen på figurene i 5.klasse.	Viser til den visuelle fremstillingen med figurer
Celine: var det ikke fire…		
Berit: Det kan være at det er fire da?		
Celine: jaa!		
Berit: ja for det var jo det vi kom frem til her.	Drar tusjen under figurene i 4.klasse.	Viser til den visuelle fremstillingen med figurer
Carlos: ja men fire var…		
Berit: fire, det passet jo.	Peker først på søyle-diagrammet for 4.klasse og deretter på den visuelle fremstillingen med figurer.	Viser til søylediagrammet. Viser til den visuelle fremstillingen med figurer.

Carlos deler sine tanker med Berit og Celine. Han uttrykker seg kroppslig ved å bruke deiktiske gester hyppig som en brobygger mellom muntlig språk og ikoniske modeller. Berit og Celine gir Carlos sitt resonnement et forsøk, men konkluderer til slutt med at verdien er fire slik de gjorde i begynnelsen. En ser altså at prinsippet om gjensidig dialog er til stede, men at argumentasjonen til

Carlos ikke vinner frem. På en annen side ser vi eksempel på kumulativ dialog mellom Carlos og Berit. Til tross for at de nå har konkludert, nok en gang, med at verdien på hver figur er lik fire så møter elevene på en annen utfordring:

Verbal kommunikasjon	**Gester**	**Representasjoner**
Carlos: Hva var det fjerde klasse hadde?		
Celine: 1,2,3,4, 5, 6. Hæ?	Berit og Celine bruker pekefingrene til å lese av søylediagrammet.	Viser til søylediagrammet for 4.klasse.
Carlos: Hva var det fjerde klasse hadde?		
Carlos: Hvor mange var det i fjerde klasse?		Skriver 4: på whiteboard
Celine: fjerde klasse?		
Carlos: ja. 36?		
Celine: På denne er det 36, men på denne er det 32.	Peker først på søylediagrammet, deretter på den visuelle fremstillingen av figurer (4.klasse).	Viser først til søylediagrammet, deretter på den visuelle fremstillingen av figurer (4.klasse).
Carlos: sikker på det?		
Berit: det er 36 på denne.	Peker gjentakende på søylediagrammet	Viser til søylediagrammet
Celine: ja, men på den blir det 34. 4,8, 12…	Peker på figurene i 4.klasse etter hvert som hun teller.	Viser til den visuelle fremstillingen med figurer
Carlos: 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32.	Peker på figurene i 4.klasse etter hvert som han teller.	Viser til den visuelle fremstillingen med figurer
Carlos: så da blir det 32 her. Hvor mange var det i 5.klasse?		Skriver 4: 32 på whiteboard.

Carlos tar initiativ til å skrive på whiteboard. Celine påpeker at det er forskjell på antall elever i 4. trinn når en ser på søylediagrammet og deres utregninger. I stedet for å korrigere sine egne utregninger, forkaster de informasjonen gitt i søylediagrammet. Dette til tross for at de tidligere så denne koblingen og at utregningene faktisk har sitt utspring fra nettopp dette. Dermed er det rimelig å anta at de ikke har forstått oppgavens formål, og betydningen av de ikoniske modellene i oppgaven og koblingen mellom de. Likevel skriver Carlos antall elever i hver klasse på whiteboard ved hjelp av matematiske symboler, men det blir altså feil ettersom de har konkludert med at alle figurene har en verdi lik fire.

4.3.4 Gruppe 4: Jens, Ismail og Kjell

Som nevnt i forrige delkapittel presenterte denne gruppen en ny verdi på figurene. De hadde to mulige løsninger: den store figuren lik 8 og den lille figuren lik 1, eller den store figuren lik 10 og den lille figuren lik minus 1. Ettersom de ikke klarte å konkludere tok de begge løsningene med i prosessen der de skulle finne klassestørrelser. Ismail begynner å regne ut klassestørrelsene.
På samme tid forteller Kjell at de skal lage en forklaring. De to guttene tar dermed utgangspunkt i de to ulike spørsmålene i oppgaven. De to ulike prosessene som foregår innad i gruppa kan defineres som brudd på gjensidighetsprinsippet. Ismail slenger seg likevel på Kjell og begynner med å finne en forklaring, de kumulerer hverandre:

Verbal kommunikasjon	**Gester**	**Representasjoner**
Ismail: hvis vi tar den med minus så blir det.. forklaring er at de store	Bruker langfingeren til å peke gjentakende de små figurene i 7.klasse. Bruker langfingeren til å peke på de store figurene i 4.klasse.	Viser til den visuelle fremstillingen.
Jens: er 10.		
Ismail: er lik 10. Og de små er lik 1, altså minus 1.	Bruker langfingeren til å peke på de store figurene i 4.klasse.	Viser til den visuelle fremstillingen.
Jens: ja.		
Kjell: men hvorfor skal det være minus liksom, det bare virker litt rart….		
Jens: hva med den med 8 da. Hvordan skal vi forklare det? (…)		
Kjell: kanskje de lagde ut av hvor mange grupper, for eksempel dette er liksom fire grupper, men de hadde ikke plass til å lage en ny en med 8 sa da blir det liksom 4 og en halv.	Bruker tommel pekefinger for å isolere de store figurene i 4.klasse. Klyper.	Viser til den visuelle fremstillingen. Viser til den visuelle fremstillingen.

Ismail: ja, jo det går. Men hvorfor ta 8 og ikke 10 eller 5?	Peker på de store og deretter på de små figurene i 4.klasse	Viser til den visuelle fremstillingen.
Jens: ja, men det hadde ikke gått opp. 10.	Peker med pekefingeren på de store figurene i 4.klasse.	
Kjell: ja, det hadde ikke gått opp.		
Ismail: hvis det er 8 i hvert fall så er det…		
Kjell: det kan være at det er det.		
Kjell: men her hadde de nok til å lage en gruppe til hver i 8.	Peker med pekefingeren først bortover på de store figurene i 5.klasse, deretter gjentakende på et punkt.	Viser til den visuelle fremstillingen.
Ismail: ja		
Kjell: men det hadde de.. 1, 2, 3, 4. Nei, de hadde ikke nok her eller der.	Bruker pekefingeren til å telle de små figurene i 6 og 7 klasse. Flytter fingeren etter hvert som han teller.	Viser til den visuelle fremstillingen.

Kjell påpeker at han synes det er rart at det skal være minus. Han begynner deretter å dele sin tankerekke med de andre. Der tar han utgangspunkt i grupper av elever og knytter det dermed opp mot en kontekst, også kalt erfaringsbaserte situasjoner. Han bruker deiktiske gester som støtte i denne kommunikasjonen. Hele denne dialogen kan sees fra to perspektiv: den er gjensidig ved at Kjell deler sitt resonnement og de andre lytter. Videre ser en ut ifra den verbale kommunikasjonen at de kumulerer hverandre og bygger videre på disse og andre ideer. På samme tid går fortsetter Ismail på utregningene som han begynte på:

<u>Verbal kommunikasjon</u>	**<u>Gester</u>**	**<u>Representasjoner</u>**
Ismail: for hvis vi tar den med minus så blir det 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100, 110, 120, 130. 130 minus 1, 2, 3, 4…. Det blir 129, nei, det er 111. Nei… hvor mange.. 119 blir det.	Bruker pekefingeren til å telle alle de store figurene, deretter de små.	Viser til den visuelle fremstillingen med figurer.
(…)		
Ismail: 8, da blir det 8, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 80. 88, 72 nei 76 nei 90..	Bruker pekefingeren til å telle de store figurene.	Viser til den visuelle fremstillingen.

Jens: 76 hvis det er 8?		
Ismail: nei 80, 88.		
Ismail: ehm 80, 88, 76, nei 96, og 102, nei 104.	Bruker pekefingeren til å telle de store figurene. Flytter fingeren etter hvert som han teller.	Viser til den visuelle fremstillingen.
Ismail: så da er det 100 og..		
(…)		
Ismail: 8, 16, 24, 32, 40. … 80.	Bruker pekefingeren til å telle de store figurene. Flytter fingeren etter hvert som han teller.	Viser til den visuelle fremstillingen.
Ismail: 8, 16, 24. 80 + 24 er 104.		
Ismail: pluss 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11. Så det vil si 104 pluss 11.	Bruker pekefingeren til å telle de små figurene. Flytter fingeren etter hvert som han teller.	Viser til den visuelle fremstillingen.
Jens: 115.		

Ismail har regnet ut klassestørrelsene med utgangspunkt i de to ulike metodene. I utregningen bruker han deiktiske gester ved at han flytter pekefingeren etter hvert som han teller. Han brukte kun muntlig språk og de ikoniske modellene som støtte i arbeidet med å regne ut klassestørrelsene.

4.3.5 Gruppe 5: Anna, Bjørn og Ali

Bjørn tar raskt styringen i denne prosessen. Han tolker oppgaven som at de skal finne ut hvor mange elever det er til sammen i 4., 5., 6. og 7.klasse. Han ser dermed alle figurene under ett:

Verbal kommunikasjon	**Gester**	**Representasjoner**
		(…)
Bjørn: men altså, da må vi egentlig gange 8 med 17. Også…	Peker med pekefingeren på en av de store figurene i 7.klasse.	Anna skriver 2 = 29 på tavla.
Ali: vent, gange 8 med 17?		
Bjørn: ja, fordi hvis vi skal finne Ut alle, fjerde, femte, sjette og syvende så må vi bare plusse alle de her.	Drar pekefingeren vertikalt opp, rad for rad fra 4 til 7 klasse. Drar deretter	Viser til den visuelle fremstillingen med figurer.

	hånden over hele den visuelle fremstillingen med figurer.	
Bjørn: Og da må vi først gange 8 med 17 fordi det er 17 åtter her.	Drar pekefingeren som en slange oppover over de store figurene.	Viser til den visuelle fremstillingen med figurer.
Ali: 8 med 17. Først så er det 80.		Anna skriver 3= 32 på whiteboard.
Bjørn: Også er det 1,2,3, 4, 5, 6…14, 15.	Bruker pekefingeren og teller de små figurene. Flytter for hver figur han teller.	Viser til den visuelle fremstillingen med figurer.
Ali: okei. Da kan vi først dele det opp og gjøre det sånn at 10 ganger 8 det er jo 80. Så har vi 10 ganger.. eller 8 ganger 7.		Anna skriver 4= 36 på whiteboard
		Viser til whiteboard.
Bjørn: bare skriv det opp. Vi lager et gangestykke 8 ganger 17.	Peker på whiteboard	
Ali: ja, men er det ikke lettere hvis.. der er bare 80. Så tar vi bare det.		
Bjørn: 8 ganger 7.		Anna skriver 5 = 40 på whiteboard.
Ali: mhm.		
Bjørn: 56. 80 + 56…. det er 36, nei 136.		
Ali: men vi måtte finne ut..		
Bjørn: 136 + 15		
Ali: 136 + 15		
Bjørn: da blir det 140..151.		
Ali: okei.		
Bjørn: da er det svaret da.		

Her ser vi først eksempel på støttende dialog ved at Bjørn oppklarer spørsmålet fra Ali, deretter ser vi kumulativ dialog ved at Ali henger seg på Bjørns tankerekke. Sammen gjør de utregning der de multipliserer antall store figurer med verdien til de store figurene. Deretter legger de til utregningen for de små figurene. Svaret de kommer frem til er altså hvor mange elever det er til sammen på 4., 5., 6. og 7.klasse. Underveis i denne prosessen ber Bjørn Ali om å skrive regnestykket på tavla, men det følges ikke opp av verken Ali eller Bjørn. På samme tid som Ali og Bjørn foretar sine utregninger skriver Anna opp antall for hver enkelt klasse på whiteboard. Hun gjør en overgang fra ikoniske modeller (søylediagram) til skriftlig språk (matematiske symboler). Deretter gjør hun utregninger i hodet for hver enkelt klasse slik at hun finner frem til at det er 40 elever i 5.klasse, som hun skriver på whiteboard med matematiske symboler. Ali forsøker å få gruppa tilbake på rett vei:

Verbal kommunikasjon	**Gester**	**Representasjoner**
Ali: men skulle vi ikke finne ut hvilken som var den største klassen?	Peker på oppgavearket	Viser til oppgavens ordlyd.
Anna: nei, vi skulle..ehh.. forklare… «kan du finne ut hvor mange elever det er i femte, sjette og syvende.		Viser til oppgavens ordlyd.
Bjørn: åja, da må vi ta vekk fjerde da. Da må vi ta vekk.. hvor mye var det til sammen her? 36. Så 151 minus 36.	Peker på raden med figurer i 4.klasse. Drar pekefingeren frem og tilbake under 4.klasse.	Viser til den visuelle fremstillingen med figurer.
Anna: har vi funnet ut for mange det er i de to?	Peker på raden med figurer i 6 og 7.klasse	
Ali: 151 minus 36…. det er jo 35? nei, det var jo 15…	Bjørn reiser seg og går mot whiteboard.	Bjørn skriver 151 – 36 ved hjelp av standardalgoritme og oppstilling.
Anna: 32, 33, 34, 35, 36, 37. I 6 er det 37.	Bruker pekefingeren til å telle de små figurene fra 32 i 6.klasse. Reiser seg og går mot whiteboard.	Viser til den visuelle fremstillingen med figurer.
Ali: men da må vi sette en strek over der siden det er de som skal være med.	Peker på det som står under streken.	Bjørn regner ferdig det oppstilte regnestykket. Anna skriver 6 = 37 på whiteboard.
Bjørn: 115 er det.		Setter en strek mellom 4 og 5 klasse på den vertikale listen som Anna har laget.

Anna viser til oppgaveteksten og leser spørsmålet høyt for alle. Da innser Bjørn at svaret må korrigeres. Nok en gang ser vi at det foregår to parallelle prosesser innad i gruppa. Anna fortsetter med å skrive klassestørrelsene på tavla, mens Bjørn velger å skrive regnestykket på tavla ved å bruke matematiske symboler og standardalgoritme for å komme frem til svaret. Dette kan karakteriseres som brudd på prinsippet om gjensidighet. Ali kumulerer og supplerer Annas arbeid ved å tegne en strek for å markere skillet mellom 4. og 5.klasse. Elevene bruker deiktiske gester for å telle i utregningen, samt å understreke for seg selv og de andre det som uttrykkes gjennom muntlig språk.

4.3.6 Oppsummering av fasen hvor elevene anvender strategien

I denne fasen fikk de ulike representasjonene mer plass. Gruppe 1 benyttet seg først av manipulerbare modeller i form av konkreter som centikuber. Dialogen viste at de hadde forståelse for hvordan de kunne bruke de til å løse oppgaven. Underveis gjorde de likevel en overgang til skriftlig språk i form av matematiske symboler kombinert med en ikonisk modell i et søylediagram. Av de fem gruppene løste gruppe 1 og 2 oppgaven ved å lage et nytt søylediagram på whiteboard. Gruppe 3 og 5 brukte kun matematiske symboler på whiteboard, mens gruppe 4 kun benyttet seg av muntlig språk. Fellesnevneren for de alle var at de brukte de ikoniske modellene i oppgaveteksten aktivt gjennom hele denne fasen, særlig til telling og regning. Kun en av gruppene, gruppe 5, gikk tilbake i oppgaveteksten for å lese ordlyden i oppgaven.

Også her var deiktiske gester dominerende og ble i stor grad brukt som brobygger mellom verbalt språk og de ikoniske modellene. Samtlige grupper gjorde dette. Noen elever uttrykte det derimot som glidende deiktisk gest og noen viste også tegn til bankende gester.

Det er interessant å se at samtlige grupper viste eksempler på prinsippet om gjensidighet og kumulativ innad i sine dialoger. Det forekom også brudd på prinsippet om støtte slik det er definert, men i veldig liten grad. Derimot er det betimelig å stille spørsmål om prinsippet om støtte kommer til uttrykk mer implisitt ved å se på deltakelsen innad i gruppene. Det er verdt å merke seg ut fra dialogene at en av tre elever hadde en tendens til å bli «passive» i gruppearbeidet ved at de enten ikke deltok eller at de holdt på med egne prosesser parallelt med de to andre gruppemedlemmene.

4.4 Elevene konkluderer

Denne fasen strekker seg fra elevene er ferdig med utregningen og oppsummerer ved å svare på de to spørsmålene i oppgaven:
- Kan du finne ut hvor mange elever det var totalt i 5., 6. og 7. klasse?
- Kan du hjelpe Katrine og Charlie med å lage forklaring til diagrammet?

Elevene har tidligere konkludert med verdien på figurene ettersom det var nødvendig for å gå videre. De har brukt disse verdiene i utregningen og har regnet ut hvor mange elever det er i hver klasse. Ettersom flere av gruppene konkluderer underveis i prosessen vil jeg kun kort trekke frem om og hvordan de oppsummerer oppgaven.

Figur 4.4 – Illustrasjon som viser hvor elevene i problemløsningsprosessen (Lithner, 2008, pp. 257-258).

4.4.1 Gruppe 1: David, Emmanuel og Frans

Verbal kommunikasjon	**Gester**	**Representasjoner**
David: få se da? Så vi skal bare finne ut 5, 6.. det som står der? Ikke de andre?	Peker på arket, men uklart hvor han peker helt konkret.	
Emmanuel: ja. Sjette klasse har 31, 32, 33, 34, 35, 35, 37. 37.	Bruker lillefingeren til å telle	
Frans: 37 elever?	Bruker pekefingeren til å telle seg frem til 37, samt holder fast på punktet 37 inntil han har tegnet ferdig søyla.	
Emmanuel: mhm. Og syvende klasse har 38.	Peker på arket.	
Frans: 38?		
Emmanuel: ja.		David fikler med centikuber.

David stiller spørsmål om hva de skal finne ut og peker på arket med oppgaveteksten. Det var likevel ingen av elevene som gikk ikke tilbake i oppgaveteksten for å sjekke om de hadde besvart oppgaven. Davids initiativ ble altså ikke lyttet til, noe som kan tolkes som et brudd på prinsippet om støttende. På en annen side det skal nevnes at han kunne gått tilbake i oppgaven for å oppklare det selv. Elevene har likevel besvart oppgaven ved hjelp av skriftlig språk (verdiene på figurene), og ikoniske modeller (søylediagram).

4.4.2 Gruppe 2: Georg, Henrik og Dagny

Verbal kommunikasjon	**Gester**	**Representasjoner**
Henrik: Må vi skrive sånn lang setning eller kan vi skrive sånn kort. (Henviser til observatør)		
Observatør: Hvis dere føler dere har forklart det så er det mer en nok.		
Henrik: Føler du det er forklart? (ser på Georg). Her, få den.	Rekker frem hånden for å overta tusjen.	
Henrik: Stort menneske er lik 8. Lite menneske er lik 1.		Henrik: Tegner strekmennesker. Et stort og et lite. Setter relasjonstegn = 8 ved siden av det store og = 1 ved siden av det lille.
Henrik: Men vi kan sikker skrive det opp på mange flere rare måter.		
Georg: men hvorfor skal vi gjøre det?		
Henrik: Hvis for eksempel det er 7 og det er 2. Det går opp i hvert fall.	Peker først på den store figuren, deretter den lille i den visuelle fremstillingen med figurer.	

Henrik stiller spørsmål om det er nødvendig å svare med skriftlig språk. Observatør er noe unøyaktig i svaret og burde nok henvist til oppgavens ordlyd for å veilede elevene best mulig. Henrik leser likevel svaret og supplerer med å tegne ikoniske modeller (strekmenn) på tavla kombinert med skriftlig språk (=8 og =1). Han supplerer også ved å komme med et annet eksempel på figurenes verdi og kobler muntlig språk og ikoniske modeller ved å bruke deiktisk gest i form av peking. Georg spør hvorfor han gjør dette, noe Henrik forklarer med at det går opp.

4.4.3 Gruppe 3: Berit, Celine og Carlos

Verbal kommunikasjon	**Gester**	**Representasjoner**
Carlos: er vi på rett vei eller er vi på helt feil vei? (henviser til observatør).		
Berit: første… det er 32 i første.	Holder pekefingeren på søylediagrammet.	Viser til søylediagrammet.
Celine: hæ?		
Carlos: dette er så gale..		
Berit: ja, 32 i første.		Skriver 1- 32 på whiteboard
Celine: men vi må jo finne ut…		
Carlos: har noen en sånn kork?	Holder tusjen opp.	
Berit: ja den er her.	Gir korken til Carlos	
Celine: kan du hjelpe Cathrine og Charlie med å lage en forklaring? En forklaring? Åja, det kan jo være å… hver person er 4.		
Carlos: det føler jeg er helt feil, men.. okei vi kan prøve. Vi har brukt 10 minutt.		
Celine: ja, men…		
Carlos: jeg kommer aldri til å klare det. Hva, er dette 8.klasse matte? (Henviser til observatør)		
Berit: hver person er 4, det er det eneste som stemmer med 4.klasse.		

Carlos henvender seg til observatør for veiledning. Celine går tilbake i oppgaveteksten og leser høyt for de andre. Deretter konkluderer hun med at hver figur er lik fire. Berit støtter Celines konklusjon ved at det er det eneste som går overens med 4.klasse. Som nevnt tidligere har de endret antall elever i 4.klasse fra 36 til 32. Dette til tross for at Berit skrev 4=36 på tavla med matematiske symboler med en gang de oppdaget koblingen mellom de to ikoniske modellene. Berit har altså visket vekk 4=36 og erstattet det med 4=32. Hun har også skrevet opp klassestørrelsene for de ulike trinnene på samme måte, men altså med feil verdi som utgangspunkt for utregningen.

4.4.4 Gruppe 4: Jens, Ismail og Kjell

Verbal kommunikasjon	**Gester**	**Representasjoner**
Ismail: ja. Så da er det totalt 115 i alle klassene og 119 hvis det er den der minus.	Peker på de små figurene i 7.klasse når han omtaler løsningen med minus.	Viser til den visuelle fremstillingen.
Kjell: også skulle vi lage en forklaring.	Peker med pekefingeren på oppgaveteksten	Viser til ordlyden
Ismail: ja, hvis.. forklaring på den med at det er minus er jo at de 10 og de små er minus 1. Så 10, 20..	Peker med pekefingeren på en av de store figurene i 4.klasse, deretter på en av de små.	Viser til den visuelle fremstillingen.
Kjell: det var jo ikke den da.		
Jens: jo på minusen.		
Kjell: jaja, på minusen, men på 8.		
Ismail: på 8 så er der at de er 8 og de er 1.	Peker med pekefingeren på en av de store figurene i 7.klasse, deretter på en av de små.	Viser til den visuelle fremstillingen.
Kjell: ja.		
Ismail: og de til sammen blir…		
Kjell: at de liksom lager grupper på 8 og så for eksempel altså da er det 4 hele og 4/8.	Bruker to fingre til å peke på de store figurene i 4.klasse, deretter flytter han de to fingrene bort til de små.	Viser til den visuelle fremstillingen.
Ismail: mhm.		
(pause)		
At en sånn stor betyr 8 og resten betyr.	Bruker pekefingeren til å peke på de store figurene i 4.klasse, deretter bruker	Viser til den visuelle fremstillingen.

	han ringfinger og lillefinger til å peke på de små.	
Ismail: men hvilke av de er riktig?		
Kjell: den med 8 gir mest mening men….		
Jens: ja, jeg tror det er den med 8.		
Ismail: ja, jeg og.		

Ismail presenterer antall elever til sammen på 5., 6. og 7.klasse ved å bruke muntlig språk. Han presenterer to ulike løsninger. Kjell supplerer med at det også skulle lages forklaring. Ismail forklarer verdiene til de ulike figurene ved å hjelp av deiktiske gester som bindeledd mellom muntlig språk og den ikoniske modellen på oppgavearket. Kjell utdyper forklaringen ved å sette det inn i en kontekst der det handler om gruppestørrelser. Her ser vi eksempler på prinsipper om gjensidighet og dialogen er kumulativt. Elevene konkluderer avslutningsvis med at forklaringen til verdien 8/1 fordi «den gir mest mening.». Det er interessant å merke seg at denne gruppen løser og forklarer oppgaven kun ved hjelp av muntlig språk og de ikoniske modellene gitt i oppgaven.

4.4.5 Gruppe 5: Anna, Bjørn og Ali

Verbal kommunikasjon	**Gester**	**Representasjoner**
Anna: okei, men vi skulle også forklare hvordan det funket.	Holder pekefingeren på oppgaveteksten.	Viser til ordlyden.
Anna: har vi gjort det fordi vi har skjønt det? (henviser til observatør)		
Bjørn: vi har på en måte..		
Ali: ja, vi har jo skrevet 8 og 1. Vi har jo skrevet det.	Peker på strekmennene på whiteboard.	Viser til whiteboard.
Anna: ja, men da har vi vel skjønt det da.		
Ali: ja.		Skriver to streker under svaret i Bjørns utregning.

Anna går tilbake i oppgaveteksten for å sjekke at de har svart på oppgaven. Ali viser til det de har skrevet på tavla ved en deiktisk gest hvor han peker på tavla. Tidligere i prosessen har de laget en ny ikonisk modell ved at de har tegnet en stor og en liten strekfigur. De har supplert med å sette matematiske symboler ved siden av hver figur, = 8 og = 1. Ali avslutter med å sette to streker under svaret i Bjørns utregning, som kan defineres som et matematisk symbol. Dette er eksempler på kumulative handlinger.

4.4.6 Oppsummering av fasen hvor elevene konkluderer

Fire av de fem gruppene viste til oppgavens skriftlige språk da de oppsummerte. Den siste gruppa spurte observatør om de har gitt et tilfredsstillende svar. I oppgaven ble det stilt to spørsmål:

> ***Kan du finne ut hvor mange elever det var totalt i 5., 6. og 7. klasse?***
> ***Kan du hjelpe Katrine og Charlie med å lage forklaring til diagrammet?***

Dersom en ser på det første spørsmålet mener jeg det er forståelig at elevene har løst denne litt ulikt. Det ene måten å tolke oppgaven på er å finne ut mange elever det er totalt i femte klasse, totalt i sjette klasse og totalt i sjuende klasse. Det er også mulig å tolke oppgaven som at man skal finne summen av alle elevene i de tre klassene. Ulike tolkninger kan gi ulike svar, som en også så i observasjonen.

I det første spørsmålet skulle de altså finne ut hvor mange elever det var totalt i 5., 6., og 7.klasse. Gruppe 1, 2 og 3 løste denne delen av oppgaven ved å finne antall elever per klasse. Av de tre var det to grupper, gruppe 1 og 2, som løste det med å tegne et søylediagram på whiteboard, som kan defineres som en blanding av ikoniske modeller og skriftlig språk. Den siste gruppa av de tre, gruppe 3, skrev en liste på whiteboard med matematiske symboler. De resterende to av de fem gruppene, gruppe 4 og 5, løste oppgaven med utgangspunkt i en annen tolkningen og løste oppgaven ved å finne summen av de tre klassene. Gruppe 4 brukte kun verbalt språk og støttet seg på de ikoniske modellene gjennom hele problemløsningsprosessen, mens gruppe 5 benyttet seg av skriftlig språk på whiteboard og foretok utregninger og laget liste med matematiske symboler.

Når det gjelder det andre spørsmålet var det kun to av gruppene, gruppe 2 og 5 som ga en skriftlig forklaring. Dette gjorde de ved en kombinasjon av ikoniske modeller og skriftlig språk der de tegnet strekmenn og skrev relasjonstegn og verdi ved siden av. To av gruppene, gruppe 3 og 4, ga muntlig forklaring i oppsummeringen. De to muntlige forklaringene er ulike der den ene kan ansees som mer komplisert ettersom de knytter forklaringen til erfaringsbaserte situasjoner. Den siste gruppa forklarte ikke eksplisitt på slutten, men har forklart verdien på figurene muntlig tidligere i prosessen. Det er interessant å merke seg at den ene gruppa spurte om de måtte «skrive en sånn lang setning?». Spørsmålet kan være et eksempel på en etablert sosiomatematisk norm der det forventes at tekstoppgaver skal svares med tekstsvar. Ali skrev to streker under svaret for å markere det endelige svaret, som kan være enda et eksempel på en sosiomatematisk norm.

Gester ble lite brukt i denne fasen, men de få gestene en så eksempler på kan kategoriseres som deiktiske gester. Støttende, gjensidig og kumulativ var prinsipper for dialogisk undervisning som gikk igjen også i denne fasen. En så ett brudd på prinsippet om at dialogen var støttende ved at David etterspurte hva de skal svare på. De andre ga ikke et oppklarende svar som kunne gi en felles forståelse~~.~~

5 Drøfting

I dette kapittelet vil jeg oppsummere de mest sentrale funnene og drøfte disse opp mot det teoretiske rammeverket. Det vises til funnene i analysen og gjengis ikke i sin helhet i dette kapittelet. Kapittelet er strukturert ut fra de tre forskningsspørsmålene. Under hvert forskningsspørsmål er det delt opp i delkapitler med utgangspunkt i det teoretiske rammeverket for den deduktive analysen. Avslutningsvis i dette kapittelet vil jeg se nærmere på de ulike fasene og se på funn som er særlig relevante i matematikkdidaktikk og som derfor kan være nyttige implikasjoner i yrkesutøvelsen.

5.1 Hvordan kommuniserer elevene verbalt?

5.1.1 Prinsippet om at dialogen må være kollektiv

Det første prinsippet om dialogisk undervisning handler om at det skal være i et kollektiv, noe som kan sies å være en grunnleggende forutsetning i sosiokulturell læringsteori der språket er det viktigste medierende redskapet (Nilssen & Høynes, 2020, p. 163; Veer & Zavershneva, 2018). Det teoretiske rammeverket som ligger til grunn i den deduktive analysen av verbal kommunikasjon peker på fem nøkkelprinsipper som forutsetninger for dialogisk undervisning (Alexander, 2018). Prinsippet om at det er kollektivt handler om at det foregår i felleskap. I denne oppgaven ble elevene delt inn i grupper på tre elever. I forkant ble det gjort flere refleksjoner rundt gruppestørrelsene for å få produktive matematiske samtaler. Gjennom tidligere erfaringer i klasserommet har forsker erfart at når tre elever skal samarbeide kan man se tendenser til at en av de tre elevene tar en mer passiv rolle. I utgangpunktet var intensjonen derfor å gjennomføre med gruppestørrelser på to elever. Etter diskusjon med veileder og medstudenter valgte jeg likevel grupper på tre. Forskerens tidligere erfaringer og refleksjoner rundt gruppestørrelser blir til dels bekreftet i denne studien ved å se på David og Dagnys rolle. Transkripsjon av observasjon er ikke gjengitt i helhet, men det blir likevel belyst i de utdragene som er presentert i analysen. Ut fra det tilgjengelige materialet ser en at de to har en passiv rolle sammenlignet med de to andre elevene på gruppa. Det skal sies at David gjør en liten innsats ved å stille spørsmål til hva de andre gjør, men engasjerer seg likevel ikke nok til at han tar en naturlig del av gruppearbeidet. Dette kommer særlig tydelig frem når han sitter og fikler med centikubene. Dagny uttrykker ingenting verbalt, men fungerer mer som en sekretær for de to andre.

Dette er to eksempler som illustrerer hva som skjer når prinsippet om at dialogen må være kollektiv brytes. Dersom en ser på de tre andre gruppene, gruppe 3, 4 og 5, er de tre elevene mer likestilte i arbeidet. Det er derfor ikke grunn til å konkludere med at en gruppesammensetning på to elever er bedre enn tre elever når det gjelder dialogisk undervisning. Liljedahl har gjennom sin forskning funnet ut at gruppestørrelser på tre elever fungerer optimalt for mellomtrinnet og oppover (Liljedahl, 2021, p. 44). Han argumenterer for at grupper på to elever hadde større problemer enn grupper på tre, og at grupper på fire elever ofte delte seg inn i mindre grupper internt. Deler av funnene i denne studien er derimot avvikende fra Liljedahl ved at en ser flere eksempler på at elevene danner nye grupperinger innad i gruppen også ved gruppestørrelser på tre elever. I denne studien ser en eksempler på at i grupper på tre elever blir det dannet nye grupperinger innad i gruppen på henholdsvis to elever og en elev. De to elevene som arbeider sammen faktisk ikke har større utfordringer med å løse oppgaven enn de gruppene på tre der alle deltar aktivt. Ettersom ineffektive samtaler kan knyttes til gruppesammensetning bør en være bevisst rundt dette (Nilssen & Høynes, 2020, p. 166). Det hadde derfor vært nyttig med flere bidrag i matematikkdidaktisk forskning som kan si mer om hvilke gruppestørrelser som er mest hensiktsmessig i dialogisk undervisning. Foruten gruppestørrelser har Liljedahl undersøkt andre faktorer som er viktige for elevers deltakelse i gruppesamarbeid. I hans artikkel konkluderer han med at ikke-lineære tavler som whiteboard fremmer samarbeid internt (Liljedahl, 2016, p. 371). Videre poengterer han at for å legge til rette for diskusjon i gruppa bør det kun være en tusj tilgjengelig. Ettersom elevene i dette prosjektet hadde tilgang til whiteboard med tre tusjer kan dette være en årsak til at samarbeidet i gruppene ikke fungerte optimalt. Når alle får en tusj hver muliggjør dette parallelljobbing slik at det ikke er nødvendig å samarbeide.

5.1.2 Prinsippet om dialogen må være gjensidig

Prinsippet om at dialogen skal være gjensidig er veldig interessant. Dette handler om at elevene skal lytte til hverandre og betrakte hverandres ideer. Det å lytte når andre prater kan ansees som en kulturell norm som i stor grad kan knyttes til dannelse og utvikling av sosial kompetanse. Når en derimot skal lytte for å betrakte andres matematiske ideer og resonnement kan dette prinsippet også knyttes opp mot sosiomatematiske normer (Alexander, 2018; Yackel & Cobb, 1996). I denne studien ser en derimot mangel, eller brudd på dette prinsippet i tre av de fem gruppene. Det er dessverre flere eksempler på dialoger hvor de avbryter hverandres resonnement, eller at det foregår parallelle prosesser innad i gruppa slik at de ikke lytter til hverandre. Dette ser en særlig i gruppa med Berit, Celine og Carlos, gruppe 3, som i de to første fasene brøt prinsippet om gjensidighet flere ganger. Sammenlignet med de andre gruppene kan denne gruppa sies å være lite effektivt dersom en tar utgangspunkt i Lithners modell, figur 2.4 (Lithner, 2008). Diskusjonen i denne gruppa tar mange, og til tider unyttige, retninger i løpet av problemløsningsprosessen. Allerede tidlig i arbeidet med å velge strategi kom Berit med en ide om at de store figurene kunne ha en verdi på 8. Hennes forslag ble derimot ikke lyttet til og forsvant i samtalen. Hadde elevene lyttet til Berits ide, kunne de kanskje vært mer effektive i problemløsningsprosessen.

Dette blir dog bare antakelser, men det er dokumentert gjennom flere forskningsstudier at det å anerkjenne, prøve og kritisere hverandres tanker og ideer faktisk påvirket elevens læringsutbytte (Nilssen & Høynes, 2020, p. 231). Brudd på dette prinsippet kan dermed vært til hinder for dette. For å legge til rette for at elevene ikke går glipp av dette læringspotensialet må en derfor arbeide systematiske med det, både som en norm i sosial interaksjon, men også som en sosiomatematisk norm hvor elevene skal lytte for å lære (Yackel & Cobb, 1996). I dette ligger det at det ikke bare handler om å lytte, men om å lytte produktivt. Med dette mener jeg at elevene må lære hva som er produktive samtaler i matematikk. Læreren må derfor strukturere og modellere målrettede samtaler i klasserommet (Kazemi et al., 2019). Det må etableres gode sosiomatematiske normer (Yackel & Cobb, 1996). Et eksempel er at elevene ikke bare kan gi svar på et spørsmål, de må også argumentere og forklare hvorfor de mener det blir slik. Dermed blir en elevs resonnement og argumentasjoner tilgjengelig for alle elevene fordi det uttrykkes verbalt og på sikt vil de dermed kunne vurdere og anerkjenne hverandres argumentasjon.

5.1.3 Prinsippet om at dialogen må være støttende

Et annet viktig prinsipp er at dialogen må være støttende. I dette ligger det at elevene skal kunne dele ideene sine uten frykt for å skjemmes over at det evt. er feil. Videre betyr dette prinsippet også at elevene hjelper hverandre med å oppnå en felles forståelse (Alexander, 2018). Dette er et prinsipp som utmerket seg positivt i analysen av elevdialogene. Det er flere eksempler der en eller flere elever stiller spørsmål til andres resonnement og handlinger. Stort sett blir disse besvart med argumentasjon og redegjørelse som gir en felles forståelse. Et eksempel er dialogen mellom Henrik og Georg når de møter oppgaven. Georg var usikker og stilte spørsmål. Henrik var støttende ved at han forklarte og utdypet ideen sin. På denne måten dannet de ~~seg~~ en felles forståelse og en læringsmulighet ble gjort tilgjengelig for Georg. Dette kommer til syne ved at Georg sier «aha, det tenkte ikke jeg på».

Et annet eksempel er dialogen mellom Frans og Emmanuel, gruppe 1, i arbeidet med å velge strategi. Frans foreslår at verdien på en av figurene kunne være 0,5. I stedet for å le av Frans sitt forslag argumenterer Emmanuel for hvorfor han er uenig. Et motstridende eksempel er når Celine kommer med en ide og de to andre ler av henne. I arbeidet med dette prinsippet må det etableres trygge rammer rundt matematisk samtaler. Dette kan ta utgangspunkt i målrettete samtaler hvor en utforsker feil og øver på å endre oppfatning (Kazemi et al., 2019, p. 134). I dette arbeidet vil elevene oppleve feil som verdifulle og oppdage at feil kan gi grobunn for nye læringsmuligheter. På denne måten blir feil omgjort til noe positivt som alle i klassen kan få utbytte av. Også her er sosiomatematiske normer en viktig del dette arbeidet og må etableres som en forutsetning for at det skal fungere. Dette kan for eksempel gjøres ved å bli enige om noen felles regler for matematisk aktivitet (Kazemi et al., 2019, pp. 31-32).

5.1.4 Prinsippet om at dialogen må være kumulativ

Prinsippet om at dialogen skal være kumulativ innebærer at elevene bygger på ideer og tankerekker som kommer til uttrykk i dialogen. Det kan være egne og andres tanker og ideer (Alexander, 2018). Dette punktet må sees i sammenheng med gjensidighet og at dialogen er støttende. Prinsippet om gjensidighet er en forutsetning for at elevene skal kunne bygge videre på hverandres ideer. Først når elevene lytter til hverandres ideer og tar disse i betraktning vil de kunne bygge videre og skape en felles forståelse. Dette fordrer at elevene er tygge nok til å utrykke sine ideer for medstudentene (Nilssen & Høynes, 2020). Prinsippet om at dialogen skal være kumulativ henger også sammen med selve problemløsningsprosessen. På lik linje som prinsippet om gjensidighet, vil også dette prinsippet være avgjørende med tanke på Lithners illustrasjon av problemløsningsprosessen (se figur 2.4). Forskning viser nemlig at gruppearbeid i mange klasserom er lite produktive (Sfard & Kieran, 2001). Dette kan skyldes at prinsippet om at dialogen må være kumulativt ikke oppnås i gruppearbeidet. Da vil dialogen være sprikende og ta ulike retninger for å komme frem til løsningen. Brudd på prinsippet om at dialogen kan derfor bidra til at dialogen er lite produktiv. I grupper hvor dette prinsippet oppnås derimot vil elevene arbeide sammen mot et felles mål og konstruere strategier sammen slik at de trolig kommer frem til bedre og mer effektive løsninger enn de ville oppnådd hver for seg. Dette kan defineres som samkonstruksjon (oversatt fra co-construction) (Littleton & Mercer, 2013, p. 104). I sitt arbeid definerer Littelton og Mercer begrepet «interthinking» som verbal samtale som driver til kollektiv intellektuell aktivitet. For å lykkes kreves en mer kompleks form for interaksjon (Littleton & Mercer, 2013, p. 114).

Samtlige grupper oppfyller prinsippet om at dialogen skal være kumulativ. Gruppe 4 bestående av Jens, Ismail og Kjell, viser likevel en særlig høy oppnåelse av dette prinsippet. Dette blir spesielt synlig i de to midterste fasene hvor elevene velger og anvender strategi. Denne gruppa var effektiv i prosessen sammenlignet med de andre gruppene. Med utgangspunkt i Littelton og Mercers forskning kan årsakssammenhengen være at samtlige var delaktige og bidro inn mot prosessen. Dermed tok de ikke så mange «unødvendige» omveier for å komme til mål ved at hver av guttene forfulgte egne ideer, men at de alle tilfører nye tanker og ideer inn mot hverandres forslag. Videre kom de også kommer frem til særdeles kreative løsninger og komplekse forklaringer. Den kreative løsningen de presenterte var unik og kan defineres som uventet av forskeren. De forfulgte en ide om at de store figurene hadde en verdi på 10 og de små hadde en verdi på -1. Videre viste de også til komplekse forklaringer ved å koble det opp mot gruppestørrelser og brøk. Summen av dette gjør at denne gruppa kan sies å være et godt eksempel på hvordan dialogen er kumulativ og hva det gjør med kvaliteten på dialogen og prosessen. Som nevnt tidligere var de ikke alene. Det er flere eksempler på kumulativt prinsipp i analysen. Også i gruppe 3 med Berit, Celine og Carlos ser en flere eksempler på dette prinsippet. Denne gruppa kan derimot defineres som lite produkt med utgangspunkt i Lithners modell. Dermed er ikke prinsippet om at dialogen er kumulativ ensbetydende med vellykket konklusjon (Littleton & Mercer, 2013, p. 114)

5.1.5 Prinsippet om at dialogen må være målrettet

Det siste prinsippet i dialogisk undervisning handler om at samtalen må være målrettet. I dette ligger det at samtalen skal være planlagt og strukturert. I asymmetriske interaksjoner der en lærer instruerer og veileder elevene kan samtalen i stor grad planlegges og struktureres. Ettersom dette er symmetrisk interaksjon mellom elever i en gruppe vil det være vanskelig å planlegge og strukturere (Littleton & Mercer, 2013, p. 92). Lærere derimot antar gjerne at elevene er i stand til å strukturere og styre dialogen målrettet (Littleton & Mercer, 2013, p. 96). Som nevnt tidligere handler muntlig kommunikasjon i matematikkfaget om å skape mening gjennom samtale og diskusjon (Utdanningsdirektoratet, 2020a, p. 4). I dette ligger det at elevene skal kunne resonnere, det vil si å følge, vurdere og forstå matematiske tankerekker (Utdanningsdirektoratet, 2020a, p. 3). I følge Vygotsky kommer disse til uttrykk gjennom verbal tale og fungerer altså som brobygger mellom det kognitive indre og det verbale ytre (Veer & Zavershneva, 2018).

Ved å ta utgangspunkt i Kilpatrick m.f. definisjon på adaptiv resonnering til grunn vil all tale i matematiske prosesser kunne defineres som resonnement. Men er all verbal kommunikasjon i matematikkfaget produktivt for matematiske prosesser? Med utgangspunkt i sosiokulturell læringsteori, det muntlige språkets plass i den nye læreplanen og masterstudiets fokus på matematiske samtaler, var nok forventningen for denne studien nettopp det ved at matematisk samtale kunne åpne for nye læringsmuligheter for elevene. På lik linje med analysen i Sfard og Kieran studie viser analysen derimot at deler av den verbale kommunikasjonen er lite produktiv med tanke på problemløsningsprosessen og oppgavens mål (Sfard & Kieran, 2001). Dette er drøftet i kapittel 5.1.2 og 5.1.4, men gruppe 3, Berit, Celine og Carlos, trekkes likevel frem også her ettersom de var den eneste gruppa som ikke kom frem til en løsning. Mangelen på produktivitet kan begrunnes i elevenes modenhet og kompetanse når det gjelder verbal kommunikasjon og bruk av fagterminologi. Elevene i gruppe 3 brukte mange ord for å utrykke lite meningsinnhold. Det å kunne uttrykke forklaringer nøyaktig er et viktig element i utforskende samtaler (Kazemi et al., 2019).

For å lykkes er det avgjørende at elevene deler en felles oppfatning av hva som er relevant for diskusjonen (Nilssen & Høynes, 2020, p. 165). Med utgangspunkt i denne studien kan det se ut til at disse små avsporingene kan være forstyrrende med tanke på oppgavens mål. I dette tilfellet klarte elevene å koble de to ikoniske modellene sammen og Berit kom attpåtil med et gyldig forslag til figurenes verdi tidlig i prosessen. De mange avsporingene i den videre dialogen førte dessverre til at de forkastet informasjonen de hadde fått og fortsatte videre med en ugyldig verdi på figurene. Dette er også funnet i andre forskningsstudier som viser at gruppesamtaler ofte har et annet fokus enn oppgaven og at de er lite produktive (Nilssen & Høynes, 2020, p. 162). Den kommunikative kompetansen som til dels legges til grunn for å oppnå læring gjennom samtale må derfor arbeides med systematisk over tid (Nilssen & Høynes, 2020, p. 248). Elevene må lære hvordan de kan bruke språket til å dele tanker, slik at samarbeidet blir mer produktivt (Littleton & Mercer, 2013, p. 96)

5.2 Hvordan kommuniserer elevene ved hjelp av gester?

5.2.1 Deiktiske gester er dominerende

Elevene bruker flere dimensjoner av gester, hvorav deiktiske gester står frem som klart dominerende. Deiktiske gester kan defineres som pekende bevegelser, gjerne på konkreter eller illustrasjoner (McNeill, 2005, pp. 76-80). Gester fungerer både som supplement til den verbale kommunikasjonen, samtidig som gestene i mange tilfeller fungerer alene i kommunikasjonen. Et eksempel på dette er kommunikasjonen mellom Georg, Henrik og Dagny. I den første fasen hvor elevene møter oppgaven vil det den verbale kommunikasjonen i seg selv ikke være forståelig. Der er gester en avgjørende faktor for å skape mening i ytringen. Dette kommer tydelig frem i analysen hvor elevene bruker deiktiske gester til å koble muntlig språk og representasjoner, så vel som kobling mellom ulike ikoniske modeller.

I oppgaven som ble gitt til elevene var det et poeng i å bruke ikoniske modeller i oppgaveteksten (Sullivan et al., 2012, p. 23). Det er derfor betimelig å stille spørsmål til elevenes bruk av deiktiske gester da oppgaven elevene arbeidet med i særlig grad la opp til nettopp dette. Dermed blir det også vanskelig å konkludere med at deiktiske gester alltid spiller en sentral rolle i elevers kommunikasjon i matematikk. Det kan først gjøres ved å se på trender over flere elevgrupper og ulike matematiske oppgaver.

På den andre siden så bør Sullivans funn vektlegges av matematikklærere i den norske skolen. Dersom representasjoner vektlegges i større grad, vil også gester spiller en større rolle i elevers kommunikasjon i matematikk. Dette blir likevel bare refleksjoner. Det er derimot belegg for å si at elevene bruker deiktiske gester i stor grad brukes til å orientere seg selv og andre om de matematiske ideene. Dette ser en særlig når elevene snakker om de små og store figurene i den grafiske fremstillingen. Elevene peker på figurene parallelt med verbal kommunikasjon. Det samme ser vi når elevene teller. Her står den deiktiske gesten alene ved at elevene teller inni seg.

Det samme gjelder for glidende deiktisk gest som brukes til å lese av informasjon vertikalt langs y-aksen i søylediagrammet. Foruten deiktiske gester ser en også et par eksempler på det som kan defineres som bankende gester. Bankende gester er hyppige og gjentakende peking og defineres av intensiteten (McNeill, 2005, p. 80). Dette ser vi blant annet et eksempel på hos Carlos når elevene møter oppgaven. Han gir uttrykk for at det er noe han ikke forstår og viser det med å peke gjentakende på den visuelle fremstillingen med figurer for 4.klasse. Hensikten med disse gestene er å få oppmerksomhet rundt noe, og har dermed, på lik linje med deiktiske gester, en orienterende funksjon så vel som en konstaterende funksjon.

Metaforiske gester ser en kun et eksempel på når Berit møter oppgaven og stiller spørsmål ledsaget av en «spørrende» flat hånd. Som navnet tilsier representerer disse gestene abstrakte begrep (McNeill, 2005, p. 80). Det finnes ikke eksempler på ikoniske gester. Dette kan skyldes at elevene brukte de ikoniske modellene og det var derfor ikke behov for andre ikoniske representasjoner.

5.2.2 Gester fungerer som brobyggere

Funnene i analysen bekrefter langt på vei at gester er en viktig del av elever kommunikasjon i matematikk. Gester brukes av samtlige grupper i alle faser av problemløsningsprosessen. Foruten en orienterende funksjon, brukes også gester for å enklere uttrykke elevenes matematiske ideer eller tankerekker. Dermed er det også hold i Radfords påstand om at tenking skjer både i hodet og gjennom gester (Radford, 2009, p. 122).

Skeptikerne i Radfords artikkel hevder at dyktige matematikere ikke trenger gester i sin kommunikasjon fordi det verbalet språket er komplekst nok (Radford, 2009, p. 122). Sagt motsatt, ved å utvikle kommunikativ kompetanse i matematikkfaget blir gester overflødig. Svakheten ved denne argumentasjonen er å se på muntlig kompetanse som overlegen. Samtidig som det er et mål at elevene skal utvikle god kommunikativ kompetanse, bør det ikke utelukkende gjelde verbalt språk.

Det abstrakte i matematikken kan være utfordrende for elevene (Duval, 2006, pp. 104-105; Svingen, 2018, p. 7). Ved å bruke gester aktivt i kommunikasjonen vil det trolig bli lettere for elever å se sammenhengene i de matematiske prosessene, for eksempel ved å koble ulike representasjoner som matematiske symboler sammen med ikoniske modeller (Bjuland et al., 2008, p. 289; Svingen, 2018, pp. 7-9). Det samme gjelder bruk av gester som støtte i verbal kommunikasjon der gjester kan gjøre den verbale kommunikasjonen mer effektiv. Dette ansvaret ligger hos lærere som må modellere både i klasseromsamtale, så vel som i veiledning i grupper og individuelt. Pedagoger som underviser i matematikk, må være seg bevisst hvilke muligheter gester kan ha som brobygger mellom ulike representasjoner.

5.3 Hvilke representasjoner bruker elevene for å uttrykke matematiske ideer?

5.3.1 Ikoniske modeller

Oppgaven som ble gitt til elevene bestod av skriftlig språk og to ikoniske modeller. De ikoniske modellene var en grafisk fremstilling med små og store strekfigurer og et søylediagram (se figur 3.3) Intensjonen med å bruke ikoniske modeller i denne oppgaven var å synliggjøre kjernen i et matematisk problem (Sullivan et al., 2012). I fasen hvor elevene møter oppgaven, er det avgjørende at elevene oppdager koblingen mellom de to ikoniske modellene. Dersom en ser på læreplanen bør elevene i 7. klasse ha god kjennskap til søylediagram (Utdanningsdirektoratet, 2020a). Observasjonen støtter dette ved at elevene tolket søylediagrammet uten store problemer.

Utfordringen kom da elevene skulle tolke den grafiske fremstillingen med figurer. Av de fem gruppene var det nemlig bare to av gruppene som klarte å koble de to ikoniske modellene sammen uten hjelp fra observatør. Det å kunne se sammenhenger mellom ulike representasjoner er viktig for å utvikle en dypere forståelse i matematikk (Svingen, 2018, pp. 3-4). Innad i de tre gruppene som måtte ha hjelp til å se denne sammenhengen, var det også interne forskjeller i elevens forståelse. Dette ser en blant annet eksempel på ved at Henrik forklarer Georg hvordan de kan bruke informasjonen til å finne verdiene på figurene. Georg svarer med «aha, det tenkte ikke jeg på». Dette kan være et uttrykk for at Georg ikke har utviklet relasjonell forståelse for ikoniske modeller. Senere i prosessen viser han nemlig at han kan både tolke og tegne søylediagram. Dermed er det betimelig å avgrense den manglende forståelsen til relasjonen mellom de to ikoniske modellene, og at bruken av de to i denne konteksten gjør at Georg ikke forstår (Skemp, 1976; Svingen, 2018).

De ikoniske modellene har en særdeles viktig rolle gjennom hele prosessen og brukes som støtte i den verbale kommunikasjonen ved at gestene fungerer som brobygger. Elevene bruker de to ikoniske modellene aktivt i argumentasjonen, så vel som i utregningen. To av gruppene skriver deler av informasjonen på whiteboard og gjør dermed en overgang fra ikoniske modeller til skriftlig språk (Lesh et al., 1987). I fasene hvor elevene anvender strategien og konkluderer velger to av gruppene å løse oppgaven med å lage et tilsvarende søylediagram for 5, 6, og 7.klasse. Hvorfor elevene gjør dette er vanskelig å svare på, men det kan tenkes at de ikoniske modellene i oppgaven har vært førende, enten i form av at de tolker oppgaven slik at de skal lage et tilsvarende, eller eleven har latt seg påvirke ubevisst.

Dette ser en også hos to andre grupper som lager en forklaring ved å tegne en stor og en liten strekmann, som tilsvarer figurene i den grafiske fremstillingen med figurer. Uansett årsak er dette en pekepinn på at elvene lar seg påvirke, bevisst eller ubevisst. Derfor er det viktig at lærer modellerer og bruker ulike representasjoner i undervisningen. På denne måten blir ulike representasjoner tilgjengelige for elevene slik at de kan bruke dette i egne problemløsningsprosesser og dermed gjøre seg egne erfaringer med representasjoner (Svingen, 2018). Med utgangspunkt i Sullivans forskning vil ikoniske modeller gjøre det matematiske problemet mer synlig for elevene.

På denne måte kan elevene også se sammenhenger mellom ulike representasjoner og dermed utvikle relasjonell forståelse (Skemp, 1976).

5.3.2 Erfaringsbaserte situasjoner

Videre ser en at elevene knytter det matematiske problemet opp mot erfaringsbaserte situasjoner. Dette kommer frem ved at de knytter det til egne erfaringer omkring klassestørrelser og hvilke forventninger de har til sannsynlige løsninger. Tre av de fem gruppene går ganske umiddelbart inn i diskusjonen omkring størrelsen på de ulike figurene. Celine påpeker blant annet at det er uvanlig få folk i klassen og viser til 5.klasse med fem figurer. Georg spør om forskjellen i størrelse tilsvarer fordelingen mellom lærer-elev, mens Carlos lurer på om denne forskjellen viser høye og lave elever i klassen. Elevene kobler altså de ikoniske figurene opp mot hverdagslige, erfaringsbaserte situasjoner som de kan relatere til. Problemet settes også inn i en kontekst når gyldigheten på et argument. Dette ser en når Frans foreslår at verdien kan være 0,5, hvorav Emmanuel argumenterer med at det ikke går an å være et halvt menneske.

Erfaringsbaserte situasjoner vektlegges i større grad enn tidligere i dagens kritiske matematikkundervisning der det er et viktig poeng å at elevene er handlende personer. Ved å presentere de matematiske problemene gjennom elevers interesser og virkelighet vil elevene kunne relatere til problemet slik at kunnskapen ikke bare blir overført, men erfart gjennom elevenes handlinger og refleksjoner opp mot konteksten (Skovsmose & Nielsen, 1996, p. 1257). I sin artikkel viser Andersson til mulighetene denne representasjonen gir til elvenes læring. Ved å gi varierte oppgaver i en kontekst som er nærliggende elevenes virkelighet kan matematikken oppleves som meningsfull og nær (Andersson et al., 2015). Dermed vil erfaringsbaserte situasjoner også kunne medvirke til elevenes motivasjon, som Andersson langt på vei bekrefter i sin forskning. Lærere må bruke tid på å finne gode matematikkoppgaver som elevene i større gard kan relatere til og som kan oppleves som meningsfulle. I arbeidet med å finne gode matematikkoppgaver må en også se til Sullivan som argumenterer for bruk av ikoniske modeller i oppgavene (Sullivan et al., 2012). Dermed er det også betimelig å sette spørsmål til lærebokas plass i matematikkfaget og om den er forenelig med den forskningen som ligger til grunn (Blikstad-Balas, 2014).

Det er helt klart mange gode læreverk og læringsressurser i den norske skolen i dag. Den nye læreplanen krever at forlagene utvikler nye læreverk til å samsvare med de nye styringsdokumentene. Spørsmålet er om det er tilstrekkelig? Dersom en skal vektlegge eleveres interesser og ikoniske modeller vil en lærebok være nok til å møte alle de unike elevene i et klasserom? I en travel hverdag er læreboka en god støtte i matematikkundervisningen. Likevel bør lærere bruke tid på å finne gode oppgaver i matematikk som gir økt indre motivasjon da det er viktig for elevers læring (Skaalvik & Skaalvik, 2018).

5.3.3 Skriftlig språk

Hos elevene kommer skriftlig språk utelukkende til utrykk gjennom matematiske symboler i form av ikoniske modeller, siffer, tall og relasjonstegn. Det skriftlige språket står både alene, og i relasjon til de ikoniske modellene som elevene produserer (Lesh et al., 1987). I søylediagrammet blir det skriftlige språket fremstilt på x- og y-aksen. I den grafiske fremstillingen blir figurenes verdi knyttet sammen ved at elevene har tegnet en stor og en liten strekmann. Ved siden av figurene har elevene skrevet opp figurenes verdi koblet ved relasjonstegnet er lik. Henrik stiller spørsmål til observatør om de «må skrive en sånn lang setning?». Dette kan være et uttrykk om at dette vanligvis er en forventing av matematikklæreren at tekstoppgaver skal svares med skriftlig språk. Dette er et eksempel på en sosiomatematisk norm som eventuelt er etablert i klasserommet (Yackel & Cobb, 1996). Dersom det er tilfellet så er det interessant at Henrik er den eneste eleven som er bevisst på dette. Årsaken til at de andre elevene ikke følger opp på samme måte kan være fordi dette er en annen kontekst og at elevene ikke lenger anser de etablerte sosiomatematiske normene gjeldene.

Terskelen for å bruke skriftspråket kan derimot ansees som noe høy, kanskje høyre ettersom elevene fysisk må gå til whiteboard. Dette motstrider med Bjurland som konkluderer med at arbeid på whiteboard gjør at elevene har en lavere terskel for å skrive ned tanker og ideer. Liljedahl argumentere med at elevene er mer ivrige til å begynne, det er mer diskusjon i gruppa, en ser økt deltakelse blant elevene og elevene er mer utholdende (Liljedahl, 2016, p. 370). Årsaken til dette hevder han ligger i verktøyets natur ved at whiteboard ikke er permanent og at det er enkelt for dem å viske vekk. Dermed er terskelen lavere for elevene slik at de prøver mer, og de prøver raskere. Årsaken til at dette ikke samsvarer i denne studien kan være at det å arbeide på whiteboard er relativt ukjent for elevene og at de har tradisjoner for å arbeide på mer tradisjonelle flater som arbeidsbok eller kladdebok. Resultatet av at elevene ikke skriver informasjonen ned, er at mye av resonnementet og konklusjonen forsvinner i diskusjonen. Dette ser et godt eksempel på når gruppe 5, Bjørn, Anna og Ali, skal anvende strategien og gjøre utregninger. Denne prosessen er lite effektiv ettersom de roter mye med hoderegningen. Det er først på slutten av denne prosessen de benytter seg av skriftlig språk i form av standardalgoritme for subtraksjon på tavla. I dette tilfellet er skriftlige språket trolig en god hjelp for å sortere i tankene og til å holde fokus i utregning. Dersom elevene hadde tatt i bruk det skriftlige språket tidligere i prosessen kunne rotet med hoderegningen vært ungått. På en annen side så skriver Berit opp antall elever i 4.klasse, 36, på whiteboard. Her gjør hun en overgang fra den ikoniske modellen til skriftlig språk. Likevel tar gruppe 3 utgangspunkt i 32 når anvender strategien og senere konkluderer. Til tross for at hun har skrevet ned opplysninger gitt tidligere blir disse altså forkastet når de skal konkludere. Dermed kan en stille spørsmål til det skriftlige språkets rolle og om representasjonene står hierarkisk i forhold til hverandre.

Når det gjelder det skriftlige språket i oppgaveteksten som elevene fikk utdelt var det kun to grupper som leste oppgaven høyt. De samme to gruppene klarte å koble de to modellene sammen uten hjelp. Det er interessant å merke seg og samsvarer godt med Liljedahl som konkluderer med at oppgaver må gis muntlig (Liljedahl, 2021). Dette driver veldig raskt gruppene til å diskutere hva som skjer i stedet for å prøve å dekode instruksjoner på papiret. Det kan dermed se ut til at overgangen fra skriftlig språk til verbalt språk kan være nyttig og en effektiv måte å etablere oppgavens mål.

Det skal derimot nevnes at en tredje gruppe også klarte å koble de to modellene uten hjelp. De leste oppgaven hver for seg så det kan ikke defineres som avgjørende. Av de to gruppene som gjorde overgangen fra skriftlig språk til verbalt språk, er særlig interessant å se hvordan Frans leser oppgaven multimodalt ved at han leser høyt av søylediagrammet som en naturlig av det skriftlige språket. Gode problemløsere har en tendens til å være fleksible i bruken av en rekke relevante representasjonssystemer slik at de instinktivt bytter til den mest praktiske representasjonen på et gitt punkt i løsningsprosessen (Lesh et al., 1987, p. 38).

5.3.4 Konkreter

Av alle representasjoner ble konkreter brukt klart minst. David, Emmanuel og Frans bruker centikuber til å lage klassestørrelser i form av tårn. Frans forklarer ideen bak konkretene og gir dermed uttrykk for at han forstår hvordan de kan brukes i denne sammenhengen. Arbeidet med konkreter opphører derimot fordi han hevder det tar for lang tid. En ser også flere eksempler på fikling med centikuber, men det tolkes som uten intensjon om å bruke det i problemløsningsprosessen. Carlos henter de små og store bjørnene i starten av prosessen, men de blir ikke brukt i arbeidet. Det kan være flere årsaker til at elevene ikke benytter seg av konkreter i problemløsningsprosessen. Frans gir uttrykk for at det er lite effektiv og går dermed videre med andre representasjoner.

Gjennom utforskning og erfaringer vil elevene blir kjent med ulike representasjoner og kan dermed vurdere effektiviteten av de ulike representasjonene (Svingen, 2018, p. 5). Videre påpeker Svingen i sin artikkel at det er tradisjoner for å bruke konkretiseringsmateriell i begynneropplæringen og at en gradvis går over til symbolske representasjoner jo eldre elevene blir. Det er et paradoks at konkreter blir mindre vektlagt etter hvert som de matematiske objektene blir med abstrakt jo eldre man blir (Svingen, 2018, p. 7). På bakgrunn av dette kan en anta at elevene på 7.trinn ikke lenger har så mye erfaring med å bruke konkreter i undervisningen. Ved å bruke konkreter i matematikkundervisningen også hos eldre elever vil en kunne synliggjøre de matematiske objektene og dermed kunne konkretisere de abstrakte i matematikkfaget. På denne måte vil også flere utvikle relasjonell forståelse i matematikk som nevnt tidligere, og man kan gi elever på ulike nivå tilpasset opplæring som favner alle. Det er derfor betimelig å revurdere tradisjon og praksis når det gjelder matematikkundervisning og finne muligheter for bruk av konkretiseringsmateriell også blant de eldre elevene. En siste forklaring kan være at utvalget av konkretiseringsmateriell var for dårlig og at flere kanskje hadde benyttet seg av dette dersom det var større utvalg. Dette blir derimot bare spekulasjoner.

5.4 Hva er verdt å merke seg i de ulike fasene i problemløsningsprosessen?

Figur 5.1 - Illustrasjon av de fire stegene i problemløsningsprosessen (Lithner, 2008, pp. 257-258).

De ulike prinsippene, gestene og representasjonene som kom til uttrykk i analysen er oppsummert etter hver fase i analysen (se kap. 4). Dette kapittelet brukes til å se på interessante bemerkninger i de ulike fasene som kan gi implikasjoner på matematikkundervisningen.

I den første fasen er det kun to av fem grupper som leser oppgaveteksten høyt. Dette er drøftet tidligere i kapittel 5.3.3m men det er likevel verdt å vie mer tid til dette. Som nevnt innledningsvis i denne oppgaven blir elevers resonnement vektlagt i stor grad i den nye læreplanen (Utdanningsdirektoratet, 2020a). Dermed bør alle matematikklærere legge opp til undervisnings om tilrettelegger for dette. Liljedahl har allerede pekt på hva som er viktig i tenkende klasserom, hvorav det å gi oppgaven muntlig er et viktig poeng. Ved å gjøre dette vil elevene være mer effektive ved at de ikke trenger å bruke unødvendig lang tid på avkoding (Liljedahl, 2021). Et annet viktig moment ved dette er at oppgaven blir tilgjengelig for alle. Elevers leseferdigheter er en forutsetning i møte med tekstoppgaver. I følge læreplan i norskfaget skal alle elever etter 4.klassse kunne «lese tekster med flyt og forståelse og bruke lesestrategier målrettet for å lære (Utdanningsdirektoratet, 2020b). Selv om lesing regnes som en grunnleggende ferdighet i skolen er det ikke nødvendigvis slik at alle elever klarer å hente ut vesentlig informasjon ved å lese tekstoppgaver. Dersom en etablerer en sosiomatematisk norm i klasserommet der elevene alltid skal lese oppgaveteksten høyt når de arbeider i grupper vil samtlige elever ha det sammen utgangspunktet for å kunne delta i gruppearbeidet. Dermed vil en også kunne trekke linjer til dialogisk undervisning ved at det skapes en felles forståelse innad i gruppa og undervisningen kan defineres som støttende (Alexander, 2018). Det å få elevene til å lese oppgaven høyt har utelukkende fordeler og er derfor verdt å bruke i egen praksis.

I fasen hvor elevene velger en strategi er det spesielt en gruppe som utmerker seg. Gruppa med Berit, Celine og Carlos viser flere brudd på prinsippet om at dialogen er gjensidig så vel som at prinsippet om at dialogen er kumulativ er svakt til stede. Dialogen er sprikende ved at den tar mange og til dels unødvendige retninger i tillegg til at de bruker mange ord på å utrykke lite meningsinnhold (Lithner, 2008; Nilssen & Høynes, 2020). Dette er likevel ikke unikt for denne gruppa. Dialogen kan derfor defineres som lite produktiv. Videre er det også til dels forventet at elevene kommuniserer mye i denne fasen ettersom det elevaktiviteten er høy i denne fasen. På bakgrunn av dette er det, som nevnt i tidligere drøfting, viktig at elevene får læring i hvordan de de kan dele tanker og ideer seg imellom og at det etableres sosiomatematiske normer slik at prinsippet om gjensidighet kommer til syne i dialogen. Dette må arbeids med over tid, men må altså prioriteres ved at lærer modellerer og strukturer, samt at lærer veileder i gruppearbeidet (Kazemi et al., 2019).

Når elevene skal anvende strategien ser en større variasjon i bruk av representasjoner. En ser eksempler på at elevene bruker alle representasjonene i Lesh m.fl. sin modell; manipulerbare modeller, ikoniske modeller, skriftlig språk, verbalt språk og erfaringsbaserte situasjoner (Lesh et al., 1987). Fire av fem grupper ender opp med å bruke en whiteboard til å tegne ikonisk modell, skriftlig språk eller en kombinasjon av disse. På bakgrunn av dette er det dermed viktig at dette er tilgjengelig for elevene. Selv om ikke manipulerbare modeller ble forkastet tidlig i denne fasen fordi elevene vurderte det som lite effektivt, er det likevel viktig å ha dette tilgjengelig for elvene. Tradisjonen i norske klasserom er at konkretiseringsmateriell brukes i stor grad i begynneropplæringen og at bruken avtar jo eldre elevene blir (Svingen, 2018). Dette kan være uheldig nettopp fordi matematikken på samme tid blir mer abstrakt. Dermed er det på høy tid å revurdere denne praksisen. Videre er det også verdt å reflektere over hvilke flatere elevene tilgjengelig i klasserommene. Lilljedahl argumenterer godt for ikke-lineære flater som whiteboard ved at det er enkelt for elevene å viske vekk og deretter begynne på nytt (Liljedahl, 2016). Det er naturligvis et økonomisk aspekt ved dette da det koster å gå til innkjøp av whiteboard, men et kompromiss kan være å laminere A4-ark slik at elvene kan benytte seg av flater med samme fordeler.

Den siste fasen handler om at elevene skal konkludere og oppsummere. I oppgaveteksten ble det stilt to spørsmål som elevene skulle besvare på. Hos noen grupper kommer det ikke tydelig nok frem hva elevene konkluderer med. Det kan være to årsaker til dette. For det første er skillet mellom de to siste fasene uklare og elevene anser trolig den skriftlige forklaringen eller de ikoniske modellene de tegnet i fasen hvor de anvender strategien som tilfredsstillende nok. Den andre årsaken kan være at elevene ikke lenger har oversikt over hva de spør om i oppgaven. Tre av gruppene går tilbake i oppgaven, mens en av gruppene spør observatør. Dermed er trolig ikke dette årsaken her. Dermed handler det om at elevene ikke er tydelige når de oppsummerer og konkluderer. Det kan være en ide å utvikle sosiomatematiske normer om at elevene må tydeliggjøre hva de svarer på og hvordan de gjør det (Yackel & Cobb, 1996). Henrik stilte blant annet spørsmål om de må «skrive en sånn lang setning». Det å legge føringer på dette er ikke nødvendigvis løsningen ettersom det begrenser elevene i hvilke representasjoner de kan bruke. Likevel bør det etableres en forventning til elvene om at de tydeliggjør konklusjonen sin. En ser kun et tydelig eksempel på dette når Ali skriver to streker under svaret til Bjørn på whiteboard.

6 Konklusjon

I dette kapittelet vil jeg oppsummere oppgavens problemstilling og knytte relevante funn opp mot denne. Jeg vil også kort beskrive metoden som er brukt i dette forskningsprosjektet. Avslutningsvis vil jeg trekke noen implikasjoner og refleksjoner.

6.1 Hvordan blir matematikk kommunisert i arbeidet med rike oppgaver i små grupper?

I denne oppgaven har jeg hatt jeg sett nærmere på hvordan elever kommuniser i matematikk. Dette er begrenset til arbeid med rike oppgaver i små grupper og har tatt utgangpunkt i problemstillingen «Hvordan blir matematikk kommunisert i arbeidet med rike oppgaver i små grupper? Ved hjelp av kvalitativ kasusstudie har jeg sett nærmere på hvordan fem elevgrupper kommuniserer i matematikk. Observasjon av de fem gruppene ble gjort ved videoopptak og ble analysert med hensyn til tre forskningsspørsmål:

Hvordan kommuniserer elevene verbalt?
Hvordan kommuniserer elevene ved hjelp av gester?
Hvilke representasjoner bruker elevene for å uttrykke matematiske ideer?

De tre perspektivene ble analysert ved deduktiv analyse der Alexander, McNiell og Lesh utgjorde det teoretiske rammeverket.

De sentrale funnene i denne studien er at den verbale kommunikasjonen ikke er produktiv og prinsippene om dialogisk undervisning blir kun delvis oppfylt. Elevene brukte mange ord på å uttrykke lite meningsinnhold. Brudd på nøkkelprinsippene om at dialogen må være gjensidig, støttende og kumulativ hindret effektiv og produktivt samarbeid ved at elevene ikke klarte å strukturere dialogen seg imellom slik at det blir målrettet. Dette gir implikasjoner om at arbeid med samtaler i matematikk må arbeides med over tid gjennom modellering og øving (Kazemi et al., 2019; Nilssen & Høynes, 2020).

Deiktiske gester ble brukt aktivt i kommunikasjonen og ble i stor grad brukt som brobygger mellom det verbale språket og de matematiske representasjonene. Ved å bruke gester aktivt i kommunikasjonen ble det trolig lettere for elever å se sammenhengene i de matematiske prosessene, for eksempel ved at de koblet ulike representasjoner som matematiske symboler sammen med ikoniske modeller. Kommunikasjonen ble også mer effektiv ved at elevene viste til de ikoniske modellene i stedet for å forklare verbalt. Pedagoger som underviser i matematikk, må være seg bevisst hvilke muligheter gester kan ha som brobygger mellom ulike representasjoner (Bjuland et al., 2008).

Elevene brukte ulike representasjoner for å løse den rike oppgaven de ble tildelt. I oppgaveteksten ble det presentert to ikoniske modeller. Disse ble brukt aktivt gjennom hele problemløsningsprosessen av samtlige grupper og kan defineres som dominerende. Det samme kan sies om erfaringsbaserte situasjoner som elevene brukte til å vurdere gyldighetene i verdiene på figurene. Til å besvare spørsmålene i oppgaveteksten brukte elevene ikoniske modeller som søylediagram og figurer. Sistnevnte ble brukt i en kombinasjon med skriftlig språk i form av matematiske symboler. Elevene brukte også skriftlig språk for å gjøre utregninger på whiteboard, samt i konklusjonen ved at de skrev klassestørrelsene på tavla. Pedagoger må bruke og modellere ulike representasjoner i undervisningen. Arbeid ulike representasjoner gjennom bearbeiding og overganger er viktig for å utvikle relasjonell forståelse i matematikk (Lesh et al., 1987; Skemp, 1976).

I denne studien har det også vært et poeng å se på hvordan elevene kommuniserer i de ulike fasene i problemløsningsprosessen. Dette er interessant fordi det kan gi implikasjoner for hva lærere bør vektlegge i sin undervisning for å legge til rette for det potensielle læringsutbytte som ligger i det sosiokulturelle aspektet av matematikkfaget. Modellen er laget med utgangspunkt i Lithners fire steg i problemløsningsfasen (se figur 3.5):

1. Elevene møter oppgaven
2. Elevene velger en strategi
3. Elevene anvender en strategi
4. Elevene konkluderer

I første fase, hvor elevene møter oppgaven, bør det etableres en sosiomatematisk norm om at en elev med gode leseferdigheter leser oppgaveteksten høyt for de andre. Videre bør det arbeides med målrettet samtale i matematikk, der en særlig vektlegger prinsippene om at dialogen skal være gjensidig og kumulativ. I fasen hvor elevene anvender strategien ser en at elevene bruker ulike representasjoner, og et mangfold av representasjoner må derfor være tilgjengelig ... elevene. I den siste fasen bør det, i likhet med den første fasen, etableres en sosiomatematisk norm som tilsier at elevene må tydeliggjøre svarene sine.

6.2 Veien videre

Gjennom dette forskningsprosjektet har jeg gjort meg viktige erfaringer med evidensbasert kunnskap. Disse erfaringene, samt funnene i denne studien, vil være nyttige i min egen yrkesutøvelse og inn mot profesjonsfelleskapet. Til tross for at dette arbeidet har vært rot til mye frustrasjon, kan jeg nå som jeg er ved veis ende også si at det har vært både interessant og lærerikt. Selv om det trolig ikke vil være tid til forskningsprosjekt av denne skala i skolehverdagen, har jeg et mål om å bruke det jeg har lært inn i skolehverdagen og forhåpentligvis gjøre noen viktige observasjoner som kan fremme min praksis. Særlig har jeg et ønske om å undersøke hvilke gruppestørrelser og gruppesammensetninger som gir best læring når det samarbeides i matematikk. En gang i fremtiden.

7 Litteraturliste

Alexander, R. (2018). Developing dialogic teaching: genesis, process, trial. *Research Papers in Education, 33*(5), 561-598. doi:10.1080/02671522.2018.1481140

Andersson, A., Valero, P., & Meaney, T. (2015). "I am [not always] a maths hater": Shifting students' identity narratives in context. *Educational Studies in Mathematics, 90*(2), 143-161. doi:10.1007/s10649-015-9617-z

Arzarello, F., Robutti, O., & Thomas, M. (2015). Growth point and gestures: looking inside mathematical meanings. *Educational Studies in Mathematics, 90*(1), 19-37. doi:10.1007/s10649-015-9611-5

Bjuland, R., Cestari, M. L., & Borgeresen, H. E. (2008). The interplay between gesture and discourse as mediating devices in collaborative mathematical reasoning: A multimodal approach. Mathematical Thinking and Learning. *Mathematical Thinking and Learning*, 271-292.

Bjørndalen, C. R. P. (2013). Videoobservasjon som forsknings- og utviklingsredskap i skolen. In M. Brekke, T. Tiller, M. Brekke, & T. Tiller (Eds.), *Læreren som forsker : innføring i forskningsarbeid i skolen* (pp. 152-172). Oslo: Universitetsforl.

Blikstad-Balas, M. (2014). Lærebokas hegemoni - et avsluttet kapittel? In: Novus Forlag.

Dalland, O. (2017). *Metode og oppgaveskriving* (6. utg. ed.). Oslo: Gyldendal akademisk.

Duval, R. (2006). A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. In (pp. 103-131). Dordrecht, Holland :.

Hagemann, K. (2009). Kommunikasjon. Retrieved from https://snl.no/kommunikasjon

Hana, G. M. (2014). Representasjoner. In G. M. Hana (Ed.), (pp. 131 -182). [Bergen]: Caspar forl.

Hedrén, R., Taflin, E., & Hagland, K. (2005). Vad menar vi med rika problem och vad är de bra till. *Nämnaren 32 (1)*, 36-41.

Høgheim, S. (2020). *Masteroppgaven i GLU* (1. utgave ed.). Bergen: Fagbokforlaget.

Jeannotte, D., & Kieran, C. (2017). A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 96*(1), 1-16. doi:10.1007/s10649-017-9761-8

Kazemi, E., Hintz, A., Birkeland, K. B., & Jørgenssen, T. (2019). *Målrettet samtale : hvordan strukturere og lede gode, matematiske diskusjoner* (1. utgave. ed.). Oslo: Cappelen Damm akademisk.

Kenneally, C. (2007). *The First Word: The Search for the Origins of Language*: Penguin.

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics* (N. R. Council & M. L. S. Committee Eds.): National Academies Press.

Kunnskapsdepartementet. (2004). *Kultur for læring*. (Meld. St. 30 (2003-2004)). Retrieved from https://www.regjeringen.no/no/dokumenter/stmeld-nr-030-2003-2004-/id404433/?ch=1

Kunnskapsdepartementet. (2020). *Overordnet del - verdier og prinsipper for grunnopplæringen*. Retrieved from https://www.udir.no/lk20/overordnet-del/

Kvarv, S. (2021). *Vitenskapsteori : tradisjoner, posisjoner og diskusjoner* (Ny og utvidet utgave. ed.). Oslo: Novus forlag.

Lemke, J. L. (2003). Mathematics in the middle: Measure, picture, gesture, sign, and word. *Educational perspectives on mathematics as semiosis: From thinking to interpreting to knowing, 1*, 215-234.

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1987). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. In (pp. 33-40). Hillsdale: USA: Lawrence Erlbaum.

Liljedahl, P. (2016). Building thinking classrooms: Conditions for problem-solving. In *Posing and solving mathematical problems* (pp. 361-386): Springer.
Liljedahl, P. (2021). *Building thinking classrooms in mathematics, grades k-12 : 14 teaching practices for enhancing learning*.
Lithner, J. (2008). A Research Framework for Creative and Imitative Reasoning. *Educational Studies in Mathematics, 67*(3), 255-276. Retrieved from http://www.jstor.org.ezproxy1.usn.no/stable/40284656
Littleton, K., & Mercer, N. (2013). *Interthinking*. London: London: Taylor & Francis Group.
Matematikksenteret. Hvor store er klassene? Retrieved from https://www.mattelist.no/503
McNeill, D. (2005). *Gesture and thought*. Chicago: University of Chicago Press.
NESH, D. n. f. k. f. s. o. h. (2021). *Forskningsetiske retningslinjer for samfunnsvitenskap og humaniora*. De nasjonale forskningsetiske komiteene Retrieved from https://www.forskningsetikk.no/retningslinjer/hum-sam/forskningsetiske-retningslinjer-for-samfunnsvitenskap-og-humaniora/
Nilssen, V. L., & Høynes, S.-M. (2020). *Samtaleorientert matematikk : et samspill mellom didaktiske og adidaktiske situasjoner* (1. utgave. ed.). Bergen: Fagbokforlaget.
Nilstun, C. (2009). gestus. Retrieved from https://snl.no/.versions/list/81996
Niss, M., & Jensen, T. H. (2002). *Kompetencer og matematikklæring*. (Utdanningsstyrelsesn temahæfteserie nr. 18 - 2002). Danmark Retrieved from https://www.matematikksenteret.no/sites/default/files/attachments/page/Kompetencer%20og%20matematikl%C3%A6ring.pdf?fbclid=IwAR29eq6qhVt8bdh8CTPj3cVkNPAmNNS1vsJ9GE5LWr4ne-t9gum-J6nGvWk
Nosrati, M., & Wæge, K. (2015). Sentrale kjennetegn på god læring og undervisning i matematikk. *Matematikksenteret*, 1-19.
NOU 2015: 8. (2015). *Fremtidens skole: Fornyelse av fag og kompetanser*. Retrieved from https://www.regjeringen.no/contentassets/da148fec8c4a4ab88daa8b677a700292/no/pdfs/nou201520150008000dddpdfs.pdf
NOU 2018: 2. (2018). *Fremtidige kompetansebehov I — Kunnskapsgrunnlaget*. Oslo: Kunnskapsdepartementet
Pehkonen, E. (1997). Introduction to the concept" open-ended problem". *Use of open-ended problems in mathematics classroom, 6*(10).
Radford, L. (2009). Why do gestures matter? Sensuous cognition and the palpability of mathematical meanings. In (pp. 111-126). Dordrecht, Holland :.
Sfard, A., & Kieran, C. (2001). Cognition as Communication: Rethinking Learning-by-Talking Through Multi-Faceted Analysis of Students' Mathematical Interactions. In (pp. 42-76). [Mahwah, NJ] :.
Skemp, R. R. (1976). Relational Understanding and Instrumental Understanding. *Mathematics teaching*(3), 9-15. doi:10.5951/at.26.3.0009
Skovsmose, O., & Nielsen, L. (1996). Critical mathematics education. In (pp. 1257-1288). Dordrecht: Kluwer.
Skaalvik, E. M., & Skaalvik, S. (2018). *Skolen som læringsarena : selvoppfatning, motivasjon og læring* (3. utg. ed.). Oslo: Universitetsforl.
Stray, J. H., & Wittek, L. (2014). *Pedagogikk : en grunnbok*. Oslo: Cappelen Damm akademisk.
Sullivan, P., Clarke, D., & Clarke, B. (2012). *Teaching with tasks for effective mathematics learning* (Vol. 9): Springer Science & Business Media.
Svingen, O. E. L. (2018). Representasjoner i matematikk. *Hentet fra https://www. matematikksenteret. no/sites/default/files/attachments/Elever% 20som, 2*.

Tangen, R. (2010). Beretninger om beskyttelse» - Etiske dilemmaer i forskning med sårbare grupper - barn og ungdom. *94*(4), 318-329. Retrieved from https://bibsys-almaprimo.hosted.exlibrisgroup.com/permalink/f/kb63e2/TN_cdi_idunn_primary_42852970

Tjora, A. H. (2017). *Kvalitative forskningsmetoder i praksis* (3. utg. ed.). Oslo: Gyldendal akademisk.

Utdanningsdirektoratet. (2006). *Læreplan i matematikk fellesfag*. (MAT1-04).

Utdanningsdirektoratet. (2020a). *Læreplan i matematikk 1-10. trinn*. (MAT01-05). Retrieved from https://www.udir.no/lk20/mat01-05

Utdanningsdirektoratet. (2020b). *Læreplan i norsk* (NOR01-06). Retrieved from https://www.udir.no/lk20/nor01-06

Veer, R., & Zavershneva, E. (2018). The final chapter of Vygotsky's Thinking and Speech: A reader's guide. *The History of the Behavior Sciences, 54*(2), 101-116. doi:10.1002/jhbs.21893

Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(4), 458-477.

Yeo, J. B. W. (2017). Development of a Framework to Characterise the Openness of Mathematical Tasks. *International Journal of Science and Mathematics Education, 15(1)*, 175-191. doi:10.1007/s10763-015-9675-9

8 Vedlegg

8.1 Vedlegg 1: Godkjenning fra NSD

NORSK SENTER FOR FORSKNINGSDATA

NSD sin vurdering

Prosjekttittel

«Hvordan blir matematikk kommunisert i arbeidet med rike oppgaver i små grupper»?

Referansenummer

358871

Registrert

27.09.2021 av Ulrikke Nesheim Heldal - 215258@student.usn.no

Behandlingsansvarlig institusjon

Universitetet i Sørøst-Norge / Fakultet for humaniora, idrett- og utdanningsvitenskap / Institutt for matematikk og naturfag

Prosjektansvarlig (vitenskapelig ansatt/veileder eller stipendiat)

Aud Kjæret, Aud.Kjaret@usn.no, tlf: 91825055

Type prosjekt

Studentprosjekt, masterstudium

Kontaktinformasjon, student

Ulrikke Nesheim Heldal, ulrikke.heldal@gmail.com, tlf: 91549040

Prosjektperiode

17.08.2021 - 13.07.2022

Status

15.11.2021 - Vurdert

Vurdering (1)

15.11.2021 - Vurdert

Det er vår vurdering at behandlingen vil være i samsvar med personvernlovgivningen, så fremt den gjennomføres i tråd med det som er dokumentert i meldeskjemaet 15.11.2021 med vedlegg, samt i meldingsdialogen mellom innmelder og NSD. Behandlingen kan starte.

TYPE OPPLYSNINGER OG VARIGHET

Prosjektet vil behandle alminnelige kategorier av personopplysninger frem til 13.07.2022.

LOVLIG GRUNNLAG

Prosjektet vil innhente samtykke fra foresatte til behandlingen av personopplysninger om barna. Vår vurdering er at prosjektet legger opp til et samtykke i samsvar med kravene i art. 4 og 7, ved at det er en frivillig, spesifikk, informert og utvetydig bekreftelse som kan dokumenteres, og som den registrerte/foresatte kan trekke tilbake.
Lovlig grunnlag for behandlingen vil dermed være foresattes samtykke, jf. personvernforordningen art. 6 nr. 1 bokstav a.

PERSONVERNPRINSIPPER

NSD vurderer at den planlagte behandlingen av personopplysninger vil følge prinsippene i personvernforordningen:

- om lovlighet, rettferdighet og åpenhet (art. 5.1 a), ved at foresatte får tilfredsstillende informasjon om ogsamtykker til behandlingen
- formålsbegrensning (art. 5.1 b), ved at personopplysninger samles inn for spesifikke, uttrykkelig angitte ogberettigede formål, og ikke viderebehandles til nye uforenlige formål
- dataminimering (art. 5.1 c), ved at det kun behandles opplysninger som er adekvate, relevante ognødvendige for formålet med prosjektet
- lagringsbegrensning (art. 5.1 e), ved at personopplysningene ikke lagres lengre enn nødvendig for åoppfylle formålet.

DE REGISTRERTES RETTIGHETER

NSD vurderer at informasjonen om behandlingen som de registrerte og deres foresatte vil motta oppfyller lovens krav til form og innhold, jf. art. 12.1 og art. 13.

Så lenge de registrerte kan identifiseres i datamaterialet vil de ha følgende rettigheter: innsyn (art. 15), retting (art. 16), sletting (art. 17), begrensning (art. 18) og dataportabilitet (art. 20).

Vi minner om at hvis en registrert/foresatt tar kontakt om sine/barnets rettigheter, har behandlingsansvarlig institusjon plikt til å svare innen en måned.

FØLG DIN INSTITUSJONS RETNINGSLINJER

NSD legger til grunn at behandlingen oppfyller kravene i personvernforordningen om riktighet (art. 5.1 d), integritet og konfidensialitet (art. 5.1. f) og sikkerhet (art. 32).

For å forsikre dere om at kravene oppfylles, må dere følge interne retningslinjer og eventuelt rådføre dere med behandlingsansvarlig institusjon.

MELD VESENTLIGE ENDRINGER

Dersom det skjer vesentlige endringer i behandlingen av personopplysninger, kan det være nødvendig å melde dette til NSD ved å oppdatere meldeskjemaet. Før du melder inn en endring, oppfordrer vi deg til å lese om hvilke type endringer det er nødvendig å melde: nsd.no/personverntjenester/fylle-ut-meldeskjemafor-personopplysninger/melde-endringer-i-meldeskjema Du må vente på svar fra NSD før endringen gjennomføres.

OPPFØLGING AV PROSJEKTET

NSD vil følge opp ved planlagt avslutning for å avklare om behandlingen av personopplysningene er avsluttet.

Kontaktperson hos NSD: Lene Chr. M.

Brandt

8.2 Vedlegg 2: Samtykkeskjema

Vil du delta i forskningsprosjektet

«Hvordan blir matematikk kommunisert i arbeidet med rike oppgaver i små grupper»?

Dette er et spørsmål til deg og ditt barn om å delta i et forskningsprosjekt hvor formålet er å undersøke hvordan elever kommuniserer seg imellom gjennom samarbeid om problemløsing i matematikk. I dette skrivet gir vi deg informasjon om målene for prosjektet og hva deltakelse vil innebære for deg og ditt barn.

Bakgrunn og formål

Jeg er lærerstudent ved Universitetet i Sørøst-Norge og skal i denne forbindelse skrive en mastergradsoppgave i matematikkdidaktikk. Formålet med studien er å finne ut hvordan elever kommuniserer når de samarbeider i små grupper med oppgaveløsningsoppgaver. Med denne studien ønsker jeg å svare på følgende spørsmål:

Hvordan kommuniserer elevene verbalt?
Hvordan kommuniserer elevene non-verbalt?
Hvilke representasjoner bruker de for å underbygge den matematiske kommunikasjonen?

Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?
Universitetet i Sørøst-Norge er ansvarlig for prosjektet.

Hvorfor får du spørsmål om å delta?

Jeg har gjennomført studentpraksis på dette trinnet tidligere og det er derfor ønskelig å gjennomføre prosjektet på dette trinnet. Dersom flere enn nødvendig samtykker til å delta i prosjektet vil jeg foreta en utvelgelse av de som har samtykket.

Hva innebærer det for deg å delta?

For å hente inn nødvendig datamateriale for dette prosjektet vil det bli tatt video- og lydopptak. Hensikten med dette er å kunne gjennomføre grundig observasjon av situasjonen(e) slik at analysen og resultatene jeg fremmer i masteroppgaven er nøyaktige. Til opptakene vil jeg bruke en Ipad med lokal lagring. Det er kun jeg som har tilgang til denne. Observasjonene vil bli anonymisert i masteroppgaven. Alt datamateriale vil bli slettet når masteroppgaven er vurdert til bestått.

Det er frivillig å delta

Det er frivillig å delta i prosjektet. Hvis du velger å delta, kan du når som helst trekke samtykket tilbake uten å oppgi noen grunn. Alle dine personopplysninger vil da bli slettet. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for deg hvis du ikke vil delta eller senere velger å trekke deg.

Ditt personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker dine opplysninger

Vi vil bare bruke opplysningene om deg til formålene vi har fortalt om i dette skrivet. Vi behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket. Det er kun jeg som har tilgang til selve datamaterialet. Ved behov kan det bli nødvendig å vise noe av datamaterialet til veileder Aud Kjæret ved USN. Dersom sitat eller konkrete hendelser blir beskrevet i masteroppgaven vil de bli anonymisert ved at elevene får fiktive navn.

Hva skjer med opplysningene dine når vi avslutter forskningsprosjektet?

Opplysningene slettes når oppgaven er godkjent, noe som etter planen er august 2022.

Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om deg?

Vi behandler opplysninger om deg basert på ditt samtykke.

På oppdrag fra Universitetet i Sørøst-Norge har NSD – Norsk senter for forskningsdata AS vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Dine rettigheter

Så lenge du kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:

- innsyn i hvilke opplysninger vi behandler om deg, og å få utlevert en kopi av opplysningene
- å få rettet opplysninger om deg som er feil eller misvisende
- å få slettet personopplysninger om deg
- å sende klage til Datatilsynet om behandlingen av dine personopplysninger

Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å vite mer om eller benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:

- Universitetet i Sørøst-Norge ved Aud Kjæret: Aud.Kjaret@usn.no
- Ulrikke Nesheim Heldal: ulrikke.heldal@gmail.com

Hvis du har spørsmål knyttet til NSD sin vurdering av prosjektet, kan du ta kontakt med:

- NSD – Norsk senter for forskningsdata AS på epost (personverntjenester@nsd.no) eller på telefon: 55 58 21 17.

Med vennlig hilsen

Aud Kjæret Ulrikke Nesheim Heldal

(Veileder) (Student)

Jeg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet *«Hvordan blir matematikk kommunisert i arbeidet med rike oppgaver i små grupper»?* og har fått anledning til å stille spørsmål. Jeg samtykker til:

☐ at mitt barn ____ kan delta i prosjektet der det vil bli tatt video- og lydopptak.

Jeg samtykker til at mitt barns opplysninger behandles frem til prosjektet er avsluttet.

(Signert av foresatte til prosjektdeltaker, dato)