Universitetet i Sørøst-Norge
Fakultet for humaniora, idretts- og utdanningsvitenskap
-
Masteravhandling i grunnskolelærerutdanning 5-10
Studieprogram: PROGLU2
Vår 2021

Lina Ekeli Nystuen

Elevers utforskning av matematikk ved hjelp av GeoGebra

Universitetet i Sørøst-Norge
Fakultet for humaniora, idretts- og utdanningsvitenskap
Institutt for pedagogikk
Postboks 235
3603 Kongsberg

http://www.usn.no

Denne avhandlingen representerer 30 studiepoeng

Sammendrag

Denne kvalitative casestudien benytter et sosiokulturelt perspektiv (Vygotksy; 1978; Säljö, 2001), for å undersøke hvordan elevenes læring og forståelse av matematikk utvikles i samspill med rike oppgaver og digitale læremidler. Tidligere forskning har vist at elevene kan utvikle sin forståelse av matematiske konsepter (Dolonen og Ludvigsen, 2012) og etablere et mer formelt fagspråk (Aventi et al., 2014) av å utforske matematikken digitalt. Formålet med oppgaven er å se på de utforskende mulighetene som skapes i samspillet mellom deltakerne og redskapene, ved å undersøke elevenes interaksjon med digitale læremidler og ressurser. Studien tar utgangspunkt i følgende forskningsspørsmål:

«På hvilken måte kan digitale ressurser og læremidler støtte elevene i å utforske matematikken?»

Studien benytter sekundærdata fra det pågående prosjektet Multimodale lærings- og vurderingsformer (MuLVu). Datamaterialet for denne studien har primært vært videoopptak av elevsamarbeid og vurderingssamtale, i tillegg til støtte fra kontekstuelle data, som elevprodukter og oppgavebeskrivelser.

Denne avhandlingen viser aspekter for hvordan matematikkundervisning tar form i en-til-en-klasserom, der læreren opererer med egenproduserte læremidler for å tilrettelegge for elevens læring. Ved å undersøke elev-elev interaksjon i arbeidsprosessen har studien gitt innsikt i hvordan elevene utvikler forståelse av lineære grafer i et komplekst samspill med hverandre, oppgavene og de digitale ressursene. I tillegg har studien sett på lærer-elev interaksjon i to samtaleformer, både underveis i arbeidsprosessen og under en vurderingssamtale. Dette har gitt innsikt i hvordan lærer kan legge til rette og støtte for kunnskapsutvikling og forståelse av grafer og digitale læremidler. Funnene fra denne studien viser at de digitale ressursene utfordrer elevene på ulikt vis. GeoGebra er en ressurs som i samspill med rike oppgaver gir utforskende muligheter for elevene. Samtalene som oppstår i elevens arbeid med grafverktøyet er konstruktive for elevens forståelse og læring. Samtidig er det knyttet utfordringer til hvordan grafen oversetter fra de ulike matematiske uttrykksformene, der elvene tilsynelatende kan mestre oppgaven å tegne frem en graf i programmet, uten helt å forstå hva grafen viser. Derfor viser denne studien at lærerens støtte, i undervisningsdesignet, underveis i arbeidsprosessen og i en vurderingssituasjon, er essensiell for at elevene skal utvikle den konseptuelle forståelsen av arbeidet med grafene. Studien indikere at det er samspillet mellom alle deltakerne og ressursene tilgjengelig som sørger for rik læring (Säljö, 2010).

Forord

Etter tre supre år i Drammen har det vært spennende å gyve løs på masterløpet i Vestfold. Selv om det siste halvannet årene ble langt fra slik vi hadde tenkt oss, er jeg takknemlig for gode, digitale samlinger med medstudenter og forelesere.

Det er rart at dette kapittelet nå skal avsluttes, men det føles godt og endelig kunne jobbe fulltid i verdens beste yrke! Jeg er takknemlig for all kunnskap jeg tar med meg fra dette studiet og ikke minst erfaringer fra arbeidet med denne avhandlingen.
Det har vært både spennende, tøft og ikke minst frustrerende, og det er få andre prosesser i livet så langt, som måler seg med det kaoset kropp og topp har kjent på det siste halve året.

Det er mange mennesker rundt meg som har strukket seg langt for at jeg skal komme i mål og alle fortjener både en hilsen og en koronafri klem.
Først og fremst vil jeg gi en stor takk til veilederen min, Line Ingulfsen. Du har virkelig vært en fabelaktig veileder og støttespiller gjennom denne prosessen! Du har gitt meg mange gode råd, verdifulle tilbakemeldinger i arbeidsprosessen og ikke minst vært veldig tålmodig. Vårt samarbeid og våre samtaler har gitt meg mye, så tusen takk!

Takk til LUDO-prosjektet som har støttet denne studien og til forskningsgruppen LÆDIME for gode tilbakemeldinger og innspill i prosessen.

Til slutt vil takke familien, med mamma, pappa, mormor og bestefar som har bistått med moralsk støtte og barnepass av jentene. Det har betydd mye! Takk til bestefar som har korrekturlest og takk til pusekatten for utallige timer med kos ved stuebordet.
Helt til slutt må den største takken gis til deg og jentene, Christian. Dere har vært utrolig tålmodige og støttet meg hele veien. Dere betyr alt!

Vi kom i mål!

Lina Ekeli Nystuen,

Asker, 2021

Innholdsfortegnelse

1. Innledning

I takt med digitaliseringen i skolen, går stadig flere over til det som omtales som en-til-en-klasserom, der elevene benytter hver sin digitale enhet (Gilje et al., 2020). Omfavnelsen av teknologien har for noen resultert i at konvensjonelle læremidler, som læreboka, har blitt byttet ut med digitale løsninger. Matematikk er et fag som tradisjonelt sett har vært preget av mye individuelt arbeid med læreboka som hovedressurs (Skovsmose, 1998; Handal, 2003). De siste årene har imidlertid utforskende arbeidsmåter, samarbeid og bruk av digitale ressurser i skolen fått mye oppmerksomhet blant forskere og politikere. Dette har medført at fagenes innhold i skolen har blitt revidert og endret for å møte samfunnets fremtidige krav (NOU 2015: 8).

I den nye læreplanen har fagene fått kjerneelementer som beskriver hva elevene må lære for å kunne mestre og anvende faget. I matematikk har elementet utforsking og problemløsning fått en sentral plass. Utforsking handler om at elevene blant annet skal «lete etter mønstre, finne sammenhenger og diskutere seg fram til en felles forståelse» (Utdanningsdirektoratet, 2019). Problemløsning går ut på at elevene utvikler metoder for å løse et ukjent problem. Her skal elevene legge mer vekt på strategiene og fremgangsmåtene enn på selve løsningene (Posamentier & Krulik, 2015, s. xv; Utdanningsdirektoratet, 2019). Dette kjerneelementet knyttes i stor grad opp mot kompetanser, som faller inn under begrepet *21 Century skills.* I utdanningssammenheng betyr dette at skolen skal hjelpe elevene til å utvikle ferdigheter og kompetanser som følger livet ut (Arstorp, 2019, s. 19). Disse beskrives som ferdigheter og kompetanse i ulike fag, i tillegg til at elevene skal få innsikt i fremgangsmåter og til hvorfor, hvordan og når de ulike prosedyrene kan anvendes for å løse problemer (Board on Testing Assessment et al., 2012, s. 23). Slike ferdighetene kan åpne dørene for innovasjon, samhandling og kommunikasjon (Ananiadou & Claro, 2009 s. 10).

De digitale ressursene i 1:1-klasserom utfordrer samspillet i læringsomgivelsene og rollene til deltakerne (Säljö, 2010). For læreren innebærer dette å planlegge undervisning, med utgangpunkt i et vidt spekter av ulike ressurser. Mange lærere inntar roller som læremiddelprodusenter, for å tilpasse undervisningsopplegg etter sine tilgjengelige ressurser. For elevene innebærer det å utvikle kunnskap og ferdigheter, til å navigere i et univers av informasjon og muligheter. Elevene møter krav til mer selvstendighet, når de får større frihet til å benytte ulike ressurser. Forskere har påpekt at det er måten teknologien blir anvendt på som er avgjørende for om den bidrar til forståelse og læring hos elevene (Jewitt et al., 2007; Selwyn, 2010). Selv om dagens elever vokser opp med teknologien og anvender smarttelefoner, nettbrett og pc, betyr det ikke at elevene forstår teknologien intuitivt og ser hvilke ressurser som er gode i ulike situasjoner. Utfordringene handler altså ikke om tilgangen på teknologi, men heller hva lærer kan gjøre for å sørge for at teknologien frembringer forståelse og læring hos elevene (Spurkland & Blikstad-Balas, 2016).

I møte med kjerneelementene i matematikkfaget står lærere ovenfor en kompleksitet, der de skal kombinere utforsking og problemløsning i digitale læringsomgivelser. Dette fordrer på den ene siden kunnskap om hvilke muligheter som finnes i de ulike læremidlene og lærerens evne til å designe oppgaver som legger til rette for utforsking. På den andre siden inntar læreren en viktig rolle som veileder underveis i arbeidet. Forskning har vist en positiv utvikling av elevens matematiske forståelse ved å kombinere utforsking og digitale læremidler (Dolonen og Ludvigsen, 2012; Aventi et al., 2014). Samtidig har andre studier funnet at utforskingen i læremiddelet i seg selv ikke gjør eleven bedre i matematikk, men at læreren må veilede og oversette for at elevene skal forstå det matematiske konseptet (Abdu, et al., 2015; Dolonen & Kluge, 2014). Disse studiene har imidlertid hatt sitt analytiske fokus på læringsutbyttet av å jobbe utforskende med læremidlene. I denne studien søker jeg forståelse av prosessen, og hva som bidrar til å støtte utforsking av faget, ved å studere samspillet mellom elevene, de digitale ressursene og læreren.

1.1 Casebeskrivelse

Denne studien er en kvalitativ casestudie (Yin, 2014), som benytter et sosiokulturelt perspektiv (Vygotksy; 1978; Säljö, 2001) for å forstå hvordan elevenes læring utvikles i interaksjon med rike oppgaver (Hagland et al., 2005) og digitale læremidler. Studien benytter sekundærdata fra prosjektet Multimodale lærings- og vurderingsformer (MuLVu), som studerer hvordan elevene i en-til-en-klasserom i ungdomsskolen arbeider med multimodale produkter og hvordan lærerne vurderer dette arbeidet. Jeg har prøvd å skaffe rik innsikt i det komplekse forståelsesarbeidet til elevene ved å dykke ned i interaksjonene. Ved å benytte interaksjonsanalyse (Jordan & Henderson, 1995), håper jeg å gi tilstrekkelig detaljer om hvordan læringen utvikler seg i samspill med medierende redskaper innenfor sin kontekst.

Denne casen tar utgangspunkt i en lærer på 8. trinn og et undervisningsopplegg som inkluderer lærerens egenproduserte oppgaver, med tematikken *funksjoner og muntlighet*. Her skal elevene i par løse rike oppgaver blant annet ved hjelp fra grafprogrammet GeoGebra. Rike oppgaver er en type problemløsningsoppgaver som utfordrer eleven til å diskutere, finne ulike løsningsmetoder og benytte flere uttrykksformer (Hagland et al., 2005). Casen følger et elevpar i deres tredje og siste arbeidstime med oppgavene, i tillegg til en vurderingssamtale med lærer, i etterkant av opplegget. Arbeidsprosessen viser hvordan elevene løser oppgavene og forbereder en presentasjon. I den todelte fagsamtalen holder elevene først en fem minutter lang presentasjon av selvvalgte oppgaver, før de i siste del skal svare på spørsmål fra lærer, tilknyttet lineære og proporsjonale grafer.

1.2 Forskningsspørsmål

Hovedformålet med denne avhandlingen er å undersøke elevenes interaksjon med digitale læremidler og ressurser og se på de utforskende mulighetene som skapes i samspillet mellom deltakerne og redskapene. Ettersom sosiokulturelt perspektiv forstår menneskelig utvikling og læring i samhandling med andre (Mercer, 2005; Säljö, 2001; Vygotksy, 1978), vil studien både se på samarbeidet mellom elevene og læreres rolle i utvikling av elevens forståelse. Her vil jeg undersøke hvordan de digitale ressursene blir benyttet i elevinteraksjonen, og hvordan lærer eventuelt tar disse i bruk, for å støtte elevene. Studiens forskningsspørsmål er derfor:

«*På hvilken måte kan digitale ressurser og læremidler støtte elevene i å utforske matematikken?*»

I denne studien forstås begrepet læremiddel ut fra definisjonen, alle midler som er utviklet for undervisning, eksempelvis GeoGebra (Gilje, 2017). En læringsressurs er på den andre siden det som ikke er utviklet spesifikt for undervisning, for eksempel Microsoftpakken (Gilje, 2017). Læremiddel og læringsressurs kan både være digitale og analoge. Videre i avhandlingen vil ikke forskjellene mellom begrepene vektlegges ytterligere. Begrepet utforske handler om at elevene får mulighet til å undersøke, prøve seg frem og diskutere ulike matematiske utfordringer, der det i denne studien knyttes til arbeidet med rike oppgaver (Hagland et al., 2005)

1.3 Struktur på oppgaven

Denne avhandlingen består av fem kapitler. Etter innledningen følger kapittel 2, hvor oppgavens teoretiske rammeverk blir presentert. Her beskrives studiens teoretiske perspektiv, i tillegg til en innramming av studiens forståelse av utforskende matematikk. Kapittelet avsluttes med gjennomgang av forskning innenfor feltet digital læring og utforskende matematikk. I kapittel 3 presenteres studiens metodologi og forskningsdesign. Videre følger kapittel 4, som gir en presentasjon av studiens empiriske data. Her tar analysen utgangpunkt i interaksjoner fra videoopptak. I kapittel 5 vil jeg diskutere studiens funn i lys av studiens teoretiske rammeverk og forskning. I tillegg til at jeg vil belyse noen pedagogiske implikasjoner tilknyttet studien.

2. Teoretiske perspektiver og kunnskapsstatus

I dette kapittelet vil jeg presentere det teoretiske rammeverket for mitt forskningsprosjekt. Først vil jeg i 2.1 redegjøre for sosiokulturell teori, som utgjør studiens teoretiske linse. Her vil forståelsen i stor grad basere seg på perspektivene til Lev Semjonovitsj Vygotsky (Vygotksy, 1978). Videre vil jeg i 2.2 belyse hva som kjennetegner utforskende og problemløsende matematikk, hvor min forståelse av dette er tilknyttet rike oppgaver. Her vil jeg også beskrive hvordan elevene i arbeidet med rike oppgaver kan utrykke seg matematisk. Helt til slutt vil jeg i 2.3 presentere et overblikk over funn i relevant forskning.

2.1 Sosiokulturell teori

2.1.1 Hvordan forstå læring i lys av sosiokulturell teori

I sosiokulturell læringsteori bygger begrepet læring på en forståelse av at vår kunnskap er kulturelt forankret og utviklet over tid (Säljö, 2002, s 32). Vygotsky (1978) beskriver den kulturelle utviklingen gjennom to plan. Læringen skjer først på det sosiale planet mellom mennesker, omtalt som interpsykologisk. Her observeres og eksponeres mennesket for ulike sosiale praksiser. Etter hvert blir mennesket fortrolig med disse praksisene og klarer å ta i bruk de kulturelle redskapene på en selvstendig måte (Säljö, 2001, s.124). Da har utviklingen også skjedd på innsiden av hver enkelt, og vi snakker om en intrapsykologisk prosess (Vygotsky, 1978, s. 57).

For å forstå hvordan mennesket lærer, er det innenfor sosiokulturell teori helt essensielt å vektlegge betydningen av kulturelle redskaper og hvordan disse anvendes (Säljö, 2001, s. 78). Et viktig skille her er mellom intellektuelle og fysiske redskaper (Säljö, 2002, s. 35). Fysiske redskaper er gjenstander konstruert gjennom menneskers kunnskap og erfaringer, for eksempel datamaskin, kalkulator, lærebok. Intellektuelle redskaper kan være språk, symbolsystemer, fagspråk og tallsystemer som brukes for å mestre mentale prosesser (Daniels, 2001, s. 15). Vygotsky (1978) argumenterer for at språket har en avgjørende posisjon i læring og utvikling, da dette medierer menneskelig tenkning. Videre beskriver han språk på den ene siden, som et middel til å dele og utvikle kunnskap blant mennesker, og på den andre siden som et psykologisk redskap til å strukturere individuelle prosesser og tanker (Mercer & Howe, 2012).

Intellektuelle og fysiske redskaper må ses i sammenheng når mennesket lærer og kommer til uttrykk i det som omtales som *mediering* (Vygotsky, 1978, s. 54). Dette begrepet baserer seg på at mennesket ikke er i direkte og ufortolket samhandling med omgivelsene (Säljö, 2001, s. 83). Mennesket forstår derimot omverden ved hjelp av intellektuelle og fysiske redskaper, integrert i kulturen. Når mennesker tar i bruk kulturelle redskaper, for eksempel en datamaskin, har dette redskapet bygd inn kunnskap og forståelse. På dette vis kan ikke redskaper skilles fra menneskelig handling. Intellektuelle og fysiske redskaper omtales derfor gjerne som medierende redskaper og er sentrale for å forstå menneskets interaksjon og utvikling i et sosiokulturelt perspektiv (Daniels, 2001, s. 17).

I skolen bruker lærere ulike medierende redskaper, for eksempel projektor, for å modellere for sine elever. Projektoren vil være det fysiske redskapet, mens de intellektuelle redskapene vil være innholdet som fremvises, lærerens kunnskap om hvordan projektoren fungerer, og formidlingsevnen gjennom språk og fagspråk. Noen ganger kan det likevel være vanskelig å skille disse fra hverandre, da redskapene gjerne er sammensatte av både fysiske og intellektuelle egenskaper. Handlinger og læring som skjer i klasserommet må ses i sammenheng med sin kontekst og er derfor innenfor sosiokulturelt perspektiv; *situert* (Lave & Wenger, 1991, s. 15). At noe er situert kan beskrives som at «vi handler med utgangspunkt i våre kunnskaper og erfaringer og det vi bevisst eller ubevisst oppfatter at omgivelsene krever, tillater eller gjør mulig i en bestemt virksomhet» (Säljö, 2001, s. 131). Derfor vil en projektor i sammenheng med undervisning, bety noe annet enn når projektoren blir brukt i stua hjemme. De ulike fysiske redskapene i skolen er supplementer i undervisningen og hjelper læreren i sin pedagogiske praksis. Dog vil de fysiske redskapene være lite nyttige dersom læreren ikke tar i bruk de intellektuelle redskapene. Lærerens evne til å lede og støtte i læringsprosesser avhenger derfor både av fysiske og intellektuelle redskaper, og på dette vis må redskapene ses i sammenheng. På bakgrunn av lærernes posisjon i skolen mener Vygotsky at de utgjør en svært viktig rolle overfor elevenes kognitive utvikling (Bråten, 1996, s. 32).

Å lære matematikk handler om å tilegne seg begreper og kunne anvende de redskaper som passer i en situasjon med den kommunikative og fysiske forutsetningen som gjelder (Stertlien, 2002, s. 59). I de første møtene med matematikken vil elevene ha et lite repertoar med faglige ord og uttrykk. De begrepene elevene kjenner fra før omtales gjerne som spontane begreper og utvikles usystematisk i hverdagslivet til barnet (Vygotsky, 1986, s. 194). I skolen vil elevene utfordres med ord som er logiske og dekontekstualiserte; Vygotsky (2001) kalte disse for vitenskapelige begreper. Han mente videre at det er gjennom systematisk samarbeid mellom barn og voksen at eleven utvikler de vitenskapelige begrepene (Vygotksy, 2001, s. 137). Det samme gjelder for utvikling av normer, for hvordan anvende kulturelle redskaper på relevante måter. Normer som knyttes til matematikkfaget omtales gjerne innenfor et sosiokulturelt perspektiv som sosiomatematiske normer og etableres av deltakerne i læringsfellesskapet (Yackel & Cobb, 1996, s. 461). Hvordan de enkelte matematikklassene legger til rette for kunnskapskonstruksjon avhenger på den ene siden av innflytelse fra politiske føringer, som læreplaner og tradisjoner i faget, og på den andre siden av det kommunikative miljøet som påvirke hvordan mening skapes (Streitlien, 2002, s. 58). Dette kan illustreres i matematiske diskurser, der elevene og lærer avgjør hva som blir normene i disse samtalene. Sammen utvikler deltakerne en felles forståelse for hva som regnes som gode matematiske argumenter (Yackel & Cobb, 1996, s. 462). I prosessen med å utvikle de sosiomatematiske normene, vil lærerens rolle, som den kompetente, være avgjørende får å gi retningslinjer for elevene. Senere, når normene er etablert i læringsfellesskapet, vil deltakerne uten veiledning fra lærer, fortsette denne praksisen. På dette viset kan lærer etablere soner for utvikling, som elevene senere kan videreføre i samarbeidet.

Innenfor Vygotskys utviklingsteori er beskrivelsen av den proksimale utviklingssonen fremtredende og legger utgangspunktet for hans forståelse av barnets utvikling og læring (Bråten & Thurmann-Moe, 1996, s. 125). Begrepet "den proksimale eller nærmeste utviklingssonen" viser til «the distance between the actual developmental level as determined by independent problem solving and the level of potential development as determined through problem solving under adult guidance or collaboration with more capable peers» (Vygotsky, 1978, s. 86). Vygotsky uttrykker med dette at forståelse av et barns utvikling ikke bare handler om å ta utgangspunkt i barnets nåværende kompetanse, men heller å se på det potensialet barnet kan oppnå dersom læringen støttes av en mer kompetent person. I klasserommet, der det som regel er få voksne og mange elever, gir samarbeid mellom elevene muligheter for å etablere utviklingssoner. Mercer og Littleton (2007) beskriver samarbeidende læring, der deltakerne er engasjerte i å løse et felles problem, eller på andre måter konstruerer felles forståelse og kunnskap. Gjennom et slikt syn kan matematikkundervisning, som legger til rette for utforsking og problemløsning, være et godt utgangpunkt for å etablere utviklingssoner hos elevene. Samtidig er det viktig å notere at det mest verdifulle i problemløsningssituasjonen ikke er samarbeidet i seg selv, men de lærings- og utviklingsmulighetene samarbeidet gir (Bråten & Thurmann-Moe, 1996, s. 125). Derfor snakker man gjerne om ulike typer samtaler innenfor samarbeidende læring, som baserer seg på Vygotskys

(1978) internalisering av kulturelle redskaper (Mercer, 2005, s. 104). De tar form på tre ulike måter. Den første type av samtaler kan betegnes som konfliktfylte samtaler, der deltakerne i gruppa er uenige og gjør individuelle beslutninger. Den andre er kumulative samtaler, hvor elevene er enige og gjerne bygger på hverandres innspill, men samtidig fører gjentakende argumenter. Den tredje type samtaler er utforskende samtaler, når elevene engasjerer seg i en kritisk og konstruktiv samtale, der det stilles spørsmål og deltakerne utfordrer hverandres ideer og tanker.

Vygotsky sin oppfatning av barnets utvikling bygger på ideen om at vi lærer fra første stund (Vygotsky, 1978, s. 84). Mennesket utvikler og forandrer seg til enhver tid, og vi evner å ta til oss, eller *appropriere* i sosiale sammenhenger (Säljö, 2001, s. 122). Dette er ifølge Bakhtin (Holquist & Emerson, 1981) det læring går ut på, at vi omformer og tolker kulturelle redskaper som språk, til sitt eget. Med andre ord evner mennesket å plukke opp kunnskap gjennom samtaler med andre og transformere dette til sin egen forståelse. Samtidig er det ikke slik at elever automatisk vil appropriere vitenskapelige begreper eller hensiktsmessige måter å snakke og tenke sammen på. Dette er en prosess, der elevene vil trenge støtte, før de etter hvert mestrer å ta i bruk redskapene på egenhånd. Apropprieringssprosessen for elever i skolen må derfor ses i sammenheng med elevens nærmeste utviklingssone, hvor læreren blir betydningsfull.

2.1.2 Hvordan forstå digitale læremidler i lys av sosiokulturell teori

Vi har tidligere vært inne på temaet redskaper, der det i sosiokulturell teori deles inn i intellektuelle og fysiske redskaper. Selv om det eksisterer to inndelinger, er de fysiske redskapene et resultat av at menneskelige tanker og ideer er omformet til materiell form (Säljö, 2002, s. 38). Dermed kan digitale læremidler forståes som avanserte, kulturelle og intellektuelle redskaper, integrert i noe fysisk. For eksempel i digitale regneprogram har det blitt lagt inn intellektuelle redskaper som representerer enheter og mål. Disse måleenhetene lever på mange ulike nivåer: i det digitale læremiddelet for å foreta utregninger, i dialog mellom mennesker og i individets tenkning. Når elever tar i bruk digitale læremidler benytter de kunnskap og innsikt som er skapt av mennesker i sosiokulturelle praksiser, og de får betydning både på det individuelle og sosiale plan (Säljö, 2001, s. 84).

I vår tid handler læring og utvikling i stor grad om å utnytte kognitive ressurser som er innebygd i redskaper, som prosedyrer, informasjon og rutiner (Säljö, 2001, s. 84). I teknologirike klasserom har elevene tilgang til mange ulike digitale ressurser. De generiske ressursene som nettbrett og datamaskin utgjør en viktig rolle i alle fag i skolen. Disse nye ressursene har endret undervisningens form, og hvordan elevene arbeider med fagene (Rasmussen & Lund, 2015). Tradisjonelle ressurser som bøker, notatbok, tavler og instrukser har blitt integrert i et felles redskap med uendelige muligheter. De kulturelle redskapene tar elevene i bruk for å bearbeide og sortere store mengder informasjon gjennom ulike programmer. For mange teknologirike klasserom er ulike online skriveprogram blitt en sentral ressurs der elevene kan uttrykke sine tanker, fortolkninger og ideer. De nettbaserte versjonene har dessuten gjort det mulig for elevene å samskrive med hverandre og med lærer. Samarbeid og felles refleksjonsarbeid trenger ikke lengre være forbeholdt at elevene sitter sammen til enhver tid. Det kan sies at teknologien opphever begrensninger ved tid og rom (Rasmussen & Lund, 2015). Ved siden av dokumenter, kan elvene også benytte ulike programmer og verktøy til å lage presentasjoner med sammensatt tekst. Ved multimodal uttrykksmåte tar elevene i bruk flere modaliteter[1] og elevene kan mediere gjennom video, lydfiler, bilde og tekst.

I matematikkfaget har teknologien lagt til rette for at elevene kan forstå matematiske konsepter ved manipulering av konkrete representasjoner. Digitale regneark, som eksempelvis Excel*,* har effektivisert måten elevene kan gjøre beregninger og analysere informasjon på. Programmet gir muligheter for å omforme informasjon fra en uttrykksform til en annen, for eksempel fra tabell til graf og diagrammer. Ved å ta i bruk programmer til å gjøre utregninger raskere og mer oversiktlig, kan vi forstå det digitale verktøyet som en forsterker (Norstein, 2018, s. 52); det vil si en hjelpende ressurs som gir mange av de samme funksjonene som ved manuell bruk, men på en mer effektiv måte. Digitale ressurser kan også benyttes i undervisning med en intensjon om å forbedre elevens innsikt og forståelse. Da sier vi at ressursen blir brukt som en *reorganisere*r (Norstein, 2018, s. 52). Sett opp mot verktøyet regneark, kan denne ressursen være en reorganiserer dersom elevene får mulighet til å utforske sammenhenger og tallmønstre. Da setter oppgaven høyere krav til elevens resonering og forståelsesarbeid.

GeoGebra er et annet digitalt verktøy som benyttes av mange i skolen, spesielt utbredt i ungdomsskolen og videregående skole (Gilje, et al., 2016). Programmet er både et graftegneprogram og et dynamisk geometriprogram. GeoGebra inneholder i tillegg et regneark, som fungerer som et supplement til graftekning og geometridelen. Når undervisningen legger opp til graftegning, for eksempel der elevene skal tegne en graf ut fra et funksjonsuttrykk, fungerer verktøyet i størst grad som en forsterker (Norstein, 2018, s. 64). Her vil GeoGebra kunne tilby en

[1] Modalitet defineres som: et hvert meningsdannende system, som for eksempel bilder, verbal tekst og lyd (Maagerø & Tønnessen, 2014).

oversiktlig løsning, der det blir enkelt å lese av informasjon. Det byr likevel ikke på de største utfordringene tilknyttet elevens forståelse. Dersom GeoGebra i større grad skal benyttes som en reorganiserer, som medierer matematiske konsepter, må programmets dynamiske egenskaper tas i bruk. Ved å manipulere og utforske geometriske figurer og ulike type grafer vil elevene få mulighet til å se matematiske sammenhenger og utvikle sin dypere forståelse.

Ved å ta i bruk digitale læremidler i undervisningen har noen studier vist seg at læreboka har fått en mindre sentral rolle i undervisningen (Blikstad-Balas & Hvistendahl, 2013). Ifølge Säljö (2010) utfordrer digital læring de tradisjonelle rammene for undervisning, spesielt med utgangspunkt i at ressursene ikke nødvendigvis er designet for læring. Til kontrast fra lærebøkene, som gjerne er skrevet med utgangspunkt i å møte kravene fra læreplaner, vil elevene og lærere orientere seg i et univers med informasjon, uten denne kvalitetssikringen (Rasmussen & Lund, 2015). Et såkalt åpent læringsunivers medfører at lærer og elever må ta større ansvar for å velge ut ressurser som er gode. For mange lærere har det resultert i hybridløsninger, der lærer plukker ut relevant materiale fra ulike kilder og designer egne oppgaver for sin undervisning (Gilje et al., 2020). Disse ressursene gjøres tilgjengelige digitalt og blir utgangspunkt for elevens aktiviteter og klasseromsdiskurser. I et sosiokulturelt perspektiv innebærer dette en gjensidig avhengighet mellom menneskets handlingsrom, sinn, kropp og teknologi for å forstå hvordan læring skjer i digitale klasserom (Säljö, 2010, s. 53). Med andre ord er det ikke de digitale ressursene i seg selv som er interessante, men hvordan samspillet mellom kulturelle redskaper, mennesker og omgivelsene, er avgjørende for læringen.

Grunnlaget for menneskelig meningsproduksjon og forståelse, knyttes til felles anvendelse og produksjon av materiell og språklige redskaper (Rasmussen & Lund, 2015). I hybride løsninger vil samspillet mellom deltakerne og de tilgjengelige ressursene skape en unik læringsarena. Oppgavene er designet av lærer og tilpasset elevene og deres omgivelser. Dette kan gi et personlig forhold til læringen og være meningsskapene for deltakerne. Elevene og lærerne vil bygge frem sine intellektuelle redskaper i felleskap med ressurser som har betydning for dem. Säljö (2010) beskriver hvordan det å endre kommunikasjonsmønstre i vår daglige praksis, og på hvilken måte vi står i relasjon til våre felles ressurser, påvirker måten vi ser og oppfatter læring. Digitale løsninger åpner opp for at elevene kan arbeide variert og vise sin forståelse og kunnskap på mange måter (Clark & Mayer, 2008). Læring trenger ikke være forbeholdt tradisjonelle begrensinger, for eksempel at elevene må levere inn skriftlig arbeid for å bli vurdert på en måte som fremmer læring. Læreren kan veilede elevene i sitt forståelsesarbeid både ved fysisk dialog, men også gjennom digital kommunikasjon, som video, lyd eller tekst. Det finnes altså få begrensninger for hvordan læringen kan ta form i et digitalt klasserom.

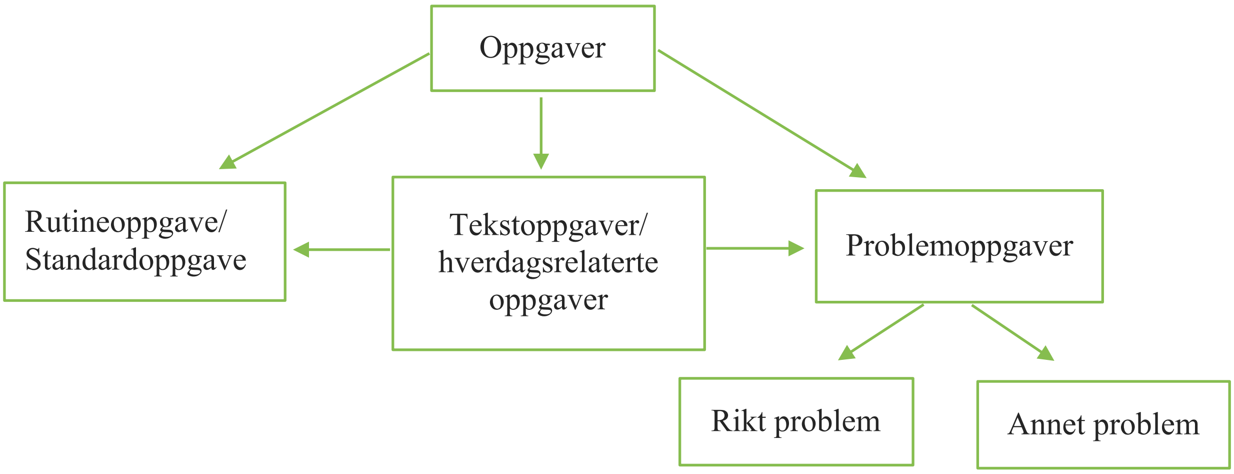
2.2 Utforskende matematikk

Utforsking er et veletablert begrep innenfor realfagene, og innenfor matematikk presenteres denne tilnærmingen som en kontrast til tradisjonell matematikk (Skovsmose, 1998, Alrø & Skovsmose, 2002). Linn og Eylon (2011) argumenterer for at utforskende tilnærminger er en motsetning til «absorberende» læringsoppfatninger, der det forventes at kunnskap overføres til eleven. At elevene skal ha en utforskende tilnærming i fagene er inspirert av vitenskapelige metoder, der menneskets nysgjerrighet skal utfoldes gjennom å bruke eksisterende kunnskap til å utforske og undersøke ulike problemer og fenomener (National Research Council, 2000, s. 13; Linn & Eylon, 2011, s. 3). Til tross for at begrepsbruken varierer når vi snakker om denne type arbeidsmåte, alt fra det engelske uttrykket inquiry-based teaching (Anderson, 2002), til problemløsning (Pólya, 1957), rike oppgaver (Hagland et al., 2005) og undersøkelseslandskaper (Skovsmose, 1998), er beskrivelsen gjennomgående. Elevene skal stille spørsmål, undres og utforske for å finne svar på ulike problemer (Fuglestad, 2010; Hagland et al., 2005). Med utgangspunkt i at fremgangsmåten ikke er fast bestemt, er selve prosessen i utforskningen det viktigste (Posamentier & Krulik, 2015, s. xvii). Her får elevene mulighet til å utvikle dypere forståelse, ved å knytte nye ideer på etablerte erfaringer (Linn & Eylon, 2011, s. 11). Det snakkes om læring som en aktiv og sosial konstruert prosess, der elevenes forståelse og kunnskap blir rikere ved læring i varierte kontekster (Anderson, 2007).

Forståelsen av begrepet utforsking vil i denne oppgaven være tilknyttet beskrivelsen av rike oppgaver (Hagland et al., 2005)

2.2.1 Rike oppgaver

Det finnes ulike type oppgaver innenfor matematikk. De kjennetegnes ut fra hva de spør om, og hvilke krav de setter til eleven, som skal løse dem. I figur 2-1 gis en oversikt over Hagland et al. (2005) sin kategorisering av oppgaver. Som det fremkommer kan oppgavene deles inn i tre grovinndelinger, dette er rutineoppgaver, tekstoppgaver og problemoppgaver. Rutineoppgaver kan betraktes som oppgaver der elevene får ferdighetstrening, ved å utføre enkle utregninger, uten store anstrengelser. Tekstoppgaver inkluderer matematisk informasjon gjennom tekst og symboler. Disse oppgavene er gjerne tilknyttet hverdagslige kontekster. En tekstoppgave kan som figuren viser, enten være rutineoppgave, eller den kan være et problem. Dersom den anses som et problem, må eleven møte en utfordring med oppgaven, som den vil løse. Denne løsningen er ikke på forhånd bestemt, og det kreves derfor at en anstrenger seg for å løse oppgaven. Dersom oppgaven i tillegg skal være et rikt problem, må den kunne være utgangspunkt for en god matematisk diskusjon eller samtale, der matematiske begreper og prosedyrer blir belyst.



Figur 2-1: *Hagland et al. (2005) sin inndeling av forskjellige oppgaver* (egen oversettelse).

Mer inngående kan rike oppgaver beskrives som en type problemløsningsoppgaver, som ble introdusert av forfatterne Hagland, Hedrén og Taflin i 2005. Ideen om problemløsning har sitt utspring fra Pólya (1957) og hans ulike metoder for å løse matematiske utfordringer. Et problem kan oppfattes som en matematisk oppgave som en person ønsker eller behøver å løse (Hagland et al., 2005, s. 28). Hva som er et problem, er likevel en individuell definisjon, der en elev kan oppleve oppgaven som et problem, mens en annen opplever det som en enkel oppgave (Karlsen, 2014, s. 34). Dersom oppgaven er et problem, åpner det gjerne opp for flere løsningsmetoder som kan belyses gjennom ulik representasjon. Ved å arbeide med matematiske problemer kan elevene utvikle sin kreative og selvstendige tenkning, på en logisk, systematisk og strukturert måte (Hagland et al., 2005, s. 13). Rike oppgaver åpner opp for variasjon i undervisningen, der aktivitetene byr på elementer innenfor praktisk og teoretisk matematikk. Oppgavene legger også grunnlaget for å diskutere strategier og ulike løsninger i store og små grupper. Den matematiske samtale står derfor som et viktig element innenfor rike oppgaver. Elevene vil på dette vis kunne utvikle sitt skriftlige og muntlige forståelsesarbeid i matematikk med denne oppgavetilnærmingen.

For å tydeliggjøre hvordan vi kan skille rike oppgaver fra andre oppgaver, har Hagland et al. (2005) utarbeidet syv kriterier:

1. Problemet skal introdusere viktige matematiske ideer eller visse løsningsstrategier
Dette kriteriet handler om at elevene skal bli kjent med viktige matematiske konsepter og prosedyrer. Elevene skal bli inspirert til å anvende matematiske ideer, både de eleven har kjennskap til allerede, men også føle et behov for å lære nye konsepter ved å prøve andre prosedyrer og teknikker. Rike oppgaver gir mulighet til å ta i bruk flere strategier for å løse et problem og er dermed en god anledning til å skape felles refleksjoner og diskusjoner.

2. Problemet skal være lett å forstå og alle skal ha en mulighet til å arbeide med den
Dette kriteriet baserer seg både på at alle skal kunne være med på å utvikle seg, men det handler like mye om mestring og inkludering. Derfor skal rike oppgaver gi elevene følelse av at de forstår problemet, og at de har evnen til arbeide med den. Det er ikke sikkert at alle elevene klarer å løse problemet i sin helhet, men samtlige elever skal komme en god vei frem til en løsning. I felles samtale med klassen, vil elevene få mulighet til å sortere ut hele problemet, og de vil så langt det lar seg gjøre, utvikle en eller flere løsninger. Dersom elevene i fellesskap ikke finner en løsning, kan problemet videreføres til senere arbeide og diskusjon.

3. Problemet skal oppleves som utfordrende, anstrengende og kunne ta tid
Rike oppgaver skal ikke oppleves som rutineoppgaver, der eleven ikke trenger å anstrenge seg for å finne løsning. Problemet skal derfor gis en dybde og bredde, slik at elevene ut fra deres interesse og evne skal kunne komme godt i gang til en løsning av oppgaven.

4. Problemet skal kunne løses på ulike måter, med ulike strategier og representasjoner
For at det forrige kriteriet skal oppfylles, er det av betydning at oppgavene kan løses på flere måter. Her kan noen løsninger være tilknyttet en mer praktisk forståelse og mindre dyptgående matematiske kunnskaper, og andre løsninger som er mer matematisk avanserte. Elevene skal kunne arbeide og presentere løsninger ved hjelp av ulike uttrykksformer. Dette kan for eksempel være konkretiseringsmateriell, bilder, grafer, tegninger og algebraiske symboler. Disse representasjonene er et godt utgangspunkt for å uttrykke hvordan elevene tenker, når elevene skal diskutere ulike løsninger.

5. Problemet skal kunne initiere en matematisk diskusjon som omfatter elevenes ulike representasjoner, strategier og matematiske ideer

Det er vesentlig at et rikt problem er mangfoldig, gjennom ulike løsninger og representasjoner, slik at det fasiliteres for gode gruppe- og klassediskusjoner. Intensjonen med slike samtaler er å lede elevene inn i matematiske ideer, konsepter og løsningsmetoder. I slike samtaler er lærerens rolle viktig, for å løfte frem interessante aspekter ved elevenes refleksjoner og løsninger.

6. Problemet skal kunne fungere som brobygger mellom ulike matematiske områder
Siden elevene gjerne belyser flere mulige uttrykksformer og løsninger for rike problemer, er det gode muligheter for å bygge broer mellom ulike områder i matematikken. Hagland, et al (2005) nevner at det kan være en risiko for at elevene ikke ser sammenhengen mellom matematikkens ulike deler, dersom lærer tar opp aritmetikken, algebra, geometri osv., hver for seg. Likevel er dette kriteriet en bonus og kan i mange tilfeller være omfattende for alle parter.

7. Problemet skal kunne lede elever og lærere til å formulere nye interessante problemer
Dette kriteriet ønsker å frembringe en enda dypere forståelse hos elevene, ved at de skal bruke sine kunnskaper til å komme opp med nye problemer. Disse problemene skal bygge på samme matematiske ideer, som det de allerede har løst. I felles diskusjon, kan lærer utfordre elevene til å tenke videre fra sitt problem og vise dem inngangen til andre matematiske ideer. Denne type arbeid vil tydeliggjøre hvordan elevene oppfatter den forrige problemløsningen, og hvordan de kan bruke sin kunnskap videre.

2.2.2 Begreper og representasjonsformer i arbeid med rike oppgaver

Formålet med rike oppgaver er at elevene skal reflekterer over sine prosesser, fremgangsmåter og de matematiske konseptene de utforsker. Der rutineoppgaver gjerne legger opp til en representasjon gjennom logisk eller språklig uttrykksform, vil rike oppgaver gi mulighet for elevene å uttrykke egne tanker og forståelse av matematiske fenomener, gjennom ulike representasjonsformer. Her kan elevene i tillegg til logisk/språklig uttrykksform, bruke konkret uttrykksform, algebraisk/aritmetisk uttrykksform og grafisk/geometrisk uttrykksform (Hagland et al., 2005, s. 32). I et sosiokulturelt perspektiv kan vi forstå disse uttrykksformene som ulike typer redskaper i mattematikkfaglig læring (jf. 2.1.1).

Logisk eller språklig uttrykksform tas i bruk når elevene forklarer sine løsninger ved hjelp av tale- og skriftspråket. Slike uttrykksformer er spontane og inkluderer ikke forkortede uttrykk og formler. Denne representasjonen er vanlig i første møte med oppgaven og gjerne i dialog med læringspartnere, før elevene har tenkt på andre strategier. De er likevel å regne som fullverdige løsninger.

Konkret uttrykksform innebærer at elevene tar i bruk materiell eller noe annet konkret for å vise en løsning til oppgaven. Denne uttrykksformen anses som en praktisk løsning av problemet, og kan gi et konkret bilde på hvordan eleven(e) har tenkt. Konkret uttrykksform gir likevel ikke alltid en full beskrivelse av tankegangen, og det kan derfor være hensiktsmessig med språklig uttrykksform i tillegg. I digitale klasserom kan konkrete representasjoner foreviges gjennom bilder, for senere etterarbeid og diskusjon.

Algebraisk og aritmetisk uttrykksform kan beskrives som løsninger der elevene bruker algebraiske symboler, for eksempel bokstaver eller forkortede ord. Aritmetisk uttrykksform er når elevene benytter siffer eller andre tallsymboler for å vise en løsning. Disse representasjonene krever at elevene har tenkt videre fra sine språklige uttrykksformer, der de arbeider mot en generell formel, som vil gjelde for alle tall.

Grafisk og geometrisk uttrykksform innebærer at elevene benytter et tegnet bilde, en graf, et diagram og/eller tabell i sin løsning av problemet. Disse representasjonene kan inneholde mye informasjon og er igjen en mer praktisk måte å løse oppgaven på. Ofte vil denne representasjonen også inkludere en form for algebraisk/aritmetisk uttrykksform, spesielt dersom elevene benytter graf og tabell som fremstilling. For noen elever vil det være enklere å arbeide fra grafisk/geometrisk uttrykksform mot algebraisk/aritmetisk uttrykksform, fordi elevene har sortert informasjon og lagd et system. Da vil det være lettere å se mønster og sammenhenger.

Ettersom rike oppgaver åpner opp for ulike måter å representere løsninger på, er det ikke uvanlig å hoppe mellom de ulike uttrykksformene. Dette kan initieres av oppgaven eller av lærer. Å forflytte seg mellom ulike representasjoner stimulerer til tankearbeid og kommunikasjon mellom partene (Hagland et al., 2005, s. 33).

2.3 Tidligere studier

I dette delkapittelet vil jeg presentere funn fra ulike studier, tilknyttet prosjektets problemstilling. Først vil jeg i 2.3.1 se på studier i utforskende og problemløsende matematikk, før jeg i 2.3.1 presenterer funn fra forskning som ser på anvendelse av digitale resurser og læremidler i skolen. Til slutt vil vi i 2.3.2 se på kombinasjonen av digitale ressurser/læremidler og utforskende matematikk.

2.3.1 Studier i utforskende og problemløsende matematikk

Hvordan elevene best lærer matematikk, er et spørsmål det finnes mange ulike svar på, likevel hevder forskning at nøkkelen til god læring ligger i aktiv elevdeltagelse av undervisningen (Freeman et al., 2014; Minner et al., 2010; Boaler & Greeno, 2000). Det finnes likevel ulike måter å utøve aktiv undervisning på, der utforskende og problemløsende tilnærming er en. Studier innenfor utforskning og problemløsning i matematikk har vist at elevene øker sin konseptuelle forståelse til faget, ved å delta aktivt i samtaler og undersøkelser (Minner et al., 2010; Boaler, 1998). Boaler (1998) fant i tillegg at elever som lærte matematikk ved utforskende prosjekt-basert tilnærming, utviklet en konseptuell forståelse som ga dem fordeler i andre situasjoner. Her klarte elevene å overføre strategier fra en kjent situasjon til andre ukjente. I en metastudie gjort av Freemans et al. (2014) kunne de konkludere med at elever som fikk være aktive og utforskende i timene, både økte sin prestasjon på eksamen og hadde mindre sannsynlighet for å stryke, sammenlignet med elever som hadde mer tradisjonell undervisning. Andre studier har funnet at lærerens veiledning, gjennom formativ vurdering har betydning for vellykket undersøkende undervisning (Decristan et al., 2015; Furtak et al., 2012),

Flere studier har også knyttet sterke sammenhenger mellom elevenes interesse og motivasjon i faget med utforskende arbeidsmåter i matematikk (Wæge, 2007; Boaler; 1998; Hansen, et al.,; 2020). I sin doktoravhandling fant Wage (2007) en positiv utvikling i elevenes motivasjon, når de gjennom prosjektet fikk undersøkende matematikkundervisning. Funnene viste økt glede og interesse i faget, der elevene gikk fra en instrumentell forståelse, til en relasjonell forståelse. Studien indikerte også at det var en nær sammenheng mellom kompetanse, i form av forståelse og elevens motivasjon. Elevens relasjonelle forståelse var knyttet opp mot elevens ønske om å finne egne løsningsstrategier og behov for autonomi i faget. Funn indikerte også at samarbeid var en viktig faktor for elevens økte motivasjon.

I en omfattende studie fra Danmark så på hvordan endringer i undervisningsformen påvirket kvaliteten i fagene dansk og matematikk, når undervisningen ble mer utforskende (Hansen, et al., 2020). Studien ble designet med ferdig undervisningsopplegg, der halvparten av deltakerne fikk tilgang til konkret materiale (innsatsgruppen). Resterende gruppe skulle være kontrollgruppe. Funnene i studien viste en generell forbedring i kvaliteten i fagene. For det første viste funn at elevene fikk betydelig bedre begrepsforståelse av den utforskende tilnærmingen. For det andre indikerte elevens egne erfaringer at undervisningen styrket deres resonnementkunnskaper, noe som ble støttet av lærernes tilbakemeldinger. For det tredje viste studien at innsatsgruppen fikk økt bestemmelse i matematikkundervisningen, der de gjennom økt innflytelse på valg av metoder også utviklet bedre matematiske samtaler og interesse i faget. For det fjerde viste studien en positiv utvikling hos lærerne. Her betraktet de blant annet undervisningsoppleggene som meningsfulle, der de selv fikk utvikle sin fagdidaktiske kompetanse.

2.3.2 Studier som ser på digitale ressurser og læremidler i skolen

I nyere tid har flere studier, gitt viktig innsikt i hvordan elevene lærer innenfor digitale læringsomgivelser. Forskning har sett på hvordan undervisning og læring endret seg når skoler gikk over til en-til-en-klasserom. Her fant studier at elevene ble mer selvstendige og fikk mer autonomi (Storz & Hoffman, 2013; Varier et al., 2017). Varier et al., (2017) så at da elevene ble mer selvstendige, fikk lærere frigjort tid til å støtte elevene og gi formativ vurdering underveis i arbeidet. På den måten viste studier at læreren fikk en veilederrolle og fungerte i mindre grad enn tidligere, som en foredragsholder (Higgins & BuShell, 2018; Storz & Hoffman, 2013). Studier viser også at å arbeide heldigitalt førte til at undervisningen ble mer prosjektbasert, både individuelt og i små grupper (Storz & Hoffman, 2013). Her indikerer funn at i slike klasserom utvikles det et positivt forhold mellom lærere og elever, der elevene blir mer engasjerte når oppgavene krever høyere nivå av ulike kompetanser og ferdigheter (Higgins & BuShell, 2018).

Større norske studier har sett på hvordan undervisning organiseres i en-til-en-klasserom (Gilje et al., 2020) og i læringsomgivelser med digitale og papirbaserte læremidler (Gilje et al., 2016). Her fremkommer det at matematikklærere var flinke til å variere bruken av læremidlene, men at matematikkfaget, sammenlignet med andre, bruker mindre tid med digitale ressurser og læremidler (Gilje et al., 2016). Funn i GEPP-prosjektet viste at det var stor variasjon mellom organiseringen av undervisningen i en-til-en-klasserom, der den dominerende arbeidsformen var individuelt arbeid (Gilje et al., 2020). Et annet funn fra samme studie viser at elevene i stor grad fikk frihet til å ta i bruk ønsket ressurs og digitale verktøy. Dette viste at elevene både tok i bruk læremidler, designet for læring, og ressurser, som ikke nødvendigvis er laget for undervisningen. Det fremkom også i intervjudataene tilknyttet prosjektet, at mange lærere i en-til-en-klasserom bygger hybridunivers, der læremidler og læringsressurser sammenfattes til egne, tilpassede opplegg.

Av spesiell relevans for denne studien, er forskning som ser på elevenes engasjement med digitale representasjoner og grafer. Her har studier innen både naturfag og matematikk vist en positiv effekt av digitale representasjoner, som kan støtte elevenes ferdigheter med grafer og øke den konseptuelle forståelsen (Ainsworth, 2006; White & Pea, 2011). På tross av enighet rundt de positive effektene ved digitale representasjoner, rapporterer funn også at det er noen utfordringer. Blant annet har elevene problemer med å ta i bruk representasjonene på effektive måter (Ainsworth, 2006). Funn indikere at elevene har vanskeligheter med å se sammenhengen mellom representasjoner som beskriver det samme fenomenet (van der Meij & de Jong, 2006), eller at de fokuser på de overflatiske, framfor å dykke ned i de underliggende prinsippene (Kozma, 2003). Disse funnene bygger opp under implikasjonen vedrørende lærerens rolle i arbeidet med digitale læremidler og variete representasjoner.

Forskere har påpekt at det er måten teknologien blir anvendt som er avgjørende for om den bidrar til forståelse og læring hos elevene (Jewitt et al., 2007; Selwyn, 2010). Derfor kommer en ikke utenom læreres rolle som planlegger og veileder i digitale læringsomgivelser. I en studie der hensikten var å undersøke lærerens støtte når elevene arbeidet med digitale grafer i et naturfagsforsøk, indikerte funnene at læreren har en viktig posisjon som designer og tilrettelegger for elevens læring (Ingulfsen et al., 2018). Her viste funnene at materialet og de digitale ressursene var langt fra nok støtte, til at elevene ville forstå de konseptuelle utfordringer, uten ekstra veiledning fra lærer. Studien indikerte også at lærerens støtte orientert mot den konseptuelle forståelsen, i stor grad tok form som elev-lærer interaksjon i gruppesammenheng, og i mindre grad som helklassesamtaler. Samlet sett illustrerte studien kompleksiteten i lærers støtte i digitale læringsomgivelser, der det er viktig å forstå hvordan denne type støtte krysser støtten fra de digitale ressursene, samarbeidet og oppgaveinstrukser.

2.3.3 Studier som ser på bruk av digitale ressurser og læremidler i matematikk innenfor et utforskende perspektiv

Flere studier har undersøkt bruk av digitale ressurser i settinger der elever arbeider utforskende/løser ulike matematiske problemer. Noen studier har sett på hvilke muligheter for problemløsing det finnes innenfor digitale spill, der funnene viser at elevene fikk positive opplevelser ved arbeidsmåten (Calder, 2018; Dolonen & Kluge, 2014). Annen forskning har sett på hvilken rolle læreren hadde i helklasseundervisning, der elevene jobbet digitalt med problemløsning

(Abdu, et. al 2015), der funn viste at lærers støtte var svært sentral for elevens utvikling av matematiske problemløsningstrategier og for å etablere godt samarbeid for læring. Studier viser at lærer spesielt er betydningsfull for at elevene skal kunne oversette og trekke paralleller fra aktiviteten på skjermen til de matematiske konseptene (Dolonen & Kluge, 2014; Abdu, et. al 2015).

I studien til Dolonen og Ludvigsen (2012) så de på elevers interaksjon med medelever, lærer og teknologi, når de arbeidet med geometri. Hensikten med studien var å se på hvordan interaksjonen med omgivelsene og et matematisk verktøy kunne være med på å forandre elevenes forståelse av geometriske konsepter. Funnene fra denne studien viste at elevenes generelle forståelse av 3-dimensjonale geometriske konsepter, forbedret gjennom prosjektet. Både forståelse tilknyttet faginnholdet, men også ferdigheter til å overføre kunnskap til nye problemer og oversette mellom representasjoner i samme fenomen, utviklet seg positivt. Videre fant de at elevens ferdigheter til å løse matematiske problemer var en avgjørende faktor for å få utbytte av de læringsmulighetene som lå i verktøyet. Elevene som i mindre grad hadde gode problemløsningsstrategier var avhengig av lærer for å utføre aktivitetene i det matematiske verktøyet.

Studier har også sette på hvordan GeoGebra blir brukt i utforskende undervisningssammenhenger. I studien til Bülbül et al., (2020) ønsket de å se på hvordan GeoGebra ble brukt for å løse problemer tilknyttet kontinuerlige funksjoner for matematikkstudenter. Studentene fikk oppgitt ulike funksjoner, hvor de blant annet skulle finne grenseverdi og om grafen var kontinuerlig på ulike punkter. Studien så at svært mange av lærerstudentene benyttet GeoGebra i sin løsningsprosess, der de tegnet inn grafene, framfor å løse likningen algebraisk. Deres forklaring på dette var at kontinuerlige grafer er vanskelige konsepter og derfor utfordrende å løse algebraisk. Studentene fant stor hjelp i det visuelle bildet av grafene og de dynamiske egenskapene i programmet for å finne løsninger.

Et annet studie så på hvordan verktøyet GeoGebra påvirket elevenes refleksjon og forklaringer i gruppearbeid (Aventi et al., 2014). Over en periode på fire uker ble en 9. klasse introdusert for GeoGebra, hvor de jobbet med ulike oppgaver tilknyttet lineære grafer og geometri. Studien så på elevenes forklaringer til det arbeidet de gjorde i GeoGebra, og på hvordan gikk de frem for å fremstille grafer og gjøre endringer. Resultatene fra førtesten og ettertesten viste at elevene utviklet seg stort på disse ukene. På førtesten var det mange elever som i liten grad behersket å tegne enkle lineære grafer og gi forklaring på det de gjorde i GeoGebra. Flesteparten av elevene klarte heller ikke flytte og justere grafen, og si noe om hva som endret seg. Funn indikerte at dette hang sammen med at flere av elevene ikke var kjent med programmet og måtte prøve seg frem. Resultater fra ettertesten viste at flere elever behersket å benytte fagord og beskrive fremgangsmåter i etterkant av prosjektet. Derfor konkluderte studien med at GeoGebra var en støtte i elevens utvikling av et mer formelt fagspråk. I tillegg anså de GeoGebra som et godt program for å utvikle elevens forståelse av lineære funksjoner, men at noe basiskunnskap til verktøyet var essensielt for å kunne utforske fenomenet.

3. Metodisk tilnærming

I dette kapittelet vil jeg presentere valg av forskningsdesign og den metodiske tilnærmingen som har blitt tatt i bruk for datainnsamling og analyse. I 3.1 vil jeg gi en kort beskrive av studiens forskningsdesign, MuLVu-prosjektet og studiens plass innenfor dette. I 3.2 vil jeg beskrive datamaterialet, før jeg i 3.4 redegjør for studiens analysestrategier. Dette legger grunnlaget for neste del, der jeg i 3.4 vil komme inn på kritiske vurderinger av forskningsdesignet, og tar for meg studiens, pålitelighet, gyldighet og overførbarhet. Helt til slutt vil jeg diskutere min rolle som forsker og hvilke etiske betraktninger det medfører.

3.1 Forskningsdesign

Forskningsdesignet beskriver en struktur eller et rammeverk for de valgene som tas tilknyttet forskningsprosjektet. Det sier noe om hvilke metoder som er tatt i bruk for å samle inn data og hvordan dataene analyseres (Bryman, 2016, s. 40). Ifølge Maxwell (2013) er problemstillingen og forskningsspørsmålene «the heart of your research design» (s. 87) og valget av metodisk tilnærming vil i stor grad basere seg på hva studien ønsker å forstå (Thagaard, 2018, s. 53). Ettersom jeg ønsket å studere et relativt nytt fenomen, var det av verdi å søke en dypere forståelse av tematikken. Derfor egnet kvalitative metode seg godt. Kvalitative data gir tykke beskrivelser av et fenomen i dets kontekst. For å forstå det komplekse og sosiale fenomenet, *utforskning av matematikken ved hjelp av digitale ressurser og læremidler*, fikk denne studien en casestudie-tilnærming (Yin, 2014). Denne innfallsvinkelen ga mulighet til å undersøke samspillet mellom elevene, lærer og de digitale læremidlene, innenfor sin naturlige kontekst, ut fra et rikt datagrunnlag (Yin, 2014, s. 16; Thagaard, 2009, s. 50)

Denne studien tok utgangspunkt i datamateriale som er innhentet av andre forskere, i forkant av mitt prosjekt. På dette vis tok jeg i bruk sekundærdata for å søke svar på mine forskningsspørsmål. I den forbindelse har jeg benyttet en interaktiv tilnærming til forskningsdesignet, som har gitt mulighet for å avdekke flere sider av fenomenet og samtidig gitt rom for endringer underveis i casens utforming (Silverman, 2014, s. 65).

3.1.1 Studiens plass i MuLVu-prosjektet

I denne studien søker jeg forståelse av hvordan elevene kan utforske matematikken ved hjelp av digitale ressurser og læremidler. I den sammenheng har jeg fått tilgang til datamaterialet til prosjektet MuLVu. Multimodale lærings- og vurderingsformer er et pågående prosjekt som startet i 2020 og er forventet ferdig i 2023. Dette er et samarbeidsprosjekt mellom Bærum kommune og forskere ved Institutt for lærerutdanning og skoleforskning ved Universitetet i Oslo. Prosjektet studerer hvordan lærere og elever i tre ungdomsskoler arbeider med multimodale produkter, og hvordan lærerne vurderer dette arbeidet. Hovedformålet med forskningen er å styrke kompetansen til lærere, med spesielt fokus på vurderingsarbeidet med multimodale tekster (Institutt for lærerutdanning og skoleforskning, 2020). Deltakerne i MuLVu-prosjektet arbeider med multimodale tekster i en-til-en-klasserom i ulike fag, inkludert matematikk.

Min interesse og nysgjerrighet for hvordan elevene kan utforske matematikken ved hjelp av digitale læremidler, førte fram til MuLVu-prosjektet og deres datamateriale. En av grunnene for at jeg ønsket å benytte meg av deres materiale, var studiens søkelys for den multimodale uttrykksmåten og deltakernes erfaring med digitale læremidler. Min studie er et selvstendig prosjekt, der videodata og kontekstdata tilknyttet en matematikklærer og hans elever, danner det empiriske grunnlaget for studien. Jeg har nå redegjort for MuLVu-prosjektet og vil nå belyse grunnlaget for mitt utvalg ytterligere.

3.1.2 Utvalg

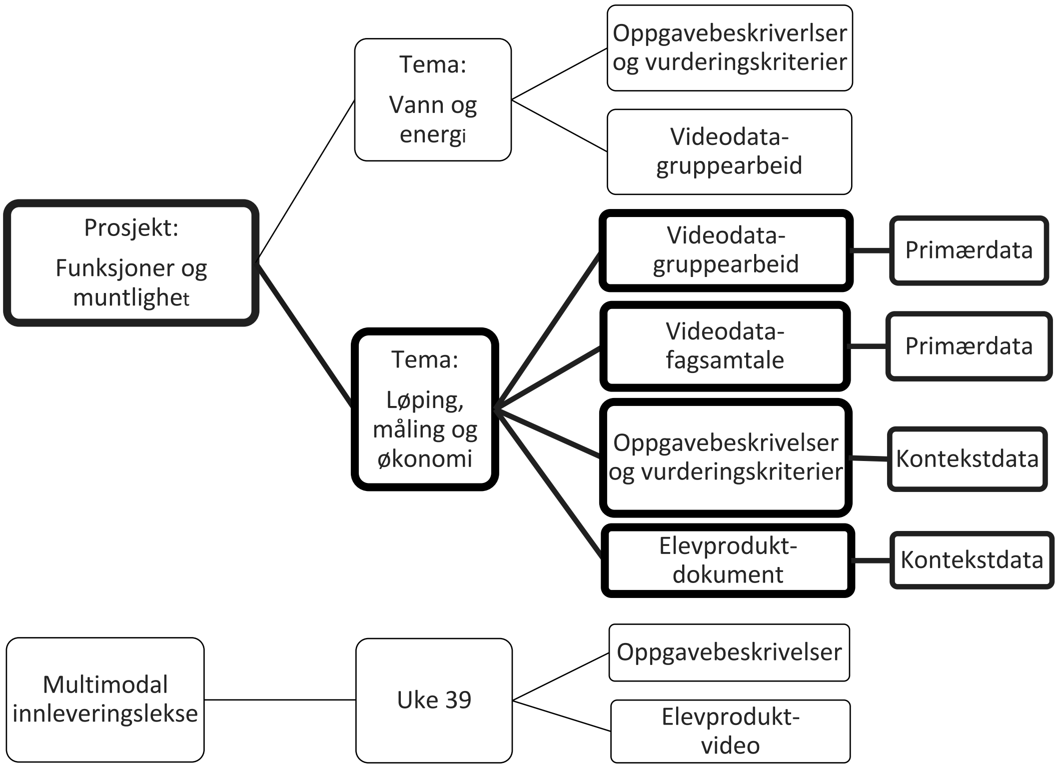
I utvalgsprosessen søker forskeren å samle informasjon som vil gi svar på forskningsspørsmålene. Avgjørelser vedrørende hvor studien skal hente data, fra hvem og hvor mange, utgjør viktige momenter av denne prosessen (Creswell & Poth, 2018, s. 157). For kvalitative studier, slik som denne, søker forsker strategisk etter utvalg som kan sikre relevant informasjon til det studien spør etter (Bryman, 2016, s. 408). Et målrettet utvalg krever et kritisk blikk på det man er interessert i å forstå, der utvalget er passende for forskningen (Silverman, 2014, s. 61). Med en tematikk som både kombinerte matematikk, rike oppgaver og digitale ressurser ble disse premissene viktige for utvelgelsesprosessen i studien. Det kan derfor sies at studien har «a priori purposeful sample» (Hood, 2007, s. 157). Dette innebærer at det er etablert kriterier for utvalget i forkant av studien, og at forsker gjerne har en klar definisjon på det som skal undersøkes. Jeg valgte derfor å ta i bruk datamateriale fra et prosjekt som studerer elever og lærere i samspill med det digitale.

Deltakerskolene av MuLVu-prosjektet har flere års erfaring med digitale læremidler, der utvikling av de ansattes profesjonsfaglig digital kompetanse, har vært en prioritet. For den aktuelle skolen dataen er hentet fra, innebærer denne satsningen blant annet ekstra tid for lærerne til å designe digitale undervisningsressurser. Oppgavene elevene blir utfordret med, er laget av lærerne, med utgangspunkt i et variert spekter av digitale læremidler og ressurser, tilgjengelig for elevene. På dette vis gir MuLVu-dataen innblikk i hva slags ressurser og læremidler lærer tilbyr elever i denne type konteksten, og hvilke muligheter for læring det skaper i undervisningen.

Det er også verdt å fremheve den kommunale digitale satsingen i Bærum kommune. På bakgrunn av at elever i Bærumsskolen har hatt hver sin iPad siden 2017 og PC før det, er elevene erfarne og orienterte i sin digitale bruk[2]. Analogt læreverk har blitt erstattet av lærernes egne oppgaver og elevene har blitt vant til digitale løsninger som alternative oppslagsverk. Denne erfaringen både hos lærere og elever var et viktig utgangspunkt for å velge data fra MuLVu-prosjektet.

Siden kvalitative studier søker dypere forståelse av et tema, situasjon eller fenomen, kjennetegnes disse studiene ved et relativt lite utvalg (Thagaard, 2018, s. 54). Den videre utvelgelsen fra MuLVu-dataen ble derfor to matematikklærere. Disse lærerne designet rike oppgaver, der elevene ble utfordret til et samspill med hverandre, matematikken og digitale ressurser. Oppgavene ga rom for å prøve seg frem, stille spørsmål og forstå matematikken på ulike måter, ved å arbeide digitalt. Datamaterialet tilknyttet disse lærerne og deres klasser representerte også et bredt utvalg av ulike aktiviteter, der elevene benyttet digitale ressurser. I figur 3-1 vises en oversikt over datagrunnlaget for de aktuelle lærerne. Som det fremkommer i figuren valgte et konkret opplegg i et større prosjekt om funksjoner og muntlighet. Ved å ta i bruk data tilknyttet tematikken løping, måling og økonomi, fikk jeg et godt grunnlag for å skrive fram min case (Yin, 2014). Her hadde jeg tilgang til to ulike typer videodata, elevarbeid og matematisk fagsamtale. Dette materiale ble studiens primærdata. I tillegg inneholdt materialet dokumenter som ble viktig kontekstdata.

[2] Evaluering av digital skolehverdag, Bærum kommune. https://www.baerum.kommune.no/globalassets/tjenester/skole/digital-skolehverdag/evaluering-av-digital-skolehverdag-rapport-15.mai-2017.pdf



Figur 3-1. *Oversikt over datamateriale fra MuLVu-prosjektet.*

Etter å ha transkribert alle videoene og fått en god oversikt over dette materialet, valgte jeg ut et elevpar. Dette valget baserte seg på flere grunner. Først og fremst anså jeg disse som gode representanter for casen, da videoene av disse elevene viste utfordringer som flere av elevgruppene møtte på. I tillegg ga datamaterialet et mer fullstendig bilde av arbeidsprosessene til disse elevene sammenliknet med andre grupper, noe som ga meg mulighet til å følge dem også gjennom siste del av prosjektet og i fagsamtalen med læreren. Elevene viste også en interessant måte å samarbeide på, som jeg anså som et godt utgangspunkt for videre analyse. Nå som jeg har redegjort for utvalget vil jeg beskrive undervisningsopplegget mer inngående.

3.1.3 Undervisningsopplegg

I prosjektet *funksjoner og muntlighet* hadde lærer lagt opp til samarbeidsoppgaver mellom to elever, der elevene skulle løse 13 oppgavene og velge ut noen som de skulle presentere i en matematisk fagsamtale med lærer. Prosjektet var designet slik at elevene kunne ta i bruk ulike ressurser, med spesielt vekt på GeoGebra. I tillegg til oppgavebeskrivelser, fikk elevene tildelt vurderingskriterier for arbeidet og fagsamtalen. Elevene hadde tre klokketimer til å arbeide med oppgavene og lage en presentasjon, før fagsamtalen. Opplegget besto av to større oppgaver og mindre deloppgaver. Den ene oppgaven var en praktisk oppgave, som foregikk ute i skolegården, mens de andre oppgavene som var mer teoretisk rettet, fant sted inne i klasserommet. Elevene kunne velge mellom tre ulike nivåer. Grønn løype var minst krevende, rød løype mer utfordrende og svart løype mest utfordrende.

I etterkant av opplegget gjennomførte lærer fagsamtale med hvert elevpar. Denne samtalen var en todelt samtale. I første del av samtalen skulle elevene presentere noen valgfrie oppgaver de hadde gjort. Her måtte elevene beskrive hvordan de hadde tenkt og hvilke fremgangsmåter de hadde brukt. Denne delen var elevstyrt og lærer hadde en passiv rolle. I andre del av samtalen var det læreren som stilte spørsmål til elevene. Disse spørsmålene var både tilknyttet det elevene hadde presentert, men også andre uavhengig spørsmål til elevenes forståelse av funksjoner. Læreren utfordret elevene med spørsmål tilknyttet grafer fremstilt på en utskrift fra GeoGebra. Disse grafene var forskjellig fra dem elevene hadde hatt i sine oppgaver. Spørsmål lærer stilte var blant annet hvordan elevene kunne finne stigningstall og konstantledd, samt hvordan denne informasjonen kunne skrives som et funksjonsuttrykk. I tillegg stilte lærer spørsmål om sammenhengen mellom grafene og hva som skilte dem fra hverandre. I tabell 3-1 gis en kort oversikt over prosjektets omfang.

Time	Innhold	Varighet
1. time	Bli kjent med oppgavene, vurderingskriterier og komme godt i gang med arbeidet.	60 min
2. time	Fortsette arbeidet med oppgavene.	60 min
3. time	Ferdigstille oppgavene. Lage presentasjon for matematisk fagsamtale.	60 min
4. time	Gjennomføre matematisk fagsamtale med lærer. Første del: elevpresentasjon av selvvalgte oppgaver, andre del: spørsmål fra lærer.	10-12 min

Tabell 3-1. *Oversikt over prosjektet: Funksjoner og muntlighet*

3.2 Beskrivelse av data

Datamaterialet jeg har tatt i bruk er, som tidligere nevnt hentet fra MuLVu-prosjektet, og er gjennomført av deres forskere og stipendiater. For min case med to matematikklærere har jeg i hovedsak benyttet videodata, men også anvendt relevant undervisningsmateriell som empirisk grunnlag. Dette skal nå beskrives mer inngående.

3.2.1 Videodata

Videoobservasjon er mye brukt i studier som ser på sosiale praksiser, da dette sanntidsmediet frembringer et komplekst bilde av situasjonen (Blikstad-Balas, 2016). Ved filming vil det gis bedre beskrivelser av hva som skjer, gjennom verbal og non-verbal kommunikasjon, enn hva man får til gjennom observasjon alene. Bjørndal (2017) peker på at den største fordelen ved bruk av opptak er at det pedagogiske øyeblikket blir foreviget, noe som kompenserer for menneskets begrensede hukommelse. Det gjør det mulig å observere situasjoner slik de var og avdekke små detaljer som ikke var mulig å fang opp under selve observasjonen (Tjora, 2017, s. 103). I tillegg vil videoopptakene åpne opp for gjenbruk av dataene for andre forskere og prosjekter, på et senere tidspunkt. Det finnes likevel begrensninger ved innsamlingsmetoden, og selv om videoopptak fanger et detaljert bilde av virkeligheten, er det viktig å huske på at den kun er en representasjon av den (Bjørndal, 2017, s. 83).

I det aktuelle datamaterialet benyttet for denne studien, har forskerne hatt en observerende rolle. Det vil si at de har vært til stedet i klasserommet mens opptakene har blitt tatt, men kun vært der for å styre videokameraene, gjennom zoom, fokus og vinkler. Ettersom kameraene har vært plassert på stativ, har forskerne i liten grad beveget seg rundt elevene og forstyrret den pågående aktiviteten. Ifølge Jordan og Henderson (1995) vil forskere ved å anvende kamera på stativ, tiltrekke seg mindre oppmerksomhet fra deltakerne, enn ved å bruke håndholdt kamera. Deltakerne er i tillegg klar over forskernes rolle i klasserommet og at deres aktiviteter og arbeid er bidrag til et større forskningsprosjekt. I opptak fra elevarbeidet var kameraet plassert på siden av elevene med fokus på skjermene. Det ga stort sett god oversikt over elevaktiviteten på iPaden, men i noen tilfeller fikk kameraet en uheldig vinkel, der aktiviteten på skjermen ble utydelig. I første del av fagsamtalen hadde kameraet søkelys mot iPaden, der jentenes hadde vist frem oppgavene i en presentasjon. I andre del ble kameraet flyttet, slik at bildet fanget arket med grafene, der jentene pekte og skrev ned funksjonsuttrykk. Verken i videodataen fra gruppearbeidet eller fagsamtalen hadde kameraet fokus på deltakernes ansikter. Dette ga noen begrensninger i analysen av interaksjonene, da dataen ikke ga et fullstendig bidet av elevenes kroppsspråk.

3.2.2 Kontekstdata

Ut fra studiens tilnærming som casestudie, der forskeren søker forståelse av et fenomen innenfor en kontekst, er det hensiktsmessig å innhente data som kan gi større kontekstuell forståelse (Thagaard, 2009, s. 50). Derfor ble ulike typer undervisningsmateriell benyttet som datamaterialer. Disse ble kategorisert som kontekstdata. Blant annet fikk jeg tilgang til oppgavebeskrivelser, vurderingskriterier og elevprodukter. Kontekstdataen har vært betydningsfull som støtte til å forstå elevens arbeidsprosess. Spesielt har det vært en forsterkning til videodataen, som ikke alltid gir et like godt bilde av hva som skjer på skjermen. Derfor har jeg benyttet elevens ferdige produkter til å forstå detaljer i interaksjonsdataen. Oppgavebeskrivelsene er også viktige, da disse gir grunnlaget for elevenes diskusjoner og utfordringer.

3.3 Analyse

Det empiriske grunnlaget for casen, og det teoretiske perspektivet presentert over, bygger under den kompleksiteten i å undersøke og analysere et slikt fenomen. I kvalitative data, og spesielt videodata, frembringes en hel mengde ustrukturert informasjon, noe som gjør det utfordrende å jobbe med denne type datasett (Derry, et al., 2010). Det er derfor hensiktsmessig å redusere og strukturere dataene før videre tolkningsarbeid. Hvilken analytisk tilnærming studien har, avhenger gjerne av de teoretiske perspektivene, og hva studien spør etter. I denne studien har jeg i hovedsak valgt interaksjonsanalyse som analytisk tilnærming (Jordan og Henderson,1995). I tillegg har jeg gjort en innledende analyse av elevene med hensyn til hvilke ressurser og aktiviteter de brukte under sitt arbeid. Jeg har benyttet en induktiv-deduktiv tilnærming (Tjora, 2017), som innebærer at jeg hadde et teoretisk grunnlag for å se på tematikken, men at jeg var åpen for ulike innfallsvinkler for å avdekke det interessante med fenomenet. Jeg vil nå beskrive analyseprosessen mer utfyllende, der jeg starter med å presentere transkripsjonsarbeidet.

3.3.1 Transkribering

Første steg i arbeidet med å bli kjent med datamaterialet var å transkribere interaksjonsdataene. Siden studien anvender sekundærdata, var dette steget viktig for å få nærhet til materialet. Selv om det ifølge Tjora (2017) er nærmest umulig å overføre det visuelle bildet til deskriptiv tekst, valgte jeg noen konkrete grep for å gi et detaljert bildet av ytringene og interaksjonene. Blant annet inkluderte jeg aktiviteter og handlinger i egne parenteser. Dette ga informasjon om hvilke ressurser som ble brukt, og hvordan elevene interagerte med hverandre og omgivelsene (Jordan & Henderson, 1995). Med en åpen tilnærming til dataene ville en detaljert transkribering kunne være hensiktsmessig, med gode muligheter for å fange flere interessante aspekter i tolkningsarbeidet.

Jeg valgte programmet Inqscribe for å transkribere videoene, der programvarens enkle oppsett og brukervennlighet ga en god oversikt over arbeidet. For å sikre detaljerte transkript av dataen, gikk jeg over videoene i flere runder. Dette var tidkrevende, men viste seg å være en fordel da jeg gikk i gang med interaksjonsanalysen. Samtidig med dette arbeidet lagde jeg egne notater og koder underveis, som skulle være til hjelp for videre analyse. Dermed var det enklere å finne tilbake til interessante sekvenser i neste steg av tolkningsarbeidet.

3.3.2 Interaksjonsanalyse

Datamaterialet for studien har gitt meg mulighet til å undersøke elevenes interaksjon med hverandre, læreren, digitale læremidler og omgivelsene rundt. Utfordringen ble å skulle gi et analytisk rammeverk som både beskrev den generelle måten elevene arbeidet digitalt med matematikken, og på samme tid dykke ned og analysere interaksjonen mellom elevene i samspill med omgivelsene. Derfor valgte jeg å ta i bruk interaksjonsanalyse som primær analysestrategi, i kombinasjon med en innledende analyse av elevens ressursbruk og aktiviteter. Ifølge Jordan og Henderson (1995) kan interaksjonsanalyse beskrives som en tverrfaglig metode som undersøker menneskers interaksjoner med hverandre og objekter rundt. Metoden anvendes gjerne i videodata, der metoden åpner for å undersøke interaksjoner i naturlige situasjoner, med lite forstyrrelse fra forskerens side (Silverman, 2014, s. 360). Ved å se på interaksjonen mellom elevene og lærer i samspill med det digitale, kan jeg få en bedre forståelse av hvordan elevene utvikler forståelse av matematiske konsepter, i samhandling med andre over tid.

I arbeidet med interaksjonsanalysen så jeg først gjennom videodataene i sin helhet, der jeg noterte interessante hendelser. Disse notatene ble deretter vurdert opp mot hverandre for å danne et helhetlig bilde av elevenes arbeidsprosess og fagsamtale. Her fikk jeg innblikk i ulike mønstre i måten elevene arbeidet med oppgavene på, og hvilke utfordringer som kunne være interessante å se mer på. I neste steg tok jeg utgangspunkt i notatene og valgte ut fem sekvenser fra arbeidsprosessen og to fra fagsamtalen som jeg ville studere nærmere. Her ble transkripsjonsteksten en god støtte for å få med detaljer i samtalen. Fra disse plukket jeg så ut tre sekvenser fra arbeidsprosessen og en fra fagsamtalen, som skulle bli grunnlaget for interaksjonsanalysen. Disse episodene ble valgt på bakgrunn av at de representerte ulike utfordringer som elevene støttet på, i matematikken, i GeoGebra og ved samarbeid. Jeg så også at disse episodene ga gode muligheter for å analysere den varierte bruken av GeoGebra og den rollen den spilte inn i forståelsesarbeidet til elevene.

3.3.3 Innledende analyse

For å kunne danne et helhetlig bilde av hvordan elevene benyttet digitale læremidler og andre ressurser, i prosjektets siste time, lagde jeg kvantifiserte koder ut fra videodataene. Jeg lagde to sett med koder, der den ene viste korrelasjon mellom elevenes ressurser, og hvilken måte de arbeidet, samarbeid eller individuelt arbeid. Her regnet jeg på hvor lang tid elevene brukte per ressurs. Kodene fikk navn, notatbok, iPad, mobil, lærer og medelever. Det andre settet med koder ble laget for kunne si noe om hva jentene brukte iPaden til. Disse kodene fikk navn utforske/prøve seg frem i GeoGebra, lage presentasjon til fagsamtalen, anvende GeoGebra til å forklare, lese oppgavebeskrivelser og skrive i dokumenter. Også her beregnet jeg tiden. Kvantifisering av elevenes arbeidsmåter og ressursbruk ble foretatt før jeg gikk grundig til verks med interaksjonsanalysen. Tanken var at en makroanalyse av arbeidet ville gi verdifull informasjon i forkant av mikroanalysen. Informasjonen ville også representere hele timen og ikke kun de utvalgte sekvensene, og dermed gi et bedre grunnlag for å si noe om og forstå casens fenomen.

3.4 Kritiske vurderinger av forskningsdesignet

I kvalitative studier søker forsker dypere forståelse av et fenomen fra virkeligheten. I denne studien har jeg sett på elevers interaksjon med digitale læremidler og hvilke læringsmuligheter dette frembringer med utgangspunkt i utforsking av matematikken. Bakgrunnen for studiens tolkninger må ses i sammenheng med forskningsdesignet og valg av metoder. Beslutninger tilknyttet dette er gjort med formål i at forsker skal kunne ha et grunnlag for å beskrive fenomenet. Det er i den sammenheng viktig å forholde seg bevisst og kritisk til hvorvidt funnene kan brukes for å forstå andre tilsvarende fenomener. I den forbindelse anvendes det ofte i kvalitative studier kriteriene *pålitelighet*, *gyldighet* og *overførbarhet*. Jeg vil nå gjøre en vurdering av studien med henhold til disse.

3.4.1 Pålitelighet, gyldighet og generalisering

Pålitelighet eller reliabilitet handler hvorvidt forskningen er gjort på en tillitsvekkende måte. Det innebærer at forskeren må redegjøre for hvordan dataene er utviklet og bearbeidet (Thagaard, 2009, s. 190). Gjennom denne studien har jeg derfor etterstrebet å gjøre prosessene transparente ved å gi detaljerte beskrivelser av studiens teoretiske perspektiv, forskningsmetode og analysestrategier

(Silverman, 2014, s. 84). Videodataene har gitt meg mulighet til å se mønstre, sammenhenger og detaljer, noe som har vært essensielt på bakgrunn av at studien benytter sekundærdata. I tillegg har jeg hatt mulighet til å kontakte forskere tilknyttet datainnsamlingen, for spørsmål. Implikasjoner tilknyttet sekundærdata blir diskutert nærmere i 3.4.2.

Gyldighet eller validitet handler om tolkninger av data og hvorvidt funnene som blir presentert i forskningen, stemmer overens med det forskeren søker svar på (Tjora, 2017, s. 232; Bryman, 2016, s. 384). Thagaard (2018) utdyper at validitet relateres til om tolkningene som fremkommer er gyldige i forhold til den virkeligheten som har blitt studert. Jeg har derfor foretatt to grep for å styrke studiens validitet. Det ene er at jeg har forsøkt å gi detaljerte beskrivelser av situasjonene rundt mine utdrag fra interaksjonsdataene (Creswell & Poth, 2018, s. 260), for å gi leseren større blikk av situasjon. Det andre er at jeg tatt hensyn til at jeg gjennom interaksjonsanalysen, muligens velger ut eller tolker dataen på en måte andre ikke er enige i. For å prøve og unngå dette har jeg derfor inkludert veileder underveis i prosessen (Creswell & Poth, 2018, s. 263; Blikstad-Balas, 2016). Som *peer review* har veileder gitt mulighet for å diskutere forskningsdesign, datamaterialet og analyse på en kritisk måte. Spesielt har dette vært nyttig i tolkningsarbeidet ettersom dette har gitt flere synsvinkler

Generalisering handler om forskningens relevans utover den casen som er undersøkt, og hvorvidt funnene fra studien kan generaliseres til liknende situasjoner (Yin, 2018, s. 45; Tjora, 2017, s. 238). Ifølge Bryman (2016) vil funnene fra casestudier i liten grad være målbare og generaliserende, ut fra forskningens unike kontekst. Yin (2014) på sin side, hevder at casestudier gir gode muligheter for å trekke frem antagelser som kan være gjeldene utover det spesifikke casen. I mine øyne handler casestudien om å avdekke det som er interessant og karakteristisk for fenomenet, med et mer generelt siktemål. Jeg har derfor forsøkt å gi et tydelig bilde på interaksjonen mellom GeoGebra og elevene for å utforske og forstå matematiske konsepter. Beskrivelser av elevens arbeid og interaksjon med digitale læremidler kan i stor grad forstås som kontekstavhengige og ikke nødvendigvis gjelde for andre situasjoner. Jeg vil allikevel hevde at det vil være mulig å trekke generelle tendenser og funn ut fra studiens slutninger, som vil kunne ha betydning for tilsvarende læringssituasjoner.

3.4.2 Implikasjoner og utfordringer knyttet til sekundærdata

Denne casestudien har, som jeg har presisert tidligere, tatt i bruk datamateriale innhentet av andre forskere. Dette medfører visse utfordringer. Blant annet har forskerne innhentet data på bakgrunn av det de søker svar på. Det er derfor ikke sikkert at dette søkelyset gir datamateriale som best kan beskrive det andre studier ønsker å forstå (Heaton, 2004, s. 56). Kvalitative data anses gjerne som kontekstualiserte, og ved gjenbruk får ikke forskeren den personlige relasjon til informantene, det autentiske bildet og førstehåndkjennskap til konteksten (Dalland, 2011, s. 451). Noe av kritikken handler derfor om at forskere som tar i bruk sekundærdata ikke får det helhetlige bildet av fenomenet og konteksten.

Disse implikasjonene har jeg tatt høyde for underveis i arbeidet. Jeg har blant annet sett gjennom og transkribert alt av videodata for å få et best utgangspunkt til å kunne si noe om konteksten og måten elevene jobber digitalt med matematikken. Ut fra mitt utenforstående perspektiv har jeg hatt anledning til å se på interaksjonene, uten at deltakerne har vært bevisst mitt fokus. Likevel har denne studiens søkelys holdt seg nær det utgangspunktet MuLVu-prosjektet har med sin forskning og derfor foregått innenfor rammene som deltakerne samtykket til.

3.4.3 Forskerrollen og etiske betraktninger

I denne studien har jeg som forsker forsøkt å gi tykke beskrivelser av et fenomen i et ønske om å frembringe kunnskap og innsikt i hvordan elevene kan utforske og forstå matematikken digitalt. Ved å gi tydelige beskrivelser av metoder og fremgangsmåter, samt deskriptiv i analysen, forsøker jeg å styrke studiens pålitelighet og gyldighet. Selv om studien gir innsikt i en unik case, har indiksjonene blitt sett i lys av relevant forskning og teori, og på dette vis gitt muligheter for overførbarhet (Yin, 2014, s. 40). Selv om jeg i denne studien ikke har hatt innvirkning på valg tilknyttet datainnsamlingen, har jeg likevel møtt på utfordringer til rollen som utenforstående forsker. Blant annet sto jeg ovenfor en ustrukturert, tilgjengelig database, der orientering og kategorisering var viktig for utvelgelsesprosessen. Likens var det viktig å bruke god tid på å bli kjent med datamaterialet, der jeg transkriberte og så gjennom alt, før jeg valgte ut. Dette var tidkrevende, men samtidig betydningsfullt, da jeg fikk et helhetlig bilde av hvordan elevene jobbet. Etter nøye gjennomgang av video- og kontekstdata, endte valget på et elevpar. Datamaterialet av disse elevene ga meg et rikt bilde på hvordan elevene arbeidet digitalt med matematikken og hvordan læreren la til rette for deres forståelsesarbeid.

Jeg har blitt skrevet inn i søknaden som MuLVu-prosjektet har fått godkjent av NSD[3]. Med hensyn til krav og retningslinjer fra Den nasjonale forskningsetiske komité for samfunnsvitenskap og humaniora (NESH, 2016), har hver enkelt elev blitt forespurt og samtykket til at det kan tas opp lyd- og videoopptak. Siden elevene i denne studien er under 15 år, er det foresatte som har gitt tillatelse på vegne av deres barn. Ettersom min studie faller inn under det feltet MuLVu-prosjektet har søkt om å forske på, har det ikke vært nødvendig med eget samtykkeskjema tilknyttet min studie. Deltakerne har dermed implisitt skrevet under og godkjent denne studien. I tråd med retningslinjer for informantenes konfidensialitet, har datamaterialet tilknyttet elevene vært lagret på et sikkert sted, med begrenset tilgang. For å sikre deltakernes anonymitet, har jeg brukt fiktive navn, anonymisert bilder som jeg har benyttet i analysen og beskrevet skolen og konteksten, uten gjenkjennbare opplysninger

[3] Prosjektet er registrert hos NSD med meldeskjema 345234.

4. Funn og resultater

I dette kapittelet vil jeg presentere de empiriske dataene og min analyse av disse. Jeg har delt kapittelet inn i tre deler. I 4.1.1 vil jeg gi en oversikt over de relevante oppgavene for analysen, før det i 4.1.2 følger en kort presentasjon av innledende analyse med interessante betraktninger fra elevenes arbeidsform og aktiviteter. I 4.2 presenteres tre kronologiske episoder fra elevene, der de to første er utdrag fra arbeidet med oppgavene og den siste er en sekvens fra samtale med lærer. Avslutningsvis vil jeg i 4.3 presentere en episode fra fagsamtalen med fokusgruppen, der lærer utfordrer elevens forståelse av grafer.

4.1.1 Oppgavene

Oppgavene elevene jobbet med kan beskrives som en type rike oppgaver. Som jeg var inne på i 2.2.1 er rike oppgaver en type problemoppgaver der elevene blir utfordret til å finne ulike fremgangsmåter, som gjerne initierer for gode diskusjoner. Disse oppgavene la opp til refleksjon mellom samarbeidspartnerne, der elevene skulle gi forklaringer og begrunnelser for sine valg. Elevene ble i tillegg utfordret i GeoGebra, der det var rom for utprøving og utforskning av grafenes fremstilling. Disse grafene ble utgangspunktet for elevenes tolkninger som også var viktige momenter i oppgavene. Som jeg nevnte i 3.1.3 besto oppgavesettet av 13 oppgaver. I det følgende skal jeg beskrive de tre oppgaver som elevene arbeider med i utdragene jeg vil analysere i 4.2.

I oppgave 1.5 (se figur 4-1) tar oppgaven utgangspunkt i et praktisk eksempel med virkelighetsnær informasjon. Her har lærerne valgt å designe oppgaven der den ene mattelæreren skal løpe maraton mot langdistanseløperen Kipchoge. Den første oppgaven spør om jentene kan lage to funksjonsuttrykk, som representerer hver sin løper. Elevene har fått oppgitt lengden på løpet, i tillegg til løperens snittfart. I oppgave b og c skal eleven bruke GeoGebra til å illustrere funksjonsutrykkene grafisk for hver av løperne. Opplysninger fra grafene skal elevene så bruke til å kunne si noe om hvordan løpet utvikler seg og hvem som vinner. Her er det viktig for elevene å sortere informasjonen og luke ut det som er relevant, for å prøve å løse oppgaven. Som hjelp har lærer uthevet noe informasjon, men denne er ikke tilstrekkelig for å besvare alle spørsmål.

Oppgave 1.5

Et maraton er et 42 195 meter langt løpt. Den offisielle verdensrekorden er 2:01:39 og ble satt av Kipchoge i 2018. **Det gir en snittfart på 21,1 km/t.**
Fredrik har løpt flere maraton og har en personlig maratonrekord på 3:31:00. **Det betyr en snittfart på 11,9 km/t.**
Snart er det tid for Berlin Marton og Fredrik utfordrer Kipchoge til en duell via sosiale medier. *«Jeg tror jeg kan komme først i mål hvis jeg får starte 16 kilometer foran og målet er når du har løpt et maraton»*. (Vi regner med at begge holder sin personlige gjennomsnittlige rekordfart på maraton).

a) Lag to funksjonsuttrykk som uttrykker Fredriks og Kipchoges sammenheng mellom tid i timer brukt og avstand i kilometer løpt.
b) Skriv funksjonsuttrykkene inn i GeoGebra. Fokuser på et ryddig og oversiktlig grafikkfelt.
c) Klare Fredrik å slå Kipchoge? Bruk grafene til å fortelle om hva som skjer underveis i duellen.

Figur 4-1. *Oppgave 1.5*

I oppgave 2.6 og 2.7 er temaet økonomi. Her må elevene, i likhet med forrige oppgave anvende informasjonene i teksten for å komme frem til to funksjonsutrykk. Videre må elevene ta i bruk GeoGebra og visuelt fremstille funksjonene. Grafene vil være grunnlaget for elevenes videre tolkning og besvarelse av deloppgavene.

Oppgave 2.6

Nå har dere sett på muligheten for å bli gjeldsfri kjappere.
Men i stedet har dere meldt dere på en konkurranse som krever at dere har team-skjorter til dere selv og fanklubben dere.

a) Det første tilbudet dere får er fra «Haug Print Service» 250 kroner per skjorte.
b) Et annet tilbud er fra «Andersen Topp Print» og har en startkostnad på 700 kroner. Hver skjorte koster 180 kroner.
c) Bruk informasjonen over til å komme frem til to funksjonsuttrykk som dere tegner i GeoGebra. Husk å lage et ryddig grafikkfelt.

Figur 4-2. *Oppgave 2.6*

Oppgave 2.7

Nå sitter dere igjen med en god oversikt i GeoGebra.

a) Bruk funksjonene til å bestemme dere for hvilket tilbud dere skal gå for. Hvorfor velger dere dette tilbudet?
b) Hvor mange skjorter må dere kjøpe for at «Andersen Topp Print skal lønne seg»? Bruk GeoGebra til å vise.

Figur 4-3. *Oppgave 2.7*

4.1.2 Elevenes arbeid

Funnene i den innledende analysen viser at elevene benytter iPaden som ledende ressurs. Selv om elevene hadde tilgang til hvert sitt nettbrett, samarbeidet de om dette middelet, der felles refleksjoner ble utgangspunktet for det arbeidet som skjedde på skjermen. I tillegg til iPaden var læreren en annen ressurs de brukte tid på. Denne ressursen ble engasjert i felleskap fra begge elevene. Det kan tyde på at jentene har prøvd å løse utfordringene sammen, men blitt enige om å søke hjelp hos lærer. Utover disse to ressursene, benyttet elevene liten tid på andre tilgjengelige midler. De henvendte seg i noen grad til medelever, men lite tid sammenlignet med de to nevnte ressursene.

Når det gjelder elevenes bruk av iPad gjennom arbeidet sitt, viste de innledende analysene mine at denne fylte flere funksjoner. Her så jeg også på elevenes tidsbruk per aktivitet. For det første benyttet elevene mye tid på å skrive i dokumentet. Analysen viste at denne aktiviteten ofte ble brukt i sammenheng med andre. For det andre brukte elevene omtrent like mye tid på å utforske/prøve seg frem i GeoGebra, lage presentasjon til fagsamtale, anvende GeoGebra til å forklare og lese oppgavebeskrivelser. «Anvende GeoGebra til å forklare» kan utdypes med at verktøyet ble et hjelpemiddel til å reflektere og forklare for hverandre. Dette var noe jentene spesielt benyttet da de tolket grafene og diskuterte med lærer. Det er mulig å forstå elevens rike spekter av aktiviteter på iPaden som et speil av hva oppgavene spør etter. På den andre siden kan det også tolkes som at jentene i samspill med hverandre og iPaden benyttet flere aktiviteter for å bygge opp om deres felles forståelse. Både det å utforske GeoGebra og benytte det som middel til å forklare er spesielt knyttet opp mot jentenes forståelsesarbeid.

Oppsummert kan den innledende analysen gi noe innsikt i hvordan elevene arbeidet. Ut fra betraktningene over, tyder det på at elevene i stor grad samarbeidet om å utføre oppgavene. Selv om de benytter mye tid med en ressurs, ser vi også at denne ressursen skaper muligheter for varierte og utfordrende aktiviteter. Til tross for at denne makro-fremstillingen kun gir overflatisk informasjon, er det interessant med hensyn til mikro-analysen av elevinteraksjonen som fremkommer videre i kapittelet.

4.2 Episoder del I

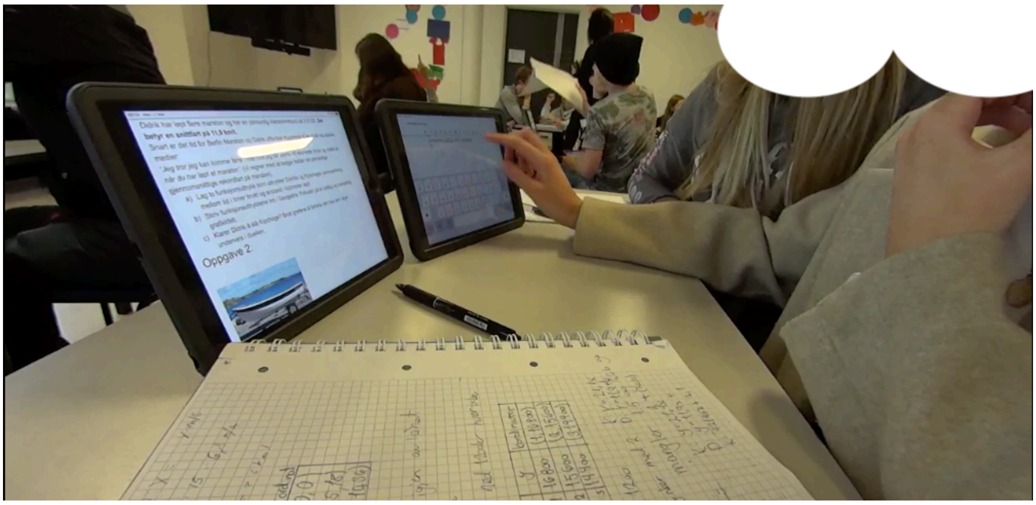
I dette delkapittelet vil jeg presentere og analysere interaksjonsdataen. De to første episodene er utdrag fra arbeid med oppgavene som forespeiler seg tidlig i prosjektets tredje time, mens den siste episoden der elevene er i dialog med lærer, er hentet fra midtveis i timen. Episodene fremkommer kronologisk og som nummeringen indikerer, så kommer de kort etter hverandre. Episodene gir på dette vis innblikk i forløpet i arbeidsprosessen. I de to første episodene jobber elevene med oppgave 1.5, mens de i episode III har samtale med lærer rundt oppgavene 2.6 og 2.7.

4.2.1 Episode I: Prøve seg frem i GeoGebra

I det første utdraget er vi litt over to minutter inn i gruppearbeidet, i prosjektets tredje time. Elevene har hver sin iPad foran seg, der Mathilde skriver inn i dokumenter, mens Sofie har oppgavebeskrivelsen fremme. I tillegg til å anvende iPad, benytter jentene også notater på papir. Jentene har akkurat engasjert en annen elev for å få hjelp til å finne funksjonsutrykkene for hver av løperne i oppgave 1.5. Disse funksjonsuttrykkene trenger jentene for kunne fremstille grafene i GeoGebra og tolke informasjonen fra disse (se figur 4-1). Vi skal nå se at dette byr på utfordringer, spesielt til den visuelle fremstillingen av grafene. Når vi nå kommer inn i episoden, har jentene akkurat formulert det ene funksjonsuttrykket i dokumentet til Mathilde. Samtidig som Mathilde skal til å skrive inn det andre funksjonsuttrykket starter utdraget.

27 Sofie: Men hvorfor skulle vi ta +16 her og ikke der? ((Peker først på funksjonsuttrykk for den ene løperen før hun peker på det andre uttrykket som Mathilde skal til å skrive inn))
28 Mathilde: Fordi han fikk 16 km forsprang
29 Sofie: Å ja, ja det gir mening! (1.0) Okei 11,9 + 16?
30 Mathilde: ((Mathilde skriver det Sofie sier i dokumenter og samtidig leser høyt)) 11, 9 - Å nei, vi har glemt å ta x. (2.0) 11,9x
31 Sofie: ((fullfører setningen)) +16
32 Mathilde: ((leser høyt mens hun skriver)) +16

33 Sofie: Er det - trenger vi svaret på den? ((Peker på oppgave 1.5 a, som ber de lage funksjonsuttrykk))
34 Mathilde: Nei det er bare funksjonssuttrykkene
35 Sofie: Okei, og nå får vi svarene liksom? (
36 Mathilde: Hvis du går i GeoGebra ((tar iPaden til Sofie)) (3.0) Også lager du første (2.0) som er (1,5) y= ((Skriver inn selv))
37 Sofie: 21 x ((leser av iPaden som har oppe dokumentet))
38 Mathilde: ((skriver inn det Sofie sier)) ja
(2.0) ((Jentene får opp feilmelding))
39 Sofie: Det ble feil.. Tror jeg, (1.0) ((leser av feilmeldingen)) udefinert
((Mathilde trykker på rundt i grafikkfeltet i GeoGebra))
40 Sofie: Kanskje det ikke er sånn, ute, sånn mellom ((gestikulerer med hånda))
41 Mathilde: ((Mathilde plotter inn på nytt og får opp en graf)) Åå, jeg tror jeg vet hva vi har gjort feil på de andre og. Vi har satt komma og ikke punktum (foreslår hva som har gått galt)
42 Sofie: Nei, tror ikke det er så (1.0) han (lærer) har jo sett på de og han sa de var bra, tror jeg. (2.0) Men har vi tatt komma på alle? (1.0) Så rart.
43 Mathilde: ((skriver inn neste funksjonsuttrykk og leser det hun skriver)) pluss (2.0) 16 ((Jentene får opp en graf til og ser på denne)) (Begge grafene viser en linje som er tilnærmet loddrett)
44 Sofie: Er det - hæ? (2.0) Han ville at vi skulle ha de helt sånn skeive, sånn at de går sånn ((peker skrått oppover med pekefinger))
45 Mathilde: Da må vi ((justerer grafikkfeltet)) - se her, de er jo på en måte skeive da ((peker på grafene))
46 Sofie: ish, de er akkurat litt (underforstått litt skeive)
((Elevene bak lurer på hva hvilke funksjonsuttrykk Mathilde og Sofie fikk på oppgave 1.5 a, Sofie snur seg rundt og svarer))
51 Mathilde: Ja, okei. Vi må bare fortsette på den andre (Henviser til neste deloppgave)
((Mathilde overtar iPaden til Sofie, som er inne i GeoGebra))
53 Mathilde: Vi kan først ta «flytt graf» (kommando i GeoGebra til å justere grafen) ((Sofie følger med))
(1.5)
54 Sofie: Men den ble veldig rett da ((Mathilde justerer grafikkfeltet ved å zoome, Sofie følger med litt før hun snur seg og ser på elevene bak))
55 Sofie: Se på (1.0) Marta og Ida (gruppen bak seg)
56 Marta: Man bare drar den sånn (utenfor kameraets vinkel, men de snakker om hvordan de kan justere grafikken til grafen)
57 Sofie: Hvordan gjorde du det?
((Mathilde snur seg og Marta overtar iPaden. (4.0) Gir iPaden tilbake))
58 Sofie: Ja, for han ville at de skulle gå opp sånn ((peker skrått oppover)) (Henviser til at grafene skulle gå skrått oppover)
59 Marta: Men er det det man bare skal gjøre? (Lurer på oppgaven)
60 Sofie: Ja, jeg er litt usikker-
61 Mathilde: ((Studerer grafen nøye)) men da blir det jo annerledes da? (Henviser til grafenes endrede utseende)
62 Sofie: Ja, men (navn på lærer) sa her, når du dro, at han ville at de skulle være sånn ((peker skrått oppover))
63 Mathilde: Å ja, på (oppgave) 1,5?
64 Sofie: Nei, han bare sa sånn generelt liksom. At alle skal være sånn skrå på en måte
65 Mathilde: Okei



Figur 4-4. *Elevarbeid*

Vi starter på linje 27, der Sofie responderer på det Mathilde skriver i dokumentet, ved å spørre «men hvorfor skulle vi ta +16 her og ikke der?». Mathilde svarer at den ene løperen hadde forsprang på den andre. Sofie bygger videre på denne forklaringen «11,9 +16» (29) og Mathilde skriver inn funksjonssuttrykket som Sofie sa. Hun oppdager samtidig at de har glemt å ta med x i funksjonsuttrykket (30). Videre vender Sofie oppmerksomheten til oppgaven ved å spørre om det er alt de skal gjøre (33). Mathilde signaliserer at de ikke er ferdige, men at de skal legge inn funksjonsuttrykkene i GeoGebra (36) (deloppgave b). Hun forsøker først å instruere Sofie, før hun tar styringen selv. Sofie leser funksjonsuttrykkene høyt fra dokumentet og Mathilde plotter inn (37). De får opp en feilmelding i programmet. Sofie responderer med å si at det må være feil og leser høyt fra skjermen, «udefinert» (39). Mathilde trykker litt rundt i GeoGebra og gjør et nytt forsøk på å skrive inn funksjonen, og denne gangen kommer det opp en graf. Hun foreslår hva som kan ha gått galt tidligere (41) med en forklaring på at problemene må skyldes at de har satt komma istedenfor punktum i kommandofeltet i GeoGebra. Sofie uttrykker først at hun ikke tror det skal være noe problem, før hun spør om de har satt komma på grafer de har laget i GeoGebra tidligere. Mathilde legger så inn neste funksjon. og de får opp en ny graf. Sofie uttrykker overraskelse over hvordan grafen ser ut (44) og signaliserer at grafen ikke ser ut slik hun hadde forventet. Mathilde zoomer både inn og ut og sier «de er på en måte litt skeive da», og Sofie svarer ikke helt overbevisende «de er akkurat litt» (46).

Etter en liten pause der Sofie har snakket med de bak, henter Mathilde inn Sofie i linje 51, for å fortsette med oppgavene. Mathilde studerer de samme grafene som tidligere og sier «vi kan først ta flytt graf» (en kommando i programmet for å kunne gjøre justeringer av grafene, for eksempel dra og endre aksene). Sofie svarer «men den ble veldig rett da» og virker fortsatt ikke helt overbevisst over utseendet på grafene. Hun snur seg rundt for å se på grafene til elevene bak, mens Mathilde fortsetter å prøve seg frem. «Se på, Marta og Ida», sier Sofie (55). De får hjelp fra jentene bak (56-57). Da Mathilde og Sofie får igjen iPaden sier Sofie «ja, for han ville at de skulle gå opp sånn» og gestikulerer med hendene skrått oppover. I linje 61 virker ikke Mathilde helt overbevist over endringene til grafene og uttrykker «da blir de jo annerledes da», og henviser til at grafene ser annerledes ut enn i stad. Sofie nevner igjen det læreren hadde sagt om at grafene skulle være skeive oppover. Mathilde lurer så på om det gjelder for bare den oppgaven, før Sofie avslutningsvis sier at det gjelder generelt.

Fra denne episoden er det flere analytisk interessante poenger. Den første er knyttet til forståelsen av funksjonsuttrykkene. Jentene starter med et utgangspunkt der de har søkt hjelp hos andre elever for å få riktig funksjonsuttrykk til hver av løperne. Det kan tolkes som at jentene opplevde det utfordrende å oversette informasjonen i oppgaven til egne uttrykk. Vi ser videre at denne informasjonen fra medeleven gjør at forståelsesarbeidet mellom jentene fortsetter. Det åpner opp for undring, hvorfor skal det være +16 på det ene uttrykket og ikke det andre? Slike betraktninger kan være viktige for å vite at man har en felles forståelse før videre arbeid, og kan på en måte tolkes som en oppfordring til å dele resonnementet. Denne undringen fører frem til en forklaring som innleder til videre resonnering, 11,9 + 16. Her viser elevene gode evner til å bygge på hverandres forståelse, og at deres felles tenkning fører til fremdrift i arbeidet. Vi kan også se at elevene i oppbygningen av funksjonsuttrykket, raskt oppdager at de har glemt x i uttrykket. Det løser de ved å reflektere sammen. I linje 32 kommer jentene frem til et uttrykk de begge virker å ha en forståelse av.

Et neste analytisk poeng et tilknyttet delen av utdraget, der elevene skal fremstille grafene i GeoGebra. Her ser vi at jentene møter på flere utfordringer, og det benyttes ulike tilnærminger til å utføre og å løse oppgaven. Første problemet de møter på er å fremstille grafen, der første forsøk fører frem til en feilmelding. Dette løser jentene ved å prøve seg frem og skrive uttrykket på nytt. Ved å bytte ut komma med punktum får jentene opp første graf, og denne erfaringen belyser Mathilde høyt for Sofie. Det er altså vesentlig å benytte riktig tegn for å få frem grafen i programmet. Dette frembringer refleksjoner til tidligere oppgaver de har gjort, der de muligens har møtt på samme problem. De virker likevel noe uenige i om dette har hatt noe å si tidligere. Neste problem møter de når begge grafene er plottet inn og viser seg som to nesten loddrette linjer. Jentene viser litt ulikt fokus, der Sofie virker overrasket over utseendet til grafene og uttrykker en forventing til hvordan de burde se ut. Mathilde responderer på dette ved å prøve seg frem i grafikkfeltet, der hun justerer ved å zoome inn og ut. Kommentaren «se her, de er jo på en måte skeive da» kan tolkes som om hun aksepterer grafenes utseende og samtidig vil overbevise Sofie. Svaret til Sofie «ish, de er akkurat litt» signaliserer at hun ikke er overbevist, og de fortsetter å undersøke grafene. Ut fra Sofie sin replikk i linje 54, virker det ikke som justeringene de gjør, påvirker grafenes utseende i vesentlig grad. Fremgangsmåten for videre arbeid gir et lite skille, der Mathilde fortsetter å prøve seg frem i GeoGebra, mens Sofie undersøker hva slags resultat andre elever har fått. Grafene som hun ser hos elevene bak, kan virke å være mer sammenfallende med hennes forventning. At hun så ber Mathilde se til denne fremstillingen, kan være en måte å vise til hva hun mente tidligere og understreke at de må endre sine grafer. Hjelpen jentene mottar fra elevene bak, der aksene blir justert for å flate ut grafen, skaper en ny refleksjon, da Mathilde sier «men da blir det jo annerledes da?». Denne ytringen åpner opp for at jentene må vurdere om endringene de har gjort er greit, noe de ser ut til å bli enige om.

Et siste analytisk poeng knyttes til jentenes samarbeid og arbeidsfordeling. Utviklingen i jentenes forståelse etableres i samspill med hverandre, teknologien og oppgavene. Elevene viser ulike tilnærminger for å finne løsninger, enten ved å utforske/prøve seg frem, eller søke inspirasjon/hjelp fra andre. Samarbeidet bygger på elevenes innspill, der spørsmål kan bidra til å sett ord på egen forståelse og samtidig sjekke den opp mot den andres. Dette ser vi for eksempel i første linje når Sofie spør hvorfor de skal ha +16 på det ene funksjonssuttrykket og ikke det andre. Dette frembringer refleksjoner rundt hva funksjonsuttrykket representerer, noe som samtidig gjør at elevene blir oppmerksomme på at de har glemt variabelen x i uttrykket. Et annet eksempel er i linje 61, der Mathilde sier «men da blir det jo annerledes da?». Et innspill som kan tolkes som om hun er usikker på om deres siste endringer er greie, og at hun ønsker å høre hva Sofie tenker. Samarbeidet preges av en naturlig rollefordeling, der den ene tar ansvaret for arbeidet på iPaden, mens den andre leser av dokumentet og kommer med innspill. Underveis kommuniserer jentene sine fremgangsmåter og refleksjoner, og begge er på dette vis delaktige i utviklingen av forståelsen og fremdrift i arbeidsprosessen.

4.2.3 Episode II: Tolke og forstå grafene sammen

Dette utdraget tar utgangspunkt i videre arbeid med oppgave 1.5 b. Fra forrige episode har elevene diskutert hva de kan gjøre for å lage et oversiktlig grafikkfelt. Episoden går i gang med at elevene skal sette navn på x- og y-aksen. I den forbindelse viser det seg at jentene har forskjellig oppfatning av hva aksene og grafene representerer. Episoden viser at elevene ikke alltid har felles fokus, men det er interessant å se hvordan de etter hvert snur seg til hverandre for å tolke og forstå grafen i oppgave c.

84 Mathilde: Vi tar x, navn på x-akse
85 Sofie: Men hva skal vi kalle x-aksen da, sånn Fredrik liksom?
86 Mathilde: Nei, x-aksen er jo, eh, (1.0) ((studerer aksene)) fart ((Mathilde taster inn i GeoGebra))
87 Sofie: Det er så sykt irriterende at den går sånn. (3.0) Så var det y-akse (4.0) Og det er (0.5) distanse eller hva var det het?
88 Mathilde: Eh ja,
89 Sofie: Avstand kanskje?
90 Mathilde: Di - avstand ((plotter inn navn på aksene i GeoGebra (3.0)))
91 Sofie: Der er fart ja ((peker på skjermen)) (0.5). Det ser så sykt teit ut (henviser til utseende på grafen)
((Jentene tar skjermdump av arbeidet sitt og limer det inn i dokumentet (20)))
92 Sofie: Men skal vi kalle de der e der noe? ((peker på grafene i bildet))
((Mathilde justerer bildet, Sofie følger med (13.0)))
93 Sofie: Okei c ((leser av oppgave c)). «Klarer Fredrik å slå Kipchoge? Bruk grafen til å fortelle hva som skjer underveis i duellen» (1.0) Å ja, det gir mening. Men hvem er Fredrik da? Er han oransje eller rosa? Det er de vi burde gjøre. Vi burde kalle rosa (graf) for Fredrik også kalle oransje (graf), Kipchoge, eller noe
((Mathilde er i dokumenter og redigerer tekst og bilde, bildene legger seg ikke der hun vil. Sofie ser seg litt rundt (20.0)))
94 Sofie: Prøver du å flytte den liksom? (Snakker om skjermdumpet av grafen som de har lagt inn i dokumenter))
95 Mathilde: Der, ((leser høyt fra det hun skriver)) oransje er lik Fredrik
96 Sofie: Nei, det burde det kanskje ikke være ((Sofie går inn i GeoGebra for å sjekke (6.0) Å ja, oransje (graf) ER Fredrik?!
97 Mathilde: ja og så tar vi bare den oransje sånn ((marker teksten oransje, der de har skrevet funksjonsuttrykket for Fredrik)) (2.5) Hva med han andre, hva heter han?
98 Sofie: Han heter Kipchoge.
(Snakker om hvordan det staves, klippet vekk)
102 Sofie: Også nå må vi bare forklare. (Referanse til oppgave c, om hvordan løpet utvikler seg og hvem som vinner) (2.0) Okei, så Fredrik tar ikke, kan ikke løpe fortere enn han, fordi hvis Fredrik er oransje, så ser vi at han ikke går høyere opp enn han. ((peker på grafene til Kipchoge))
103 Mathilde: Ja, vi burde ta inn bilde igjen og så kan vi vise med piler. (Legge inn bildet i oppgave c også, for så å vise med piler)
104 Sofie: Ja, men det blir enklere når vi skal ha presentasjonen for da er det enklere å vise det.
105 Mathilde: Ja (2.5) ((snakker mens hun skriver i dokumentet)) Vi ser at Kipchoge..
106 Sofie: kommer til å vinne, eller noe
107 Mathilde: Fordi grafen går -
108 Sofie: Fordi grafen -
109 Mathilde Fordi grafen går over Fredrik sin.
((Mathilde fortsetter å skrive inn i dokumentet))
110 Sofie: For den liksom går sånn ((peker med fingrene oppover))
111 Mathilde: Fredriks, eh, Kipcho- Fredrik sin graf synker også - nei, eh
112 Sofie: Den går jo oppover -
113 Mathilde: Kipchoge sin graf er altså over Fredrik sin.

Samtalen innledes med forslag til navn på aksene (85-90). Sofie foreslår først x-aksen som «Fredrik», men Mathilde har en annen tolkning og sier «nei, x-aksen er jo, eh, fart». Jentene går for sistnevnte. Da Sofie i linje 87 fremmer «distanse» som forslag for y-aksen, har hun knyttet forståelsen av denne aksen opp mot Mathilde sitt innspill. I linje 89 kommer Sofie med nytt forslag, «fart», men Mathilde er i gang med å notere distanse, før hun avbryter seg selv og slutter seg til det Sofie sa sist. Jentene tar skjermdump av arbeidet i GeoGebra og limer dette inn i dokumentet. Her lurer Sofie på om de skal kalle grafene noe (92). Mathilde er opptatt med å justere tekst og bilde og svarer ikke på spørsmålet. Da jentene har fått på plass navn på akser, retter Sofie oppmerksomheten mot grafene og hva de representerer (93). Hun leser oppgave c høyt og lurer på hvem av grafene som er Fredrik, den oransje eller rosa. Dette gir henne en ide til at de burde kalle rosa graf for Fredrik, og oransje for Kipchoge. Mathilde fortsetter arbeidet i dokumentet, og Sofie pauser sitt resonnement, ser seg litt rundt, før hun spør hva Mathilde gjør (94). Mathilde skifter fokus tilbake til det Sofie spurte om i 93 og svarer «oransje er lik Fredrik». Sofie sier «Nei det burde det ikke være», før det blir en pause der hun går in i GeoGebra før hun sier «Å ja, oransje ER Fredrik». I linje 102 vender Sofie oppmerksomheten mot tolkningsarbeidet i oppgaven. I linje 103-104 diskuterer de hvordan de kan bruke grafen under fagsamtalen. I siste del av utdraget prøver jentene å komme frem til forklaring på oppgave c. Her ser vi at jentene bygger på hverandres resonnementer og kommer frem til en felles forklaring. Mathilde innleder «vi ser at Kipchoge», før Sofie fortsetter «kommer til å vinne, eller noe», før Mathilde avslutter «fordi grafen går over Fredrik sin» (109). Sofie understreker ytterligere ved å si «for den liksom går sånn» og peker skrått med hånden (110). I neste linje ser de på grafen og Mathilde sier litt forvirret «Fredrik, eh, Kipcho-Fredrik sin graf synker også – nei, eh». Sofie korrigerer Mathilde raskt ved å si «den går jo oppover», før Mathilde avbryter for å slutte seg til deres tidligere resonnement (109).

Fra episode to vil jeg trekke frem tre analytisk interessante betraktninger. De to første handler om hvilken rolle ressursene i det digitale verktøyet får i elevens forståelsesarbeid. Fram til nå har elevene ved å prøve seg frem i GeoGebra, kommet frem til grafer som representerer funksjonsuttrykkene. I denne episoden ser vi at elevene nå mer aktivt benytter grafene og funksjonene i grafverktøyet til å komme frem til en felles tolkning og forståelse. Først møter elevene utordringer med å gjøre grafen oversiktlig, der de skal finne navn på akser og graflinjer. Jentene starter med ulik tolkning av hvordan dette skal forstås. Den ene eleven forstår x-aksen som den ene løperen, mens den andre tolker det som fart. Dette er et godt eksempel på at det ikke er opplagt hvordan grafene skal defineres. Likevel ser vi at dere felles refleksjon fører fram til at begge jentene slutter seg til samme forståelse, da Sofie i tur 87 og 89 forslår navn for y-aksen, som sammenfaller med betegnelsen for x-aksen. Neste betraktning er tilknyttet arbeidet med å lage et ryddig grafikkfelt, der vi ser at jentene ikke nødvendigvis forstår hva grafene representerer opp mot verdiene for x-aksen (distanse/avstand). Elevene tolker vinneren av løpet ut fra den grafen som ligger øverst eller den grafen som går over den andre. Siden jentene valgte et bredt utsnitt av grafen, uten å forstørre de interessante partiene, viser bildet at Kipchoge sin graf ligger mer over Fredrik sin, enn motsatt. Et interessant moment her, som elevene ikke tydeliggjør, er skjæringspunktet, der Kipchoge tar igjen Fredrik. Ettersom dette skjer før løpet er over, så vinner Kipchoge. Det kan virke som om jentene på dette tidspunktet i prosessen ikke enda har klart å identifisere hvordan de skal lese ut fra grafen, hvem som vinner. Samtidig fremkommer det også en viss forundring til hvordan de kan forstå det som skjer ved krysningspunktet, der det blir foreslått at den ene grafen synker. Dermed har kanskje jentene en viss bevissthet til det avgjørende punktet, men at det er utfordrende å tolke det som skjer og sette ord på sine refleksjoner. Avslutningsvis virker det som jentene slutter seg til deres første tolkning om at Kipchoge vinner, siden grafen går over Fredrik sin.

Den tredje interessante betraktningen handler om elevenes arbeidsfordeling, kommunikasjons- og handlingsmønster. I denne episoden ser vi at jentene viderefører noen av de samme rollemønstrene som i episode I. Mathilde fortsetter å ta seg av arbeidet med å redigere og skrive i dokumentet og GeoGebra. Sofie belyser sine refleksjoner, som ser ut til å være utslagsgivende for forståelsen og fremdriften i deres felles arbeid. Oppmerksomheten til jentene preges tidvis av å være forskjellige steder, mer enn i forrige episode. Dette ser vi da Mathilde arbeider med besvarelsene og redigering av bilder i dokumentet, mens Sofie samtidig retter oppmerksomheten mot neste oppgave. Dette byr på noen kommunikasjonsutfordringer, der Sofie søker Mathilde sin oppmerksomhet og respons, men at hun er opptatt med å kommentere hva hun gjør og dermed ikke får med seg Sofie sine innspill. I periodene hvor elevene har felles søkelys, ser vi at dialogen preges av aktiv deltakelse i felles refleksjon. Disse sekvensene blir betydningsfulle for deres tolkninger av grafene og utvikling av felles forståelse.

4.2.4 Episode III: GeoGebra i matematisk samtale

I denne episoden er vi 58 samtaletrekk fra forrige episode og jentene har gått videre til oppgave 2.6 og 2.7, som bygger på hverandre (se figur 4-4 og 4-5). Jentene har fremstilt to nye grafer i GeoGebra som representerer ulike tilbud på t-skjorter. I forbindelse med at jentene hadde utfordringer med grafikkfeltet søkte de hjelp hos lærer. Denne episoden viser et utdrag lenger ut i samtalen med læreren, der tematikken handler om skjæringspunkt og hvordan elevene kan tolke informasjonen fra grafene. Her utfordrer læreren elevenes forståelse og problematiserer tolkningen av at grafen går «under eller over den andre». Samtalen starter med en respons til elevene som lurte på om alt de skulle gjøre i oppgave 2.6 c, var å lage funksjonsuttrykk. I tillegg innleder han samtalen over i ny tematikk, tolkning av grafene.

Figur 4-5. *Samtale med lærer*

167 Lærer: Ja. Også er det jo lurt da og ha med hvor dette skillet ((peker der grafene krysser)) fra hvem som, eller hva er det dette skillet forteller?

168 Sofie: Sånn skjæringspunkt liksom? ((peker også på skillet))

169 Lærer: Ja, det kan være lurt, for det forteller jo...

170 Mathilde: Men hva er det det sier? At det er billigere?

171 Lærer: Jo, er det ikke det da?

172 Sofie: Jo, men hvilken ser man... ((Peker mot grafen på skjermen))

173 Mathilde: ((Beveger fingeren over skjermen der den ene grafen ligger under den andre)) Men er ikke det billigere siden det går under?

174 Lærer: Ja, men der går den over. ((Peker på skjermen og ser på jentene))

175 Sofie: Ja, menne...

176 Lærer: Den grønne går jo først over.

177 Sofie: Men er ikke det fordi det er sånn startkostnad også begynner den å gå over?

178 Lærer: Jo! ((Nikker oppmuntrende og peker på Sofie) Og det at dere har med dere litt refleksjon rundt det ikke sant! Startkostnaden er større på den ene. ((Mathilde begynner å notere for hånd i kladdeboka si)) Og etter det så koster jo hver t-skjorte mindre.

179 Sofie: Okei, så vi kan jo si at den liksom starter med å være liksom høyere og koste mer men så går den nedover på en måte? ((Mathilde tar pause i notatskriving))

180 Lærer: ((Lener seg fremover engasjert og peker mens han ser på Sofie)) Så hvis du ser, la meg si seks t-skjorter da. Ikke sant, sånn som er der nede ((peker igjen)) Hvem er det dere bør kjøpe da? Eller hvem av disse bør dere velge?

181 Mathilde Det er jo helt klart blå (graf)! ((Peker med pennen sin på blå graf))

182 Lærer: Ja! Hvorfor det? ((Smiler og ser frem og tilbake på begge))

183 Sofie: Fordi den er under og den koster mindre.

184 Lærer: Hvis du går til alt over 10 (t-skjorter) da

185 Sofie: Da burde man velge grønn (graf) ((peker)) eller ((Trekker seg litt tilbake og fikler med genseren)) den derre 700 og så.

186 Lærer: Ja. Ja. Fordi at den første den er viktig, eller den startkostnaden gjør at den er litt dyr når man kjøper få, men siden den koster ganske lite etter det så vil jo den bli billigere for jo lenger ((gestikulerer med armene for å understreke hva han sier)) eller jo flere, ikke sant ((trykker på skjermen)) hvis jeg nå hadde gjort sånn her da ((følger x-aksen bortover)).

187 Sofie: Så den lønner seg jo flere du kjøper

188 Lærer: Jaa! ((Trykker fortsatt på skjermen))

189 Sofie: Men hvis du tar få så lønner det seg ikke på en måte.

200 Mathilde: Hvilken da?

201 Sofie: Den grønne ((peker på skjermen for å vise hvilken hun mener))

((Mathilde begynner å notere for hånd igjen, men trekker seg raskt))

203 Lærer: Se nå: ((han trykker på skjermen, og zoomer ut i GeoGebra)) for dette viser seg veldig tydelig her. Hvis du går på, eller hvis du skulle kjøpe 100 t-skjorter da for eksempel ikke sant, se så stor forskjell det begynner å bli nå da.

204 Sofie: ((Peker der læreren trykket på skjermen)) Da har liksom sånn den lille gått opp.

205 Lærer: Ja. Og da er det en stor forskjell mellom blå og grønn (graf) ((viser på skjermen)).

206 Sofie: Okei, så da kan vi skrive at...

207 Mathilde: Grønn (graf) blir billigere hvis du skal kjøpe flere (t-skjorter)!

I linje 167 responderer lærer på spørsmål fra elevene. Han peker på grafene og spør etter jentenes forståelse av dette skillet, der grafene krysser. Sofie spør raskt «sånn skjæringspunkt liksom?». Lærer nikker og skal til å forklare for jentene hva skillet forteller, da Mathilde avbryter (170). Hun spør høyt «men hva er det sier?» og gir samtidig et svar til seg selv «at det er billigere?». Lærer svarer litt spørrende «jo, er det ikke det da?». Jentene resonnerer høyt sammen (172-173) og Mathilde foreslår hvem som er billigst ved å spørre «men er ikke det billigere siden det går under?». Lærer peker på grafen før skjæringspunktet og problematiserer utsagnet «men der går det over» (174). Sofie skal til å svare, men blir avbrutt av lærer som sier «den grønne (grafen) går jo først over» (176). Sofie responderer og trekker frem dette med startkostnad (177). Lærer blir ivrig og peker og sier at jentene skal ha med refleksjoner rundt dette (178). Samtidig som læreren og Sofie veksler dialog, notere Mathilde i skriveboka. I linje 179 forklarer Sofie sin forståelse ut fra grafen, og lærer responderer ved å spørre konkret hvilket tilbud som er best ved kjøp av seks t-skjorter. Mathilde svarer «det er helt klart blå» (181) og peker på grafen. Lærer følger opp med et engasjerende «ja, hvorfor det?» (182). Sofie tar ordet og svarer «fordi den er under og koster mindre». Mathilde fortsetter å notere, mens lærer dykker etter mer forståelse hos jentene og sier «hvis du går til alt over ti da?» (184). Sofie svarer «da burde man velge grønn (graf)». Lærer nikker, sier ja og forklarer ytterligere hvordan startkostnaden påvirker grafen videre. Han retter oppmerksomheten mot GeoGebra og sier «hvis jeg nå hadde gjort sånn her» drar grafen bortover x-aksen. Begge følger med, og Sofie responderer «så den lønner seg jo flere du kjøper» (187). Lærer er ivrig mens Sofie forklarer, før Mathilde spør «hvilken da?» og kobler seg på samtalen igjen. Sofie svarer «den grønne» og peker på grafen (201). Lærer gjør et nytt forsøk på å visualisere grafenes utvikling og forminsker aksene. Han trekker frem et eksempel med 100 t-skjorter og konstaterer den store forskjellen mellom grafene da. Sofie tar ordet og påpeker at den lille grafen har gått opp (204), der hun refererer til at den grafen som i utgangspunktet var billig, blir svært dyr dersom de skal ha mange t-skjorter. Lærer bekrefter resonnementet til Sofie, før Mathilde avslutningsvis er enig og sier «at grønn blir billigere hvis du kjøper flere».

I denne episoden er det interessant å se hvordan funksjonene til GeoGebra blir et sentralt moment i samtalen mellom elevene og læreren. Læreren bruker den grafiske fremstillingen som visuell støtte til sine forklaringer og modellere verktøyets dynamiske egenskaper. Dette ser vi spesielt i linjene 186 og 203, der lærer illustrerer for elevene hvordan grafene utvikler seg, ved å zoome og forflytte seg bortover x-aksen. Her kan vi se i de påfølgende replikkene at jentene viser utvikling i sin forståelse. Det visuelle bildet i GeoGebra legger også utgangspunkt for å utfordre elevenes forståelse (174, 182) og for å stille konkrete spørsmål (167, 180, 184). På dette vis anvender læreren GeoGebra aktivt i sin matematiske samtale med elevene. I tillegg til å hjelpe elevene med deres praktiske utfordring i GeoGebra, griper læreren muligheten for en lengre samtale, der elevenes utfordringer og forståelse kommer frem. Fra elevenes side får GeoGebra en støttende funksjon gjennom at grafene legger utgangspunktet for spørsmål og diskusjon, både mellom elevene og til lærer.

Et annet interessant poeng fra episoden er hvilken rollefordeling elevene tar i samtalen med lærer, og hvordan disse utfyller hverandre. Begge jentene er delaktige og kommer med gode innspill og refleksjoner i deres forståelsesarbeid med læreren. Starten av samtalen preges av en nysgjerrighet fra jentene, der de stiller spørsmål tilknyttet skjæringspunktet, og der de forsøker å danne en forståelse av dette. De frembringer refleksjoner som bygger utgangspunktet for å forstå dette med startkostnad. Utover samtalen ser vi at den ene eleven noterer viktige poenger, og det kan virke som denne aktiviteten gjør det vanskelig å få med hele dialogen. Blant annet spør Mathilde «hvilken da?» i replikk 200, og viser til at hun ikke fikk med seg det Sofie akkurat sa. Disse notatene kan likevel være betydningsfulle når jentene på et senere tidspunkt skal forberede fagsamtale. Den andre eleven bringer frem egne refleksjoner og tolkninger som respons på lærerens innspill og spørsmål. Disse blir betydningsfulle for elevenes slutninger og felles forståelsesarbeid. Dette ser vi spesielt godt på slutten av utdraget, når jentene i fellesskap runder av med å si «okei, da skriver vi at» «grønn (graf) blir billigere hvis du skal kjøpe flere (t-skjoter).

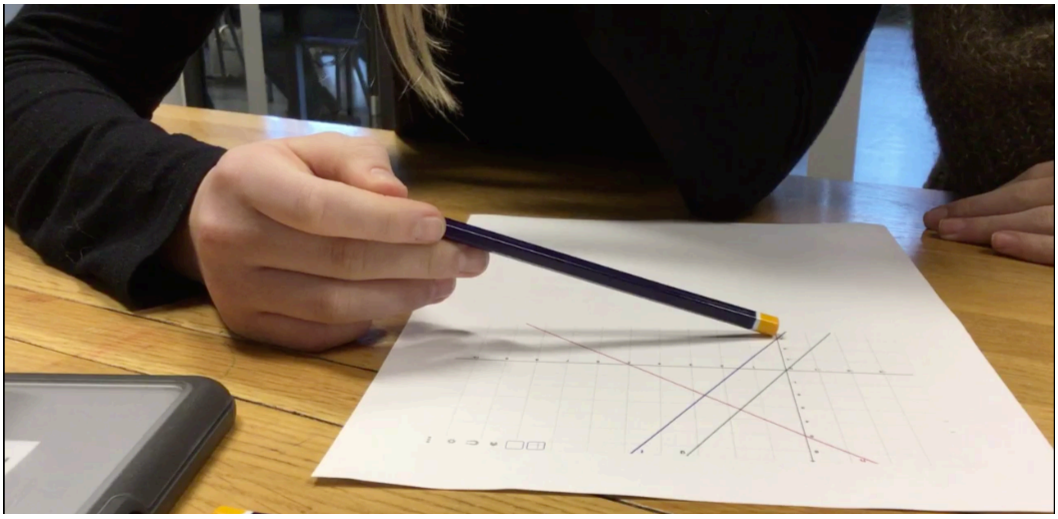
Som en siste analytisk betraktning fra denne episoden vil jeg trekke frem utviklingen jentene viser i sin forståelse. Tidlig i utdraget tolker jentene det billigste tilbudet, med referanse til at grafen går under den andre. Denne oppfatningen har elevene vist og diskutert sammen i tidligere episoder. Det at læreren utfordrer og problematiserer denne tolkningen, gjør at jentene må reflektere på nytt. I samspill med lærer og de dynamiske funksjonene i GeoGebra utvikles jentenes forståelse av grafen. Vi ser i denne episoden at jentene både benytter nye ord som «skjæringspunkt» og «startkostnad» i tillegg til at de virker å ha utviklet en mer helhetlig forståelse av grafen. Dette ser vi i deres avsluttende kommentarer, når de reflektere over hva som skjer med grafene i det lange løp.

4.3 Episoder del II

I dette delkapittelet vil jeg analysere utdrag fra den matematiske fagsamtalen mellom elevene og læreren. Som tidligere nevnt besto denne samtalen av to deler. Den første var styrt av elevene, der de skulle fremlegge selvvalgte oppgaver. Andre halvdel av samtalen var en uformell lærerstyrt dialog mellom elevene og lærer. Her stilte lærer spørsmål til hver av elevene om deres forståelse av lineære grafer og om forklaringer på ulike fagbegreper. Utdraget er hentet fra siste del av samtalen.

4.3.1 Episode IV: Matematisk fagsamtale

Elevene har akkurat holdt presentasjonen, der jentene la frem flere oppgaver, blant annet 1.5, 2.6 og 2.7. Her vekslet jentene på å forklare fremgangsmåter og svar på oppgavene. I tillegg skulle de beskrive de matematiske begrepene lineære og proporsjonale funksjoner. Da Sofie skulle gjøre dette, glemte hun et faguttrykk og fikk til slutt hjelp av Mathilde til å fullføre forklaringen. I overgangen mellom elevpresentasjonen til del to av samtalen, roser læreren elevenes fremlegg, og forklarer at dette kommer til å gå bra. Under samtalen sitter læreren på den ene siden av bordet, mens jentene sitter ovenfor han. Mellom dem er det et ark med tre ulike grafer. Første spørsmål lærer stiller er om Sofie kan si noe om hvilket stigningstall og konstantledd den blå grafen har. Sofie sier hun er nervøs, og lærer viser sin forståelse ved å anerkjenne hennes følelser. Utdraget starter etter dette. Videre i samtalen er det interessant å se at spørsmålet utvikler seg til en felles refleksjon mellom jentene, der de i sine forklaringer aktivt tar i bruk grafen for å vise sin forståelse.



Figur 4-6. *Fagsamtalen*

31 Sofie: Mm, jeg tenker at hvis man går ut 1, så ser man at 2 er opp ((Følger tabellen på papiret med blyanten)) Så har den -

32 Lærer: Mm! Så da er stigningstallet der?

33 Sofie: Da er stigningstallet (0.5) 2, er det ikke? Ja. ((Legger fra seg blyanten)). Og da -

34 Lærer: Og konstantleddet, da?

35 Sofie: 1? Eller nei -

36 Lærer: Konstantleddet? Hvor, hvor, hvordan finner du det liksom? ((Sofie plukker opp blyanten igjen, trekker arket litt nærmere og fikler med blyanten)) Eller hva er det du (0.5) Du sa 1- Det kan godt hende at det er riktig, men hva er det du - hvor ser du det?

37 Mathilde: Kan jeg hjelpe henne?

38 Lærer: Det kan vente, bare ta og så ser vi litt etterpå

39 Mathilde: Hmm

40 Sofie: Mm:: ((Fikler med blyanten)) Jeg er litt usikker, men ...

41 Lærer: Da kan ... vi kan jo spørre om hjelpe av en venn, det er jo også lov det ((Sofie legger ned blyanten))

42 Mathilde: Ja, konstantleddet går alltid ut fra y-aksen

43 Sofie: Ja

44 Mathilde: Så her ser vi, der er konstantleddet ((Peker på konstantleddet på arket))

45 Sofie: Å ja, minus 3, da ((Legger ned blyanten))

46 Lærer: Hva er - hvis dere skal lage et funksjonsuttrykk da, ut av den blå. Klarer dere det? Ut fra at dere nå har funnet ut hva både stigningstallet (blir avbrutt)

47 Mathilde: Ehm, skal vi - kan vi skrive? ((Peker på arket))

48 Lærer: Ja

49 Mathilde: ((Begynner å skrive på arket)) Ehh y =, og vi ser at konstantleddet er minus 3 ((peker på konstantleddet med pennen))

50 Lærer: Mm

51 Mathilde: Mens stigningstallet ((peker på stigningstallet med pennen)) -

52 Sofie: Det var 2

53 Mathilde: Ehh ... det var 2

54 Lærer: Mm

55 Mathilde: ((skriver ut ligningen)) Da er det jo

56 Begge: 2x ...

57 Sofie: Pluss minus 3, da
58 Mathilde: Er det ikke minus 3?
59 Sofie: Eller nei, det er minus (0.5) ja, minus 3 ((Mathilde skriver ut funksjonssuttrykket))
60 Mathilde: Mhm

Episoden starter med at Sofie henter seg inn etter tydelig og ha signalisert at hun er stresset og nervøs over situasjonen. I linje 31 presenteres tankegangen bak hvordan man kan finne stigningstallet til grafen. Her brukes grafen aktivt for å illustrere fremgangsmåten og forståelsen. Før forklaringen fullføres, avbryter lærer (32) der han ivrig bekrefter og samtidig spør «mh, så da er stigningstallet der?». Litt nølende svarer Sofie «2, er det ikke?». Hun mottar en form for bekreftelse og svarer selv «ja». Hun skal til å si noe mer før lærer avbryter (34) og spør etter konstantleddet. Hun svar 1, men Sofie trekker det tilbake og virker usikker (35). Lærer følger opp med å utfylle spørsmålet og hinte til videre resonering (36). I linje 37 ønsker Mathilde å hjelpe henne, og lærer sier at det kan vente litt til. Sofie nøler og sier «jeg er litt usikker, men..» (40) og lærer foreslår de skal få hjelp av en venn. Mathilde forteller hvordan de skal finne konstantleddet (42-44). Igjen blir grafene brukt som et utgangspunkt til å vise tankegang, der det pekes for å konkretisere. I linje 45 svarer Sofie bekreftende «å ja, minus 3 da» og er med på det Mathilde sa. Lærer dykker etter mer kunnskap hos jentene og spør om de klarer å lage et funksjonsuttrykk ut fra grafen (46). Han blir avbrutt, der Mathilde ivrig spør om de kan skrive. Etter et bekreftende ja fra lærer starter jentene på funksjonsuttrykket. Mathilde noterer mens hun sier «y= og vi ser at konstantleddet er -3» (49). Hun peker bekreftende på grafen med blyanten, der linja skjærer y-aksen i -3, før hun sier «mens stigningstallet» (51). Her blir hun avbrutt av Sofie som skyter inn «det var 2». Mathilde bekrefter ved å gjenta det som Sofie sa (52). I linje 54 begynner Mathilde å skrive ut likningen, mens hun sier «da er det jo», før Sofie blir med og begge sier samtidig «2x» (55). Sofie fortsetter setningen «pluss, minus 3 da» (56). Mathilde spør raskt «er det ikke minus 3?». Sofie korrigere seg selv og bekrefter ved å gjenta «ja, minus 3».

Fra denne episoden vil jeg belyse tre interessante poenger. Først vil jeg trekke frem hva lærer gjør for å tilrettelegge for at hver enkelt av elevene skal få vist frem sin kunnskap og forståelse. Han evner å lage en trygg arena for kunnskapsformidling ved å oppmuntre og anerkjenne elevens følelser. En vurderingssamtale kan være skummelt for elevene, og han prøver å ufarliggjøre situasjonen, ved blant annet å la elevene få god betekningstid. Der eleven virker usikker, utfyller han spørsmålet, framfor å gå videre. Dette gjør han blant annet ved å bruke andre beskrivende ord og oppmuntre til videre resonnering ved å hinte om at de er på rett vei. Læreren frembringer også et samarbeid ved å åpne for innspill utover den eleven som fikk spørsmålet. Dermed inkluderes alle i forståelsesarbeidet med grafen, og på dette vis gi begge elevene mulighet til å oppleve eierskap til kunnskapen som frembringes. Ved å legge til rette for en samtale som tar utgangspunkt i noe konkret, i dette tilfelle grafer, har elevene også mulighet til å søke støtte i det visuelle.

Det neste poenget jeg ønsker å vektlegge fra episoden, er på hvilken måte elevene får vist fram sin kunnskap på. Premissene for denne samtalen skiller seg fra arbeidsprosessen tidligere, siden lærer nå skal se hva hver av elevene har tilegnet seg av kunnskap. Elevene må på dette vis uttrykke seg mer selvstendig, noe som blir utfordrende for Sofie. Vi ser at jentene benytter grafen aktivt, der tenkningen visualiseres og fremgangsmåtene blir konkretisert. Elevene viser også i denne samtalen at de er flinke til å støtte hverandre, der de forteller konkret hva det tenker og hva de gjør. Dette illustreres blant annet i linje 44-45, da Mathilde viser hvordan de kan finne konstantleddet. Dette gjør at begge tar del i samtalen og får vist sin forståelse. Sammen får de også skrevet fram et funksjonsuttrykk som representerer grafen. Samspillet byr også på muligheter til å utfordre hverandres tenkning (58), som fører fram til felles forståelse. Oppsummert kan vi si at elevene i denne samtalen får vist sin kompetanse i samspillet med grafene (på utskriften) og innspill fra hverandre og læreren.

I det siste poenget fra episode IV ønsker jeg å se på elevenes utvikling separat. Jeg mener det kan være interessant å se på hvordan samspillet påvirker enkeltpersonens forståelse og utvikling, i tillegg til hva de får til sammen. Hvis vi starter med Sofie, så hadde hun i forkant av denne episoden uttrykt at hun var nervøs og ubekvem. Etter noen oppmuntrende ord fra lærer starter utdraget med at hun forklarer hvordan hun tenker for å finne stigningstallet. Dette behersker hun på en god måte, både gjennom beskrivelser og ved å konkretisere med grafen. Det er noe mer utfordrende med konstantleddet. Med litt støtte fra Mathilde kobler hun seg raskt på og bidrar senere til å skrive frem funksjonsuttrykket. Når det kommer til Mathilde viser hun god forståelse tilknyttet grafene. Hun viser en trygghet i resoneringene og forklaringene sine. I tillegg er disse forklaringene inkluderende og opplysende for fellesskapet, der de blir en inngang for Sofie sine innspill. Mathilde tør også å stille seg spørrende til utsagn hun ikke er helt enig i og virker på dette vis trygg på sin egen kunnskap.

4.4 Oppsummering av funn

I dette kapittelet har jeg lagt frem funn og resultater fra arbeidet med interaksjonsdataene. For å sammenfatte analysekapittelet vil jeg oppsummere hovedfunnene.

Funn fra analysen viser at GeoGebra får ulike roller ut fra de forskjellige aktivitetene som utspiller seg i arbeidsprosessen. Dette gir både støtte og utfordringer i elevenes forståelse. I den ene episoden blir programmet et middel til utforsking, når jentene må prøve seg frem for å fremstille grafene. Selv om elevene løser denne utfordringen raskt, møter de nye problemer når grafene ikke opptrer slik de forventer. Dette frembringer undring og spørsmål hos jentene. I en annen episode fungerer GeoGebra som et middel til refleksjon og tolkning, der jentenes oppmerksomhet rettes mot matematikken og den grafiske fremstillingen. Her gir det visuelle bildet et godt utgangpunkt for å bygge frem felles forståelse av grafens informasjon. Det er likevel utfordrende for elevene å forstå overgangen fra den ene uttrykksformen til den andre. I samtalen med læreren, i episode III, kommer programmets dynamiske egenskaper godt frem, da lærer aktivt tar i bruk GeoGebra for å vise og modellere for elevene. Her fungerer GeoGebra som en god visuell støtte, når lærer både forklarer og stiller spørsmål rettet mot elevens forståelse av grafen. Dette viser seg også å være utslagsgivende for hvordan jentene utvikler en mer helhetlig forståelse av grafene.

Et annet funn er betydningen av jentenes samarbeid. Både engasjementet til elevene og innspillene i arbeidet med oppgavene, fører fram til utforskning av funksjonene i GeoGebra. Her frembringer begge elevene gode refleksjoner og løsninger når utfordringene oppstår. Selv om samarbeidet tidvis preges av at jentene ikke har fokus på samme aktivitet, fører de ofte gode samtaler som bygger frem felles forståelse. Dette får de til ved å kommentere, reflektere og stille kritiske spørsmål til hverandre.

Helt til slutt viser analysen at veiledning og støtte fra lærer, er viktig for at elevene skal forstå mer av grafverktøyet, og utvikle sin egen forståelse av lineære grafer. I episode III ser vi at læreren utfordrer elevene både ved å stille spørsmål til deres forståelse og til å tenke videre fra arbeidet sitt. Han trekker inn vitenskapelige begreper og bruker GeoGebra for å hjelpe elevene til å forstå mer av grafene og samtidig gi dem større innsikt i funksjoner i programmet. I fagsamtalen endrer lærerens funksjon seg og der han er mer opptatt av å se hva elevene har lært og om de kan anvende forståelsen i en annen situasjon, med nye grafer. Her legger han til rette for at samtalene kan ta utgangpunkt i konkrete grafer, presentert på en utskrift.

5. Diskusjon og konklusjon

I dette kapittelet vil jeg rette oppmerksomheten tilbake til studiens problemstilling som er *På hvilken måte kan digitale ressurser og læremidler støtte elevene i å utforske matematikken?* I 5.1 skal jeg ved hjelp av tre sentrale temaer, utledet fra analysen, diskutere de empiriske funnene opp mot eksisterende forskning og litteratur. I 5.2 vil jeg belyse noen pedagogiske implikasjoner tilknyttet denne studien, samt komme med forslag til videre forskning. Helt til sist vil jeg i 5.3 komme med noen avsluttende kommentarer.

5.1 Diskusjon av funn

5.1.1 Grafverktøy som støtte for utforsking og læring

Gjennom dette prosjektet har elevene tatt i bruk ulike analoge og digitale ressurser for å løse og besvare oppgavene i fellesskap (Gilje et al., 2016). Hvert redskap har en mening og et potensielt bruk. Lærer har derfor en intensjon om at elevene skal tilegne seg spesifikk kunnskap og innsikt etter å ha interagert med læremiddelene. I tre av de fire episodene presentert i analysen er GeoGebra et sentralt redskap for å appropriere kunnskap om funksjoner og lineære grafer (Säljö, 2001). I den matematikkdidaktiske litteraturen beskrives de digitale ressursene som forsterkere dersom de kun tas i bruk for å effektivisere manuelle prosesser, eksempelvis for å lage en tabell og foreta utregninger (Norstein, 2018). Dersom ressursene benyttes slik at de forbedrer elevenes innsikt og forståelse, omtales de digitale redskapene som reorganiserer. Analysen i denne oppgaven viser at GeoGebra både fungerer som en forsterker og reorganiserer.

På den ene siden ser vi at læremiddelet blir en forsterker når funksjonen i GeoGebra foretar oversettelsesarbeidet mellom funksjonsuttrykkene til grafisk uttrykksform. Denne prosessen krever ingen utregninger eller på andre måter utfordrer elevens forståelse av det som skjer. Faktisk argumenterer jeg for at et funn er at denne prosessen gjør at elevene mister noe av sammenhengen mellom uttrykksformene. Dette ser vi episode II, da Sofie er usikker på hvilke av grafene som representerer hvilken løper, når elevene skal satte navn på grafene. Dette antyder at den forståelsen elevene fikk av å tolke oppgaveinformasjonen og lage funksjonssuttrykket, ikke ble videreført i oversettelsen til grafisk uttrykksform. Dette funnet slutter seg til funn fra studien til van der Meij og de Jong (2006), som indikerte at elevene hadde vanskeligheter med å se sammenhenger mellom representasjoner som beskriver det samme fenomenet.

På den andre siden kan GeoGebra forståes som en reorganiserer. Forskning og litteratur har blant annet vist at visuelle fremstillinger i digitale læremidler gir god støtte til å forstå konsepter om grafer (Bülbül et al., 2020; Ainsworth, 2006; White & Pea, 2011). Funnene i min analyse viser at den grafiske fremstillingen blir utgangspunktet for de fleste samtalene mellom jentene. For det første skaper GeoGebra fokus på felles objekt. Dette gir elevene muligheter til å løfte frem sin egen forståelse og se den opp mot den andre eleven sin. Eksempelvis fører dette til at jentene i episode II oppdager at de ikke har samme oppfatning av hva grafene representerer. Felles refleksjon tilknyttet grafen gjør at elevene retter opp i misoppfatningen om hvilken av grafene som representerer Fredrik. Dette viser at GeoGebra i samspill med jentene, etablerer en utviklingssone for læring, der refleksjoner fører til felles forståelse (Vygotksy, 1978).

For det andre leder den grafiske fremstillingen frem til flere matematiske uttrykksformer hos elevene. Dette er noe som kjennetegner arbeidet med rike problemer, som jeg var inne på i 2.2.2, som kan støtte elevens forståelse. For å kunne kommunisere meningsfullt om den grafiske representasjonen, må elevene oversette mellom forskjellige uttrykksformer. Funn i analysen viser at elevene benytter den logiske uttrykksformen når de reflekterer sammen om det de ser. Disse samtalene inneholder hverdagslige begreper og lite matematiske formler eller forkortelser. Den logiske uttrykksmåten er likevel nødvendig for at elevene skal omforme de kulturelle redskapene til sin egen forståelse (Holquist & Emerson, 1981; Säljö, 2001). Den grafiske fremstillingen gir først mening for elevene når de har diskutert og kommet frem til en felles forståelse av den visuelle uttrykksformen. Denne måten å uttrykke seg matematisk på, har i tillegg vist seg å være gjeldene for elever som er lite kjent med redskapet og dets funksjoner (Aventi et al., 2014). I samarbeidet er det naturlig at elevene benytter de språklige redskapene som de har appropriert for å kunne komme seg videre i forståelsesarbeidet. Det er derfor nærliggende å tro at elevene i større grad ville benyttet vitenskapelige redskaper, dersom de allerede hadde tilegnet seg disse. Vi kan blant annet se i episode III, der samtalen med læreren danner en utviklingssone mellom deltakerne og GeoGebra, og at elevene approprierer nye og mer avanserte vitenskapelige begreper. Dette viser at GeoGebra kan mediere for ulike uttrykksformer og andre språklige redskaper (Daniels, 2001; Vygotksy, 1978; Säljö, 2002).

Samtidig som GeoGebra gir støtte for elevens forståelse, byr redskapet også på utfordringer. Et funn i mine analyser er at elevene har problemer med å få plottet inn funksjonsuttrykket for å generere grafen. Dette samsvarer med liknende studium, der elevene hadde lite erfaring med grafverktøyet (Aventi et al., 2014). Dettet funnet leder ut i flere andre bemerkelser. For det første ser vi at arbeidet med å prøve seg frem i GeoGebra gir betydning for å forstå hvordan verktøyet fungerer og for å fremstille grafen visuelt. For det andre mener jeg at GeoGebra i de to første episodene gir utforskende muligheter rettet mot funksjoner i programmet, heller enn utforskende tilnærming til matematikken og de lineære grafene. Elevene utforsker både hvordan de skal få plottet inn grafene, og hvordan de kan redigere og lage grafene oversiktlige og fine. Dette er likevel ikke aktiviteter som dirkete kan knyttes til matematikken. Samtidig argumenterer jeg for at et annet funn er at GeoGebra åpner opp for samtaler mellom jentene som stimulerer til ny forståelse (Mercer, 2005). Dette ser vi blant annet i starten av andre episode, når elevene skal sette navn på aksene. Her oppdager plutselig elevene at de ikke har samme oppfatning av hva grafene og aksene representerer. Altså fører aktiviteten i GeoGebra til dialoger som er utforskende og utfordrende og er derav betydningsfull for forståelsen (Hagland et al., 2005; Fuglestad, 2010). Disse funnene illustrer på dette vis at aktiviteten i GeoGebra alene ikke skaper utforskende momenter for matematikken, men at samtalene som genereres fra arbeidet er konstruktive for læringen av faget (Mercer & Littleton, 2007).

Et annet funn tilknyttet elevenes forståelse, er at utviklingssonen som skapes i samspillet med jentene og GeoGebra gir i størst grad overflatisk forståelse. Dette sammenfaller med ideen om overflate og dybdelæring (Linn & Eylon, 2011), der sistnevnte krever tid sammenlignet med læresituasjoner, der elevene kan «absorbere» informasjon. I likhet med det litteraturen presenterer (Ainsworth, 2006), indikerer funn i denne studien at elevene har utfordringer med å forstå hva som konseptuelt skjer med grafen. De fokuserer på det overflatiske, framfor å dykke ned i de underliggende prinsippene (Kozma, 2006). Blant annet forklarer de vinneren av løpet ut fra beskrivelsen «den grafen som ligger over den andre» og nevner ikke skjæringspunktet i grafen som et avgjørende moment. Dette støtter seg på Baktin sin forståelse av at appropriering av språklige redskaper, er utfordrende og tidkrevende for elevene (Holquist & Emerson, 1981). Dette antyder at elevene i utviklingssone med GeoGebra har kommet dit hen at de forstår mye, men at dersom de skal nå dypere forståelse, trenger de støtte fra en mer kompetent person (Vygotksy, 1978).

5.1.2 Samarbeid i teknologi-støttet læring og undervisning

Fra sosiokulturelt perspektiv, går man ut fra at mennesker danner forståelse interspykologisk før intrapsykologisk (Vygotsky, 1978). Ideen om at elevene samarbeider for å danne forståelse rundt oppgaver og konsepter, baserer seg på de samme antagelsene (Mercer & Littleton, 2007). Det ligger samtidig noen forutsetninger for et godt samarbeid, som generer læring og utvikling. Her styres kvaliteten på samarbeidet ut fra hvordan elevene utfordrer hverandres innspill og ideer, som legger grunnlaget for deres utviklingssone (Mercer, 2005; Vygotksy, 1978). Funn i mine analyser viser at elevene både fører kumulative og utforskende samtaler (Mercer, 2005). I hovedsak bærer samtalene preg av at jentene bygger på hverandres innspill og ikke nødvendigvis vurderer disse kritisk. Slike samtaler faller inn under den kumulative beskrivelsen. Når elevene fører disse samtalene er de ofte orienterte mot det praktiske som skjer på skjermen og stiller spørsmål tilknyttet dette, for eksempel «hva gjorde du nå?». I aktivitetene der elevene benytter de digitale ressursene som forsterker, hvor de kumulative samtalene tar form, er det gjerne arbeidsoppgaver som heller ikke behøver store anstrengelser. Eksempler på dette er når de justerer og redigerer for å ta skjermdump av arbeidet, som de skal benytte i presentasjonen. Disse funnene kan illustrere at ikke alle aktiviteter med de digitale ressursene generer utfordrende samtaler.

Samtidig viser analysen at samtalene også har utforskende momenter. Vi ser at GeoGebra åpner opp for aktiviteter som utforsking av programmet og tolkning av informasjon. Disse aktivitetene frembringer andre mer krevende språklige redskaper hos elevene. Liknende funn har også vært i andre studier som ser på utforskende matematikk (Hansen, et al., 2020; Dolonen og Ludvigsen, 2012). Vi kan forstå elevenes engasjement til å gi forklaringer, reflektere og tolke det som skjer, som respons til samspillet med hverandre og redskapene, men også som etablerte normer i samarbeidet (Yackel & Cobb, 1996; Stertlien, 2002). Selv om elevene i stor grad fortsatt befinner seg innenfor kumulativ samtaleform, vil jeg påstå at disse delene av samtalene utfordrer elevenes forståelse (Hagland et al., 2005; Mercer & Littleton, 2007). Blant annet tør de stille seg kritiske til hverandres utsagn, eksempelvis i episode II, da Mathilde påstår at den ene grafen synker (111), og Sofie argumenterer imot ved å si «den går jo oppover». Et annet eksempel er i den første episoden der vi ser Mathilde stiller seg kritisk til endringene som ble gjort med grafen da hun sier «men da blir de jo annerledes da?» (61). Disse funnene kan illustrere at de digitale læremidlene, og da spesielt GeoGebra, gir utgangspunkt for å etablere samtaler med utforskende preg.

Analysen i denne oppgaven viser også at det er vesentlig for samarbeidet og utviklingssonen at elevene har fokus på felles objekt eller aktivitet. Vi ser ut fra beskrivelsene i den innledende analysen at elevene i stor grad jobber i fellesskap om de ulike ressursene. Likevel fremkommer det i interaksjonsanalysen at elevene i partier gjør enkelte oppgaver hver for seg, uten å forklare og engasjere den andre. Dette byr på utfordringer for kommunikasjonen mellom elevene. Blant annet ser vi i episode II at Mathilde er opptatt med å rediger i GeoGebra og dokumenter, mens Sofie søker oppmerksomheten til Mathilde for å gå videre. Her er Mathilde konsentrert om en annen oppgave, og Sofie opplever manglende respons på sitt initiativ. Dette viser kompleksiteten i samarbeidet, der det er mange funksjoner og oppgaver som skal fylles. På den ene siden krever et slikt samarbeid elevenes dype konsentrasjon og engasjement for å danne forståelse og innsikt i faget og ressursene, og på den andre siden er det en prosess elevene skal få i mål, der flere oppgaver må gjøres. Det er med andre ord langt mer enn bare forståelsesarbeidet tilknyttet matematikken som krever jentenes oppmerksomhet i slike komplekse læringsomgivelser.

5.1.3 Lærerens rolle som tilrettelegger

Lærerens rolle i teknologirike klasserom er avgjørende for elevenes læring (Abdu et al., 2015; Ingulfsen et al., 2018; Dolonen & Ludvigsen, 2012; Dolonen & Kluge, 2014; Spurkland & Blikstad-Balas, 2016). For det første viser funnene i analysen betydning av lærerens tilrettelegging gjennom undervisningsdesignet (Inguldfsen et al., 2018). Her har oppgavene en sentral rolle for hvordan elevene arbeider og samhandler med hverandre og teknologien. Det oppgavene spør etter og hvilke redskaper som kan benyttes for å løse de, forteller noe om hva lærer ønsker at elevene skal tilegne seg av kunnskap og forståelse for å utvikle seg (Säljö, 2001). De egendesignede tekstoppgavene er vanskelig å kategorisere, da de byr på momenter fra både rutineoppgaver og problemoppgaver (Hagland et al., 2005). Dette kan utdypes med at oppgavene i utgangspunktet søker ett svar, og at veien dit ikke nødvendigvis fremkaller ulike løsningsmetoder. Likevel kan vi se at Sofie og Mathilde møter på ulike utfordringer og på dette vis opplever oppgavene som et slags problem (Karlsen, 2014; Hagland et al., 2005). Oppgavene byr også på refleksjonsspørsmål, der elevene blir utfordret til å tolke, gi forklaringer og begrunnelser. Disse spørsmålene leder ut i flere diskusjoner, både mellom elevene, men også i dialog med lærer. Dette viser at lærer ikke bare ønsker at elevene skal utføre en matematisk regneoperasjon, men også reflektere over det de gjør og vise sin forståelse gjennom flere uttrykksformer (Hagland et al., 2005).

Et annet aspekt ved mine funn er at oppgavene kan forståes som et redskap til å utvikle elevens forståelse på vei mot det potensielle nivå (jf. 2.2.1). Dette har vært viktige funn i tidligere forskning som blant annet fant at utforskende oppgaver gir positiv faglig utvikling hos elevene (Freeman et al., 2014; Minner et al., 2010; Boaler & Greeno, 2000), samt at elevens kompetanser til å resonnere og føre gode matematiske samtaler blir bedre (Hansen et al., 2020). Dette ser vi for det første ved at deloppgavene bygger videre på hverandre og krever ulike ferdigheter og kompetanser for å løses. For at deloppgave c skal løses, er elevene avhengig av få til de to foregående oppgavene. For det andre virker det som disse oppgavene ligger i elevenes nærmeste utviklingssone, der felles refleksjoner fører frem til en forståelse og utvikling, jentene alene ikke ville ha klart (Vygotsky, 1978). Når det er sagt, kan det likevel argumenteres for at utviklingssonen elevene etablerer i de to første episodene gjør at jentene får til oppgavene, men ikke nødvendigvis utvikler en dyp forståelse av lineære grafer, slik jeg var inne på i 5.1.1. Disse funnene antyder at elevene kommer et godt stykke på vei i utviklingssonen med oppgavene og de digitale ressursene, men at det likevel er mer potensiale for læring.

For det andre viser funn i analysen betydning av lærerens tilrettelegging gjennom læringsprosessen. Som vi så i kapittel 2.2 viser tidligere studier at læreren både er avgjørende for at elevene skal mestre de utforskende oppgavene (Abdu et al., 2015; Dolonen & Ludvigsen, 2012) og for å oversette mellom det digitale til det matematiske (Dolonen & Kluge, 2014). Dette støttes av mine funn som viser at jentene utvikler forståelsen videre i samspill med læreren. For det første får han frem det læringspotensialet som ligger i GeoGebras funksjoner, som jentene ikke fikk til på egenhånd. Dette gjør han ved å visualisere og modellere i programmet, der han zoomer og forflytter seg bortover aksene, slik at elevene ser grafens utvikling.

For det andre blir denne modelleringen forsterket ved at lærer stiller spørsmål rettet til det som vises. Her utfordrer han elevenes tolkninger av grafene og veileder elevene til å benytte matematiske begreper til å vise en mer konseptuell forståelse. Derfor kan veiledningen også fungere som en støtte til hvordan elevene skal appropriere komplekse, kulturelle redskaper. Blant annet leder han dem til å ta i bruk språklige redskaper, som sosiomatematiske normer og vitenskapelig begreper (Yackel & Cobb, 1996). Et eksempel i episode III er at lærer ikke bare godtar svaret «det er helt klart blå (graf)» til spørsmålet om hvilket tilbud elevene burde gå for, dersom de skulle kjøpe 6 t-skjoter. Her ønsker lærer noe mer fra elevene og spør «ja, hvorfor det?». Slike spørsmål fertiliserer gjerne for samtaler på høyere nivåer (Mercer, 1995) og er med på å løfte elevene over i den nærmeste utviklingssonen. Samtidig som lærer stiller spørsmål, etablerers også en praksis der elevene er nysgjerrige og engasjerte, der de bringer inn gode innspill. Dette er funn annen forskning også fant i samspillet mellom elevene, lærer og utforskende tilnærminger i undervisningen (Higgins & BuShell, 2018; Wæge, 2007). Fra det sosiokulturelle perspektivet er grunnlaget for meningsproduksjon og forståelse, at elevene og lærer i felleskap anvender og produserer materiell og språklige redskaper (Rasmussen & Lund, 2015). Disse funnene illustrer på dette vis lærerens betydning for elevens potensielle utvikling, ved å støtte for appropriering av komplekse, kulturelle redskaper.

For det tredje viser analysene også hvordan læreren støtter elevene i å vise sin kompetanse i etterkant av læringsprosessen. Her inntar læreren en litt annen rolle på bakgrunn av at samtalen er en vurderingssituasjon. Dette kommer til synet i mine funn ved at han blant annet viser forståelse ovenfor situasjonen, som jentene synes er litt ubehagelig. Ved å ufarliggjøre samtalen prøver han å legge til rette for at elevene skal få vist sin kunnskap. De har allerede gjennom presentasjonen fått vist mye av sin forståelse, men lærer er også ute etter å undersøke om elevene nå kan anvende forståelse i en ny sammenheng. Derfor er spørsmålene under denne samtalen i stor grad individuelt orientert. Til forskjell fra samtalen med læreren i forrige episode, der elevene var kjent med oppgavene og grafene, introdusere lærer en ny utfordring inn i fagsamtalen. Funnene viser her at spørsmålene tilknyttet disse grafene ikke var så enkle å besvare. Dette ser vi i spørsmålet der lærer lurer på hva konstantleddet til den blå grafen er, og Sofie ikke får til denne oppgaven på egenhånd. Selv om lærer her prøver å veilede henne videre i resonneringen, blir oppgaven for utfordrende alene. Dette viser at selv om hun i utviklingssonen med Mathilde underveis i arbeidet, forholdt seg til de matematiske begrepene og prosessene, hadde ikke Sofie tilegnet seg disse redskapene godt nok, til å mestre dem alene. Det ble derfor tydelig at Sofie fortsatt befant seg i den interpersonlige prosessen (Vygotksy, 1978) og trengte støtte for å få til oppgavene. Disse funnene illustrerer på den måten at det tar tid å lære matematiske prosesser og appropriere redskaper.

Et annet aspekt ved lærerens støtte i vurderingsprosessen er at lærer åpner opp for at den andre eleven kan hjelpe til med å forklare. Istedenfor at han selv gir svaret til Sofie, velger læreren å la Mathilde få mulighet til å svare. På dette vis viderefører han elevens utviklingssone, som de har etablert gjennom sitt samarbeid. Ut fra Mathilde sine forklaringer kan vi se at hun har utviklet seg videre fra det sosiale planet. Ikke barer mestrer hun å ta i bruk de kulturelle redskapene på egenhånd (Säljö, 2001), hun fungerer også som den signifikante andre for Sofie, der hun deskriptivt viser og forklarer hvordan de kan finne konstantleddet (Vygotksy, 1978).

5.2 Pedagogiske implikasjoner og videre forskning

Hovedfunn fra min analyse viser at de digitale ressursene kan gi muligheter for utforskende aktiviteter og samtaler, som støtter elevens forståelse. Samtidig viser funnene at rollen de digitale ressursene får, avhenger av et komplekst samspill med oppgavene, elevenes samarbeid og støtte fra læreren. På bakgrunn av at mine funn kan ha overføringsverdi for lærere og lærerstudenter, ønsker jeg nå å belyse noen pedagogiske implikasjoner.

For det første mener jeg at studien viser hvilket potensial for læring et slikt prosjekt gir. Undervisningsopplegget, bestående av oppgavene og fagsamtalen, byr på et rikt spekter av aktiviteter som legger til rette for utvikling av den matematiske forståelsen. Elevene ser ut til å sitte igjen med gode erfaringer fra samarbeidet og mer kunnskap, både om GeoGebra og om lineære grafer. Et slikt prosjekt ivaretar også elevenes autonomi, der de styrer planleggingen og arbeidsprosessen på egenhånd. Likevel er det viktig å understreke betydningen av lærerens rolle. Det er ikke GeoGebra alene som trigger elevene til å utforske eller generere gode, reflekterende samtaler. Tvert imot kan det være situasjoner der digitale ressurser gjør at elevene mister sammenhenger, fordi funksjonen i verktøyet prosesserer for dem. Derfor må læreren planlegge for hvordan elevene skal ta i bruk ressursene, slik at de kan reorganisere og utfordre elevens forståelse. Det handler om å kjenne til hvilke muligheter som finnes i ressursene, samtidig som lærer må designe oppgaver som frembringer utforsking. Istedenfor at elevene skal plotte inn funksjonsuttrykk i GeoGebra, kan elevene for eksempel utforske sammenhenger mellom ulike grafer. Det kan være tidkrevende å konstruere oppgaver som både inkluderer digitale ressurser og samtidig by på samarbeidsmuligheter og problemløsning. Dette er noe jeg likevel mener lærere må prioritere og jobbe videre med, spesielt med tanke på kjerneelementene i den nye læreplanen.

En annen implikasjon tilknyttet lærerens rolle, er tidspunktet for veiledning til elevene. Læreren kan ha planlagt for rike oppgaver som utfordrer elevene, men det betyr ikke at elevene benytter det potensialet som ligger i samspillet med oppgavene og den digitale ressursen. Som jeg var inne på i forrige avsnitt, kan elevene miste noe av sammenhengen, fordi verktøyet foretar prosessen for eleven. Dersom læreren oppdager elevens manglende forståelse tilknyttet dette, først i fagsamtalen, står lærerens støtte i fare for å gi mindre betydning. Eleven befinner seg da kanskje over i vurderingsprosessen og er mer opptatt av vise sin allerede eksisterende kunnskap. Derfor mener jeg at lærer må følge opp underveis i arbeidsprosessen, ved å stille spørsmål som utfordrer elevene i samspillet med de digitale ressursene. Lærer kan modellere og vise hvilke muligheter som ligger i de digitale ressursene. Støtte kan også ta form i helklassesamtaler, der elevene belyser og diskuterer fremgangsmåter og utfordringer, med veiledning fra lærer. Denne type klasseromsinteraksjon har jeg ikke observert i denne studien, men tidligere forskning har vist betydningen av helklassesamtaler (Mercer & Littleton, 2007).

Den tredje implikasjonen handler om kulturen for samarbeid og de sosiomatematiske normene som etableres i læringsfellesskapet mellom deltakerne. Dette er noe jeg mener matematikklærere må bruke mer tid på. Samfunnet forventer borgere som er gode på å kommunisere, samhandle og opptre profesjonelle, ved å ta i bruk faglig kompetanse og kunnskap. Et sted å starte er derfor i klasserommet, der lærer kan veilede og modellere for slike praksiser. Elevene trenger å erfare hvordan en matematisk samtale tar form og utvikle språklige redskaper som uttrykker matematikken konsist. Lærer må derfor ta i bruk fagspesifikke betegnelser og sette krav til elevene om anvendelse av disse. En god måte å gjøre dette på kan være gjennom helklassediskurser, der normene etableres i fellesskap. Det er ikke gitt at elever mestrer det elevene i denne analysen får til, uten god trening i samtaler. I mange klasserom er matematikkfaget preget av mye individuelt arbeid. Ellers mener jeg at fagsamtalen har et stort potensial for elevens læring og utvikling. Disse samtalene burde i stor grad speile det arbeidet elevene møter i timene. I tråd med fagfornyelsen og kjerneelementet utforsking og problemløsning, er det naturlig at fagsamtalene tar utgangspunkt i utforskende oppgaver og da gjerne med hjelp av digitale ressurser. Likens må lærer også promotere samarbeid i klassen. Som denne oppgaven har vist, etablerers utviklingssoner i fellesskap med andre. Det er likevel ikke gitt at elevene faktisk samarbeider når de sitter sammen. For at elevene skal dra nytte av hverandre, trenger elevene tid til å bli gode på å samarbeide. Her må elevene utfordres i ulike sammensetninger og ulike aktiviteter tilknyttet samarbeidet.

Når det kommer til videre forskning på dette temaet, er det fortsatt mange aspekter som er lite belyst til nå. Det hadde for det første vært interessant å få enda mer kunnskap og innsikt i på hvordan lærere kan inkludere utforskende matematikk og digitale ressurser i sin undervisning. Her snakker jeg både om forskning på lærere som konstruerer egne oppgaver, men også lærere som benytter allerede etablerte utforskende læremidler og opplegg. Her kunne det være gunstig å intervjue noen lærere for detaljer i sin praksis.

I tillegg hadde det vært spennende å se på hvordan helklassediskursene kunne ta form rundt den digitale utforskingen av matematikken. Her ville et observasjonsstudium gitt gode muligheter for å se deltakerens interaksjon.

Til slutt, som en videreføring av mitt eget studie, hadde det vært interessant å se hvordan fagsamtaler i enda større grad kunne inneholde utforskende momenter, i tillegg til bruk av digitale ressurser.

5.3 Konklusjon

Gjennom det siste kapittelet har jeg diskutert studiens empiriske funn opp mot forskning og litteratur. Basert på diskusjonen ønsker jeg nå å gi noen avsluttende kommentarer.

Denne avhandlingen viser aspekter for hvordan matematikkundervisning tar form i en-til-en-klasserom, der læreren opererer med egenproduserte læremidler for å tilrettelegge for elevens læring. Ved å undersøke elev-elev interaksjon i arbeidsprosessen, har studien gitt innsikt i hvordan elevene utvikler forståelse av lineære grafer, i et komplekst samspill med hverandre, oppgavene og de digitale ressursene. I tillegg har studien sett på lærer-elev interaksjon i to samtaleformer, både underveis i arbeidsprosessen og under en vurderingssamtale. Dette har gitt innsikt i hvordan lærer kan legge til rette og støtte for kunnskapsutvikling og forståelse av grafer og digitale læremidler.

Funnene fra denne studien viser at de digitale ressursene utfordrer elevene på ulikt vis. GeoGebra er en ressurs som i samspill med rike oppgaver gir utforskende muligheter for elevene. Samtalene som oppstår i elevens arbeid med grafverktøyet er konstruktive for elevens forståelse og læring. Samtidig er det knyttet utfordringer til hvordan grafen oversetter fra de ulike matematiske uttrykksformene, der elvene tilsynelatende kan mestre oppgaven å tegne frem en graf i programmet, uten helt å forstå hva grafen viser. Derfor viser denne studien at lærerens støtte, i undervisningsdesignet, underveis i arbeidsprosessen og i en vurderingssituasjon, er essensiell for at elevene skal utvikle den konseptuelle forståelsen av arbeidet med grafene. Studien indikere at det er samspillet mellom alle deltakerne og ressursene tilgjengelig som sørger for rik læring (Säljö, 2010).

Litteraturliste

Abdu, R., Schwarz, B. & Mavrikis, M. (2015). Whole-class scaffolding for learning to solve mathematics problems together in a computer-supported environment. *ZDM : The International Journal on Mathematics Education, 47*(7), 1163–1178. https://doi.org/10.1007/s11858-015-0719-y

Ainsworth, S. (2006). DeFT: A conceptual framework for considering learning with multiple representations. *Learning and Instruction, 16*(3), 183–198. https://doi.org/doi:10.1016/j.learninstruc.2006.03.001

Alrø, H. & Skovsmose, O. (2002). *Dialogue and Learning in Mathematics Education. Intention, Reflection, Critique* (29). Springer. https://doi.org/10.1007/0-306-48016-6

Ananiadou, K. & Claro, M. (2009). 21st century skills and competences for new millennium learners in OECD countries. *OECD Education Working Papers*, No. 41, OECD Publishing. https://doi.org/10.1787/218525261154

Anderson, R. D. (2002). Reforming science teaching: what research says about inquiry. *Journal of Science Teacher Education, 13*(1), 1–12. https://doi.org/10.1023/A:1015171124982

Anderson, R. D. (2007). Inquiry as an organizing theme for science curricula. In: S. Abell & N. Lederman (Red.), *Handbook of research on science education* (s. 807–830). Lawrence Erlbaum Associates.

Arstorp, A-T. (2019). Hva er lærerens profesjonsfaglige digitale kompetanse? I T. A. Wølner, K. Kverndokken, M. Moe & H. H. Siljan (Red), *101 digitale grep – en didaktikk for profesjonsfaglig kompetanse* (s. 17-32). Fagbokforlaget.

Aventi, B., Tobias, S. & Serow, P. (2014). Linking GeoGebra to Explorations of Linear Relationships. *Mathematics Education Research Group og Australasia.* Paper presented at the Annual Meeting of the Mathematics Education Research Group of Australasia (MERGA). 79-86. https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED572562.pdf

Berrum, E., Fyhn, J., Guldbrandsen, I. P. & Nilsen, Ø. L. (2017). *Evaluering av digital skolehverdag.* (Evaluering av pilotprosjektet «Digital skolehverdag» i Bærum Kommune). https://www.baerum.kommune.no/globalassets/tjenester/skole/digital-skolehverdag/evaluering-av-digital-skolehverdag-rapport-15.mai-2017.pdf

Bjørndal, C. (2017). *Det vurderende øyet: Observasjon, vurdering og utvikling i pedagogisk praksis* (3. utg.). Gyldendal akademisk.

Blikstad-Balas, M. (2016). Key challenges of using video when investigating social practices in education: contextualization, magnification, and representation. *International Journal of*

Research & Method in Education, 40(5), 511–523. https://doi.org/10.1080/1743727x.2016.1181162

Blikstad-Balas, M. & Hvistendahl, R. (2013). Students' Digital Strategies and Shortcuts. *Nordic Journal of Digital Literacy, 8*(1-02), 32–49. https://www.idunn.no/dk/2013/01-02/students_digital_strategies_and_shortcuts

Boaler, J. (1998). Open and closed mathematics: Student experiences and understandings. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29(1), 41-62. https://doi.org/10.2307/749717

Boaler, J. & G. Greeno, J. (2000). Identity, Agency, and Knowing in Mathematics Worlds. I J. Boaler (Red). *Multiple perspectives on mathematics teaching and learning*, (s. 171-200). Greenwood Publishing Group, Incorporated.

Board on Testing Assessment, Division of Behavioral Social Sciences Education, Committee on Defining Deeper Learning 21st Century Skills, National Research Council, & Board on Science Education. (2012). Education for life and work. In *Education for life and work*. National Academies Press. https://doi.org/10.17226/13398

Bryman, A. (2016). *Social Research Methods* (5. utg.). Oxford University Press.

Bråten, I. (1996). Om Vygotksys liv og lære. I I. Bråten (Red.), *Vygotsky i pedagogikken* (s. 13-42). Cappelen Akademisk Forlag.

Bråten, I. & Thurmann-Moe, A. C. (1996). Den nærmeste utviklingssonen som utgangspunkt for pedagogisk praksis. I I. Bråten (Red.), *Vygotsky i pedagogikken* (s. 13-42). Cappelen Akademisk Forlag.

Bülbül, B. Ö., Güler, M., Gürsoy, K. & Güven, B. (2020). For what purpose do the student teachers use DGS? A qualitative study on the case of continuity. *International Online Journal of Education and Teaching (IOJET), 7*(3). 785-801. https://iojet.org/index.php/IOJET/article/view/765

Calder, N. (2018). Using Scratch to facilitate mathematical thinking'. *Waikato Journal of Education, 23*(2), 43-58. https://doi.org/10.15663/wje.v23i2.654.

Clark, R. C. & Mayer, R. E. (2008). E-Learning and the science of instruction. Learning. Pfeiffer. http://scholar.google.com/scholar?hl=en&btnG=Search&q=intitle:ELearning+and+the+Science+of+Instruction#0

Creswell, J., & Poth, C. (2018). *Qualitative inquiry & research design: Choosing among five approaches* (4. utg.). SAGE Publications.

Dalland, C. P. (2011). Utfordringer ved gjenbruk av andres kvalitative data. *Norsk pedagogisk tidsskrift,* (6), 449-459.

Daniels, H. (2001). *Vygotsky and Pedagogy*. Routledge.

Decristan, J., Hondrich, A. L., Büttner, Gerhard., Hertel, S., Klieme, E., Kunter, M., Lühken, A., Adl-Amini, K., Djakovic, S-K., Mannel, S., Naumann, A. & Hardy, I. (2015). Impact of additional guidance in science education on primary students' conceptual understanding. The Journal of Educational Research (Washington, D.C.), 108(5), 358–370. https://doi.org/10.1080/00220671.2014.899957

Derry, S. J., Pea, R. D., Barron, B., Engle, R. A., Erickson, F., Goldman, R., Hall, R., Koschmann, T., Lemke, J. L., Sherin, M. G. & Sherin, B. L. (2010). Conducting Video Research in the Learning Sciences: Guidance on Selection, Analysis, Technology, and Ethics. The Journal of the Learning Sciences, 19(1), 3–53. https://doi.org/10.1080/10508400903452884

Dolonen, J. A. & Kluge, A. (2014). Læremidler og arbeidsformer for algebra i ungdomsskolen. *En casestudie i prosjektet ARK&APP, matematikk, 8. klasse.* Universitetet i Oslo (UiO). https://www.udir.no/globalassets/filer/tall-og-forskning/forskningsrapporter/casestudie-fra-uio-om-laremidler-og-arbeidsformer-i-matematikk.pdf

Dolonen, J. A. & Ludvigsen, S. (2012). Analyzing students' interaction with a 3D geometry learning tool and their teacher. *Learning, Culture and Social Interaction, 1*(3-4), 167–182. https://doi.org/10.1016/j.lcsi.2012.08.002

Den Nasjonale forskningsetiske komité for samfunnsvitenskap og humaniora. (2016). *Forskningsetiske retningslinjer for samfunnsvitenskap, humaniora, juss og teologi* (4. utg.). Oslo: De nasjonale forskningsetiske komiteene. https://www.forskningsetikk.no/globalassets/dokumenter/4-publikasjoner-som-pdf/forskningsetiske-retningslinjer-for-samfunnsvitenskap-humaniora-juss-og-teologi.pdf

Freeman, S., Eddy, S. L., McDonough, M., Smith, M. K., Okoroafor, N., Jordt, H. & Wenderoth, M. P. (2014). Active learning increases student performance in science, engineering, and mathematics. *Proceedings for the National Academy of Sciences of the United States of America, 111*(23), 8410–8415. https://doi.org/10.1073/pnas.1319030111

Fuglestad, A. B. (2010). Bedre matematikkundervisning. *Tangenten, 31*(4), 9-14. http://www.caspar.no/tangenten/2010/t-2010-4.pdf

Furtak, E. M., Seidel, T., Iverson, H. & Briggs, D. C. (2012). Experimental and Quasi-Experimental Studies of Inquiry-Based Science Teaching: A Meta-Analysis. *Review of Educational Research*, 82(3), 300-329. https://doi.org/10.3102/0034654312457206

Gilje, Ø. (2017). *Læremidler og arbeidsformer i den digitale skolen.* Fagbokforlaget.

Gilje, Ø., Bjerke, Å. & Thuen, F. (2020). *Gode Eksempler På Praksis. Undervisning i en-til-en-klasserom. (FIKS-Rapport).* https://www.uv.uio.no/forskning/satsinger/fiks/kunnskapsbase/digitalisering-i-skolen/gepp-rapport--undervisning-i-en-til-en-klasseromme/gepp-rapport_15.05.20_fiks.pdf

Gilje, Ø., Ingulfsen, L., Dolonen, J, A., Furberg, A., Rasmussenm I., Kluge, A., Knain, E., Mørch, A., Naalsund, M. &. Skarpaas, K, G. (2016). *Med ARK&APP: Bruk av læremidler og ressurser for læring på tvers av arbeidsformer.* Universitetet i Oslo. https://www.uv.uio.no/iped/forskning/prosjekter/ark-app/arkapp_syntese_endelig_til_trykk.pdf

Hagland, K. H., Hedrén, R. & Taflin, E. (2005). *Rika matematiska problem - inspiration till variation.* Liber AB.

Handal, B. (2003). Teachers' Mathematical Beliefs: A Review. *The Mathematics Educator, 13*(2), 47-57. https://www.researchgate.net/publication/253304892_Teachers'_Mathematical_Beliefs_A_Review

Hansen, T. I., Frydensbjerg Elf, N., Misfeldt, M., Gissel, S. T. & Lindhardt, B. K. (2020). *Kvalitet i dansk og matematik: Et lodtrækningsforsøg med fokus på undersøgelsesorienteret dansk- og matematikundervisning*. (1 ed.) Læremiddel.dk. https://laeremiddel.dk/viden-og-vaerktoejer/rapporter/kvalitet-i-dansk-og-matematik/

Heaton, J. (2004). *Reworking qualitative data*. ProQuest Ebook Central.

Higgins, K. & BuShell, S. (2018). The effects on the student-teacher relationship in a one-toone technology classroom. *The Official Journal of the IFIP Technical Committee on Education, 23*(3), 1069-1089. https://doi.org/10.1007/s10639-017-9648-4

Holquist, T. M. & Emerson, C. (1981). The dialogical imagination. I P. Morris (Red), *The Bakhtin reader: Selected writings of Bakhtin, Medevedev, Vološinov* (s. 74-81). Edward Arnold.

Hood, J. (2007). Orthodoxy vs. power: the defining traits of grounded theory. In *The SAGE handbook of grounded theory* (s. 151-164). SAGE Publications.

Ingulfsen, L., Furberg, A. & Strømme, T, A. (2018). Students' engagement with real-time graphs in CSCL settings: scrutinizing the role of teacher support. *International Journal of Computer-Supported Collaborative Learning, 13*(4), 365-390. https://doi.org/10.1007/s11412-018-9290-1

Institutt for lærerutdanning og skoleforskning. (2020. 9. november). *Multimodale lærings- og vurderingsformer (MuLVu).* Universitetet i Oslo. https://www.uv.uio.no/ils/forskning/prosjekter/mulvu/

Jewitt, C., Moss, G. & Cardini, A. (2007). Pace, interactivity and multimodality in teachers' design of texts for interactive whiteboards in the secondary school classroom. *Learning, Media and Technology, 32*(3), 303–317. https://doi.org/10.1080/17439880701511149

Jordan, B. & Henderson, A. (1995). Interaction Analysis: Foundations and Practice. *The Journal of the Learning Sciences, 4*(1), 39–103. https://doi.org/10.1207/s15327809jls0401_2

Karlsen, L. (2014). *Tenk det!: utforsking, forståelse og samarbeid - elever som tenker sjæl i matematikk: ungdomstrinnet*. Cappelen Damm akademisk.

Kozma, R. B. (2003). The material features of multiple representations and their cognitive and social affordances for science understanding. *Learning and Instruction, 13*(2), 205–226. doi:10.1016/S0959-4752(02)00021-X

Kunnskapsdepartementet. (2017). Framtid, fornyelse og digitalisering – digitaliseringsstrategi for grunnopplæringen 2017-2021. Strategipapir. Hentet fra https://www.regjeringen.no/contentassets/dc02a65c18a7464db394766247e5f5fc/kd_framtid_fornyelse_digitalisering_nett.pdf

Lave, J. & Wenger, E. (1991). *Situated learning: legitimate peripheral participation*. Cambridge University Press.

Linn, M. C. & Eylon, B.-S. (2011). *Science Learning and Instruction: Taking Advantage Of Technology To Promote Knowledge Integration.* Routledge.

Maagerø, E., & Tønnessen, E. S. (2014). *Multimodal tekstkompetanse*. Portal

Maxwell, J. (2013). *Qualitative research design: An interactive approach* (3. utg.) Sage Publications.

Mercer, N. (1995). *The guided construction of knowledge: talk amongst teachers and learners*. Clevedon: Multilingual Matters.

Mercer, N. & Howe, C. (2012). Explaining the dialogic process of teaching and learning: The value and potential of sociocultural theory. *Leraning, Culture and Social Interaction.* (1) 12-21. https://doi.org/10.1016/j.lcsi.2012.03.001

Mercer, N. & Littleton, K. (2007). *Dialogue and the Development of Children's Thinking.* Routledge. https://doi.org/10.4324/9780203946657

Minner, D. D., Levy, A. J. & Century, J. (2010). Inquiry-based science instruction-what is it and does it matter? Results from a research synthesis years 1984 to 2002. *Journal of Research in Science Teaching, 47*(4), 474–496. https://doi.org/10.1002/tea.20347

National Research Council. (2000). *Inquiry and the national science standards.* National Academy Press.

Norstein, A. (2018). Bruk av GeoGebra til utforsking i matematikkfaget. I A. Norstein & F. O. Haara (Red.) *Matematikkundervisning i en digital verden.* Cappelen Damm Akademisk.

NOU 2015: 8. (2015). *Fremtidens skole: fornyelse av fag og kompetanser – utredninger fra et utvalg oppnevnt ved kongelig resolusjon.* Kunnskapsdepartementet

Pólya, G. (1957). *How to solve it: A new aspect of mathematical method* (2. utg.). Doubleday.

Posamentier, A. S. & Krulik, S. (2015). *Problem-solving strategies in mathematics: from common approaches to exemplary strategies:* Vol. 1. World Scientific.

Rasmussen, I. & Lund, A. (2015). Læringsressurser og lærerrollen – et partnerskap i endring?. *Acta Didactica Norge*, *9*(1), 1-20. https://doi.org/10.5617/adno.2352

Selwyn, N. (2010). Looking beyond learning: notes towards the critical study of educational technology. *Journal of Computer Assisted Learning, 26*(1), 65–73. https://doi.org/10.1111/j.1365-2729.2009.00338.x

Silverman, D. (2014). *Interpreting qualitative data* (5. utg.). Sage Publications.

Skovsmose, O. (1998). Undersøgelseslandskaber. I T. Dalvang, & V. Rohde, *Matematikk for alle : LAMIS 1. sommerkurs, Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet (NTNU), Trondheim 6.-9. august 1998* (s. 24-37). Landås: Landslaget for matematikk i skolen

Spurkland, S. & Blikstad-Balas, M. (2016). Digitaliseringen av skolen: De største utfordringene. *Bedre skole* (2), 29-33. https://www.utdanningsnytt.no/files/2019/06/27/Bedre%20Skole%202%202016.pdf

Stertlien, Å. (2002). ”Nå må alle tenke litt, og så spør jeg en» - analyse av interaksjonen i en matematikktime. I. Bråten (Red.), *Læring i sosialt, kognitivt og sosialt-kognitivt perspektiv* (s. 58-73). Cappelen Akademisk Forlag.

Storz, M. & Hoffman, A. (2013). Examining Response to a One-to-One Computer Initiative: Student and Teacher Voices. *RMLE Online, 36*, 1-18. https://doi.org/10.1080/19404476.2013.11462099

Säljö, R. (2001). *Læring i praksis: Et sosiokulturelt perspektiv*. Cappelen Akademisk Forlag.

Säljö, R. (2002). Læring, kunnskap og sosiokulturell utvikling: Mennesket og dets redskaper. I I. Bråten (Red.), *Læring i sosialt, kognitivt og sosialt-kognitivt perspektiv* (s. 31-57). Cappelen Akademisk Forlag.

Säljö, R. (2010). Digital tools and challenges to institutional traditions of learning: Technologies, social memory and the performative nature of learning. *Journal of Computer Assisted Learning, 26*, 53–64. https://doi.org/10.1111/j.1365-2729.2009.00341.x

Thagaard, T. (2009). *Systematikk og innlevelse: en innføring i kvalitative metoder* (3. utg.). Fagbokforlaget.

Thagaard, T. (2018). *Systematikk og innlevelse: en innføring i kvalitative metoder* (5. utg.). Fagbokforlaget.

Tjora, A. H. (2017). *Kvalitative forskningsmetoder i praksis* (3. utg.). Gyldendal akademisk.

Utdanningsdirektoratet (2019). *Læreplan i matematikk 1.-10. trinn.* https://data.udir.no/kl06/v201906/laereplaner-lk20/MAT01-05.pdf?lang=nob

van der Meij, J. & de Jong, T. (2006). Supporting students' learning with multiple representations in a dynamic simulation-based learning environment. *Learning and Instruction*, 16, 199–212. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2006.03.007

Varier, D., Dumke, E. K., Abrams, L. M., Conklin, S. B., Barnes, J. S. & Hoover, N. R. (2017). Potential of one-to-one technologies in the classroom: teachers and students weigh in. *Educational Technology Research and Development, 65*(4), 967-992. https://doi.org/10.1007/s11423-017-9509-2

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society: the development of higher psychological processes*. Harvard University Press.

Vygotsky, L. S., Roster, M. T., Bielenberg, T.-J., Skodvin, A. & Kozulin, A. (2001). *Tenkning og tale*. Gyldendal akademisk.

White, T. & Pea, R. (2011). Distributed by design: On the promises and pitfalls of collaborative learning with multiple representations. *Journal of the Learning Sciences, 20*(3), 489–547. https://doi.org/10.1080/10508406.2010.542700

Wæge, K. (2007). *Elevenes motivasjon for å lære matematikk og undersøkende matematikkundervisning*. Fakultet for informasjonsteknologi, matematikk og elektroteknikk. http://hdl.handle.net/11250/258129

Yackel, E. & Cobb, P. (1996). Sociomathematical Norms, Argumentation, and Autonomy in Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 27* (4), 458-477. https://doi.org/10.2307/749877

Yin, R. K. (2014). *Case Study Research: Design and Methods*. SAGE Publications.

Yin, R. K. (2018). *Case Study Research and Applications: Design and Methods* (6. utg.). SAGE Publications.

Liste over figurer og tabeller

Figurer

Tabeller

Vedlegg

Vedlegg 1: Oppgavebeskrivelser

Rød løype: Funksjoner og muntlighet

Oppgave 1: Løping og måling

Praktisk oppgave:
Skritt opp 100 meter så nøyaktig som mulig uten målbånd. Den ene skal deretter løpe 100 meter så fort han/hun kan. Den andre tar tiden.

Utstyr:
Stoppeklokke (iPad), blyant og papir

Oppgave 1.1:
Regn ut hvor mange meter du løp per sekund (m/s) i gjennomsnitt. Forklar hvordan dere tenker.

Oppgave 1.2
Sammenhengen mellom fartsenhetene m/s og km/t er lineær. 1 m/s = 3,6 km/t.
Lag et funksjonsuttrykk som viser denne sammenhengen. Forklar hvordan dere tenker.

Oppgave 1.3
Skriv funksjonsuttrykket fra forrige oppgave inn i Geogebra og lag et oversiktlig og ryddig grafikkfelt. Bruk Geogebra til å finne ut hvor fort du løp 100 meteren målt i km/t.

Oppgave 1.4
Verdensrekorden på 100 meter løping tilhører Usain Bolt. Rekorden er 9,58 sekunder. Det vil si at gjennomsnittsfarten hans på 100 meter er 37,58 km/t. Bruk geogebra til å finne ut hvor mange meter per sekund det tilsvarer.

Oppgave 1.5

Et maraton er et 42 195 meter langt løpt. Den offisielle verdensrekorden er 2:01:39 og ble satt av Kipchoge i 2018. **Det gir en snittfart på 21,1 km/t.**
Fredrik har løpt flere maraton og har en personlig maratonrekord på 3:31:00. **Det betyr en snittfart på 11,9 km/t.**
Snart er det tid for Berlin Marton og Fredrik utfordrer Kipchoge til en duell via sosiale medier. *«Jeg tror jeg kan komme først i mål hvis jeg får starte 16 kilometer foran og målet er når du har løpt et maraton».* (Vi regner med at begge holder sin personlige gjennomsnittlige rekordfart på maraton).

a) Lag to funksjonsuttrykk som uttrykker Fredriks og Kipchoges sammenheng mellom tid i timer brukt og avstand i kilometer løpt.
b) Skriv funksjonsuttrykkene inn i GeoGebra. Fokuser på et ryddig og oversiktlig grafikkfelt.
c) Klare Fredrik å slå Kipchoge? Bruk grafene til å fortelle om hva som skjer underveis i duellen.

Oppgave 2:

Vi nærmer oss sommeren og dere har ønske om å kjøpe båt.
Dessverre fikk dere ikke banklån, og dere har **ingen** penger.
Heldigvis kan dere låne av foreldrene (renteløst, digg) deres.
Båten koster **18000kr** og dere avtaler å betale tilbake **1200kr** i **uken**.

Oppgave 2.1

Finn funksjonen som beskriver nedbetalingen av lånet.
Tips: se på sammenhengen mellom nedbetaling av lån og antall uker.

Oppgave 2.2

Dere ønsker å sjekke hvor mye dere har igjen av lånet etter tre **valgfrie** uker.
Sett opp en verditabell som viser dette på en ryddig måte.

Oppgave 2.3

Bruk de tre punktene dere fant i forrige oppgave til å tegne funksjonen i Geogebra
Husk at det er viktig med et ryddig grafikkfelt.

Oppgave 2.4

a) Når er lånet **nedbetalt?** Bruk grafen du har laget til å markere når du mener dere er gjeldfri.

Det kan hende at dere har merket at grafen har en litt annen retning enn vi har jobbet med tidligere.

b) Hva slags betydning har stigningstallet i denne oppgaven?
c) Hva slags betydning har konstantleddet i denne oppgaven?

Oppgave 2.6

Nå har dere sett på muligheten for å bli gjeldsfri kjappere.
Men i stedet har dere meldt dere på en konkurranse som krever at dere har team-skjorter til dere selv og fanklubben dere.

a) Det første tilbudet dere får er fra «Haug Print Service» 250 kroner per skjorte.
b) Et annet tilbud er fra «Andersen Topp Print» og har en startkostnad på 700 kroner. Hver skjorte koster 180 kroner.
c) Bruk informasjonen over til å komme frem til to funksjonsuttrykk som dere tegner i GeoGebra. Husk å lage et ryddig grafikkfelt.

Oppgave 2.7

Nå sitter dere igjen med en god oversikt i GeoGebra.

a) Bruk funksjonene til å bestemme dere for hvilket tilbud dere skal gå for. Hvorfor velger dere dette tilbudet?
b) Hvor mange skjorter må dere kjøpe for at «Andersen Topp Print skal lønne seg»? Bruk GeoGebra til å vise.

Vedlegge 2: Vurderingskriterier

Vurderingskriterier: Funksjoner, muntlighet og praktiske situasjoner

Læringsmål	Høy	Middels	Lav
Kan bruke formler og funksjoner for å regne: ❑ Kan lage og forstå formler fra tekst og praktiske oppgaver. ❑ Kan lage funksjonsuttrykk, verditabell, koordinatpunkter og graf. **Geogebra/koordinatsystem i bok:** ❑ Kan bruke Geogebra og arbeidsbok som hjelpeverktøy til å tegne graf til funksjonsuttrykk: ❑ navn på x- og y- akse, og funksjonsuttrykk i grafikkfeltet. ❑ vise ulike skjæringspunkt i graf ❑ vise løsningen på en god måte ved hjelp av graf.	Dette kan du, fortsett slik	Bra, men kan bli enda bedre.	Kan litt, øv mer.
Kan forklare begreper og sammenhenger rundt funksjoner: ❑ Gjenkjenne og bruke funksjoner til å beskrive eksempler fra virkeligheten: ❑ Lineære funksjoner ❑ Proporsjonale funksjoner ❑ Kan gjenkjenne stigningstall og konstantledd, og bruke dette til å tegne en graf. ❑ Kan bruke stigningstall og konstantledd til å beskrive ulike praktiske situasjoner.			
Føring av oppgaver/presentasjon: • Viser klart og oversiktlig alle framgangsmåter og presenterer løsninger ved hjelp av et klart matematisk formspråk. Bruker nøkkelinformasjon. • Svarer presist på det oppgavene spør etter • Kan bruke presise fagbegreper på en naturlig måte i forklaringer.			

Vedlegg 3: Transkriberingens konvensasjoner

.,	Punktum og komma er tatt i bruk for å gjøre teksten lesbar
(tekst)	Enkel parentes brukes for å informere om konteksten
((tekst))	Brukes for å beskrive en aktivitet
(0.0)	Pause i ytring
-	Avbrutt ytring