TELEMARKS FORSKING

NOTODDEN

Reidar Mosvold

"Genetisk" - Begrepsforvirring eller begrepsavklaring?

Rapport 10/02
Telemarksforsking Notodden
August 2002

Forord

Denne artikkelen er i hovedsak en oversatt og bearbeidet utgave av Gert Schubrings artikkel: *Historische Begriffsentwicklung und Lernprozess aus der Sicht neuerer mathematikdidaktischer Konzeptionen (Fehler, "Obstacles", Transposition)* utgitt i Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 20/4 1988. I tillegg kommer en liten innledende artikkel, der jeg forsøker å klargjøre noen av de viktigste begrepene i artikkelen. Begge disse artiklene ble sendt inn til NOMAD i 2000 som én artikkel. På grunn av den redaksjonsmessige situasjonen i NOMAD har ikke tidsskriftet gitt ut noen nye nummer årene 2001 & 2002, og artikkelen er derfor ikke blitt publisert ennå.

Det genetiske prinsipp blir ofte misforstått, og ofte fokuseres det bare på den historisk-genetiske siden av prinsippet. Kanskje kan en ikke engang snakke om "ett prinsipp" i bestemt form, idet det i virkeligheten dreier seg om flere prinsipper som alle bruker merkelappen "genetisk". Litt av dette forsøker jeg å forklare her. Nærmere forklaring og utdyping av dette finnes i min hovedfagsoppgave, "Det genetiske prinsipp i matematikkdidaktikk" fra HiA, 2001.

Jeg vil gjerne takke Gert Schubring for nyttige samtaler og e-post. Han har tidligere sørget for utgivelser av sin artikkel på gresk og på portugisisk, foruten den tyske originalversjonen, og nå ønsker vi å gi ut en norsk versjon. Artikkelen er oversatt og forkortet i overensstemmelse med Schubring, og når vi nå ønsker å publisere den her, er det først og fremst ut fra et ønske om at emnet den tar opp skal bli bedre kjent i Norge.

Innhold

"Genetisk" - Begrepsforvirring eller begrepsavklaring?

Sammendrag

I flere år har matematikkdidaktikere vært opptatt av hvordan en kan bruke matematikkens historie for å lage bedre undervisning i matematikk. Mange har nøyd seg med å bruke den for å øke motivasjonen hos elevene. Denne artikkelen tar for seg et syn på historien som går utover dette. Schubring tar utgangspunkt i det genetiske prinsipp som undervisningsmetode og beveger seg over i forskning omkring elevfeil. Han ser på såkalte epistemologiske hindringer, som blir en måte å bruke matematikkens historie for å oppdage og unngå typiske feilmønstre hos elevene. Slik kan en altså gjennom kunnskaper om de matematiske begrepenes historiske utvikling lage bedre undervisning i matematikk. Mot slutten av artikkelen gjør han også en tilnærming til sosial-konstruktivismen. Før denne oversettelsen finner du en innledning til presisering av begrepet genetisk - genesis.

De siste årene har matematikkens historie kommet inn i de ulike fagplanene i de nordiske land. Det genetiske prinsipp trekkes ofte fram i denne sammenhengen. Når ordet "genetisk" blir brukt i didaktikken eller i psykologien må en være på vakt. Begrepet blir brukt i mange ulike sammenhenger, og det er ikke sikkert at de som bruker det, er klar over det. Vi støter på "biogenetisk lov", "genetisk epistemologi", "genetisk prinsipp", "genetisk metode" og tilsvarende begreper. Det er viktig å skille disse fra hverandre, for de betyr ikke nødvendigvis det samme. Mange synes å tro at "genetisk" har med biologi å gjøre. I denne sammenhengen er det riktigere å tenke på det greske ordet "genesis", som betyr tilblivelse.

Når teoretikere som Leo Rogers kritiserer den biogenetiske lov eller Piagets genetiske epistemologi (Rogers 1999), betyr ikke dette nødvendigvis at de samtidig kritiserer det genetiske prinsipp som didaktisk prinsipp, slik blant andre Gert Schubring framstiller det. Han trekker her linjene tilbake til 1600-tallet, til Francis Bacon og Comenius (Schubring 1978). Rogers hevder at der er et skarpt skille mellom biogenetisk lov og Piagets modifisering av denne for psykologien på den ene siden, og det genetiske prinsipp som didaktisk teori på den andre.

Den biogenetiske lov stammer fra biologen Ernst Haeckels berømte og beryktede formular fra 1860/1874: "Ontogeny recapitulates phylogeny". Han mente at mennesket gjennomlevde stadiene i menneskehetens utvikling, en teori som senere fikk sin parallell i psykologien. Her sa en at *individets* kognitive utvikling gjenspeilet *menneskehetens* utvikling. Piagets genetiske epistemologi beskriver stadier i individets kognitive utvikling og stadier i menneskehetens utvikling, og den forsøker å avdekke de mekanismene som er felles for overgangen mellom stadiene (Piaget og Garcia 1989). Ontogenesen beskriver hos Haeckel den embryologiske utviklingen til et individ av en eller annen art. Vi sier for enkelthets skyld at det i vårt tilfelle dreier seg om utviklingen til det enkelte menneske, mens phylogenesen tar for seg utviklingen av menneskeheten i sin helhet. Når Piaget snakker om psykogenese, refererer han til individets psykologiske utvikling, eller den psykologiske delen av ontogenesen.

Når Schubring og andre snakker om det genetiske prinsipp som didaktisk metode, stiller de ide- og begrepsutviklingen i sentrum av matematikkdidaktikken. De ønsker da å se på læring og undervisning i matematikk i et utviklingsperspektiv, og de ser da på tilblivelsen til de matematiske begrepene i læreprosessen.

Dette er likevel ikke en endelig og kanskje heller ikke en riktig inndeling av begrepene. Piagets endelige utforming av den genetiske epistemologi avviser nemlig paralleller i innhold mellom den historiske utviklingen i matematikken og barnets individuelle utvikling av matematiske begreper. Dessuten beskriver Schubring den biogenetiske lov som bakgrunn for de didaktiske teoriene i den historiske utviklingen av det genetiske prinsipp. For å gjøre forvirringen komplett, kan vi nevne at Schubring selv skiller mellom en psykologisk-genetisk og en historisk-genetisk metode. Den psykologisk-genetiske metoden retter seg mot de naturlige erkjennelsesteoretiske prosesser til skapelsen og anvendelsen av matematikk. De to metodene har en slags bestemt arbeidsfordeling. Den historisk-genetiske er på et slags metanivå, der den ser på læringsforløpet i forhold til den historiske utviklingen av vitenskapen. På den andre siden dreier den psykologisk-genetiske metoden seg om det som skjer metodologisk i den enkelte undervisningstimen, altså på et mikronivå (Schubring 1978, s. 186ff.).

I tittelen på min hovedfagsoppgave har jeg valgt å bruke begrepet "det genetiske prinsipp", og jeg ser på dette som det mest generelle og vide begrepet i denne sammenheng. Den biogenetiske lov har egentlig sin opprinnelse i naturvitenskapen, men den har også fått avarter i psykologisk og didaktisk teori. Piagets genetiske epistemologi er en reaksjon på den mest simplistiske psykologiske versjonen av rekapitulasjon. Han beskriver psykogenesen gjennom felles mekanismer, og ikke gjennom en teori om parallellisme, som mange synes å mene. Schubring beskriver utviklingen av de avartene den biogenetiske lov har fått i didaktisk teori, men det betyr ikke nødvendigvis at en genetisk metode i matematikkdidaktikken trenger å være avhengig av en tro på den biogenetiske lov. Også Vygotsky legger stor vekt på den sosiale og kulturelle genesis i utviklingen av kunnskap både hos menneskeheten og hos individet (se f.eks. Bekken 2000).

Artikkelen nedenfor gir en sentral oversikt over dette emnet. Selv om artikkelen er noen år gammel, gir den en aktuell framstilling av de sentrale problemstillingene innenfor dette feltet av matematikkdidaktikken. Artikkelen ble opprinnelig skrevet på tysk (Schubring 1988), for siden å bli oversatt til gresk (1990) og portugisisk (Schubring 1998). Da jeg finner denne artikkelen så viktig, har jeg laget en norsk oversettelse og bearbeidelse her.

Referanser:

Bekken, O. (2000). Algebraens utvikling i kultur- og skoleperspektiv. In Selvik, B.K. et al (red.). *Matematikk i samfunnsmessig, historisk og kulturelt perspektiv*. Bergen: Høgskolen i Bergen, Skriftserien Rapport nr. 2/2000, pp. 85-104

Haeckel, E. (1912). *The evolution of man.* London: Watts & Co. (First edition: 1874).

Mosvold, Reidar (2001) *Det genetiske prinsipp i matematikkdidaktikk*, Høgskolen i Agder (hovedfagsoppgave)

Piaget, J. & Garcia, R. (1989). *Psychogenesis and the history of science*. New York: Columbia University Press.

Rogers, L. (1999). *The biogenetic law and its influence on theories of learning mathematics*. London: Roehampton Institute.

Schubring, G. (1978). *Das genetische Prinzip in der Mathematik-Didaktik*. Bielefeld: Klett-Cotta

Schubring, G. (1988). Historische Begriffsentwicklung und Lernprozess aus der Sicht neuerer mathematikdidaktischer Konzeptionen (Fehler, "Obstacles", Transposition). *Zeitschrift für Didaktik der Mathematik 4*, pp. 138-148.

Schubring, G. (1998). Desenvolvimento histórico do conceito e do processo de aprendizagem, a partir de recentes concepcoes matemático-didáticas (erro, obstáculos, transposicao). *Zetetiké 6 (10).*

Historisk begrepsutvikling og relasjonen til læringsprosessen fra nyere matematikkdidaktisk synsvinkel (feil, hindringer, transposisjoner)

av
Gert Schubring, IDM - Bielefeld

Oversatt, bearbeidet og forkortet av Reidar Mosvold

*** * ***

Tradisjonelt har matematikkens historie blitt brukt som en motiverende faktor i undervisningen. Målet med denne artikkelen er å diskutere den funksjonen matematikkens historie kan ha som grunnlag for utviklingen av teori i matematikkdidaktikk. Det er en sammenheng mellom matematikkens historiske utvikling og læringsteorier i matematikk, og det er denne sammenhengen som blir undersøkt og presentert i denne artikkelen.

1. Innføring

Den kjente matematikeren R. L. Wilder publiserte i 1972 artikkelen "History in the Mathematics Curriculum". Framfor alt anbefaler han her matematikkens historie som et middel for å øke motivasjonen og til å skape et personlig meningsinnhold. Wilder understreker her et skille mellom teknikk og kultur i matematikken.

Matematikkens historie som motivasjonsfaktor har et svakt punkt. En forutsetter nemlig at en historisk tilnærming virkelig vekker interesse. Det blir altså en forutsetning at historiske spørsmål i det hele tatt har verdi i vår kultur. Det er kanskje tvilsomt om dette gjelder for dagens elever slik som det var før.

En enda viktigere innvending er at matematikere flest mener at historien ikke har noen produktiv funksjon i vitenskapsmatematikken. Motivert av en slik filosofi, vektlegger dagens matematikk det rasjonelle og logiske. Spørsmål og utviklingstrinn blir bearbeidet og besvart, men det historiske ved dem er blitt bortgjemt i dagens vitenskap.

2. Toeplitz genetiske metode

I sin kalkulusbok tok Otto Toeplitz i bruk den såkalte "genetiske metode", som er den mest kjente metoden for bruk av historie i undervisningen. I et berømt foredrag i 1927, tar han for seg spørsmål om årsak og tilblivelse, og han slår fast:

> *Hvis man går tilbake til begrepenes røtter, vil støvet fra tidens tann falle fra dem, og de vil igjen framstå som levende vesener. Enten kan man føre elevene direkte fram til oppdagelsen i sin fulle dramatikk. På denne måten vil spørsmålsstillingene, begrepene og fakta framstå klart. Dette vil jeg kalle* ***den direkte genetiske metode****. Eller man kan selv lære fra en slik historisk analyse hva meningen og kjernen bak hvert begrep er. Man kan så trekke følger for læringen av dette begrepet, følger som ikke vil ha noe med historien å gjøre. Dette vil jeg kalle* ***den indirekte genetiske metode****. (Toeplitz 1927, p. 92f.)*

Motivasjonsfunksjonen finner vi igjen i *den direkte genetiske metode*, men det er *den indirekte* som er den mest interessante for han. Toeplitz' oppfatninger og konkretiseringer, viser at forståelsen av et begrep avhenger av formidlingen av kunnskap omkring dette begrepet. Det dreier seg altså om kunnskap om kunnskapen.

Toeplitz' indirekte genetiske metode bygger opp utviklingen av metakunnskap hos studentene (sml. Schubring 1978, p.256). Han setter historien inn i en produktiv funksjon, og ikke bare en ytre ramme:

> *Det handler ikke om historie, men snarere om tilblivelsen til problemene, løsningene og bevisene, og om de avgjørende vendepunktene i denne tilblivelsen" (Toeplitz 1927, p. 94)*

Når det gjelder den uendelige prosess og tallbegrepet, går imidlertid Toeplitz ut fra at det meste ble oppnådd allerede med grekerne. Siden ble dette bare utviklet videre i formen. Han slutter seg til Lipschitz, som hevdet at det viktigste forelå allerede med Eudoxos. Derimot mente Dedekind at det var en grunnleggende forskjell i utviklingen av disse begrepene. Særlig viste han til at begrepet kompletthet manglet hos grekerne, og dette begrepet kunne heller ikke bli tatt implisitt fra geometrien.

Toeplitz mente altså at matematikkens historie her ikke viste noen kvalitativ utvikling, men snarere var en kontinuerlig prosess. Toeplitz så på historien som en uuttømmelig kilde til lærdom for den didaktiske metodikken. Utviklingen av begreper tar en myk overgang fra det enkle til det sammensatte. Dette omformet han deretter til en slags metodisk pekefinger for undervisningen (Toeplitz 1927, p. 95).

Det blir altså et sentralt problem å bruke matematikkhistorien i en tilmålt oppfatning av utviklingen. Andre vitenskaper er blitt analysert, og det er der anerkjent at det har foregått en begrepsutvikling. Bare i matematikken ser det ut som en vil holde en slik utvikling skjult. .

Et eksempel på denne ekstreme holdningen ser vi hos den franske filosofen Gaston Bachelard. Han har gitt en nøyaktig beskrivelse av begrepsmessige brudd og hindringer i naturvitenskapene. Matematikken holdt han utenfor denne analysen:

> *"Matematikkens historie er et underverk av regelmessighet. Den kjenner perioder med stillstand. Den kjenner derimot ingen perioder med feilslutninger."*

3. Nye oppfatninger i matematikkhistorien.

I flere år nå har det heldigvis vært betydelige forandringer. Forholdet mellom forskning og læring, og også undervisning, blir i dag mer verdsatt. Tradisjonelt er vitenskapen blitt oppfattet som den aktivt givende siden, mens didaktikken er den passivt mottakende. Willem Kuyk beskrev i 1978 dette med det malende bildet av stalagtitter versus stalagmitter. Undervisning kan ikke bare bli forstått som en stalagmitt, for den utvikler seg jo ikke bare fordi vitenskapen som stalagtitten, drypper noen dråper ned på den (Schubring 1981, p. 32).

Den nye vurderingen av forholdet mellom forskning og undervisning åpner også for en annen oppfatning av utviklingen. På slutten av 1700-tallet satte matematikken krav til allmenn lærbarhet. Ikke bare gjaldt dette med tanke på stringens, og gale utsagn som hittil var blitt oppfattet som sanne, men disse nye standardene gav også forskningen nye impulser og retninger:

> *"Karakteristisk nok kom analysen til vesentlig takket være matematikere som sto sterkt oppe i undervisningen" (Wussing 1974, p. XVIII).*

Min forskning omkring utviklingen av matematikken i Preussen har vist at yrket som matematikklærer ved høgere skoler tjente som basis også for utviklingen av innholdet i den rene matematikken (sml. Schubring 1983). Gymnaslærerne i Preussen ble ansett som lærde, og de var i stor grad med på en klargjøring av matematikkens grunnlag (Schubring 1986c).

Disse forholdene er relativt nye for matematikkhistorien, og har betydning for ens oppfatning av utviklingen:

- de viser at undervisning og læring har hatt innflytelse på utviklingen av vitenskapen, og en må ta hensyn til denne dimensjonen for å forstå matematikkhistorien
- brudd og nye forhold i matematikkens historie har i stor grad kommet av epistemologiske forandringer, forandringer i vitenskapssystemets kontekst.
- didaktisk orienterte analyser av utviklingen gir hjelpemidler til selv å kunne undersøke utviklingsprosessen nærmere.

For å forklare de to siste punktene nærmere diskuterer jeg her to teorier som har vunnet stor anerkjennelse i matematikkdidaktikken som teoretiske tilnærmelser til analysen av det subjektive. Deretter vil jeg anvende disse to teoriene i analysen av historiske begrepsområder. Det dreier seg her om teoriene om feilslutninger og hindringer.

4. Elevfeil

De siste tyve år har elevfeil utgjort en viktig del av forskningen både i tysk og amerikansk didaktikk. Det er blitt en stadig vanligere oppfatning at feil ikke bare er mangel på evner, uoppmerksomhet el. Derfor kan heller ikke feilene bli fjernet bare ved gjentakelse eller økt oppmerksomhet. Radatz sammenfattet i 1979 dette synet på feilforskningen:

"Feilslutninger hos elevene oppstår ikke overveiende på grunn av usikkerhet, likegyldighet eller engangstilfeller, slik man antok i starten av den behavioristiske undervisningsteorien. Elevfeil kommer i langt større grad som resultat av tidligere erfaringer i matematikkundervisningen. Fra feilforskningen kan en slå fast at elevfeil:

- *er årsaksbestemte og ofte svært systematiske,*
- *kan vare i flere skoleår, dersom ikke læreren foretar nødvendige pedagogiske tilpasninger,*
- *er mulig å beskrive og analysere som feilteknikker,*
- *i sin årsak kan la seg føre tilbake til bestemte vanskeligheter hos eleven i informasjonsopptaket og bearbeidelsen i den matematiske læreprosessen eller til defekter i undervisningens virksomme variable (lærer, læreplan, elev, omgivelsene). Elevfeil er "bilder" av individuelle vanskeligheter (Radatz 1979, p. 57).*

Det er viktig å ikke stemple elevenes tankeprosesser som "defekte". Enda viktigere er det å utforske tankestrategiene til elevene. Dette kommer klart fram i et arbeid av H. D. Gerster, hvor han som resultat av omfangsrike undersøkelser av elevfeil slår fast (Gerster 1984):

"Bestemte oppgavetyper (bestemte krav til stoff) utløser bestemte feilmønster hos enkelte elever. Slike feilmønster skyldes ofte tilsvarende hull i undervisningen - såvel i lærebøkene som i framstillingen gitt av læreren" (Gerster 1984, p. 56).

Selve kunnskapen kan også inneholde saklige uklarheter eller epistemologiske problemer. Karl Menger viste i 1950-årene til flere slike feilkilder i matematikken i artiklene "Why Johnny hates math", "Gulliver in the Land without One, Two, Three" og "Gulliver in Applyland". Problemområder som han diskuterer, er: Det manglende skillet mellom funksjon og funksjonsverdi, sammenblandingen av variabelbegrepets ulike betydninger, uoppklarte forhold mellom tall og størrelser. Han vant ikke fram verken i vitenskapen eller i didaktikken.

Det kan nettopp være denne dimensjonen av uoppklarte interne eller epistemologiske problemer som påvirker læringen. I forhold til forskningskunnskapen, er skolekunnskapen på en sterkere måte satt sammen av den historiske utviklingen. En fornuftig bruk av historie i didaktikken blir derfor å analysere slike saklige eller epistemologiske problemer ved den matematiske kunnskapen, slike problemer som ofte utløser feil hos elevene.

5. Hindringer

Begrepet "obstacles épistémologiques" ble innført av den franske filosofen Gaston Bachelard i 1936. Bachelards skjema er blitt videre utviklet av Guy Brousseau til en allmenn teori om hindringer. Denne teorien skiller mellom tre ulike hindringer for læring:

- *ontogenetiske* hindringer (Brousseau forklarer dette som begrensninger i individets mentale utvikling, for eksempel av nevrofysiologisk art, han viser til Piagets stadieteori)
- *didaktiske eller didaktogene* hindringer (som stammer fra undervisningen, læreplanen e.l.)
- *epistemologiske* hindringer (har sitt grunnlag i den matematiske kunnskapens natur, og ifølge Brousseau er de derfor uungåelige. Siden de er mulige å identifisere i begrepshistorien, er de grunnleggende for den nåværende kunnskapen) (Brousseau 1983, p. 176 ff.).

Brousseau unngår bevisst å formulere regler for undervisning. Årsaken er at det fins så få historiske eksempelstudier om hvordan epistemologiske hindringer virker på begrepsutvikling. Han advarer imidlertid mot å anvende den biogenetiske parallellen (Brousseau 1983, p. 194, sml. Schubring 1978, p. 192 ff.).

Den videre utfordringen er å finne detaljerte rekonstruksjoner av den historiske utviklingen av begrepene. Detaljert betyr her at det ikke bare dreier seg om å framstille bidragene til de "store", men også å formidle kontroversene i sin fullstendige sammenheng. En slik framstilling er nødvendig for å kunne forstå begrepsinnholdet eller rekkevidden av problemløsninger og de epistemologiene som ligger til grunn. Ett eksempel på en slik rekonstruksjon er studien til Lakatos (Lakatos 1976).

I kjølvannet av Brousseaus program har vi fått noen studier som har undersøkt hindringer for læring under et slikt perspektiv som skissert. I denne sammenheng ønsker jeg å nevne to. Den første er en avhandling om læring av grensebegrepet i kalkulus av Bernhard Cornu (Cornu 1983). Den andre er et arbeid av Colette Laborde (Laborde 1985), der hun tar opp elevers oppfatninger av geometriske grunnbegreper, som punkt, linje og lengde. Begge studiene finner igjen elementer til løsninger, som er blitt gitt av matematikere i historien, i svarene til dagens elever. Hos begge kan vi kjenne igjen en oppfatning av at utviklingen av begrepene som en vei fra det empiriske til det abstrakte kan sammenlignes med den intellektuelle utviklingen hos elevene.

Jeg skal nå legge fram noen resultater av en egen studie av historien om de negative tall, en studie som er svært omfangsrik (sml. Schubring 1986a). For meg dreide det seg om å undersøke om en ved å benytte de negative tall slik som Vieta og Stevin, virkelig kan snakke om en problemfri anerkjennelse av disse tallene. Jeg har analysert den status de hadde på slutten av 1700-tallet i de tre land som da hadde de største matematiske miljøene.

Kildematerialet var lærebøker i aritmetikk og algebra, og i tillegg noen monografier og tidsskriftartikler. Jeg fant en omfangsrik og intensiv debatt omkring statusen til negative tall, men jeg fant også helt klare nasjonale forskjeller når det gjaldt disse tallene som matematisk begrep. Holdningen varierte fra en ganske klar avvisning i England, via en tosidig holdning i Frankrike, til en entydig anerkjennelse i Tyskland.

I grove trekk kan posisjonene karakteriseres slik: I England ble subtraksjonen begrenset til tilfeller som var "mulige å utføre". Subtrahenden fikk altså aldri være større enn minuenden. Det ble argumentert prinsipielt mot at andregradslikninger kunne ha to røtter, og at et tall kunne ha to kvadratrøtter.

I Tyskland hadde man ingen betenkeligheter med å utvikle abstrakte begreper uten materiell substans. Det fantes en filosofi som støttet opp om dette. Det var utviklet en egen grunnleggende teori, kalt "læren om motsatte størrelser", som var avledet fra filosofien. Her bestemte man betingelsene for at størrelser kunne oppheve hverandre. Ofte finner vi avsnitt om motsetninger generelt, før framstillingen av de aritmetiske grunnoperasjonene.

Filosofisk var det mulig at størrelser kunne være motsatte med hensyn til en kvalitet. På dette grunnlag innførte man et allment subtraksjonsbegrep. I tilknytning til dette utviklet det seg en grunnlagsdiskusjon i Tyskland, hvor det like før 1800 ble vist til det spesielle ved reglene for operasjoner med tall. Her skilte man klart mellom operasjonstegn og fortegnet til et tall. Det ble utviklet et begrepsmessig skille mellom det empiriske størrelsesbegrepet og det rene tallbegrepet. Förstemann kunne da i 1817 utvikle en formell matematisk teori om negative tall (Förstemann 1817).

Debatten i Frankrike er enda mer interessant. Omkring 1800 ble det et brudd i den relative anerkjennelsen av negative tall. Artikkelen "Négatif" av d'Alembert i den berømte Encyclopédie er typisk for denne dobbeltsidige holdningen. Her ble negative tall forkastet som løsninger av likninger. En slik isolert negativ løsning krevde en omformulering av oppgaven som lå til grunn for likningen. I en annen artikkel i den samme Encyclopédie blir derimot negative størrelser tillatt som likeverdige med de positive. De blir betegnet som "mindre enn ingenting". Denne forestillingen betegnet d'Alembert som absurd.

Etter 1800 fulgte en empirisk vending i fransk filosofi, en vending som ble overført til matematikken av Carnot. Han mente at algebraen ikke hadde noen selvstendig funksjon, at den kunne brukes til å oversette geometriske begreper og utsagn, men ikke til å abstrahere. Denne empirisk-geometriske bindingen av matematiske grunnbegrep satte inn omkring 1810. Den medvirket til at negative tall ikke lenger ble så akseptert som de hadde vært til da. Vi finner igjen dette bruddet i de ulike opplagene av lærebøkene til Lacroix i algebra. Også lærebøker for Ecole Polytechnique betegnet isolerte negative løsninger som absurde. En av de mest synlige virkningene av denne avvisningen i Frankrike, var det skarpe skillet mellom aritmetikk og algebra. Aritmetikken beskjeftiget seg utelukkende med positive tall, mens negative tall vant innpass i algebraen fra siste halvdel av 1800-tallet.

Her kan jeg bare antyde noen konklusjoner fra denne eksempelstudien. Den berømte tegnregelen (minus ganger minus gir pluss) var ikke noe problem i vitenskapsutviklingen. I populærlitteraturen vant denne regelen derimot innpass som et særlig mystisk emne. Den danner en didaktisk hindring. Lærerne la fram et bilde av matematikken som en vitenskap som kunne bevise alle sine utsagn. De har derfor stadig forsøkt å bevise tegnregelen.

I årene 1883-84 var det en svært opphisset debatt med tallrike bidrag i Zeitschrift für Mathematischen und Naturwissenschaftlichen Unterricht. Denne debatten oppsto da en ung lærer, som kom rett fra moderne høgskoleutdanning i aritmetikkens grunnlag, her framstilte den djerve tesen at tegnregelen ikke var mulig å bevise, men at den tvert i mot bare var en konvensjon. Med sterk motvilje måtte man til slutt bøye seg for dette faktum at regelen ikke kunne bevises. Tegnregelen som didaktisk hindring er riktignok en reell hindring for elevene.

Utover dette satte negative tall spørsmålstegn ved vesentlige elementer av matematikkens arkitektur og filosofi. Matematikken var til da blitt forstått som "vitenskapen om størrelser". Størrelsene var grunnbegreper, og de var anvendbare overalt. Elementene i størrelsesbegrepet var "diskrete størrelser" og "kontinuerlige størrelser".

Negative tall impliserte en annen og ikke-empirisk forståelse av matematikken. Her var ikke den materielle verden en direkte påvisbar realitet. Samtidig stilte det derimot også spørsmål ved den overleverte, enhetlige oppbyggingen av matematikken. Negative tall impliserte en overgang fra et allment størrelsesbegrep til et abstrakt tallbegrep. Dette abstrakte tallbegrepet kunne ikke lenger bli brukt som grunnlag for geometrien. Det oppstår derfor et motsetningsforhold mellom aritmetikk/algebra og geometri, som går på om den ene disiplinen skal bli forstått som overordnet den andre.

Epistemologiske faktorer er derfor viktige for utviklingen av matematikken. Begrepet negative tall hadde betydelige konsekvenser for andre områder av matematikken. Likevel kan ikke dette tas som belegg for effekten av hindringer i Bachelards betydning. Hos Bachelard har nemlig de epistemologiske hindringene en normativ karakter. De framstiller etapper i en utvikling mot et vitenskapelig herredømme over verden, en utvikling som er nødvendig for menneskeheten. Den som ikke mestrer en slik hindring, blir tilbakestående. Nå kan vi si at det enhetlige størrelsesbegrepet i Bachelards betydning var en "overilt allminneliggjøring". Enda viktigere er det at det ikke finnes noen felles menneskehet i Bachelards betydning. Begreper utvikler seg innenfor bestemte sosiale grupper og er påvirket av den kulturelle konteksten. Det fins derfor sjelden paralleller i begrepsutviklingen hos ulike kulturer.

Bachelard utelot matematikken fra sin analyse av framskritt fra feilslutninger til sannhet, og han erklærte matematikken fri for feilslutninger (Bachelard 1975, p. 25). Dette er begrunnet i hans normative standpunkt. I den franske rasjonalismens ånd forstår han nemlig vitenskapens utvikling som en utvikling mot matematikkens ideal om "entydighet". Matematikken blir da selve målestokken, og den kan derfor ikke ha del i de samme svakhetene i utviklingen som de andre vitenskapene.

6. Feil i matematikken?

Bachelards syn gir meg mulighet til en refleksjon omkring feil i matematikken som vitenskap. Det virket helt utenkelig innenfor matematikkens hverdagsfilosofi å innrømme muligheten for større feil i matematikkens historie. Tidligere ser det ut til at man hadde et avslappet forhold til dette spørsmålet. Gebhardt framhevet den metodologiske betydningen av feiltakelser i sin viktige avhandling om matematikkens historie i matematikkundervisningen.

> *"Med den historiske anvisning at også feiltakelsene og kontroversene har sin rolle og betydning i matematikken, forsvinner i stor grad den kløften som skiller den fra andre vitenskaper, og da også særlig fra naturvitenskapene"(Gebhardt 1912, p. 83).*

Derved forstår han blant feil:

> *"ikke de som kan snike seg inn hos enhver som beskjeftiger seg med matematikk, men de som er eiendommelige for en hel tidsalder, og som gir den et eget preg" (samme plass).*

I motsetning til Bachelard hevder altså Gebhardt at hele epoker kan være kjennetegnet ved feiltakelser. Som eksempel nevner han Leibniz sitt bevis for at rekka 1 -1 +1 -1 +1 ... har sum lik 1/2, et bevis som Euler førte videre.

I 1896 ble tidsskriftet "Kinderfehler" grunnlagt i Tyskland, et tidsskrift som undersøkte barns feil på en empirisk, pedagogisk måte. Vitenskapen ble heller ikke spart. E. Maillet var en av utgiverne av det franske tidsskriftet "L'intermédiaire des Mathématiciens". I 1904 oppfordret han til å meddele tidsskriftet om feil hos renommerte matematikere, for å utfordre til selvrefleksjon. Det som ble utgitt, utgjør en høyst interessant samling av feil. De ser ikke ut til å ha fått noen oppmerksomhet i den vitenskapelige eller didaktiske diskusjonen foreløpig. Denne samlingen ble publisert av Lecat (Lecat 1935). Samlingen nevner omkring 500 feil av 330 matematikere. Mange ukjente er representert her, men noen betydningsfulle matematikere er også nevnt. Etter Gebhardts oppfatning ville det være av stor betydning for lærerstudenters metakunnskap å "normalisere" bildet av matematikken gjennom matematikkens historie. Dette ville løse matematikken fra den teknologiske elitekulten.

Legendre publiserte fem ulike bevis for parallellaksiomet i de første tolv opplagene av sin Eléments de Géométrie fra 1794. I en avhandling for Académie des Sciences fra 1833 så Legendre tilbake på disse bevisene, og han betegnet bare to av dem som ikke-stringente. Mens andre altså ville ha vært lykkelige over ett eneste bevis, hevdet Legendre å råde over tre stringente bevis. Som om ikke det var nok føyde han også til tre nye bevis, altså til sammen seks bevis! De bevisene som kom i tillegg i 1833, benytter alle metoden for sammenlikning av uendelige flater, som ble utviklet i 1780-årene av Johann Schultz (sml. Schubring 1982a). På denne tiden var det i Frankrike en bemerkelsesverdig aksept for uendelige størrelser. Derfor kom det ingen større innvendinger (sml. Schubring 1986b).

7. - og et sosial-konstruktivistisk svar

Sammenhengen mellom feil hos elever og hos vitenskapsmenn som her er tematisert, skal bli noe videre konkretisert gjennom en tese som foreløpig har en noe spekulativ karakter.
Ifølge sosial-konstruktivismen kan ikke såkalte elevfeil lenger karakteriseres som "feil" når de følger de strategiene som er anerkjent i en sosial gruppe. Dette ligger implisitt i utviklingen av feilforskingen. En slik oppfatning gjelder også innen sosial-konstruktivismen slik den er blitt utviklet i matematikkdidaktikken, framfor alt av Bauersfeld, Krummheuer og Voigt (sml. Bauersfeld m.fl. 1983). Begrepene får her betydning og mening i den sosiale interaksjonen.

Ut fra de historiske bemerkningene som er gjort, framgår det at en slik objektivitet som ofte tilskrives matematikken, sjelden fins. Tvert i mot blir begreper til i en kulturell sammenheng og så videreutviklet i matematikken som vitenskap. Det fins et sosialt subjekt i matematikkens historie, nemlig det sosiale samfunn av matematikere som er preget av et bestemt kulturelt nettverk. Tesen lar seg prøve der hvor to kulturer med forskjellige kunnskapskonsepter møtes. Overføringen av matematisk kunnskap fra en kultur til en annen muliggjør altså eksempelstudier for sosial-konstruktivismen.

Det foreligger en eksempelstudie om overføringen av begrepet desimalbrøk fra den indiske til den arabiske matematikken (Abdeljaouad 1978). Denne studien synes å bekrefte min tese. De tallene vi kaller arabiske, stammer som kjent fra den indiske matematikken, i likhet med nullen og posisjonssystemet. Araberne benyttet derimot bokstavene i alfabetet til å betegne tall, akkurat som grekerne gjorde. Det eldre arabiske systemet går tilbake til det fønikiske systemet med tallbokstaver. Araberne brukte to ulike tradisjoner for brøker: de babylonske hexagesimalbrøkene og de egyptiske stambrøkene.

I blomstringsperioden til den arabiske vitenskapen, 7-900 - tallet fant ikke desimalbrøkene noen anerkjennelse. Al-Uqlidisis lærebok fra 952 framstilte disse, men den ble glemt og først gjenoppdaget i 1966 (Saidan 1966). Motstanden mot indisk matematikk var for sterk, noe som blir tydelig gjennom Al-Birunis strenge dom fra det 11. århundre:

> *"De greske filosofene framstilte objektene rent vitenskapelig i sine skrifter. Inderne derimot, frambragte nesten ikke en bok som ikke er en samling skrap, hvor alle populærvitenskaper blandes sammen. Autoritetsånden hersker hos dem. Deres bøker om regning og matematikk kan sammenlignes med potteskår som ligger blandet med perler strødd rundt i en haug med kamelmøkk" (sitert etter Abdeljaouad, p. 14).*

Både nullen og ett-tallet ble avvist som tall. Dette fordi tallene ble framstilt som multipler av enheten, og enheten selv ble ikke sett på som noe tall (samme sted, p. 15). Først i det 14. århundre slo de indiske tallene og desimalbrøkene gjennom hos araberne. Den eldre tradisjonen forble i bruk helt fram til slutten av 1800-tallet.

8. Didaktisk transposisjon

Elementariseringen av matematisk kunnskap utvikler studier av måten sosiale grupper produserer eller transformerer kunnskap. Fagdidaktikkens forskning på elementariseringen utgjør en av de eldste tradisjonene i matematikkdidaktikken. Likevel fins så vidt jeg vet, ingen teori for å begrunne dette, bortsett fra Lennés bok (Lenné 1969) som jo er skrevet med kritisk hensikt. Enda viktigere blir derfor den franske matematikkdidaktikeren Chevallard (1985).

Hans studie undersøker prosessen som omgjør vitenskapelig kunnskap til skolekunnskap. Den er derfor et ganske vesentlig bidrag, som grundig undersøker elementariseringen av kunnskap. Jeg skal bare komme med en kritisk anmerkning. Etter Chevallards oppfatning har vitenskapelig kunnskap en fortrinnlig funksjon. Den er kilden til ny kunnskap, og herfra går den over i andre sosiale former for kunnskap, som skolematematikken. En slik innskrenket, ensrettet modell er ikke forenlig med historiske mikrostudier av produksjon av kunnskap. I et gitt samfunn fins generelt flere støttegrupper til kunnskap. Disse er ofte avsperret fra hverandre, men de produserer og utbrer også ny kunnskap. Diffusjon og utforming av kunnskap avhenger av sosiale forhandlingsmekanismer. Gymnaslærerne i Preussen på 1800-tallet utgjorde f. eks. en slik kunnskapsproduserende støttegruppe (sml. Schubring 1983 og 1986c).

9. - et eksempel: den første skoleboka i mengdelære, sytti år før Bourbaki!

Mengdelære blir sett på som et standardeksempel på at vitenskapelige begreper trenger inn i skolen. Mens jeg forsket på utviklingen av skolematematikken på 1800-tallet, støtte jeg til min overraskelse på ei skolebok som ga den første oversettelsen av Cantors mengdelære, og som samtidig ga en radikalt ny oppbygging av aritmetikken og algebraen i skolen med basis i begrepene fra denne. Dette var sytti år før Bourbaki.

Det dreier seg om boka til Friedrich Meyer: "Elemente der Arithmetik und Algebra", Halle 1885. Meyer studerte i Breslau og Halle, men framfor alt ved universitetet i Berlin under Kummer. I 1868 ble han matematikklærer ved gymnaset i Halle, fram til sin død i 1898. I 1894 ble han utnevnt til æresdoktor ved universitetet i Halle, også som et resultat av sin lærebok i mengdelære.

Cantor selv satte stor pris på denne boka, og anbefalte den særlig for lærere (Hoffmann 1899, p. 552). I et brev til Bendixson, som Cantor tidvis samarbeidet med om mengdelæren, ytret Cantor ros om Meyer som pedagog, men han tok forbehold mht. stringensen av hans beviser. Wilhelm Lorey framhevet også boka ved feiringen av Cantors syttiårsdag:

> *"Meyer var en av de første som forsto den vidtrekkende betydningen av Deres ideer. I en tid hvor den vitenskapelige verden forholdt seg avvisende overfor Dem, også i vårt fedreland, framstilte han grunnbegrepene i mengdelæren med stor klarhet, allerede i de elementene han hadde bestemt for skolen. I forordet sitt anbefalte han også studiet av Deres skrifter på det varmeste for matematikklærerne" (Lorey 1915, p. 273).*

Cantors ideer om mengdelæren ble først publisert i sin ferdige form i 1895/96 (deler forelå i 1883). I virkeligheten framstilte ikke Meyer mengdebegrepet som noe nytt, men snarere i en tradisjon som gikk tilbake til de gamle grekerne. Meyers bok er også interessant idet den søker å utbre Cantors begreper. Om innholdet vil jeg her bare nevne at den er svært moderne i sin oppbygging og struktur. Ved operasjonene med tall finner vi aksiomene for identitet, kommutativitet, assosiativitet og distributivitet. Tallbegrepet blir avledet fra begrep om antall.

Meyers bok ble ikke offisielt godtatt som lærebok i skolen, men bokas intensjon var å tjene som "basis for samarbeid for faglærerne" (F. Meyer 1885, p. iii). Det ser ut til at Meyer brukte den i undervisningen av de øverste klassetrinnene (se F. Meyer 1891, p. 29).

Wieleitner kom også med forslag om dette i en artikkel i 1906. Mengdelære var da i stor grad anerkjent som nødvendig bakgrunnskunnskap for lærere. Det klassiske oppslagsverket til elementærmatematikken av Weber-Wellstein begynte grunnlaget for aritmetikken med et avsnitt om elementær mengdelære.

På grunn av den raske mottakelsen Cantors mengdelære fikk, særlig i de høgere klassene, kan en spørre seg hvorfor "Bourbaki" framsto som en nyorientering i skolene fra 1960-årene. Tydeligvis ble den bevegelsen som kom i gang omkring 1910 stoppet. Årsakene til dette er ennå ikke kjent. Min tese er at bevegelsen for nyoppbygging av aritmetikk og algebra på grunnlag av mengdelære, ble skjøvet til side av en mektigere bevegelse. Denne oppsto fra omkring 1905, og den gikk ut på at funksjonsbegrepet skulle gjennomtrenge undervisningen.

10. Bibliografi

Abdeljaouad, M. (1978). Vers une épistémologie des décimaux. *Miftah-al-Hissab 50*, pp. 1-27

Bachelard, G. (1975). *La formation de l'esprit scientifique*. Paris: Vrin.

Bauersfeld, H. m.fl. (1983). Lernen und Lehren von Mathematik. In *Untersuchungen zum Mathematikunterricht; Bd. 6*. Köln: Aulis.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques 4*, pp.164-197

Chevallard, Y. (1985). *La Transposition didactique*. Grenoble: Edition Sauvages.

Cornu, B. (1983). *Apprentissage de la notion de limite: conceptions et obstacles*. Université de Grenoble, Thèse de 3ème cycle, Mathématiques.

Förstemann, W.A. (1817). *Über den Gegensatz positiver und negativer Größen*. Nordhausen.

Führer, L. (Hrsg.) (1986). Mathematik-Geschichte(n). *Mathematiklehren 19*.

Gebhardt, M. (1912). *Die Geschichte der Mathematik im mathematischen Unterricht*. Leipzig: Teubner. (IMUK-Abh.; Bd. IV, 6)

Gerster, H.D. (1984). Lerndefizite als Folge von Lehrdefiziten? Erfahrungen aus der Analyse von Schülerfehlern bei den schriflichen Rechenverfahren. In Lorenz, J.H. (Hrsg.) *Lernschwierigkeiten: Forschung und Praxis.* (Untersuchungen zum Mathematikunterricht; Bd. 10), Köln: Aulis, pp. 56-70

Hoffmann, J.C.V. (1899). Zum Andenken an Dr. Friedrich Meyer. *Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaflichen Unterricht 30*, pp. 551-553

Laborde, C. (1985). Punkt, Gerade, Strecke - Alte Gegenstände der Geometrie. In Steiner, H.G. og Winter, H. (Hrsg.) *Mathematikdidaktik - Bildungsgeschichte - Wissenschaftsgeschichte*. Köln: Aulis, pp. 108-113

Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations. The logic of mathematical discovery*. Cambridge: Cambridge University Press.

Lecat, M. (1935). *Erreurs de mathématiciens des origines à nos jours*. Bruxelles/Louvain.

Lenné, Lietzmann, W. (1909). *Stoff und Methode im Mathematischen Unterricht*. Leipzig/Berlin: Teubner.

Lorey, W. (1915). Der 70. Geburtstag des Mathematikers Georg Cantor. *Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht 46*, pp. 268-274

Menger, K. (1979). *Selected Papers in logic and foundations, didactics, economics*. Dordrecht/Boston/London: Reidel.

Meyer, F. (1885). *Elemente der Arithmetik und Algebra (2. opplag).* Halle: H.W. Schmidt.

Meyer, F. (1891). Mitteilungen aus dem mathematischen Lehrplan des Gymnasiums. *Schulprogramm des Stadtgymnasiums zu Halle a.S.*

Purkert, W. (1986). *Georg Cantor und die Antinomien der Mengenlehre*. Preprint Naturwissenschaftliches - Theoretisches Zentrum Karl-Marx-Universität.

Radatz, H. (1979). Obersichtsreferat zu: Schülerfehler. In Lorenz, J.H. og Radatz H. *Forschungsbeiträge zum mathematischen Lehr-Lern-Prozess, Band 2*. Schriftenreihe des IDM, Band 19, pp. 57-59

Saidan, A.S. (ed., transl.) (1978). *The arithmetic of al-Uqlidisi*. Dordrecht: Reidel.

Scharlau, W. (Bearb.) (1986). *Rudolf Lipschitz: Briefwechsel mit Cantor, Dedekind, Helmholtz, Kronecker und Weierstrass und anderen*. Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg.

Schubring, G. (1977). Die historisch-genetische Orientierung in der Mathematik-Didaktik. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 9*, pp. 209-213

Schubring, G. (1978). *Das genetische Prinzip in der Mathematik-Didaktik*. Stuttgart: Klett.

Schubring, G. (1981). Gegenständliche und soziale Momente des Wissens als Kategorien für Untersuchungen zur Geschichte der Mathematik-Didaktik. *Journal für Mathematik-Didaktik 2*, pp. 3-36

Schubring, G. (1982a). Ansätze zur Begründung theoretischer Terme in der Mathematik - Die Theorie des Unendlichen bei Johann Schultz (1739-1805). *Historia Mathematica 9*, pp. 441-484

Schubring, G. (1982b). Die Mathematik an der Ecole Normale des Jahres III - Wissenschaft und Methode. Wissen und Bewusstsein. In Schmithals, F. (Hrsg.). *Studien zu einer Wissenschaftsdidaktik der Disziplinen*. Hamburg: Arbeitsgemeinschaft für Hochschuldidaktik, pp. 103-133

Schubring, G. (1983). *Die Entstehung des Mathematiklehrer-Berufs in Preussen*. Weinheim/Basel.

Schubring, G. (1986a). Ruptures dans le Status mathématique des nombres négatifs. *Petit x 12*, pp. 5-32

Schubring, G. (1986b). *Des échanges entre les mathématiciens francais et les mathématiciens allemands sur l'infiniment grand*. In Séminaire d'Histoire des Mathématiques, Paris 23. 4. (Manuskript)

Schubring G. (1986c). *Bibliographie der Schulprogramme in Mathematik und Naturwissenschaften (Wissenschaftliche Abhandlungen) 1800-1875*. Bad. Salzdetfurth.

Schubring, G. (1987a). *The intercultural 'transmission' of concepts - a case study of the first international curricular reform movement in mathematics education around 1900*. Vortrag auf der Tagung: Comparative Studies of Mathematical Curricula in Different Conntries, Frascati, Mai 1987. Bielefeld: IDM, (Occassional Paper; Nr. 92)

Schubring, G. (1987b). On the methodology of analysing historical textbooks: Lacroix as textbook author. *For the learning of mathematics 7 (3),* pp. 41-51

Toeplitz, O. (1927). Das Problem der Universitätsvorlesungen über Infinitesimalrechnung und ihre Abgrenzung gegenüber der Infinitesimalrechnung an den höheren schulen. *Jahresberichte der DMV 36*, pp. 88-100

Toeplitz, O. (1972). *Die Entwicklung der Infinitesimalrechnung*. Darmstadt: Wiss. Buchgesellschaft.

Wilder, R.L. (1972). History in the mathematics curriculum: Its status. quality and function. *Notices of the AMS 79*, pp. 479-495

Wussing, H. (1974). Einleitung. In *B. Bolzano, Beyträge zu einer begründeteren Darstellung der Mathematik*. Darmstadt, V-XXIX

Abstract:
For many years, mathematics educators have been interested in how to use the history of mathematics to improve the teaching. Some of them have been satisfied using the history as a source of motivation. This article deals with an aspect that goes beyond that. Schubring starts with the genetic principle as a didactical tool, and he moves on to the research on students' errors. He considers the so called epistemological obstacles, which is a way of using the history of mathematics to discover and avoid some of the pupils' mistakes. This is a method of using your knowledge about the historical developments of the mathematical concepts to improve your teaching. In the end, he makes an approach towards social constructivism. Before the translation of his article, I give an introduction to give a sharper definition on the concept of genetic - genesis.