Universitetet i Sørøst-Norge
Fakultet for humaniora, idretts- og utdanningsvitenskap
–

Mastergradsavhandling
Studieprogram: MG1MA7
Høst 2023

Martine Jøssong

Hvordan kommer femtetrinn elevers problemløsningskompetanse til syne i deres skriftlige notater under problemløsning?

Universitetet i Sørøst-Norge
Fakultet for humaniora, idretts- og utdanningsvitenskap
Institutt for pedagogikk
Postboks 235
3603 Kongsberg

http://www.usn.no

Denne avhandlingen representerer 45 studiepoeng

Sammendrag

Masteroppgaven skal undersøke variasjoner i 5. klassingers problemløsningskompetanse. Overordnet problemstilling er:

Hvordan kommer femtetrinn elevers problemløsningskompetanse til syne i deres skriftlige notater under problemløsning?

For å få svar på dette har det blitt gjort en kvalitativ studie som tar i bruk eget innsamlet datamaterialet bestående av elevbesvarelser med intervjuene som empirisk underlag. Intervjuene ga meg bedre innsyn i deres tenkemåter, da det gir mulighet for at elevene kan redegjøre for hva de hadde gjort. Utvalget besto av en klasse på 5.trinn med 22 elever. De fikk i oppdrag å svare på tre ulike matematiske problemløsningsoppgaver, hvor de skulle notere ned alle fremgangsmåtene og utregningene sine.

Elevbesvarelsene viser at elevene i hovedsak benytter seg av visuelle eller symbolske representasjoner. De mest brukte strategiene var *visualisering* samt *prøve og feile*. Det visuelle ble vist i form av relevante tegninger for oppgavene, både detaljerte og abstrakte. Symbolsk representasjoner ble brukt i form av tall, bokstaver og ord. Videre viste elevbesvarelsene at få elever bytter strategi eller representasjon i samme/ eller i de forskjellige oppgavene. Oppgavene viser variasjon mellom, da noen elever bruker symbolsk representasjon fremfor visuell. Disse elevene har utviklet seg mer innen problemløsningskompetansen og representasjonskompetansen. Problemløsning er utfordrende for elevene, men til tross for dette syns de problemløsning er spennende og gøy. Elevene etterspurte i tillegg flere problemløsningsoppgaver. Problemløsning er vanskelig da elevene strevde med å hente ut viktig informasjon fra oppgavene. Dette illustreres av at oppgavene hadde flere opplysninger som gjentatte ganger ble utelatt.

Med den valgte undersøkelsesmetoden har det fanget essensen i den tilnærmingen elevene på 5. trinn bruker. Variasjoner forekommer, men med det noe begrensende empiri kunne det understøttes hva tidligere forskning har pekt på, og dermed oppdatere kunnskapen i den digitaliserte hverdagen. Elevene elsker å prøve og feile. Dermed utfolder de seg i problemløsningsoppgaven.

Innholdsfortegnelse

Forord

Denne masteren markerer en slutt på utdanningen *Grunnskolelærer 1–7* ved Universitet i Sørøst-Norge. Disse fem årene har vært lærerike og jeg har fått økt kompetanse, og respekt for forskning og læring.

Jeg vil takke veilederen min Signe Holm Knudtzon for all råd og veiledning jeg har fått i arbeidet med masteren. Takk for all tid som har blitt satt av til å hjelpe meg, samt alle timene på både kveldstid og i helgene. Jeg har fått konstruktive tilbakemeldinger som har vært til nytte. Takk for givende kritiske samtaler.

Jeg vil også takke venner og familie for all støtte. Dere har hjulpet meg med å reflektere og å komme med gode råd. Jeg vil takke min pappa for gode innspill og råd. Det må også rettes en takk til min kjæreste. Du har hjulpet meg underveis, og har vært et godt støtteapparat.

Porsgrunn, 1. desember 2023.
Martine Jøssong

1 Innledning

Dette kapittelet redegjør for bakgrunnen for valg av tema og problemstilling, tidligere forskning, avgrensninger som har blitt gjort, og en beskrivelse av oppgavens disposisjon.

1.1 Bakgrunn for valg

Problemløsning i matematikk er noe jeg alltid har funnet interessant, både i egen oppvekst og ute i praksis. Interessen for problemløsning og oppgaver som krever en alternativ tankeprosess, har bidratt til mitt valg av utdanning og valg av fordypningsfag. Fra tidligere praksiser og undervisning har jeg erfart at det er gunstig med en problemløsningsoppgave i starten av timen for å engasjere elevene til en alternativ tankeprosess. Både problemløsning og representasjoner har fått et stort fokus i læreplanen, LK20, innen kjerneelementene for matematikkfaget (Kunnskapsdepartementet, 2019, s. 2–3). Problemløsning er sammen med utforskning det første kjerneelementet og representasjoner er sammen med kommunikasjon det fjerde kjerneelementet. Da begge disse temaene er en viktig del av matematikkfaget vil dette være svært relevante temaer å fordype seg i, og for å danne kjennskap til elevers arbeidsmetoder rundt disse temaene. Videre forklarer tidligere praksislærere og undervisere at de erfarer problemløsning som vanskelig. Elevene strever med å hente ut den riktige informasjonen og å finne ut hvilke strategier de må bruke for å finne svaret. Problemløsning innebærer at elevene skal finne og utvikle de strategiene og representasjonene de mener er mest hensiktsmessig (Duval, 2006, s. 108; Kunnskapsdepartementet, 2019, s. 3). Et problem vil ha variert vanskelighetsgrad da en elev kan oppleve det som problemløsning, mens det vil være en rutine for en annen (Björkquist, 2003, s. 54; Boesen, 2006, s. 31; Niss & Jensen, 2002, s. 49). Basert på egne erfaringer ønsker jeg å finne ut hvordan elever arbeider med problemløsning og hvilke representasjoner og strategier de benytter seg av. For å kunne gjøre dette må jeg sette meg inn i relevant teori for både problemløsning, representasjoner og matematisk kompetanse. Problemløsning er noe jeg opplever som en styrke for å skape en mer engasjerende undervisning da det åpner for en alternativ tankeprosess. Elevene er nødt til å tenke annerledes, og det kan kobles opp mot hverdagsproblemer hvor elevene må bruke innlærte algoritmer for å løse problemet (Duval, 2006, s. 108; Johnson, 2018, s. 3–4; Kunnskapsdepartementet, 2019, s. 3).

Formålet med masterprosjektet er å bidra til mer kunnskap om elevenes problemløsningskompetanse og hvilke strategier og representasjoner som blir benyttet. På bakgrunn av dette vil jeg undersøke problemløsningskompetanse hos en klasse på 5. trinn og analysere deres besvarelser. Økt kunnskap kan styrke min undervisningspraksis og kan gi gode kunnskaper som kan benyttes i undervisningsplanleggingen. Problemløsning er en del av den matematiske kompetansen og aktuell i dagens matematikkundervisning. I læreplanen for matematikk fellesfag blir problemløsning nevnt under formålet for faget og i de grunnleggende ferdighetene: regning og digitale ferdigheter (Kunnskapsdepartementet, 2013, s. 2–4).

1.2 Begrunnelse for problemstilling

Det vil i denne masteroppgaven fokuseres på elevers evne og variasjoner til problemløsning i matematikk. Studien vil fokusere på hvordan elevene arbeider med problemløsningsoppgaver og hvilke variasjoner som blir observert. For å få svar på dette vil jeg lage forskningsspørsmål som kan bidra til å berike problemstillingen. Gjennomføringen vil bestå av tre problemløsningsoppgaver og foregå i en klasse på 5.trinn i en til to skoletimer. Det blir gjort en analyse for å få et bedre innsyn i metodene elevene benytter seg av under arbeid med slike oppgaver. I etterkant av observasjonen vil det gjennomføres intervjuer med elevene, for å kunne gå mer i dybden av hvordan og hvorfor.

<u>Problemstilling</u>*: Hvordan kommer femtetrinn elevers problemløsningskompetanse til syne i deres skriftlige notater under problemløsning?*

<u>Forskningsspørsmål:</u>

1. Hvilke strategier benytter elevene og på hvilken måte representeres de ulike strategiene?
2. Skifter de strategier og representasjoner (i samme oppgave og) i de forskjellige oppgavene?

1.3 Tidligere forskning

Representasjoner innen matematikkdidaktikk har fått et sterke fokus. Forskningen viser at elevene ofte benytter seg av multimodale representasjoner, altså at de benytter seg av flere representasjoner i samme oppgave (Hana, 2014, s. 147; Lesh et al., 1987, s. 6). Multimodale representasjoner benyttes fordi ulike representasjoner er godt egnet for deler av situasjonen, men ikke for hele situasjonen. Ingen representasjoner vil være like egnet til alle situasjoner. En god problemløser vil være fleksibel og veksler mellom hvilke representasjoner som er mest egnet til situasjonen. Duval (2006) støtter at elevene må få bruke varierte representasjonssystemer og få velge fritt i henhold til oppgaven (s. 108). Et av forskningsspørsmålene i dette masterprosjektet er å se om elevene endrer problemløsningsstrategier eller representasjoner i samme oppgave eller i de ulike oppgavene. Her kan det være av interesse å se om elevene benytter seg av multimodale representasjoner i oppgavene.

Forskning viser at bruk tegninger er en svært god strategi når elevene arbeider med problemløsning (Rellensmann et al., 2017, s. 404). Når elevene tegner bruker de visuelle likheter for å representere det matematiske problemet og objektet. Rellensmann et al. (2017) skriver også at tidligere forskning viser at elevene strever med modelleringskompetansen og at elevene har problemer med å bestemme og organisere det relevante for det matematiske problemet eller objektet (s. 403). Elevene trenger derfor hjelp og støtte i modellering. Videre er det kommet frem til tre fordeler ved en matematisk tegning i modelleringen av situasjonen: 1. tegningen kan hjelpe elevene med å bestemme og organisere det virkelige objektet på en riktig måte ved at de henter ut den viktige informasjonen, 2. aktiv utforskning av tegningen med hensyn til det matematiske objektet kan hjelpe elevene med å konstruere en modell som er relevant og 3. tegningen kan hjelpe elevene å danne en konklusjon av situasjonen. På den måten kan tegningen bidra med å gi elevene en respons på bruken av tegningen, og kan bidra til en bedre forståelse av det matematiske dilemmaet. Ved å arbeide med tegninger vil elevene utvikle sin modelleringskompetanse og elevene vil lage mer presise og nøyaktige modeller med trening (Rellensmann et al., 2017, s. 403–404).

Matematikk er et abstrakt fag som kan oppleves som unødvendig og ikke relevant blant elevene. Det brukes ord og fagbegreper som ikke er i dagligtalen og i elevenes ordforråd. Dette kan gjøre at enkelte elever kan streve med å mestre matematikk og å få en forståelse av faget. I følge Duval

(2006) er matematiske objekter abstrakte og kan kun bli tilgjengelige gjennom ulike representasjoner (s. 107). For at elevene skal få tilgang til matematikken må læreren legge til rette at elevene kan få muligheten til å bruke ulike typer matematiske representasjoner i ulike sammenhenger, basert på deres egne erfaringer (Kunnskapsdepartementet, 2019, s. 3).

I senere år har det blitt gjennomført flere masteroppgaver om problemløsning, strategier, tekstoppgaver og representasjoner. De fleste beskriver problemløsning i gruppe hvor kommunikasjonen er viktig (Sæter, 2022). Strategien som er mest brukt i tekstbøker på tredje trinns problemløsningsoppgaver er gjett og sjekk (Ottesen & Guttormsen, 2023, s. 68). Mange av disse oppgavene har tekstoppgaver innen et avgrenset matematisk tema, ofte algebra (Sæter, 2022). Kongelf (2017) skriver om ni ulike problemløsningsstrategier og bruker de i analyse av lærebøker på åttende trinn. De vanligste er *løs en del av problemet* og nummer to er *lage en visualisering* (s. 25).

1.4 Avgrensninger

Avgrensninger i forskning handler om rekkeviddene av metoden som kan påvirke resultatene. Valgene kan påvirke forskningsdesignet, datainnsamlingen, analysemetoder og tolkningen av resultatene og funnene (Dalland, 2017, s. 213).

Undersøkelsen ble gjennomført med et utvalg 5. klassinger på en skole i Vestfold og Telemark fylkeskommune. Resultatene er vurdert i lys av kompetansemodellen til teoretikerne Mogens Niss og Tomas Højgaard Jensen (2002), problemløsningsprosessen til matematikeren George Polya (1945), strategiene beskrevet i boka «101 grep for å aktivisere elever i matematikk: matematikkdidaktikk i teori og praksis» (2019) og teori om representasjoner beskrevet av Gert Monstad Hana (2014), Richard Lesh et al. (1987), Elizabeth Lee Johnson (2018) og Raymond Duval (2006).

I denne undersøkelsen har alle tolkninger av resultater og funn blitt utført av meg som enkelt forsker. Alle tolkninger er drøftet opp mot velkjente teorier slik at det skaper troverdighet og er etterprøvbart.

1.5 Oppgavens disposisjon

Denne masteravhandlingen er delt inn i seks deler.

- I første kapittel er innledningen.
- I andre kapittel presenteres den valgte teorien.
- I tredje kapittel appliseres valgte forskningsmetoder, samt validitet, reliabilitet og etiske betraktninger.
- I fjerde kapittel legges det frem resultat av de empiriske funnene og analysen.
- I femte kapittel drøftes resultatene i lys av teorien.
- I sjette kapittel avsluttes det med en oppsummering av funnene og en refleksjon rundt ytterligere behov for forskning.

2 Teori

I dette kapittelet presenteres utvalgt teori for min forskning og problemstilling. Grunnlaget for teorien baseres på hva som er relevant under problemløsning, representasjoner og i matematisk kompetanse. Teorien skal legge til grunn for drøfting av resultater.

Problemløsning blir beskrevet av forskere og teoretikere som å tilegne seg ulike metoder for å løse et ukjent problem (Björkquist, 2003, s. 54; Boesen, 2006, s. 31; Kunnskapsdepartementet, 2019, s. 2).

2.1 Læreplaner

I M87, Mønsterplanen av 1987, kom problemløsning inn som ett eget hovedemne og skulle være en del av all matematikkopplæring (KUD, 1987, s. 195). I Kunnskapsløftet, LK06, under læreplanen for matematikk fellesfag blir problemløsning nevnt under formålet for faget og i de grunnleggende ferdighetene: regning og digitale ferdigheter (Kunnskapsdepartementet, 2013, s. 2–4).

Fagfornyelsen innførte nye læreplaner i 2020 og ble kalt Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020 (LK20). I læreplanen for matematikk blir det beskrevet at elevene skal forstå ulike mønstre og sammenhenger gjennom modellering og anvendelser, utvikle et presist språk for resonnering, kritisk tenkning og at de skal kunne kommunisere gjennom abstraksjon og generalisering (Kunnskapsdepartementet, 2019, s. 2). I tillegg skal matematikk legge til rette for å utvikle elevenes kompetanse innen utforskning og problemløsning. Videre blir faget beskrevet som følgende:

> Alle fag skal bidra til å realisere verdigrunnlaget for opplæringen. Kritisk tenkning i matematikk omfatter kritisk vurdering av resonnementer og argumenter og kan ruste elevene til å gjøre egne valg og ta stilling til viktige spørsmål i sitt eget liv og i samfunnet. Når elevene får tid til å tenke, reflektere, resonnere matematisk, stille spørsmål og oppleve at faget er relevant, legger faget til rette for kreativitet og skapertrang. Matematikk skal bidra til at elevene utvikler evne til å jobbe selvstendig og samarbeide med andre gjennom utforsking og problemløsing, og kan bidra til at elevene blir mer bevisste på sin egen læring. Når elevene får mulighet til å løse problemer og mestre utfordringer på egen hånd, bidrar dette til å utvikle utholdenhet og selvstendighet (Kunnskapsdepartementet, 2019, s. 2).

Læreplanverket skal bidra til at elevene får en god opplæring og læreren skal bidra til å gi elevene god personlig utvikling. Problemløsning er svært aktuelt i dagens samfunn da det er en del av matematikkundervisningen. Bedre forskning på problemløsning, representasjon, og elevenes problemløsnings- og representasjonskompetanse kan bidra til å styrke undervisningen.

2.1.1 Kjerneelementer

I læreplan i matematikk 1.–10. trinn under kjerneelementene finner en både problemløsning og representasjoner som en del av et kjerneelement. Problemløsning under kjerneelementet «Utforskning og problemløsning» og representasjon under «Representasjon og kommunikasjon».

Problemløsning

Problemløsning blir beskrevet som å tilegne seg metoder for å løse et ukjent problem (Kunnskapsdepartementet, 2019, s. 2). Det handler også om å benytte seg av kjente fremgangsmåter for å løse det ukjente. Videre handler det om å dele problemet opp i delproblemer og på den måten kan det løses mer systematisk. Ved å bryte ned ett problem kan en utvikle ulike fremgangsmåter og strategier som er en del av den algoritmiske tenkningen. Videre innebærer problemløsning å vurdere om delproblemene kan løses ved hjelp av digitale verktøy (Kunnskapsdepartementet, 2019, s. 2).

Representasjon

Representasjoner blir beskrevet som ulike måter en uttrykker matematiske begreper, sammenhenger og problemer (Kunnskapsdepartementet, 2019, s. 3). Representasjoner kan deles inn i fem grupper, det kan være visuelle, konkrete, symbolske, kontekstuelle og verbale. Det kreves at elever gis muligheten til å bruke ulike typer matematiske representasjoner i ulike sammenhenger, basert på deres egne erfaringer. Elevene skal også gis muligheten til å forklare og begrunne sine valg av representasjoner. Valg av mest hensiktsmessig representasjon er en evne elevene utvikler gjennom arbeid med oversettelse mellom matematiske representasjoner og dagligspråket (Kunnskapsdepartementet, 2019, s. 3).

På kunnskapsdepartementet sine sider under kompetansemål for 5. trinn i matematikk, er følgende kompetansemål relevant for min forskning:

- *utvikle og bruke ulike strategier for regning med positive tall og brøk og forklare tenkemåtene sine* (Kunnskapsdepartementet, 2019, s. 8).

Kompetansemålet beskriver at elevene må forklare tenkemåtene sine. Masterprosjektet mitt består av intervjuer blant utvalgte 5.trinns elever. Intervjuene gir elevene mulighet til å forklare sine tenkemåter og framgangsmåter i oppgavene, og på den måten kan dette styrke mine tolkninger av elevsvarene.

2.1.2 Underveisvurdering

Underveisvurdering har fått et eget fokus under kompetansemålene for de ulike trinnene i LK20. I underveisvurderingen for kompetansemål etter 5. trinn i matematikk blir det beskrevet som følgende:

> Underveisvurderingen skal bidra til å fremme læring og til å utvikle kompetanse i matematikk. Elevene viser og utvikler kompetanse i faget på 5. trinn når de utforsker og reflekterer over ulike matematiske begreper, representasjoner og strategier i arbeid med brøk og uformell løsing av ligninger og ulikheter. Elevene viser og utvikler også kompetanse når de bruker kunnskap og ferdigheter til å formulere og løse problemer som er knyttet til hverdagen og samfunnet. Videre viser og utvikler de kompetanse i matematikk når de resonnerer over og argumenterer for løsninger og matematiske sammenhenger. Læreren skal legge til rette for elevmedvirkning og stimulere til lærelyst ved at elevene får utforske matematikk og løse matematiske problemer gjennom å være kreative, resonnere og reflektere. Læreren og elevene skal være i dialog om elevenes utvikling i programmering og tallforståelse. Elevene skal få mulighet til å prøve og feile. Med utgangspunkt i kompetansen elevene viser, skal de få mulighet til å sette ord på hva de opplever at de får til, og hva de får til bedre enn tidligere. Læreren skal gi veiledning om videre læring og tilpasse opplæringen slik at elevene kan bruke veiledningen for å utvikle kompetansen sin i å utforske ulike representasjoner og problemløsingsstrategier og i å argumentere med matematiske begreper (Kunnskapsdepartementet, 2019, s. 9).

Underveisvurderingen inkluderer både representasjoner og problemløsning som er relevant for dette masterprosjektet. Elevene skal utforske og reflektere over ulike representasjoner og strategier, blant annet å få muligheten til å prøve og feile som også er en problemløsningsstrategi (Klaveness et al., 2019, s. 188). Videre skal læreren legge til rette for elevene slik at de får utviklet sin egen kompetanse og kan komme med bidrag i utforskningen av matematikk. Læreren skal også gi veiledning og sørge for tilpasset opplæring. På den måten får elevene utviklet sin problemløsnings- og representasjonskompetanse (Kunnskapsdepartementet, 2019, s. 9).

2.2 Definisjon av et matematisk problem

Et matematisk problem blir definert teoretikeren Björkquist (2003) som en oppgave hvor problemløseren ikke har en kjent fremgangsmåte for løsning av et problem (s. 54). Videre blir det satt fokus på at et matematisk problem, blir definert på samme måte som hverdagslige problemer. Matematiske problemer har individuelle forskjeller, ettersom vanskelighetsgraden kan variere fra person til person. Det en person anser som et problem, trenger derfor ikke å være et problem for en annen. I 2006 kom svensken Jesper Boesen ut med en doktorgrad hvor han blant annet fokuserte på problemløsningskompetansen. Boesen (2006) støtter Björkquist i definisjonen av et matematisk problem og at matematiske problemer har individuelle forskjeller (s. 31). Videre legger han til at eleven må kunne anvende kunnskap og konstruksjon av noe nytt, i arbeidet med løsningsprosedyren. Boesen (2006) skriver i tillegg om tre ulike typer oppgaver som kan kreve denne kompetansen: uvanlige oppgaver, oppgaver med annerledes og ny informasjon og komplekse oppgaver (s. 31).

2.3 Problemløsningsprosessen

Matematikeren George Polya (1945) har utformet en problemløsningsprosess for matematikk som består av fire faser (s. 5). De ulike fasene er:

- Forstå problemet
- Utarbeide en plan
- Gjennomføre planen
- Se tilbake (reflektere)

Den første fasen handler om å ***forstå problemet***. Dette innebærer forståelse av hva problemet handler om og hva som kreves for å løse det (Polya, 1945, s. 6). For å forstå et problem må eleven også ha et ønske om å løse problemet. Mangel på dette kan skyldes både egen motivasjon, men også vanskelighetsgrad på oppgaven. Dersom oppgavene er for enkle eller vanskelige, kan elevene bli demotiverte og miste interessen for å løse dem. Første viktige faktor for å forstå problemet innebærer forståelsen av det verbale utsagnet i oppgaven. Læreren kan sjekke dette ved å be elevene gjenta utsagnet og gjenfortelle problemstillingen. Elevene må klare å hente ut den viktige informasjonen fra problemet, samt å se problemet fra ulike sider (Polya, 1945, s. 6).

Etter at problemet er forstått skal det ***utarbeides en plan*** for å løse oppgaven. Planen må innebære hovedtrekkene i problemet, hvilke beregninger som må utføres og hvilke konstruksjoner som må utføres for å løse det ukjente (Polya, 1945, s. 8). Det må finnes en sammenheng mellom dataene og det ukjente. Gode grunnkunnskaper og ferdigheter er til god hjelp i utarbeidingen av planen. En viktig del for løsningen av et matematisk problem, er materialet hvor en trekker inn relevante emner fra tidligere matematiske kunnskaper, inn i det nye problemet. Et nyttig spørsmål en kan stille seg er: kjenner du til et relevant problem (Polya, 1945, s. 8–9)?

Utarbeidingen av planen er lang og krevende (Polya, 1945, s. 12). ***Gjennomføring av planen*** krever tålmodighet og oppmerksomhet, samt at elevene undersøker alle detaljer nøye. En annen risiko er at elevene glemmer planen sin. I slike tilfeller kan læreren støtte og oppfordre elevene til å sjekke hvert trinn av planen. Videre skriver Polya (1945) om viktigheten av å bevise det som blir gjort og at å bevise sørger for at elevene er forsikret om at hvert trinn er løst riktig (s. 13).

Etter at oppgavene og problemet er løst er det en risiko for at en glemmer oppgaven. Ved å gjøre dette går en glipp av mye viktig lærdom i det å ***se tilbake og reflektere*** over hva som har blitt gjort (Polya, 1945, s. 14). Refleksjon styrker kunnskapen deres og utvikler muligheten til å løse andre problemer senere. Læreren har en viktig rolle ved å gi elevene mulighet til å se gjennom løsningen sin, og at de blir bevisst over eget arbeid. I en god refleksjon kan dette skape motivasjon for å gjøre det bra i senere oppgaver og det styrker elevens kunnskaper (Polya, 1945, s. 14–16).

Senere tid ble en ny inndeling av problemløsningsprosessen utarbeidet av Carlson og Bloom (2005). Den nye inndelingen besto av fire hovedfaser: orientere, planlegge, utføre og sjekke. Carlson og

Bloom studerte tolv matematikere grunnet deres brede og dype kunnskaper, og erfaringer rundt omfattende problemløsning. Her observerte de at etter at matematikerne hadde orientert seg om problemet, gjennomførte de en repetert syklus med planlegge-utføre-sjekke. I etterkant gjorde matematikerne jevnlige refleksjoner over valgene av deres beslutninger og handlinger under hver av fasene (Carlson & Bloom, 2005, s. 10–12).

2.4 Strategier for problemløsning

I arbeidet med problemløsning på barnetrinnet finner vi seks kjente problemløsningsstrategier (Klaveness et al., 2019, s. 184). Elevene må få utforske problemene og finne ut hvilke strategier som fungerer best for dem. De skal tenke gjennom hvilke strategier som er mest hensiktsmessig i det gitte problemet og hvordan de kan forholde seg mest mulig til oppgaven. Det er viktig at elevene får dybdetrening rundt disse krevende prosessene slik at de får utviklet sine strategier. Samtaler rundt valgte strategier er også viktig i utvikling av strategiene. Arbeid i grupper rundt problemløsning kan være til god hjelp (Klaveness et al., 2019, s. 184–185). De følgende problemløsningsstrategiene er:

1. **Forenkle problemet:** Når en forenkler problemet kan en prøve å finne tall som er enklere å regne i hodet, endre situasjonene slik at den blir mer kjent, dele oppgaven i flere deler eller bruke positive tall (Klaveness et al., 2019, s. 186).

2. **Å prøve og feile:** Denne strategien har også navnet gjett og sjekk (Guerrero, 2010, s. 34; Kongelf, 2017, s. 170, sitert i Klaveness et al., 2019, s. 188). Strategien innebærer at elevene først prøver en løsning eller gjetter på svaret og deretter justerer den hvis det viser seg å være feil. Valgt metode avhenger av hvilken metode eleven selv mener er hensiktsmessig og hvilke ferdigheter og kompetanse eleven sitter med. Diskusjoner rundt forsøkene og gjetningene deres kan bidra med at elevene utvikler denne strategien, og velger mer hensiktsmessige gjetninger neste gang (Klaveness et al., 2019, s. 188–189).

3. **Visualisering:** Visualisering skjer ved at elevene tegner for å løse problemet (Klaveness et al., 2019, s. 190). Elevene tegner figurer eller modeller som kan gi et mentalt bilde av oppgaven som dermed kan bidra med den matematiske løsningen.

4. **Systematisk tabell:** Systematisk tabell kan være en god strategi når en skal arbeide med tallfølger, figurtall og sammenhenger (Klaveness et al., 2019, s. 194–196). Tabeller er en god måte når en skal legge inn tall for å få en oversikt over den relevante informasjonen. En tabell kan være til hjelp for å finne et mønster eller sammenheng i oppgaven.

5. **Å se etter mønster:** Når elevene skal se etter et mønster i oppgaven må de finne sammenhengen i oppgaven, og se etter en bestemt rekkefølge på tallene eller figurene (Klaveness et al., 2019, s. 198). Oppgaver kan kreve at elevene må finne matematisk likheter eller forskjeller, og å finne det riktige mønsteret og svaret. Læreren har her i oppgave å motivere og tilrettelegge slik at elevene fortsetter den matematiske tankegangen.

6. **Arbeide baklengs:** Noen problemer og oppgaver kan ha et ukjent utgangspunkt, men en vet sluttsvaret (Klaveness et al., 2019, s. 200). Ligninger er oppgaver hvor elevene kan arbeide baklengs, men det krever at elevene kan sette opp og løse den. Elever som benytter seg av denne strategien vil utvikle god styrke og trening i forståelse av sammenhenger mellom regneartene. Elevene blir også utfordret i forklaringen av hva de har gjort og tenkt.

2.5 Hvordan forholde seg til problemløsning?

I denne masteren analyseres det til problemløsning slik det blir beskrevet i teorien. Problemløsning og et matematisk problem handler om å bruke kjente metoder for å løse et ukjent problem (Björkquist, 2003, s. 54; Boesen, 2006, s. 31; Kunnskapsdepartementet, 2019, s. 2). Videre handler det om å se nøye over oppgavene slik at de blir løst best mulig. Problemløseren må ha en forståelse av hva problemet innebærer (Niss & Jensen, 2002, s. 47; Polya, 1945, s. 6). Problemløsning handler om å se hvilke metoder en kan bruke for å finne svaret og hvilke som er mest hensiktsmessig (Klaveness et al., 2019, s. 184). Alle problemer er ikke del av problemløsning da det kan variere fra person til person. Et problem for en person, kan være enkelt for en annen, og motsatt (Björkquist, 2003, s. 54; Boesen, 2006, s. 31; Niss & Jensen, 2002, s. 49).

2.6 Representasjoner

Representasjoner vises vanligvis i fem grupper. Det kan være i form av visuelle, konkrete, symbolske, kontekstuelle og verbale representasjoner (Kunnskapsdepartementet, 2019, s. 3; Lesh et al., 1987, s. 1; Svingen, 2020). En representasjon blir brukt i betegnelsen av matematiske objekter og til å kommunisere matematikk (Hana, 2014, s. 139). I matematisk kompetanse finner vi representasjonskompetansen som innebærer forståelsen, arbeidet og tolkningen av ulike matematiske representasjoner (Niss & Jensen, 2002, s. 56). Denne kompetansen blir beskrevet mer i kapittel 2.7.3.

For å kunne utvikle dyp matematisk forståelse er det å kunne bruke og oppdage matematiske representasjoner og sammenhenger viktig (Kilpatrick, Swafford, & Findell, 2001; Niss & Jensen, 2002; Utdanningsdirektoratet, 2018, sitert i Svingen, 2020). Arbeid med ulike representasjoner er viktig for å utvikle elevenes forståelse av det matematiske objektet, slik at de får sett det matematiske objektet på ulike måter.

En representasjon refererer til en fremstilling som representerer noe annet (Hana, 2014, s. 131). Vi har to typer representasjoner innen forskningslitteraturen: den interne representasjonen som innebærer de kognitive bildene som blir laget rundt det gitte objektet, og den eksterne representasjonen som uttrykkes fysisk (jf. Duval, 2006, s. 104; Goldin & Shteingold, 2001, sitert i Hana, 2014, s. 131–132). De eksterne representasjonene kalles også for semiotiske representasjoner og knyttes til tegn.

> Et *tegn* er noe som tjener til å formidle kunnskap om noe annet, som det sies *å stå for* noe eller *representere*. Dette noe annet kalles *objektet* til tegnet; den mentale ideen som tegnet stimulerer, som er et mentalt tegn for det samme objektet kalles *interpretanten* til tegnet. (Peirce, 1998, s. 13, sitert i Hana, 2014, s. 132)

I matematikkens historie har utviklingen av semiotiske representasjoner spilt en avgjørende rolle i utviklingen av matematisk tenkning (Duval, 2006, s. 106). Matematisk behandling avhenger av et representasjonssystem. Dette skyldes at hovedfunksjonen til et tegn er ikke å stå for det matematiske objekter, men å gi muligheten til å erstatte noen tegn med andre. Som et resultat oppstår det en betydelig forskjell mellom to hovedgrupper av tallrepresentasjonssystemer: det enkle systemet ved bruk av pinner og tellestreker, og ved det mer komplekse basissystemet hvor

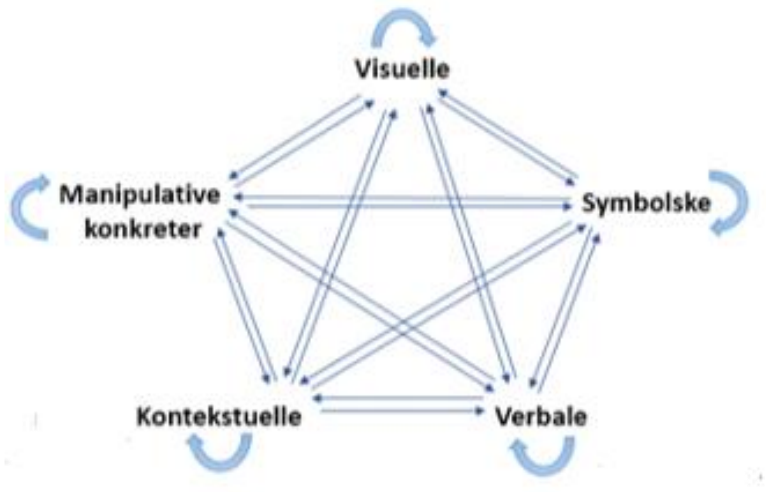
tegnets posisjon gir betydning. I følge Duval (2006) kan ingen form for matematisk handling gjøres uten bruk av semiotiske representasjoner, siden en matematisk handling alltid innebærer erstatning av en semiotisk representasjon med en annen (s. 107). Rollen til tegnet i matematikken skal ikke erstattes med objekter, men heller andre tegn. Slik er det transformasjonen som betyr noe. Transformasjon innebærer at representasjonene kan forandres, altså at en kan forandre et eller flere tegn til andre tegn (Hana, 2014, s. 132).
For å kunne få tilgang til matematikk er den eneste måten ved å bruke tegn og andre semiotiske representasjoner objektet (Duval, 2006, s. 107). Det er viktig å skille mellom det matematiske objektet som blir representert fra den semiotiske representasjonen som blir brukt. Elevene må da kunne vite at representasjonen for det matematiske objektet ikke må forveksles med selve. Videre mener Duval (2006) at semiotiske representasjoner er et verktøy for matematisk kommunikasjon og tenkning, det gir også bedre forståelse av matematikk (s. 106–107).

Elevene må få muligheten til å arbeide med ulike semiotiske representasjonssystemer og få velge fritt i henhold til oppgaven (Duval, 2006, s. 108). Flere oppgaver kan kreve at elevene må velge flere ulike representasjonssystemer. Videre forventes det at elevene skal utvikle sitt valg av representasjon og velge mer abstrakte. Dette vil si at dersom elevene bruker *visualisering* forventes det at de går fra nøye og detaljerte tegninger, til mer ikoniske og mindre detaljerte tegninger.

Duval bruker disse kategoriene: Det naturlige språket, Symbolsystem, Det ikoniske systemet, Det ikke-ikoniske systemet og et system om grafer og diagrammer (Duval, 2006, s. 110).
Duval (2006) beskriver to forskjellige prosesser i det matematiske arbeidet behandling og overgang (s. 111–114). Når arbeidet er innen ett system er det behandling. For eksempel når det foretas flere tallbehandlinger, det er da innen det symbolske systemet. Overgang brukes om transformeringer av semiotiske representasjoner fra ett system til ett annet, men det matematiske objektet er det samme. Det kan være fra tegning (ikonisk) til tall (symbolsk).

2.6.1 Klassifisering av semiotiske representasjoner

I arbeid med matematikk og representasjoner er det vanlig med fem klassifiseringer: visuelle, konkrete, symbolske, kontekstuelle og verbale representasjoner (Kunnskapsdepartementet, 2019, s. 3; Lesh et al. 1987, s. 1; Svingen, 2020). Navnene på disse klassifiseringene kan variere i mellom teoretikere, men prinsippet og forklaringen av de ulike er relativt like.



Figur 1: Klassifisering av semiotiske representasjoner (Lesh et al., 1987, s. 2, hentet fra Veen, 2022, s. 11).

Pilene i modellen refererer til ulike prosesser i det matematiske arbeidet. De rette pilene refererer til overgangen som blir gjort mellom de ulike representasjonssystemene, mens de buende refererer til behandlingene som gjøres innad i representasjonssystemet (Duval, 2006, s. 110–112).

Visuelle representasjoner refererer til skisser som blir tegnet. Det kan være i form av tegninger, bilder og andre statiske ikoniske fremstillinger (Hana, 2014, s. 144). Alt som blir fremstilt av noe visuelt vil være innunder denne semiotiske representasjonen.

Konkrete representasjoner er fysiske gjenstander laget for å kunne håndteres (Johnson, 2018, s. 2). Slike fysiske gjenstander er laget for at elevene kan kjenne, bevege, flytte og ta på dem. Konkretene gjør det enklere for elevene å se sammenheng og likhet med oppgaven. I en oppgave som for eksempel handler om antall pinner, vil en god konkret være fysiske pinner. Konkreter kan også bidra for å styrke elevene som har ulike faglige utfordringer. Vanlige konkreter i et klasserom er ulike klosser, base 10 materiell, perlesnorer, ulike geometriske figurer og mye annet (Johnson, 2018, s. 2).

Symbolske representasjoner er de ulike symbolene som blir brukt i en oppgave. Symbolene er de faktiske bokstavene, sifrene, symbolene, ordene eller setningene som brukes for å representere tall, formler eller andre numeriske, algebraiske eller geometriske konsepter (Hana, 2014, s. 144; Johnson, 2018, s. 3). Et tegn som brukes mye innen symbolske representasjoner er piler. Dette brukes for å vise hvor objektet (tall, bokstaver, ord, figurer osv.) flytter seg (Knudtzon, 2019, s. 142).

Kontekstuelle representasjoner er de erfaringsbaserte og virkelige hendelsene hvor en kan bruke generelle kontekster til å tolke og løse andre typer problemløsninger (Lesh et al., 1987, s. 1). På den måten kan hendelser og objekter fra den virkelige verden åpne for at elevene har muligheten til å lage matematiske forbindelser til kjente situasjoner. Eksempel på dette kan være penger, ulike målinger og oppskrifter (Johnson, 2018, s. 3–4). Kontekstuell forståelse er avgjørende for gode matematiske ferdigheter. Matematikk er et abstrakt fag som ofte kan skape utfordringer for elevene. Ved å ha praktiske og kjente matematiske situasjoner for elevene kan dette bidra til å skape en bedre matematisk forståelse, og viser realiteten ved matematikk. Ved å arbeide med virkelige situasjoner kan dette også gjøre at elever som ikke ser meningen ved matematikk og viktigheten, får et bedre matematisk syn og viktighet ved å lære matematikk.

Inger Wistedt (1993) skriver om kontekstdominans som omhandler at eleven tar med egne erfaringer fra virkeligheten og løser oppgaven ut fra det (s. 44). Dermed får elevene ikke med seg alle de matematiske opplysningene i oppgaveteksten.

Verbale representasjoner handler om de muntlige forklaringene elevene gjør når de forklarer sine tanker og ideer (Lesh et al., 1987, s. 4). Elevene skal her forklare, beskrive, lese eller gjenfortelle det matematiske objektet eller oppgaven.

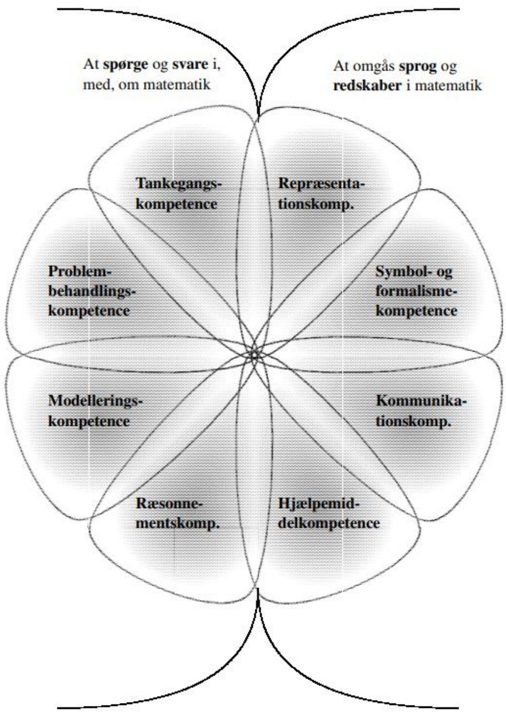
Knudtzon beskriver fire representasjonskategorier brukt på elevenes skriftlige arbeider; symbolsk (symboler, spesielt tall og bokstaver), figurer (tegninger og bilder), skjematisk (tabeller og diagrammer) og verbal (skriftlige forklaringer eller resonnement) (Monoyiou et al., 2007, sitert i Knudtzon, 2019, s. 134).

2.7 Matematisk kompetanse

Kompetanse er et kjent begrep med ulike betydninger i forskjellige settinger. I overordnet del av læreplanen blir begrepet kompetanse beskrevet som følgende:

> Kompetanse er å kunne tilegne seg og anvende kunnskaper og ferdigheter til å mestre utfordringer og løse oppgaver i kjente og ukjente sammenhenger og situasjoner. Kompetanse innebærer forståelse og evne til refleksjon og kritisk tenkning (Kunnskapsdepartementet, 2017, s. 11).

Innen matematisk kompetanse har vi blant annet kompetansemodellen til Mogens Niss og Tomas Højgaard Jensen. Kompetanse innen et område vil si at en person er i stand til å handle med gjennomslagskraft, oversikt, sikkerhet og skjønn innen det aktuelle området (Niss & Jensen, 2002, s. 43). Matematisk kompetanse innebærer at en har kunnskaper, forståelse, praktisering, anvendelse og at en kan ta stilling til ulike sammenhenger som både inkluderer og ikke inkluderer matematikk. Modellen som ble konstruert identifiserte åtte sentrale matematiske kompetanser. Kompetansene har hver sin identitet og fokus, men det kreves at en ser på de som en helhet som overlapper hverandre. De åtte kompetansene kan deles i to grupper: «At kunne spørge og svare i og med matematik» og «At kunne håndtere matematikkens sprog og redskaber» (Niss & Jensen, 2002, s. 44). I dette kapittelet blir seks av kompetansene beskrevet. Modellen nedenfor er en visuell representasjon av de åtte matematiske kompetansene.



Figur 2: Niss og Jensens modell (Niss & Jensen, 2002, s. 45).

2.7.1 Problembehandling

Problembehandlingskompetansen går under gruppen «At kunne spørge og svare i og med matematik» (Niss & Jensen, 2002, s. 49). Problembehandling handler om å kunne oppdage, formulere, avgrense og løse alle ulike matematiske problemer. Niss og Jensen (2002) skriver deretter at matematiske problemer skal løses «"rene" såvel som "anvendte", "åbne" såvel som "lukkede"» (s.49). Problemene skal også kunne løses på forskjellige måter.

Et formulert matematisk problem krever en matematisk undersøkelse for å finne svaret (Niss & Jensen, 2002, s. 49). Begrepet matematisk problem er individuelt, et problem for en kan være en rutine for en annen. Dermed blir begrepet unikt og ikke universelt. Alle matematiske spørsmål er ikke et problem. Eksempelvis, hvis vi har spørsmålet «hva betyr 3 i 253?». Dette krever begrepsforståelse og språkbruk framfor en matematisk undersøkelse. Å kunne oppdage og formulere matematiske problemer er ikke det samme som å kunne løse ferdig formulerte oppgaver. En kan ha gode problemløsningsevner til å løse matematiske problemer, uten være i stand til å lage dem, eller en kan ha gode evner til å lage matematiske problemer, uten å nødvendigvis være i stand til å løse de (Niss & Jensen, 2002, s. 49–50).

2.7.2 Tankegangskompetanse

Tankegangskompetansen går under gruppen «At kunne spørge og svare i og med matematik» (Niss & Jensen, 2002, s. 44). Denne kompetansen innebærer å forstå matematiske spørsmål før en videre skal kunne stille slike spørsmål selv, og ha tenkt gjennom ulike typer svar som kan forventes (Niss & Jensen, 2002, s. 47). En del av tankegangskompetansen er å utvikle en dyp forståelse av matematiske begreper (begrepsforståelse), inkludert omfang og begrensninger, og hvordan de forholder seg til hverandre på ulike felt. Det er også avgjørende å kunne utvide begreper ved å identifisere egenskapene og forstå hvordan resultatene kan generaliseres. Videre omfatter tankegangskompetansen evnen til å skille mellom ulike typer matematiske utsagn og påstander, inkludert «"betingede udsagn", "definitioner", "sætninger", "fænomenologiske påstande" om enkelttilfælde og "formodninger" baseret på intuition eller erfaringer med specialtilfælde» (Niss & Jensen, 2002, s. 47). Tankegangskompetansen innebærer også evnen til kritisk tenkning. En spesielt viktig del av kompetansen er forståelsen av rollen som eksplisitte eller implisitte kvantifiseringer spiller i matematiske utsagn, spesielt i kombinasjon av dem (Niss & Jensen, 2002, s. 47). Tankegangskompetansen er relevant for matematikkundervisningen da læreren må ha en grunnleggende innsikt i ulike matematiske spørsmål som er relevante for faget og som er faglig tilpasset sine elever (Niss & Jensen, 2002, s. 84). Dette innebærer ikke bare evnen til å formulere spørsmål, men også ha tenkt igjennom mulige svar fra elevene. Ofte vil elevers observasjoner og resultater være knyttet til tidligere erfaringer. Det er derfor viktig at læreren bygger videre på slike situasjoner og eksempler og viser de generelle egenskaper og sammenhenger. Læreren har også som oppgave å vurdere om elevene er i prosessen med å navngi matematiske objekter, eller om de kommer med beskrivende utsagn om egenskapene (Niss & Jensen, 2002, s. 84).

På grunnskolenivå handler denne kompetansen om å praktisere matematisk tenkning i form av elementær matematikk (Niss & Jensen, 2002, s. 196). Dette innebærer forståelse av grunnleggende begreper som størrelser, tall og rom, relevant til den aldersgruppen elevene befinner seg i. I de første årene handler det om å skille mellom ulike typer matematiske utsagn og å kunne skille mellom definisjoner og påstander. Å kunne håndtere betingede utsagn er en del av denne forståelsen. Over tid når elevene starter på mellomtrinnet og oppover, forventes det en gradvis økende utvikling til å skille mellom ulike typer matematiske utsagn. Det forventes at når elevene blir eldre vil de få en dypere forståelse for omfanget av gitte matematiske begreper, og hvilke typer svar som kan forventes knyttet til elementær matematikk (Niss & Jensen, 2002, s. 196).

2.7.3 Representasjonskompetanse

Representasjonskompetansen innebærer evne til å kunne forstå, arbeide og tolke ulike typer matematiske representasjoner, samt kunne bruke representasjonene effektivt og på en meningsfull måte (Niss & Jensen, 2002, s. 56). Ulike typer representasjoner kan være matematiske objekter, fenomener, problemer eller situasjoner. Dette inkluderer «[…] symbolske, specielt algebraiske, visuelle, geometriske, grafiske, diagrammatiske, tabelmæssige eller verbale repræsentationer, men også konkrete repræsentationer ved materielle objekter […]» (Niss & Jensen, 2002, s. 56). Videre må elevene ha en forståelse av sammenhengen mellom de ulike typene, ha kunnskap om styrker og svakheter og å kunne velge den mest hensiktsmessige representasjonen i matematiske ideer og sammenhenger (Niss & Jensen, 2002, s. 56).

Alle elevgrupper vil ha ulike bakgrunner og forutsetninger, det er derfor viktig at læreren imøtekommer elevgruppen best mulig i forhold til gjennomføring av matematikkundervisningen (Niss & Jensen, 2002, s. 98). Læreren skal tilrettelegge undervisningen i forklaringer og i arbeidet med matematiske begreper, temaer og problemstillinger. Læreren skal ha et bredt spekter av matematiske representasjoner og skal bidra til utviklingen av elevenes bruk og valg av representasjon.

Symbolske representasjoner er av spesiell betydning i matematikken (Niss & Jensen, 2002, s. 213). I startfasen handler det i hovedsak om tallsymboler og symboler for regneoperasjoner, for eksempel likhetstegnet. På dette nivået henger representasjonskompetansen svært tett sammen med symbol- og formalismekompetansen. Denne kompetansen henger også svært tett sammen med kommunikasjonskompetansen, da det handler om å representere matematiske forhold nært knyttet kommunikasjon. Representasjonskompetansen inkluderer også evnen til å skille mellom standardrepresentasjoner som tallsymboler og andre spontane oppdiktet symboler som er laget for å gjøre løsningen lettere (Niss & Jensen, 2002, s. 213).

2.7.4 Symbol- og formalismekompetanse

Symbol- og formalismekompetansen går under gruppen «At kunne håndtere matematikkens sprog og redskaber» (Niss & Jensen, 2002, s. 58). Symbol- og formalismekompetansen skiller seg fra representasjonskompetansen grunnet fokuset på symbolenes egenskap, status, betydning og håndtering. Denne kompetansen innebærer evnen til å tolke det matematiske språket symbolsk og formelt, og å håndtere og anvende symbolske utsagn og uttrykk. Videre handler det om å kunne oversette symbolsk matematisk- og naturlig språk og ha bevissthet rundt egenskapene og reglene for formelle matematiske systemer, enten de er symbolske eller ikke-symbolske. Tallsymboler og grunntegn forbundet med aritmetiske operasjoner er også en del av matematiske symboler i tillegg til avanserte matematiske spesialsymboler (Niss & Jensen, 2002, s. 58–59).

Læreren skal ha gode avkodingsferdigheter i symbol- og formalismespråket for å kunne støtte elevenes arbeid ved ulike symbolske uttrykk i form av beskrivelser, forklaringer, illustrasjoner og konkretiseringer (Niss & Jensen, 2002, s. 100). For å kunne praktisere elevenes oversettelser krever det at læreren selv mestrer å oversette frem og tilbake mellom symbolsk matematisk og naturlig språk. Flere elever strever med å oppstille, omforme og anvende symbolske uttrykk på nesten alle trinn. Dersom læreren har gode kunnskaper og ferdigheter i håndteringen av slike uttrykk, kan læreren skape gode tilpassede undervisningstimer. Læreren må tilpasse undervisningen ved at elevene får testet evnene sine i ulike symbolske uttrykk og utsagn og det er særlig viktig å hjelpe elevene som har en annerledes og kanskje mer kreativ tilnærming (Niss & Jensen, 2002, s. 100).

2.7.5 Kommunikasjonskompetansen

Kommunikasjonskompetansen går under gruppen «At kunne håndtere matematikkens sprog og redskaber» (Niss & Jensen, 2002, s. 44). Kommunikasjonskompetansen består både av det å kunne forstå og tolke matematiske tekster, men også det å kunne formulere seg matematisk med en teoretisk presisjon. Begge disse delene kan være i form av skriftlig, muntlig og visuelt (Niss & Jensen, 2002, s. 60). Kommunikasjonskompetansen er viktig i samhandling mellom avsender og mottaker, og hvordan disse parter kan kommunisere i, med og om matematikk. I kommunikasjonen skal et budskap og et formål videreformidles, og graden dette lykkes avhenger i stor grad av avsender og mottakers forutsetning og situasjon. Når elever fremviser sin fremgangsmåte for å komme frem til resultatet, viser dette et tydelig eksempel fra uttrykkssiden. Det gir mulighet for forklaring av hvordan tankeprosessen fungerer for problemløsning. Å lese hvordan tolkning og dekoding av oppgavetekster kan foregå, vil gi eksempler på mottakers perspektiver. Kommunikasjonskompetanse er også svært sentralt for å kunne inngå i muntlige diskusjoner om matematikk. Det kan være elever seg imellom, eller sammen med lærer. Økt kompetanse gir økt sannsynlighet for forståelse av samtalen, samt et større utbytte for alle parter (Niss & Jensen, 2002, s. 60–61).

For å få mest mulig utbytte av kommunikasjon mellom avsender og mottaker, vil det som nevnt være avhengig av deres forutsetninger for kommunikasjon (Niss & Jensen, 2002, s.65). Dette innebærer at begge parter er i stand til å uttrykke seg med klart og tydelig språk når det gjøres rede for tankegang rundt løsningen av et matematisk problem og samtidig kunne forklare med fagbegreper og tekniske termer tilhørende matematikkfaget. Dersom en eller begge parter mangler slike ferdigheter, vil det øke risikoen for at budskapet endres og misoppfatninger kan oppstå. Enten når det formidles fra avsender eller mottas av mottaker.

For lærere er dette også svært sentralt. En lærer må være i stand til å forstå og tolke det elevene leverer skriftlig og forklarer muntlig (Niss & Jensen, 2002, 104). Lærer må tilpasse seg de ulike elevers språk, teoretisk nivå og deres evne til å presisere. Lærer må også selv kunne uttrykke seg matematisk på ulike måter, både skriftlig og muntlig. Undervisningstimer kan inneholde variasjon i den faglige språkbruken, samt kombinere eller veksle mellom bruk av muntlig, tekst og visualisering (Niss & Jensen, 2002, s.104). Lærer må også være i stand til å kunne vurdere kommunikasjonskvaliteten i faglig litteratur og annet undervisningsmateriale som tas i bruk (Niss & Jensen, 2002, s.101). Det som benyttes av elever må være tilpasset deres forventede kommunikasjonsnivå, dette kan gjelde de oppgaver og prøver som gis til elevene.

For elever på barneskolen vil kommunikasjonskompetansen for det meste dreie seg om å sette seg inn i og forstå det som presenteres skriftlig, muntlig eller visuelt av matematikken (Niss & Jensen, 2002, s.219). Det er også et mål om at elevene klarer å uttrykke seg noe forståelig på de samme metodene. Fra mellomtrinnet er det mer ønskelig at elevene i tillegg har kompetansen til å uttrykke seg på forskjellige måter, med ulike nivåer og med ulik presisjon.

2.7.6 Koblinger mellom kompetansene

Kompetansene til Niss og Jensen (2002) henger tett sammen til tross for ulike fokus og betydninger (s. 44). Problembehandlings-, resonnements- og tankegangskompetansen er blant annet tre kompetanser som kan knyttes til hverandre i arbeidet med matematiske spørsmål. Disse tre kompetansene befinner seg i samme gruppering, inn under gruppen: «At kunne spørge og svare i og med matematik» (Niss & Jensen, 2002, s. 44). Tankegangskompetansen vektlegger spørsmålene, problembehandlingskompetansen fokuserer på strategier som brukes i utregningen og resonnementskompetansen handler om begrunnelser av påstander og valg av metode (Niss & Jensen, 2002, s. 63). I andre gruppering i modellen kan representasjonskompetansen, kommunikasjonskompetansen og symbol- og formalismekompetansen også henge tett sammen. Representasjonskompetansen legger vekt på selve representasjonen og mulighetene for valg av representasjon. Symbol- og formalismekompetansen vektlegger riktig håndtering av symbolspråk og formelle systemer. Kommunikasjonskompetansen fokuserer på hvordan en kommuniserer i, med og om matematikk (Niss & Jensen, 2002, s. 63).

2.8 Åpne og lukkede oppgaver

I matematikken er det to hovedkategorier av oppgaver: åpne og lukkede oppgaver (Karlsen, 2017, s. 36). Både åpne og lukkede oppgaver utfordrer elevene på ulike måter. En åpen oppgave er en oppgave som kan ha flere ulike svar og løsninger. Åpne oppgaver krever at eleven bruker kreativ tenkning og problemløsning for å finne svaret. Dersom en oppgave er åpen vil det finnes flere muligheter som varierer mellom hvor effektive og hensiktsmessige de er, og det åpner mer opp for diskusjoner dersom en oppgave er åpen (Karlsen, 2017, s. 36).

På den andre siden har vi lukkede oppgaver som har en bestemt løsning og en bestemt prosedyre eller formel for å finne svaret (Karlsen, 2017, s. 36). Lukkede oppgaver har som regel et klart og entydig svar og krever ofte at eleven har god forståelse av grunnleggende matematiske begreper og ferdigheter.

3 Metode

I dette kapittelet blir det redegjort for de ulike metodene som blir benyttet i min forskning. Jeg skal gjennomføre en kvalitativ undersøkelse hvor jeg skal gå inn i en klasse og samle inn elevenes skriftlige besvarelser når de arbeider med tre problemløsningsoppgaver. Jeg skal også observere dem når de arbeider og gjennomføre korte intervjuer/samtaler i etterkant.

Kvalitative metoder tilhører samfunnsvitenskapelig forskning og innebærer å identifisere og beskrive metoder som er kvaliteter i sosiale fenomener og å få en forståelse (Nyeng, 2012, s. 71). En kvalitativ undersøkelse vil gå mer i dybden enn en kvantitativ undersøkelse og det vil gi mye informasjon fra få enheter. Dette kan gi et innholdsrikere perspektiv og dermed kan en få gode detaljerte datainnsamlinger fra fenomenet. En vil også tilegne seg mer informasjon om hvorfor og hvordan (Nyeng, 2012, s. 72–73). Kvalitativ forskning vil få resultater fra et fåtall. På den måten kan disse resultatene være særegent for det spesifikke utvalget og ikke gjelde nødvendigvis nasjonalt og gjennomsnittlig.

3.1 Utvalg

Undersøkelsen min ble gjennomført i en klasse på 5.trinn i Vestfold og Telemark fylkeskommune. Utvalget mitt bestod av 22 elever, 12 jenter og 10 gutter. I klasserommet under gjennomføringen var det en lærer og en assistent til stede, i tillegg til meg som en deltagende observatør. Klassen var en normal klasse med forskjellige utfordringer og etnisiteter. 5. trinn består av 3 ulike klasser, hvor jeg gjennomførte forskningen i den ene klassen.

Bakgrunnen for valg av 5. klassinger er grunnet at den internasjonale studien TIMSS og nasjonale prøver gjennomføres på blant annet norske 5. klassinger (Universitetet i Oslo, 2023; Utdanningsdirektoratet, 2017). Blant begge disse testene, under rammeverket, skal elevene bli testet i problemløsning. En annen bakgrunn for valg av 5. klasse er grunnet mitt ønske om å arbeide mest på 3. til 5. trinn, og jeg ønsket derfor mer innsikt i deres tenkemåter.

3.2 Koding og beskrivelser

Arbeidet besto av å gå igjennom alle de 66 elevbesvarelsene (tre oppgaver gjort av 22 elever). Det er omfattende å se på så mange løsninger, så det har blitt gjort mange valg underveis. Jeg har prøvd å forstå hva de har gjort og tenkt, og sett på bruken av strategier og representasjoner. Jeg arbeidet både med en oppgave av gangen og alle elevsvarene på den oppgaven og på helheten av enkelte elever. Begrunnelsen til at jeg gjorde dette var for å se nærmere på forskningsspørsmålene. Det har vært hensiktsmessig å se på en oppgave av gangen, da oppgavene er forskjellige. Selve tilnærmingsmetoden hos eleven kan være lik uansett den enkelte oppgaven.

Under koding av arbeidet ble det opprettet et eget dokument, for å kunne plassere de ulike elevsvarene under strategiene. Elevbesvarelsene ble plassert etter mine tolkninger av beskrivelsene for strategiene. Elever som hadde benyttet seg av flere strategier samtidig, ble skrevet opp under de strategiene som ble brukt. Der elevene tegner ulike tegninger ble plassert under *visualisering*. Elever som tegnet opp ulike tabeller, blir plassert under *lage en systematisk tabell*. Der elevene prøver å regne ut oppgavene flere ganger eller på ulike måter ble plassert under *prøve og feile*. Elever som klarte oppgaven på første forsøk eller som hadde skrevet ulike tall ble også inkludert i strategien *prøve og feile*, da det er vanskelig å uttale seg om de har regnet i hodet først.

Innen representasjon vil det bli sett på både hvordan elevene representer og sine transformasjoner. Det vil bli sett på elevbesvarelser som arbeider innen samme representasjonssystem, men også elevbesvarelser hvor de gjør en overgang fra et representasjonssystem til et annet. Ved analysen av datamaterialet kan det være vanskelig å vite hvilken rekkefølge eleven har notert. I noen tilfeller kan det oppklares ved intervju.

En del elevbesvarelser er svært utfordrende å tolke. Hovedarbeidet var å se på alle elevbesvarelsene og systematisere det. Det var derfor viktig å stadig se over elevbesvarelsene som kunne være utfordrende å tolke. Det ble også laget et dokument som besto av beskrivelser på hva elevene hadde gjort, og hva som antagelig kunne være grunnen.

3.3 Oppgavene som ble brukt i gjennomføringen

I arbeidet med å finne problemløsningsoppgaver har jeg gjennomført mange søk på nettet, og sammenlignet oppgaver fra flere ulike nettsider. Oppgavene ble utformet på grunnlag av hva problemløsning handler om, hvilke problemløsningsstrategier jeg kan anta elevene benytter seg av, og hvilke oppgaver jeg ser som interessante. Valgte oppgaver er utformet etter problemstillingen. Elevene fikk utdelt oppgavene i sort-hvitt. Bildene som ble brukt i oppgavene ble funnet på nettsiden, Clipart Library, hvor en kan hente og bruke bilder dersom det ikke er til kommersielt bruk. Det er ikke opplyst skapere av bildene (Clipart Library, u.å.).

Elevene ble forklart at de skulle notere ned alt de tenkte og alle forsøk. Beskjeden ble først sagt muntlig før heftet ble delt ut, hvor det også sto på forsiden av heftet. Her sto det som følgende: *Skriv ned alt du tenker og ikke tegn over der du gjør feil*. Elevene fikk heller ikke lov til å ha viskelær da flere elever antageligvis ville ha visket ut forsøkene sine. De fikk derfor beskjed om å sette et kryss over de utregningene som de mente ble feil.

Alle oppgavene er multimodale, det vil si at de både består av en skriftlig tekst og en figur (Hana, 2014, s. 147; Lesh et al., 1987, s. 6).

Oppgave 1: Deling av sjokoladebiter

Femten sjokoladebiter deles ut blant et ukjent antall elever. Hver elev får minst en sjokoladebit. Ingen elever får det samme antall sjokoladebiter. Hvor mange elever er det når vi deler ut alle sjokoladebitene?

Skriv svaret ditt under her:

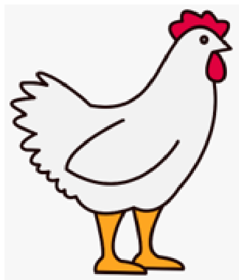
Figur 3: Oppgave 1 i elevhefte

Oppgave 1 ble inspirert av en oppgave på Matematikk.org sine problemløsningsoppgaver (Matematikk.org, u.å.). Dette er en oppgave som har potensialet til å ha flere ulike løsninger da det kan være fra 2 til 5 elever, det vil ikke kunne være en elev da oppgavene spesifiserer at det skal deles ut på et ukjent antall elever, altså flertall. Antall ruter hver elev får kan også fordeles på flere ulike måter. Gode leseferdigheter av tekstoppgaver er noe elevene må kunne når de skal arbeide med denne oppgaven, da det er flere viktige opplysninger ved oppgaven. Elevene må vite at ingen skal få samme antall og at de får minst en bit hver.

Figuren viser en del av en sjokoladeplate inndelt i sjokoladeruter. Det kan gjøre det mer sannsynlig at elevene velger en tegning av en sjokoladeplate som en representasjon.

Oppgave 2: Hvor mange hester og høner?

På gården finnes det både hester og høner. Til sammen har dyrene 32 bein og 10 hoder. Hvor mange hester og hvor mange høner er det på gården?



Skriv svaret ditt under her:

Figur 4: Oppgave 2 i elevhefte

Denne oppgaven gir elevene mulighet til å benytte seg av flere problemløsningsstrategier. Når en informerer om både antall bein og hoder, vil oppgaven bli avgrenset til et bestemt svar. På denne måten blir det en lukket oppgave. Dette var et element som ble tenkt igjennom på forhånd, og elevene fikk derfor vite et bestemt antall bein og hoder. Dersom elevene kun hadde fått vite antall bein og ikke hoder, hadde det blitt en åpen oppgave som kunne gitt flere ulike løsninger. Den ville hatt disse positive heltallige løsningene: (1,14), (2,12), (3,10), (4,8), (5, 6). Tallparene består av (hester, høner). Med både opplysninger om antall hoder og bein får vi ett likningsett med to likninger med to ukjente.

Bildene forsterker teksten ved å vise en hest med ett hode og fire bein og en høne ett hode og to bein.

Oppgave 3: Iskrem

Du skal kjøpe kuleis og kan velge mellom fem smaker: vanilje, sjokolade, jordbær, pistasj og lollipop.
Du kan også velge å kjøpe is i kjeks eller beger.
Du vil kjøpe en is med to forskjellige kuler.
På hvor mange måter kan du sette sammen den isen du vil kjøpe?

Skriv svaret ditt under her:

Figur 5: Oppgave 3 i elevhefte

Oppgave 3 er inspirert av matematikksenteret sin eksempeloppgave under prøve og feile (Torkildsen, 2017, s. 8). Dette er en klassisk kombinatorikk oppgave som kan ha to ulike svar. Den første er elevene som mener at rekkefølgen har noe å si, altså at det er forskjell på for eksempel vanilje–sjokolade og sjokolade–vanilje. Den andre er elevene som mener at rekkefølgen ikke har noe å si, altså at dersom de har valgt vanilje og sjokolade, så kan ikke bruke de samme smakene med hverandre om igjen. Begge svarene vil være riktig da rekkefølgen ikke ble spesifisert i oppgaveteksten.

I utarbeidingen av denne oppgaven ble det tenkt over at ingen av smakene skulle starte på samme forbokstav. Dette var grunnet for å gjøre det enklere for elevene, på den måten ville det da bli enklere for elevene å benytte seg av forkortelse av ordene, og de kunne notere med bare forbokstaven på smakene.

Slik oppgaven var tenkt (at rekkefølgen ikke hadde noe å si) er det en kombinatorikkoppgave med uordnet utvalg uten tilbakelegging når det gjelder iskombinasjonene og i tillegg en dobling fordi de har to muligheter for beholder (kjeks eller beger). $\binom{5}{2} \cdot 2 = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} \cdot 2 = 20$
Hvis rekkefølgen har noe å si blir det en kombinatorikkoppgave med ordnet utvalg i iskombinasjonene og deretter en dobling. $(5 \cdot 4) \cdot 2 = 40$

Bildet av isen i oppgaven har to kuler der den ene er oppå den andre, hadde bildet vist to kuler som er ved siden av hverandre ville det kanskje gjøre at flere elever ville se bort fra rekkefølgen.

3.4 Intervju

I dette masterprosjektet ble det benyttet forskningsmetoden intervju. Etter gjennomføringen av oppgavene ønsket jeg å intervjue elevene for å vite mer om hvordan de tenkte og kom frem til svaret. På den måten kunne jeg få bedre innsikt i hvordan elevene har resonnerte seg fram til svaret, og hvilke løsningsmetoder og utregninger de har brukte. I denne sammenhengen var det viktig at jeg var bevist over min egen påvirkning, og ikke hjalp elevene med deres tankegang. Det var viktig å stille åpne spørsmål hvor jeg ikke legger ord i munnen deres (Anker, 2021, s. 38).

Kvalitative intervjuer fokuserer mer på dybde og innfallsvinkel (Svenkerud, 2021, s. 91). Når det benyttes kvalitative intervjuer, kan en få bedre forståelse av årsaker og holdninger til informantene. I dette tilfellet delte informantene deres perspektiver og tankegang, og på denne måten får jeg innsikt i deres personlige oppfatning (Svenkerud, 2021, s. 92). Kvalitative intervjuer er svært nyttig i kvalitative undersøkelser, hvor det er ønsket å hente ut spesifikk informasjon (Johannesen et al., 2021, s. 105). Intervjuer åpner for at informasjon kan overføres godt og tydelig, og det kan åpne for muligheten til å stille åpne spørsmål, oppfølgingsspørsmål og oppklaringer.

Intervjuer bør planlegges godt i forkant. Dette handler om å utarbeide tydelige målsettinger, og utarbeide en metode for å nå disse målene (Anker, 2021, s. 38). En metode er å benytte seg av en intervjuguide. Dette er en gruppe med spørsmål som er utarbeidet på forhånd, ofte fremstilt som åpne spørsmål. Spørsmålene bør ta sikte på å fremdrive utfyllende og dekkende svar fra intervjuobjektet. Dersom en benytter seg av et semistrukturerte intervju, vil det åpne opp muligheten til å stille oppfølgingsspørsmål. En punktliste med temaer under de ulike spørsmålene kan være hensiktsmessig for å huske hvilke temaer som er interessant å snakke om, og for å forhindre at en benytter tid på irrelevante temaer (Anker, 2021, s. 38).

Intervjuene ble gjennomført 1 til 3 dager etter gjennomføringen. Grunnen til at det tok 3 dager var fordi det tar tid å både intervjue og notere ned hva som ble sagt. Det ble ikke gjort noen andre analyser i løpet av disse dagene, da analysearbeidet startet etter endte intervjuer.

3.4.1 Prosessen rundt intervjuguiden

Min intervjuguide ble utarbeidet i forsøket på å dekke relevante emner i undersøkelsen. Intervjuguiden ble utarbeidet med spørsmål som kunne bidra til å svare på min problemstilling, og som kunne gi gode data. Oppbygningen skulle være et semistrukturert intervju som inkluderte åpne spørsmål. Spørsmålene var designet for å innhente dypere informasjon om elevens tankeprosesser på de ulike oppgavene. På den måten fikk jeg innsikt i hvordan elevene hadde tenkt, og dette ga en mulighet for å observere hvilke strategier og metoder elevene brukte i utregningen.

I forkant av undersøkelsen ble det informert om at elevene dessuten ville bli intervjuet om den skriftlige elevbesvarelsen. Det ble forklart at det var frivillig deltakelse, og at dersom elevene hadde et ønske om å ikke delta skulle de få lov til det uten videre spørsmål. Informasjon om anonymitet og at deres navn hadde forøvrig ingen betydning for min studie.

Alle 22 elevene ble intervjuet i løpet av samme dag frem til to dager etter gjennomføringen. Intervjuene kunne være vare i to dager etter gjennomføringen av oppgavene grunnet elevenes timeplan, her var det enkelte timer elevene ikke hadde mulighet til å gå glipp av. Intervjuene var i form av en samtale om de skriftlige elevbesvarelsene. Det ble ikke målt en tid på hvor lenge intervjuene varte.

3.5 Observasjon

I en observasjon er det ulike tilnærminger en kan velge mellom. Valg av tilnærming varierer ut fra hvor aktiv rollen er (Anker, 2021, s. 36). Min observasjon vil være metoden som kalles delvis-deltagende observasjon. I kvalitative observasjoner velges forhåndsbestemmelser i forkant av observasjonen. En kan velge å observere hva som skjer i det gitte tidspunktet, eller velge å ha forhåndsbestemte kriterier (Dalland et al., 2021, s.125). I min observasjon vil jeg gå inn med bestemte kriterier og benytte meg av det som kalles en punktobservasjon. En punktobservasjon er en observasjon hvor en studerer noe bestemt i en spesiell situasjon eller bestemt gruppe (Anker, 2021, s. 35). For å gjennomføre en punktobservasjon er det viktig at jeg som observatør stiller krav til hva jeg ønsker å finne ut av, og har tenkt nøye igjennom det jeg skal finne ut før jeg går inn i klasserommet. Observasjonen skal fokusere på tiden elevene bruker, innsatsen og engasjementet elevene viser.

Utfordringer med observasjon er å holde seg objektiv, og å få med seg alt planlagt. Vår bakgrunn og synspunkter kan påvirke hvor objektiv en er under observasjonen. Objektivitet handler om å stille seg upartisk og nøytral i en undersøkelse (Johannessen et al., 2021, s. 258). I den kvalitative forskningen, kan ordet objektivitet korrespondere med bekreftbarhet. Tidligere faktorer som erfaringer og holdninger kan påvirke fortolkning og innfallsvinkelen av forskningsprosessen. Det er derfor viktig at forskeren vektlegger beskrivelsen av alle bestemmelser under hele forskningsprosessen, og at en er selvkritisk og legger frem alle kommentarer for leseren (Johannessen et al., 2021, s. 258).

Observatøreffekten er en annen utfordring som handler om at din tilstedeværelse som forsker kan påvirke oppførselen til deltakerne (Dalland et al., 2021, s. 130). Resultatet av dette kan innebære at de innhentede dataene ikke blir dokumentert riktig, og kan være ugyldige. I en forskning med en observatør til stede kan deltakerne oppføre og presentere seg annerledes. Ønske om å vise seg fram fra sin beste side er et behov for mange. I min forskning skal elevene ikke viske ut feil de gjør, til tross for dette vil jeg anta at et par elever kommer til å klusse over det de har skrevet, for å skjule sine feil. For å motvirke denne effekten kan en som observatør presentere seg selv, ved å forklare rolle og hensikt (Dalland et al., 2021, s. 130). Når en ufarliggjør seg i en slik situasjon, kan du trygge deltakerne dine.

3.6 Etiske overveielser

Forskningsetikk kan grovt deles opp i to hovedgrupper (Nyeng, 2012, s. 159). Regler og normer som handler om saklighet, åpenhet og redelighet er den ene delen av forskningsetikk som inngår internt. Den andre delen handler om de eksterne forskningsvurderingene som gjelder i forholdet mellom forsker og deltaker, i undersøkelser og i vitenskapens rolle. I min forskning er det viktig at jeg er saklig og åpen, og skriver ned de empiriske funnene. Det er også viktig at jeg holder meg objektiv som ble videre utdypet i kapittel 3.5.

Det er viktig å være kritisk og å skrive ned refleksjoner til arbeidet (Anker, 2021, s. 111). Gode refleksjoner og evaluering underveis skal beskrives slik at leseren får en forståelse. Ved å vise frem forsknings- og analyseprosessen styrker og forbehold, vil undersøkelsen fremstå mer pålitelig og troverdig (Anker, 2021, s. 111). Alle avvik eller feiloppfatninger vil bli notert og lagt fram.
Etter skriftlig samtale med NSD (til sammen 13 tekstmeldinger) inne på deres side (Norsk senter for forskningsdata, nytt navn Sikt) har jeg fått bekreftet at min studie ikke trenger meldeplikt, ettersom det ikke skal håndteres noen personopplysninger. I forskningen min vil alle opplysninger bli holdt anonyme og det vil ikke bli mulig å spore tilbake. Etter forskningen vil alle ark bli makulert og brent. Elevens navn og identitet har ingen betydning for min undersøkelse. Elevbesvarelsene vil ikke være en personopplysning da de går under *tilfeldig gjenkjenning* (sitat NSD).

Grunnet at deltakerne mine er under 15 år ble det sendt ut et informasjonsskriv til foreldrene (Anker, 2021, s. 107). Dette gir mulighet for foreldrene å trekke sitt barn fra deltagelse i forskningen. Deltagere som ga inntrykk på at de ikke ville gjennomføre av eget ønske skulle også få lov til å trekke seg uten en forklaring. Informasjonsskrivet ble sendt ut i forkant, læreren ble bedt om å sende informasjonen på ukeplanen deres. Her ble det informert om hvem jeg var, hensikten min, kort hva jeg skulle gjøre, og kontaktinformasjonen min dersom foreldrene hadde spørsmål. På informasjonsskrivet ble også informert om anonymitet. Anonymitet skal også sikres ved at det ikke blir gitt detaljerte beskrivelser om plass og personer (Anker, 2021, s. 107). Det ble derfor gjort et valg å skrive hvilket fylke forskningen ble gjennomført i, og ikke navnet på barneskolen.

3.7 Troverdighet og pålitelighet

Brukte begreper innen forskning er validitet og reliabilitet. Validitet i forskning omfatter tolkningen som legges inn i forskningen og observasjonen (Skovholt et al., 2021, s. 91). Under forskningsprosessen må observasjonene tolkes for å komme frem til resultater. Validiteten på materialet blir dannet av tolkningen av dataene og om tolkningen er fornuftig sammenliknet med tidligere forskning. Dette fører til en vurdering av forskningen. Validitet deles opp i to hovedgrupper, ekstern og intern (Johannesen et al., 2016, s.231 f.; Peräkylä, 2004, s.294, sitert i Skovholt et al., 2021, s. 91).

Den interne validitet handler om transparens, troverdigheten av det som forskes på. Videre innebærer den at forskningen er representativ ut fra valgte kriterier. Begrepsvaliditeten, altså sammenhengen mellom begrepene som benyttes og observasjonen, er også en del av den interne validiteten. Den eksterne validiteten handler om overførbarheten og generaliseringen, om forskningen og observasjonene kan overføres til lignende saker og fenomener (Skovholt et al., 2021, s. 92).

Reliabilitet er et begrep som omfatter hvor pålitelig forskningen er, og om dataen er til å stole på (Johannesen et al., 2021, s. 27; Nyeng, 2012, s. 105). Reliabilitet produserer stabile resultater, og dersom en annen forsker hadde forsøkt å gjennomføre den samme forskningen med samme materiale, skulle resultatet være tilnærmet uendret. Reliabilitets grad vil vurderes ut fra hvor uavhengig resultatene er av den enkelte forskeren og forskningsprosessen. I stor grad er dette avhengig av hvilke data som innhentes, hvilken metode som benyttes for innsamling av data og hvordan dataene behandles videre (Skovholt, 2021, s.93). Det finnes i tillegg ulike metoder for å vurdere reliabiliteten med noe som betegnes for *test–retest–reliabilitet* (Johannesen et al., 2021, s. 27). Dette betyr at dersom en måling eller undersøkelse gjentas under lignende vilkår, vil det bli gitt lignende resultater hver gang. Dette vil gi uttrykk for høy reliabilitet.

4 Analyse av empiri

I denne delen vil det bli presentert de overordnede resultatene fra elevbesvarelsene. Her vil jeg ta for meg de ulike forskningsspørsmålene og dypere analyse av disse. Dette inkluderer valg av strategier benyttet i de ulike oppgavene i sammenheng med riktig svar på oppgavene, og hvilke representasjoner som ble benyttet. Det vil videre fokuseres på noen utvalgte elevsvar hvor det fokuseres på valgte strategier og representasjoner. Målet med studien er å få svar på valgte problemstilling: *Hvordan kommer femtetrinn elevers problemløsningskompetanse til syne i deres skriftlige notater under problemløsning?*

Jeg vil nå belyse og besvare forskningsspørsmål 1 i kapittel 4.1 og 4.3 og forskningsspørsmål 2 i kapittel 4.2. og 4.3.

4.1 Første forskningsspørsmål

Hoved essensen i dette masterprosjektet er å se hvordan elevene arbeider med problemløsning, samt hvilke strategier og representasjoner de benytter seg av. Dette kapittelet er for å besvare første forskningsspørsmål: *Hvilke strategier benytter elevene og på hvilken måte representeres de ulike strategiene?* Det ble observert at elevene i hovedsak benytter seg av en visuell eller symbolsk representasjon. Blant strategiene for problemløsning brukte elevene *visualisering*, *prøve og feile* og å *lage en systematisk tabell*. For å få en god oversikt over hvilke representasjoner og strategier elevene brukte vil jeg presentere oppgavene før det beskrives dypere hvordan elevene løste oppgavene. Jeg har valgt å presentere oppgavene hver for seg da de er matematisk forskjellig.

Videre vises en tabell over de ulike strategiene som ble benyttet i de ulike oppgavene. Elevene som klarte oppgaven på første forsøk er inkludert i *prøve og feile*. Dette er grunnet usikkerhet i elevens fremgangsmetode, om det ble korrekt grunnet gode hoderegningsferdigheter eller om det var mer tilfeldigheter som gav korrekt svar.

Tabellen nedenfor viser ved hjelp av bokstaver hvilke strategier elevene brukte i de ulike oppgavene: Visualisering = V, prøve og feile = P og lage en systematisk tabell = T.

Elev nr.	Kjønn	Oppgave 1	Oppgave 2	Oppgave 3
1	gutt	P	P	P
2	gutt	V	P	V, P
3	gutt	V, P	V	V
4	gutt	P	P	P
5	gutt	V, P	V	P
6	gutt	V	P	P
7	jente	V, P	T, P	V
8	jente	P	P	V, P
9	jente	V, P	T	V
10	jente	V, P	V, P	V, P, T
11	gutt	P, T	P	V
12	jente	P	P	P
13	jente	V, P	P	V, P
14	jente	V, P	V, P	V, P
15	jente	P	V	P
16	gutt	V, P	V, P	V, P
17	gutt	P	P	P
18	jente	V	P	T
19	jente	V, P	V, P	V
20	jente	V, P	V, P	V
21	gutt	V	V, P	V
22	jente	V, P	P	V, P
Sum		15V,18P, 1T	9V, 18P, 2T	14V, 14P, 2T

Tabell 1: Hvilke strategier elevene brukte i de ulike oppgavene

Det ble også utarbeidet en tabell som viser hvilke oppgaver elevene besvarte korrekt opp mot tidsbruket. Begrunnelsen for at det ble laget to tabeller var for å ha en bedre oversikt over de ulike tallene da det ble uoversiktlig å ha de samlet. Tabellene er ment for å gi en helhetlig oversikt.

Elev nr.	Oppg. 1	Oppg. 2	Oppg. 3		SUM	Tidsbruk
1	1	0	0		1	32
2	1	1	1		3	10
3	1	0	0		1	18
4	1	0	0		1	12
5	0	1	1		2	20
6	1	0	0		1	18
7	1	1	1		3	17
8	0	0	0		0	23
9	1	1	1		3	64
10	0	1	0		1	11
11	1	1	1		3	8
12	0	0	0		0	64
13	0	0	1		1	24
14	1	0	0		1	17
15	0	0	0		0	20
16	1	0	1		2	24
17	0	0	0		0	27
18	1	1	1		3	31
19	1	0	0		1	54
20	0	1	0		1	10
21	0	0	0		0	12
22	1	0	0		1	18
SUM	13	8	8	**Gj.snitt**	1,32	24

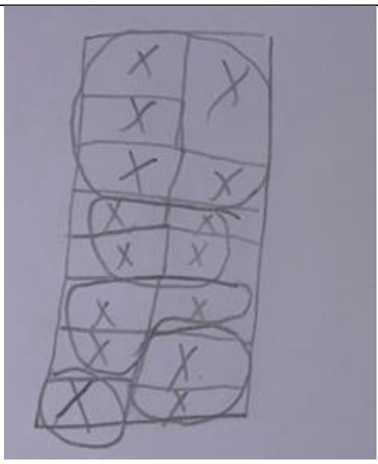
Tabell 2: Hvilke oppgaver elevene hadde riktig og hvor lang de de brukte

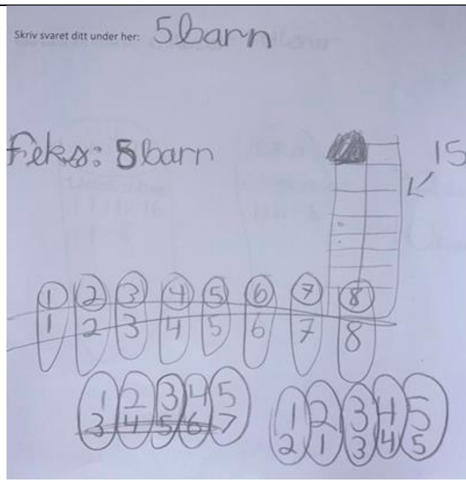
Oppgavene viser ingen tydelige kjønnsforskjeller blant resultatene. Det er relativt lik løsningsfrekvens på gutter og jenter. For å kunne tydeligere se en kjønnsforskjell måtte en hatt et større utvalg. I oppgave 1 besvarte 13 elever riktig på oppgaven. Dette er en oppgave som potensielt kan ha mange ulike løsninger. Elevenes løsninger hos de som klarte det var 1+2+3+4+5 (denne med en vri, 2+1+3+4+5), 10+1+4, 5+6+4 og 2+3+4+6. I både oppgave 2 og 3 var det åtte elever som hadde riktig. Oppgave 3 har som tidligere skrevet to mulige løsninger. Det er 40 ulike kombinasjoner der elevene mener rekkefølgen har noe å si, altså at det er forskjell på vanilje–sjokolade og sjokolade–vanilje. Det kan også være 20 kombinasjoner dersom elevene mener rekkefølgen ikke har noe å si. Både i oppgave 1 og 3 var det elever som misforsto oppgavene slik at det ble feil svar. Oppgave 1 var det bildet av sjokoladeplaten ved siden av teksten som skapte en forvirring hos den ene eleven. Elevene hadde funnet fram til løsningen 150 og forklarte under intervjuet at han hadde tenkt multiplikasjon. Han hadde multiplisert de 15 sjokoladerutene fra oppgaveteksten med 10 (antall ruter han telte på bildet). Misforståelsen i oppgave 3 handlet om oppgaveformuleringen, «[…] den isen du vil kjøpe». Elevene hadde tenkt hvilke is de selv ville ha valgt å kjøpe. Totalt var det 4 elever, 18%, som tenkte dette. I tillegg var det to elever som hadde tenkt utformingen av isen og hvordan den kunne settes sammen. Den ene eleven hadde tenkt at det var tre muligheter for å sette sammen en is; nr. 1. valget mellom kjeks eller beger, nr. 2. valg av smak og nr. 3. var om en ville ha kuleis eller ikke. Den siste eleven hadde tenkt fire muligheter: nr. 1. to kuler oppå hverandre i kjeks, nr. 2. to kuler ved siden av hverandre i kjeks, nr. 3. to kuler oppå hverandre i beger og nr. 4. to kuler ved siden av hverandre i beger.

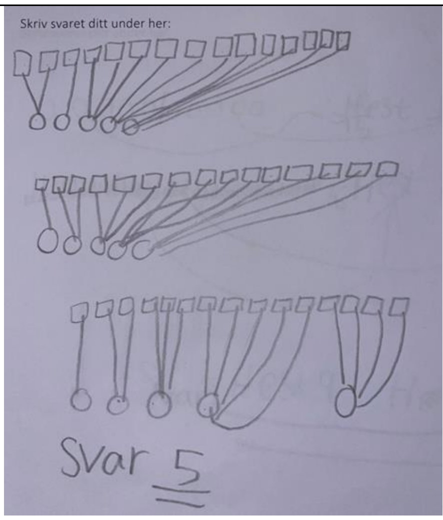
Jeg ønsket å kartlegge hvor lang tid elevene brukte totalt på oppgaveheftet. Dette var grunnet ønske å se hvor land tid de brukte i gjennomsnitt på oppgavene, og å se om det var noen forskjeller på tidsbruken til jentene og guttene. Det var et stort spenn på antall minutter mellom den første eleven (gutt) som leverte etter åtte minutter og de to siste (jenter) som leverte etter 64 minutter. Gjennomsnittstiden ble målt til 24 minutter og medianen var 19 minutter. Alle elevbesvarelsene ga inntrykk av at elevene hadde gjort en innsats da alle hadde et forsøk på å løse oppgavene. Før elevene leverte fikk de muligheten til å se over løsningene sine og eventuelt se om de trengte å gjøre noen endringer. Denne tiden ble ikke notert ned, noe som i etterkant burde vært notert og analysert. På denne måten kunne man observere hvor lang tid noen elever brukte ekstra, eller hvor mange elever som ikke mente de hadde behov for ytterligere tid. Disse resultatene kunne også blitt sammenlignet for å se hvilken gruppe som hadde flest riktige, de som satte seg ned igjen opp mot de som leverte med en gang. Ved å se på kjønnsforskjellene på tidsbruken ble det målt et gjennomsnitt på 29 minutter hos jentene og 18 minutter hos guttene. Dette tilsvarer at guttene regnet ut oppgavene i gjennomsnitt elleve minutter raskere enn jentene.

4.1.1 Analyse av oppgave 1

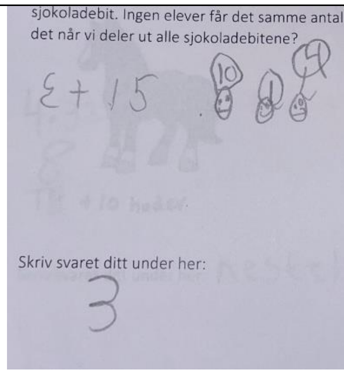
I oppgaven med fordeling av sjokolade benyttet de fleste elevene visuell eller symbolsk representasjon, eller begge samtidig. Visuell representasjon ble brukt i form av ulike tegninger eller ikoniske fremstillinger relevant for oppgaven. Da visualisering både er en strategi og en representasjon blir de omtalt sammen da de har mange av de samme likhetstrekkene. Et skille mellom dem er bruken av tabeller. Tabeller vil være innunder visuell representasjon, mens det er en egen strategi. I oppgave 1 tegnet elevene enten sjokoladen i form av sjokoladebiter eller en hel sjokoladeplate (Figur 6A, 6B og 6C), eller ulike elever i form av enkle strekfigurer eller sirkler som skulle representere hoder (Figur 6C og 6D). Nedenfor er ulike eksempler innen de ulike måtene elevene visualiserte.

<table>
<tr>
<td>
Elev nr. 2 gjør en behandling fra oppgaven hvor sjokoladeplaten tegnes før han fortsetter med det ikoniske systemet (Duval, 2006, s. 110). Eleven grupperer sjokoladebitene slik at ingen får sammen antall og klarer det på første forsøk.

Eleven har skrevet på siden at svaret blir 5 elever.</td>
<td>
Elev nr. 9 starter med å gå fra oppgavebildet og tegner en sjokoladeplate med 2x8 ruter, for så å ta bort en rute for å få 15. Hun går fort over til bruk av tallsymboler og gjør derfor en overgang til tallsymboler fra visualisering. Hun arbeider med for høye tall og benytter seg derfor av strategien prøve og feile. Hun klarer oppgaven på tre forsøk.</td>
</tr>
</table>

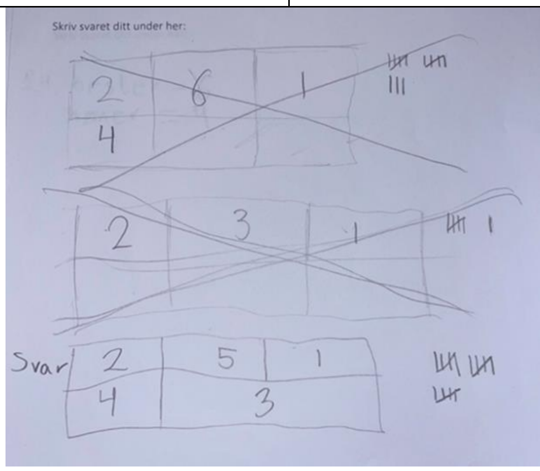


Elev nr. 3 arbeider innen det ikoniske systemet og klarer oppgaven på første forsøk. Grunnet plass prøver eleven å skrive om løsningen sin to ganger før han er fornøyd. Løsningen hans blir da mer oversiktlig.



Elev nr. 6 arbeider innen det ikoniske systemet og klarer oppgaven på første forsøk.

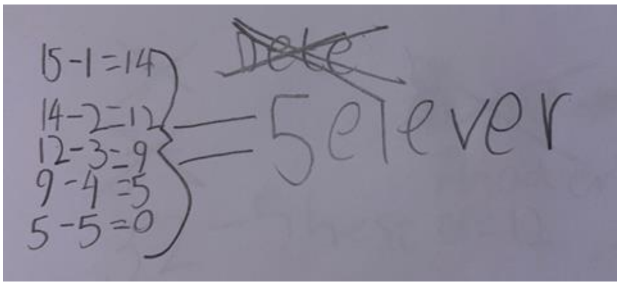
Dette er den eneste eleven som har funnet en løsning med tre elever.



Strategien å lage en systematisk tabell ble kun brukt av elev nr. 11 i oppgave 1. Eleven forsøkte å lage en tabell hvor hver rute var antall sjokoladeruter hver elev fikk, før hun brukte tellestreker på siden for å regne og vise hvor mange det ble til sammen. Da eleven forsøker tre ganger vil eleven også benytte seg av strategien prøve og feile.

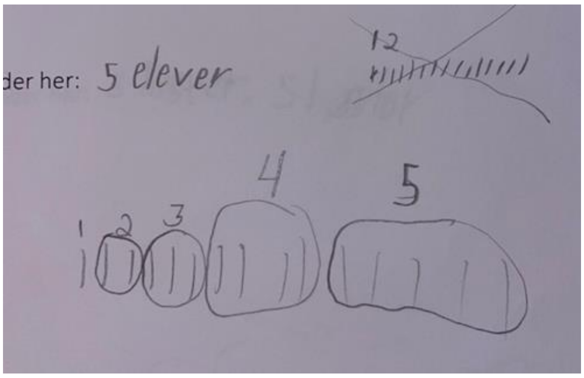
Figur 6A, 6B, 6C, 6D og 6E: Ulike eksempler med beskrivelser, oppgave 1

Symbolsk representasjon ble vist ved at elevene lagde ulike regnestykker, noterte ned tall, ord, bokstaver, eller ved bruk av piler (Hana, 2014, s. 144; Johnson, 2018, s. 3; Knudtzon, 2019, s. 142). De symbolske representasjonene i oppgave 1 var tallene fra 1 til 15 og ordene elev(er), sjokoladebiter/sjokoladeruter og sjokolade. Elevene skrev ned de tallene som passet til sin utregning og skrev hvor mange sjokoladebiter hver elev fikk. Elev nr. 4 gjorde den mest systematiske fordelingen ved hjelp av symbolsk representasjon. Han lagde ulike regnestykker under hverandre hvor han skrev antall biter han hadde igjen, minus antall biter hver elev ville få. Han fikk med seg opplysningen om at ingen skulle få samme antall. Oppsettet på løsningen hans finner jeg interessant grunnet måten han stiller opp regnestykkene og passer på at ingen får samme antall ved at neste får en mer enn den forrige (han subtraherer med en mer for hver gang). Løsningen hans ble slik:

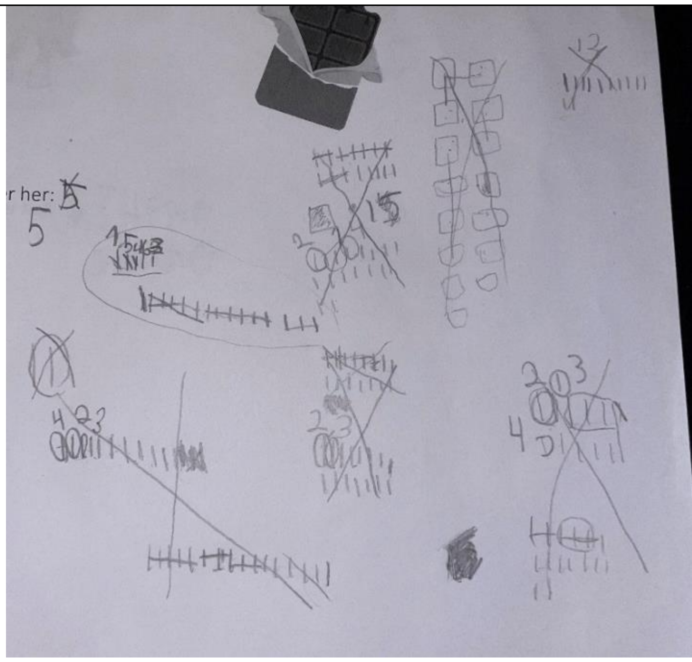


Figur 7: Elev nr. 4, oppgave 1

Slik jeg tolker tellestreker kan det fungere som en bro mellom symbolsk og visuell representasjon ved at det representerer numeriske verdier i form av streker, eller det kan gi en visuell fremstilling av antall. Dersom en skal se på tellestreker som en strategi vil det være under *visualisering*. Flere av elevene brukte tellestreker i løsning sin, enten i form av antall sjokoladeruter totalt eller antall ruter hver elev får. Totalt var det sju elever som brukte tellestreker i oppgaven. Nedenfor vises to ulike eksempler på hvordan tellestreker ble brukt i løsning (Figur 8A og 8B). Den første løsningen bruker i tillegg en kombinasjon mellom symbolsk og visuell representasjon. Her bruker eleven sirkler for å gruppere hvor mange det blir i hver enkelt, noe som kan være en form for visuell representasjon. Den andre løsningen viser en elev som har forsøk flere ulike ganger, altså at hun benytter seg av strategien *prøve og feile*.



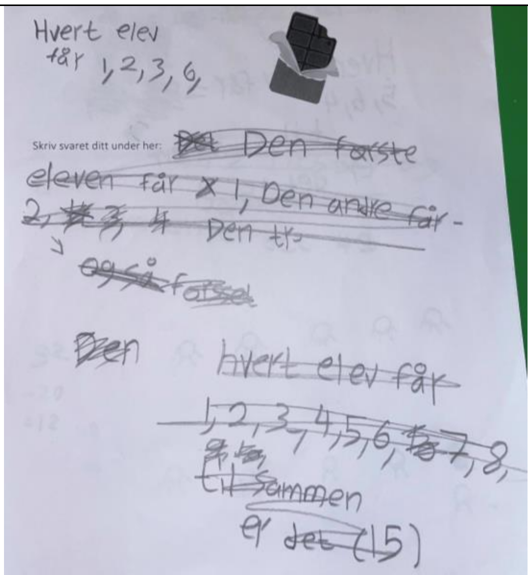
Elev nr. 19



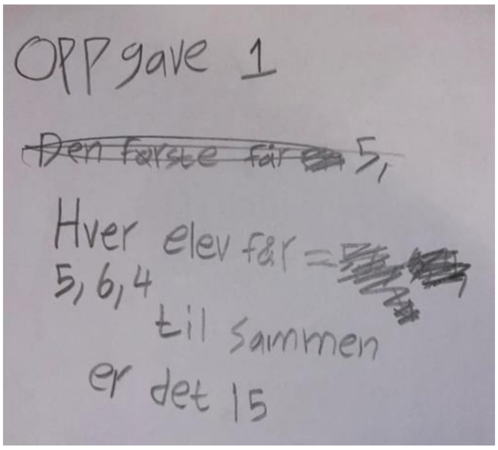
Elev nr. 13

Figur 8A og 8B: Eksempler på bruk av tellestreker i oppgave 1

Det var også en elev som brukte verbal representasjon i form av skriftlig språk (Monoyiou et al., 2007, sitert i Knudtzon, 2019, s. 134). Dette var elev nr. 1. Her skriver han ned hvordan en skal fordele sjokoladerutene og hvor mange de får.



Baksiden:

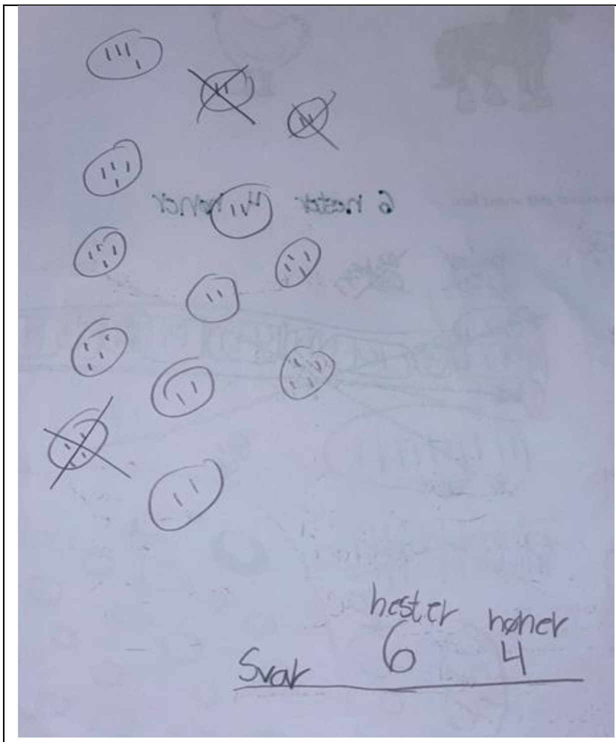


Figur 9A og 9B: Elev nr.1, oppgave 1

Oppsummering fra oppgave 1 viser at de fleste elevene bruker flere strategier. Elleve elever bruker både *visualisering* og *prøve og feile*. En elev brukte *systematisk tabell*. Mange elever brukte det ikoniske representasjonssystemet, de tegnet sjokolade enten i hele platen, sjokoladeruter eller representasjoner for sjokoladerutene i form av streker. Elever ble ofte sirkler som fikk tilordnet sjokoladerutene. Elevene brukte også tallsymboler. Noen elever vekslet mellom ikonisk og symbolsk representasjon. En elev brukte verbal representasjon.

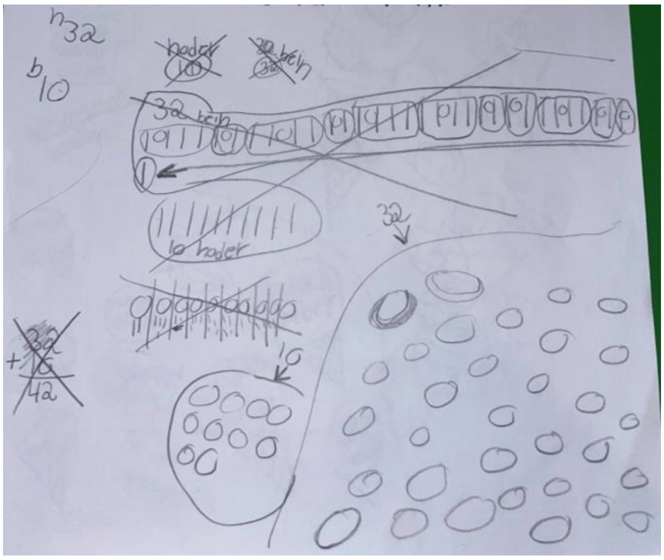
4.1.2 Analyse av oppgave 2

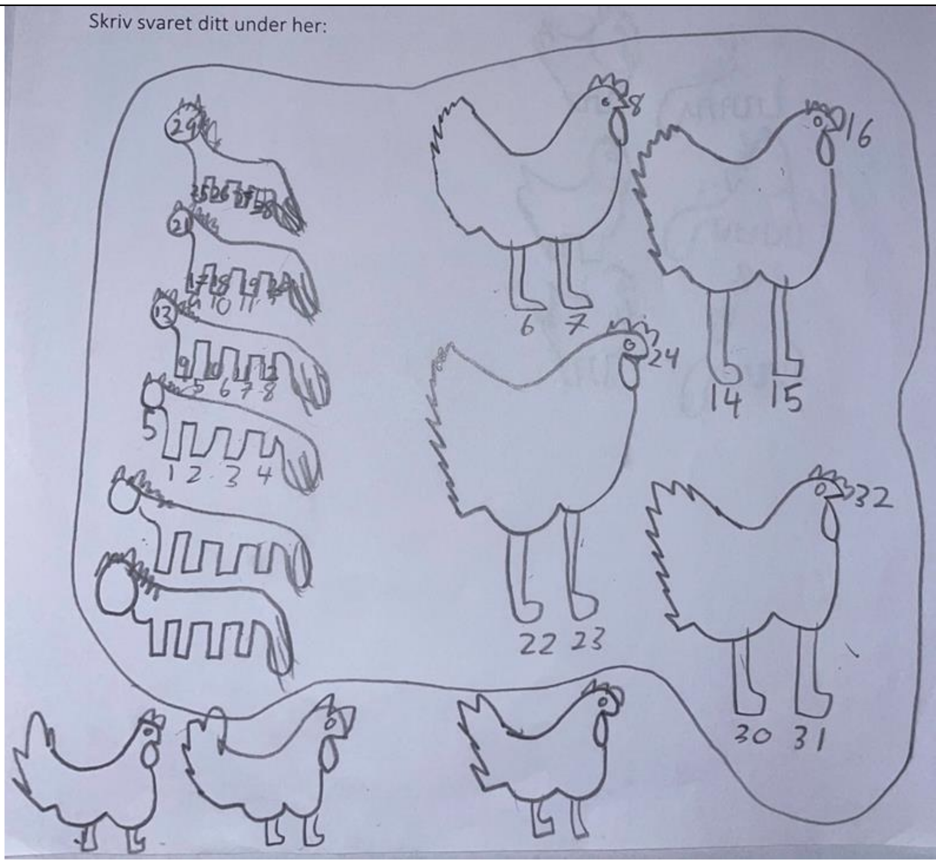
Visualiseringen i oppgave 2 var både i bruk av detaljerte tegninger av dyrene, eller mer abstrakte i form av sirkler for hoder og streker som bein. De fleste elevene som visualiserte brukte sirkler som skulle representere hoder og tellestreker eller streker som skulle representere bein (Figur 10A og 10B). Blant disse hadde de fleste satt strekene på utsiden av sirklene. En elev hadde laget detaljerte dyr og tegnet et visst antall dyr (Figur 10C). Visuell representasjon ble også vist med tabeller, som er en egen strategi.

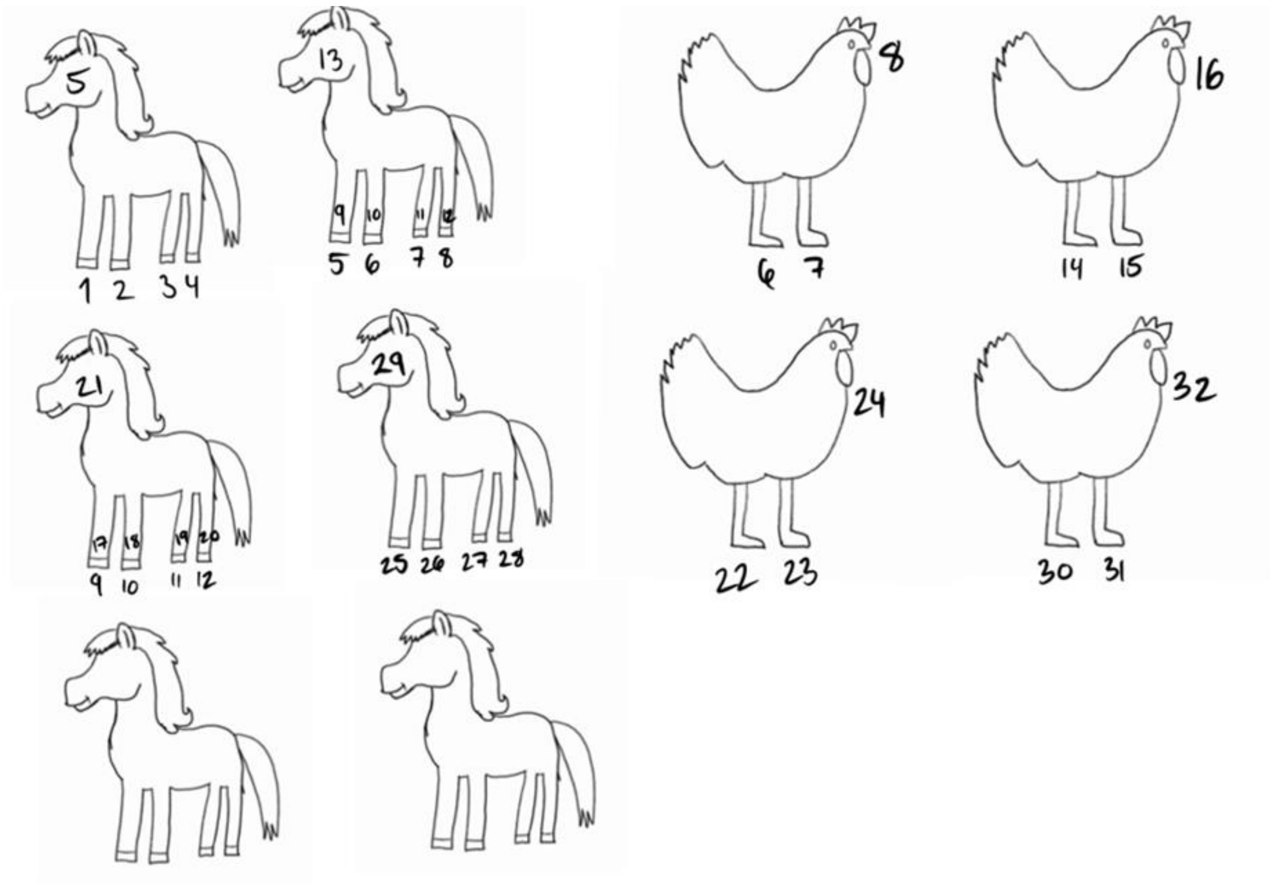


Dette er den endelige løsningen til elev nr. 10 hvor hun lager en ikonisk tegning av dyrene ved bruk av sirkler for hoder og streker for bein. Eleven har

Elev nr. 16 gjør en behandling fra oppgaven hvor den gjør en forenkling av tegning med sirkler for hoder og streker for bein. Videre gjør hun en overgang til tallsystemet hvor hun skriver 32 28 (tatt bort fire bein, hest) og

brukt strategien prøve og feile da hun har krysset ut tre hoder som har vært feil.  Det første forsøket hennes på å løse oppgaven var ved å tegne 32 tellestreker som hun videre forsøkte å fordele ved å gruppere med sirkler, hvor hver sirkel fikk antall bein på det dyret hun lagde. Dette viste seg å være vanskelig og hun ville dermed prøve en annen fremgangsmetode. Begge fremgangsmåtene er en kombinasjon mellom det symbolske og ikoniske systemet.	videre 26 22 18 14 som stemmer med tegningen. Løsningen hennes krever at hun må håndtere både det ikoniske og symbolske systemet samtidig. Det er usikkert å se om hun har tegnet opp alle dyrene først, eller om hun tegner en og en mens hun regner ut. Antagelig har hun tegnet mange dyr først, hvis ikke ville nok 32 stått høyere opp. Hun har krysset over en hest og har da glemt å legge til de fire beina hun hadde. Dermed mister hun fire bein og får feil svar. Eleven har skrevet på siden at hun fant 4 hester og 6 høner.





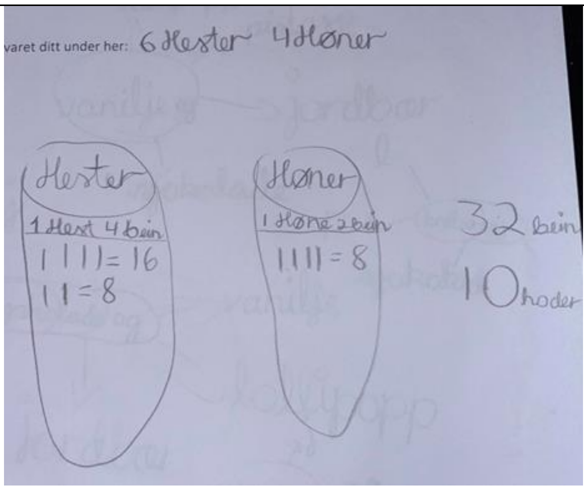
Oppgaven gjenskrevet av meg for å kunne se de ulike tallene litt tydeligere. Hestene står ikke på samme plass som eleven hadde skrevet de, men tallene er plassert slik eleven gjorde det.

Elev nr. 20 gjør en behandling fra oppgaven og jobber tydelig innen en visuell representasjon ved å tegne detaljerte dyr. Det er vanskelig å skjønne tankegangen hennes på utregningen da hun fortsetter å telle antall bein på hodene. Eleven benytter seg også av strategien prøve og feile da hun tegnet for mange dyr. Når hun finner riktig antall dyr markerer hun hvilke som er riktig med en stor sirkler rundt.

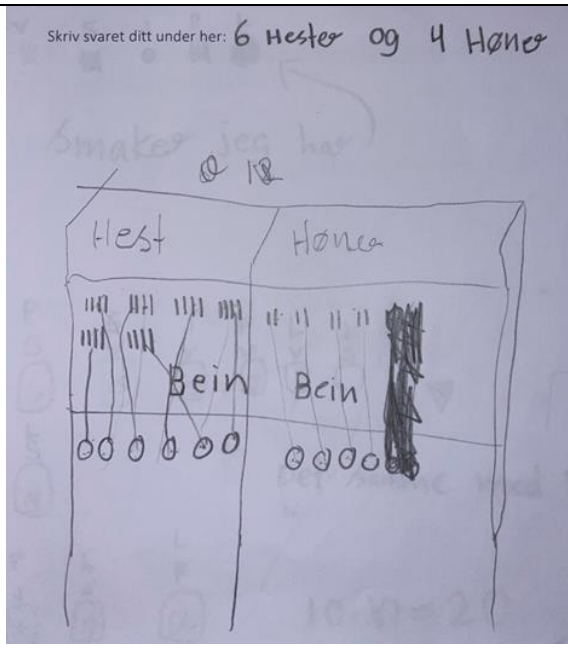
Under samtalen forklarer hun at hun startet med fire av hvert dyr, men da stemte ikke antall bein og hoder. Deretter la hun til flere høner, men da ble det for mange hoder. Til slutt prøvde hun med flere hester og kom frem til endelig løsning.

Figur 10A, 10B, 10C, 10D og 10E: Ulike eksempler med beskrivelser, oppgave 2

I denne oppgaven var det også to elever som hadde forsøkt å lage en tabell. Det er elev nr. 9 hvor hun har laget en tabell med to kolonner, et til hvert dyr. Videre har hun markert med tellestreker for antall dyr hun har. På siden av tellestrekene har hun notert hvor mange bein disse «dyrene» har til sammen. Utenfor kolonnene har hun skrevet opp at dyrene skal til sammen ha «32 bein» og «10 hoder» for å passe på at det blir riktig. Den andre eleven er elev nr. 23 som lagde en tabell bestående av to kolonner (en til hvert dyr) og tre rader (navn på dyret, antall bein og antall hoder).



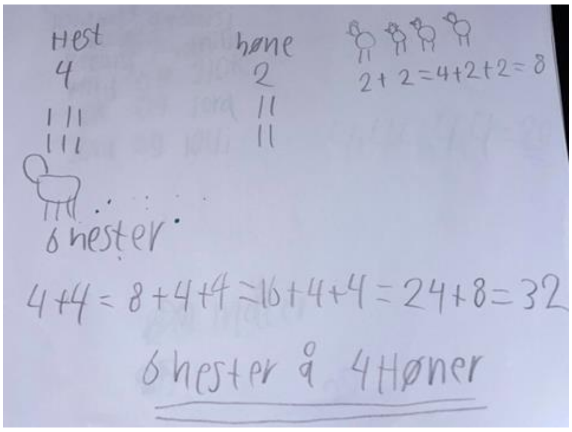
Elev nr. 9 bruker en kombinasjon mellom visuell og symbolsk representasjon, multimodale representasjoner, og bruker strategien lage en tabell. Tellestrekene i denne løsningen viser antall



dyr hun har før hun videre bruker likhetstegnet for å markere antall bein de har til sammen. Eleven har også notert viktig informasjon fra oppgaven for å passe på at det blir regnet riktig.	Elev nr. 23 bruker en visuell representasjon og benytter seg av strategiene lage en tabell og prøve og feile.

Figur 11A og 11B: Eksempler på bruk av tellestreker i oppgave 2

Bruken av symbolske representasjoner i oppgave 2 var i form av å lage ulike regnestykker, skrive navnet på dyret eller bruke relevante tall for oppgaven. Noen elever brukte også den symbolske representasjoner piler. Det ble brukt ved at elevene markerte hvilken informasjon som passet til hva. Eksempelvis hadde en elev tegnet fem hoder og 16 bein, og satt en pil fra disse tegningen til teksten der det sto hest. Det var sju elever som brukte en av regneartene for å finne ut av svaret. De brukte addisjon eller multiplikasjon for å prøve å regne ut hvor mange det ble av hvert dyr for at antall bein og hoder skulle stemme. Et eksempel hos en elev som brukte symbolsk representasjon i form av regneartene var elev nr. 5 (Figur 12). Her startet han med å legge sammen fire høner slik at han fikk åtte bein. Videre legger han sammen et antall hester og finner antall bein de har til sammen. Når han kommer frem til 24 bein legger han til de åtte beina fra hønene og kommer frem til 32. I utregningene hans bruker han i tillegg visuell representasjon ved å både tegne opp de fire hønene, og ved å bruke tellestreker for å markere hvor mange av hvert dyr han har brukt.

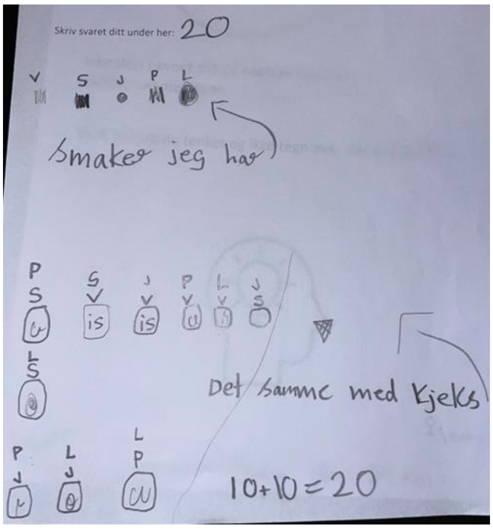


Figur 12: Elev nr. 5, oppgave 2

Oppsummering for oppgave 2 viser at *prøve og feile* er den vanligste strategien, deretter *visualisering*. To elever brukte *lage en tabell* som strategi. De fleste elevene brukte bare en strategi. Av de ni elevene som brukte *visualisering* var det seks elever som kombinerte det med *prøve og feile*. Representasjonene som ble mest brukt var også her det ikoniske systemet. Med tegninger fra detaljerte dyr til mer abstrakte med sirkler som hoder og streker som bein, og det symbolske systemet med tallsymboler. Flere kombinerte disse og håndterte overganger mellom dem. Ingen elever baserte løsningen på skriftlig tekst, verbal.

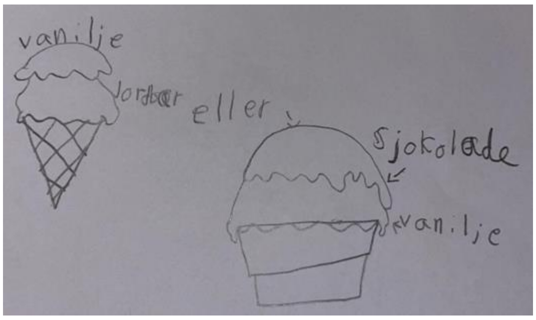
4.1.3 Analyse av oppgave 3

I oppgave 3 ble de symbolske representasjonene bokstaver og ord brukt mer enn i oppgave 1 og 2. Det var fem elever som hadde skrevet ned de ulike kombinasjonene de kunne lage ved å skrive de ned i form av ord, bokstaver eller forkortelser. To elever brukte også en kombinasjon og gjorde overganger mellom symbolsk og visuell representasjon. Elevene brukte da multimodale representasjoner (Hana, 2014, s. 147; Lesh et al., 1987, s. 6). Her skrev de ned de ulike kombinasjonen ved hjelp forbokstavene til de ulike smakene og hadde laget en liten tegning ved siden av som en støtte. Se eksempel nedenfor.



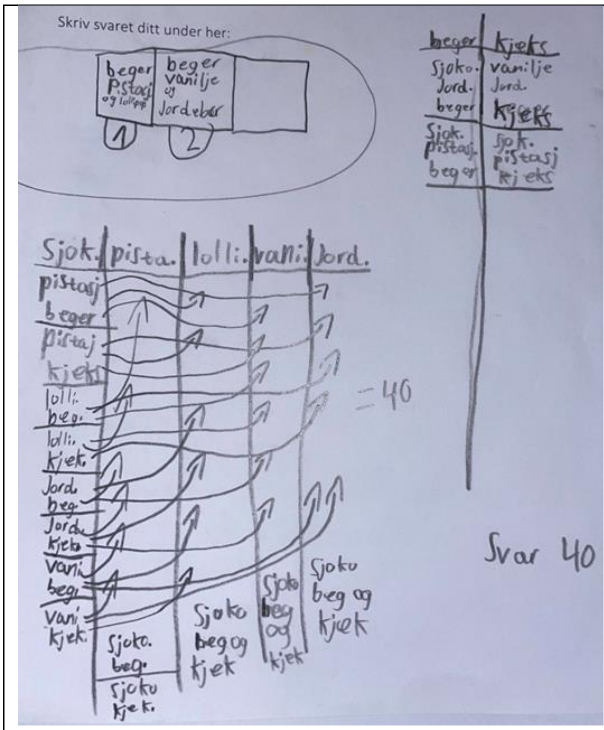
Figur 13: Elev nr. 23, oppgave 3

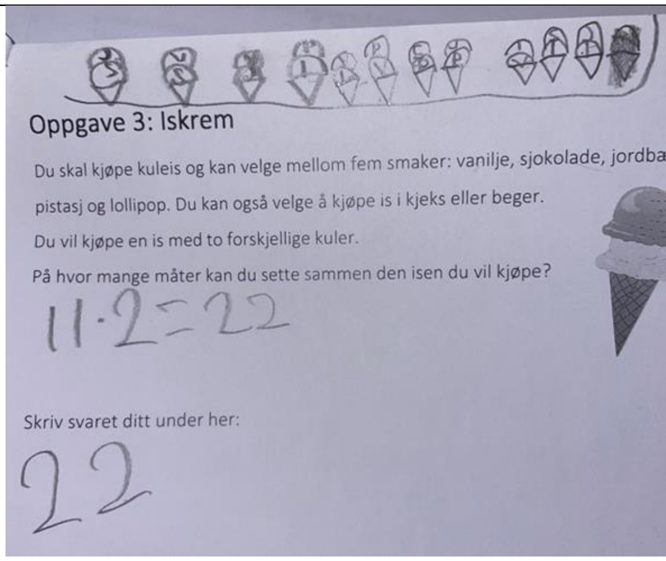
I oppgave 3 hadde fire elever oppfattet oppgaven som hvilke is de selv ville valgt. Elevene med denne tankegangen hadde laget is ved visuell representasjon og tegnet isen. Eksempelvis:

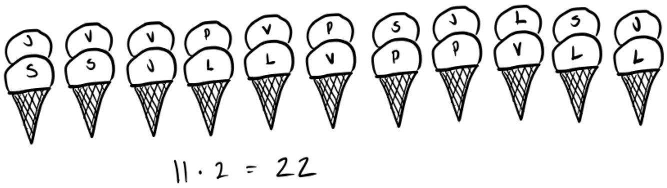


Figur 14: Elev nr. 21, oppgave 3

Visualisering hos de andre elevene ble også vist med tegninger av de ulike kombinasjonene de kunne lage, både detaljerte tegninger eller mer abstrakte. De fleste kombinasjonene som ble tegnet var kun is i kjeks før de videre multipliserte svaret de fikk med to for å finne endelige svar. Nedenfor vises ulike måter elevene brukte visuell representasjon.

<table>
<tr>
<td>


Tabell er som tidligere nevnt innunder visuell representasjon, men er en egen strategi, lage en systematisk tabell. Hvis en skal se på representasjon benytter elev nr. 18 seg av
</td>
<td>


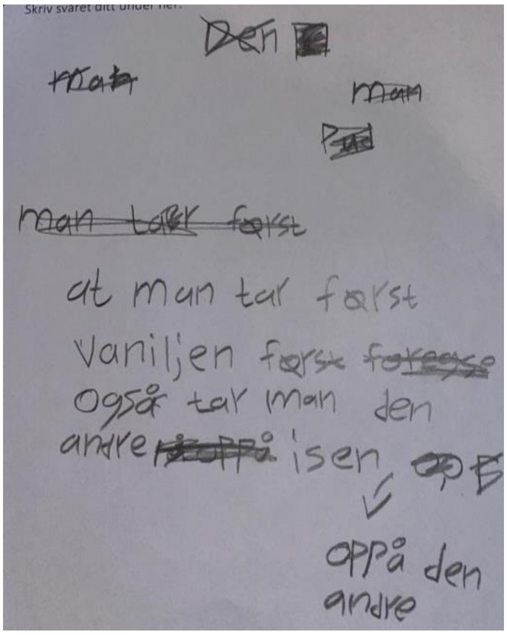


Kombinasjonene gjenskrevet av meg, for å tydeligere se kombinasjonene
</td>
</tr>
</table>

symbolsk representasjon ved han bruker ord og piler. Eleven bruker også strategien prøve og feile da han forsøker på tre ulike tabeller.	Elev nr. 22 benytter seg av både visualisering og prøve og feile som strategier. Eleven har klusset over den ene tegningen sin som viser at den hadde laget en kombinasjon dobbelt, og dermed blitt et feil svar. Eleven hadde til tross for å ha sett over mange ganger skrevet den ene kombinasjonen to ganger. Det var under samtale at vi fant den kombinasjonen, V.L. og L.V.

Figur 15A og 15B: Ulike eksempler med beskrivelser, oppgave 3

Elev nr. 1 brukte også verbal representasjon i form av skriftlig språk i oppgave 3 på samme måte som i oppgave 1. Her skrev han ned hvordan han skulle løse oppgaven, uten å løse den: «~~man tar førs~~t at man tar først vaniljen først ~~foregse~~ (her tolker jeg det som at eleven skrev for eksempel) også tar man den andre ~~oppå~~ isen -> oppå den andre». Der jeg har markert ord med gjennomstreking har eleven klusset over teksten sin. Eleven hadde også skrevet pilen.



Figur 16: Elev nr. 1, oppgave 3

Oppsummering for oppgave 3 viser at *visualisering* og *prøve og feile* ble like mye brukt. På samme måte som oppgave 2 brukte de fleste elevene bare en strategi. I oppgave 3 ble de symbolske representasjonene bokstaver og ord brukt mest. To elever benyttet seg også av multimodale representasjoner, visuell og symbolsk. Her skrev de ned kombinasjonene med en tegning som støtte. Dette var også en oppgave hvor fire elever hadde oppfattet oppgaven som hvilke is de selv ville valgt, og dermed fått feil. En elev brukte verbal representasjoner (samme elev som i oppgave 1).

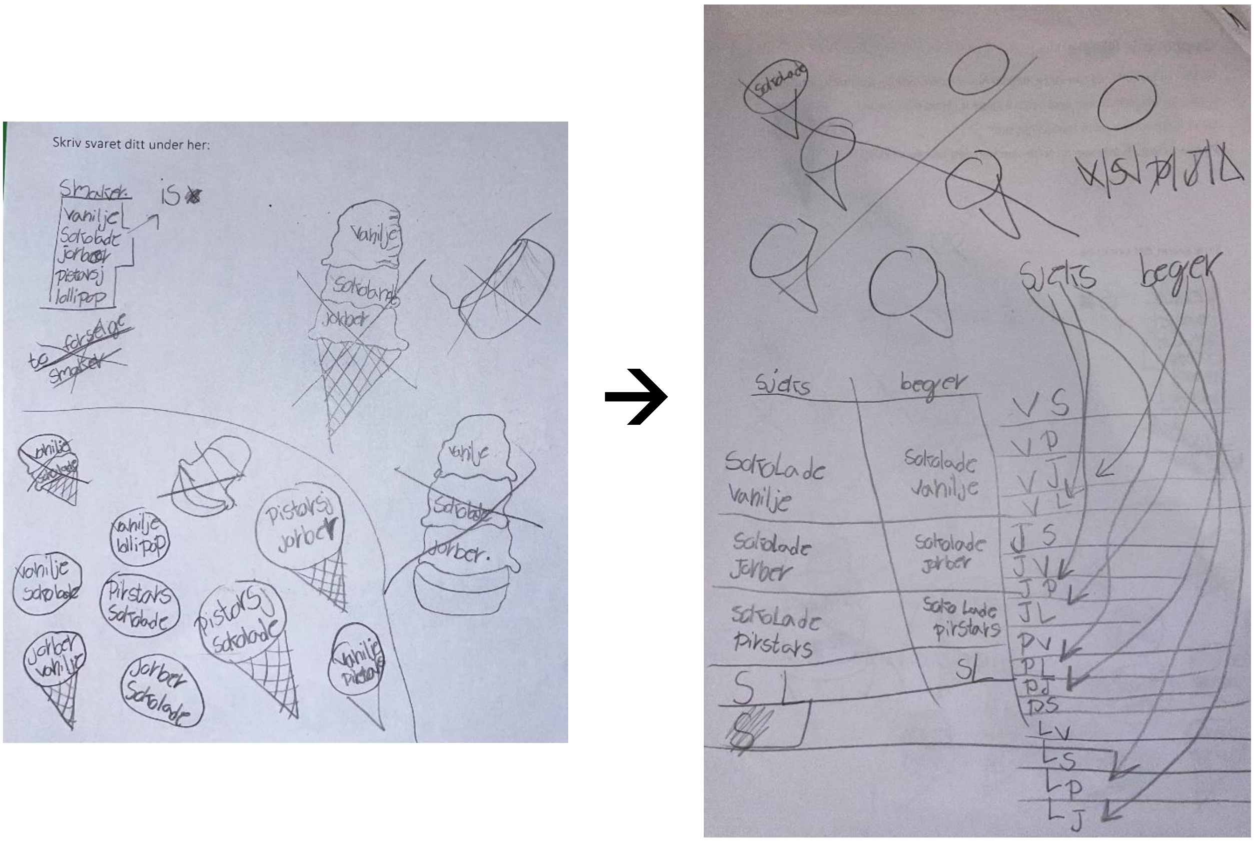
Etter mine tolkninger av beskrivelsene på strategiene *arbeide baklengs*, *forenkle problemet* og *se etter mønster* fant jeg ingen elever som hadde benyttet seg av disse strategiene. Dette kan skyldes at elevene har lite kunnskaper og ferdigheter rundt disse strategiene, men også at ingen av oppgavene legger særlig opp til bruk av disse. Oppgavene som ble brukt i min undersøkelse ville det vært vanskelig å benytte seg av problemløsningsstrategien *arbeide baklengs* da denne strategien er mest hensiktsmessig når du vet det endelige tallet (Klaveness et al., 2019, s. 200). I oppgaver hvor det er mange store tall vil det være av hensikt å gjøre tallene mindre slik at problemet blir enklere å løse. Strategien *forenkle problemet* er en fremgangsmåte som kan være hensiktsmessig å benytte seg av for å både få en oversikt over oppgaven, men også for å danne seg mindre tall som blir oversiktlig (Klaveness et al., 2019, s. 186). Bakgrunnen for dette kan skyldes oppgavene og kompetansenivået til elevene. Oppgavene i min undersøkelse er såpass små at det ville vært av liten hensikt å forkorte disse tallene. På en annen side i oppgave 2 kunne elevene ha forkortet antall bein fra 32 til 16 og antall hoder fra ti til fem, før de videre hadde doblet svaret de fikk. Elevene kunne da funnet tre hester (12 bein) og to høner (fire bein). Hvis dette dobles får vi seks hester og fire høner. Dette fungerer i denne oppgaven da det er partall som svar. *Å se etter mønster* legger ingen av oppgavene særlig opp til, da det blant annet innebærer å finne en bestemt rekkefølge på tallene eller figurene (Klaveness et al., 2019, s. 198).

4.2 Andre forskningsspørsmål

Dette kapittelet er for å besvare andre forskningsspørsmål: *Skifter de strategier og representasjoner (i samme oppgave og) i de forskjellige oppgavene?* Fordi forskningsspørsmålet inneholder flere spørsmål, velger jeg å dele det opp. Først ser jeg på om elevene endrer strategier i samme oppgave i kapittel 4.2.1 og deretter om de endrer strategier mellom oppgavene i kapittel 4.2.2. Elevbesvarelsene viste at flere av elevene benyttet seg av multiple representasjoner, altså at de benytter seg av flere representasjoner i samme oppgave (Hana, 2014, s. 147; Lesh et al., 1987, s. 6). Det ble observert elever som både skiftet strategier og/eller representasjon i samme oppgave, og elever som skifter i de forskjellige oppgavene. Elever som velger å bruke ulike strategier kan være i prosessen med å utvikle sin problemløsningskompetanse, og videreutvikling av sine ferdigheter innen de ulike strategiene. På den andre siden kan elevene som bruker ulike strategier i de ulike oppgavene ha forståelse for valg av mest hensiktsmessig strategi for oppgaven (Duval, 2006, s. 108; Kunnskapsdepartementet, 2019, s. 3). De kan også ha forstått at ikke alle oppgaver kan løses med de samme strategiene og metodene. Hvordan elevene bruker de ulike strategiene kan antagelig skille mellom hvilke elever som utvikler sin problemløsningskompetanse eller ikke.

4.2.1 Elever som endrer strategi i samme oppgave

Utregningene til elevene viste at det var to elever som endret valg av strategi i samme oppgave. Grunnen til at elevene endrer strategier underveis i oppgavene kan skyldes at elevene mener den nye strategien er mer hensiktsmessig. Dette kan tyde på at elevene utvikler sin problemløsningskompetanse ved at de velger den strategien som er mest hensiktsmessig i arbeidet med ulike oppgaver.



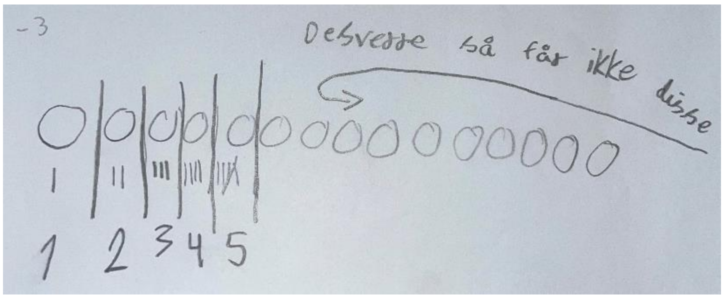
Figur 17: Elev nr. 10 sitt bytte av strategi

Elev nr. 10 hadde byttet valg av strategi i oppgave 3 hvor hun startet med visualisering i form av å tegne opp de ulike kombinasjonene i ulike representasjoner for kjeks og beger. Denne metoden forklarte hun ble krevende, og hun gjør derfor en overgang til tabell. Tabellen hennes ble ikke ferdigstilt noe som kan indikere at hun syntes oppgaven var vanskelig. Denne indikasjonen ble støttet av intervjuet. Hun forklarte at hun synes problemløsningsoppgaver er vanskelig, men dersom hun kan benytte seg av visualisering kunne dette gi henne en støtte i forsøket på å forstå. Eleven benytter seg også tydelig av strategien *prøve og feile* da det krever flere ulike forsøk på å løse oppgaven. Hun er i ferd med å utarbeide en løsning der hun har fire alternativer med kjeks plassert til venstre, mens de 16 andre alternativene systematisk er listet opp på høyre side.

Den andre eleven som skifter strategi i samme oppgave er elev nr. 9. Hun starter med en visuell representasjon før hun gjør en overgang til symbolsk representasjon i oppgave 1. Den visuelle representasjonen var i form av tegning med en sjokoladeplate på 2x8 ruter hvor den ene ruten er klusset over for å få 15 ruter. Eleven gjør en rask overgang til en symbolsk representasjon hvor hun forsøker med åtte elever som får like mange sjokoladeruter som nummeret de er (elev nr. 1 får en rute, elev nr. 2 får to, osv.). Antall ruter til sammen blir mer enn 15 sjokoladeruter så hun forsøker på nytt med fem elever hvor den første eleven fikk tre biter, andre fikk fire og helt opp til at den femte eleven fikk åtte. Summen av disse rutene ble også mer enn 15 og hun forsøker en siste gang med fem elever og får løsningen: 2+1+3+4+5. Løsningen til denne eleven kan ses i Figur 6B, kapittel 4.1.1.

4.2.2 Elever som bruker forskjellige strategier i de ulike oppgavene

I analysen la jeg spesielt merke til tre elever som hadde brukt ulike strategier i de ulike oppgavene. Det var elev nr. 23 som hadde brukt *visualisering* i oppgave 1 og 3, og tabell i oppgave 2. Visualiseringen i oppgave 1 var med sirkler som skulle representere elever før hun videre fordelte sjokoladerutene med tellestreker. Her tegnet hun 15 sirkler, antagelig grunnet at det ble opplyst 15 sjokoladeruter i oppgaveteksten. Bildet nedenfor viser utregningen hennes. Hun hadde skrevet 5 bak der det står «Skriv svaret ditt under her:» for å vise at hun kom frem til fem elever.



Figur 18: Elev nr. 23, oppgave 1

I oppgave 2 valgte hun problemløsningsstrategien *lage en systematisk tabell*. Løsningen hennes vises i Figur 11B, kapittel 4.1.2. Her konstruerte hun en tabell med tre rader og to kolonner. Hver kolonne var dyrene og radene besto av navn på dyret, tellestreker for hver gruppering av et dyr og antall hoder nederst. I tabellen hadde hun brukt den symbolske representasjonen piler mellom hodene og opp til grupperingen av tellestreker for å markere og vise at det blir riktig sum. I oppgave 3 visualiserte hun i form av å skrive opp de ulike kombinasjonene med en enkel visuell støtte. Dette er ved multimodal representasjon hvor hun kombinerer visuell og symbolsk representasjon. I denne oppgaven skrev hun kombinasjonene med forbokstavene og tegnet noen enkle figurer under, som jeg antar er representasjoner for beger. Denne utregningen vises i Figur 13, kapittel 4.1.3.

Den andre eleven som brukte ulike strategier i de ulike oppgavene var elev nr. 18 (Theodor, beskrives mer i kapittel 4.3) som hadde visualisert i oppgave 1 ved å tegne opp en sjokoladeplate med 15 ruter, før han videre fordelte. Oppgave 2 hadde han brukt strategien *prøve og feile* ved hjelp av multiplikasjon (symbolsk representasjon) hvor han stilte opp ulike regnestykker for å finne ut hvor mange av hvert dyr han trengte for at informasjonen stemte. Se løsningen hans i Figur 23, kapittel 4.5. I siste oppgave lagde han en *systematisk tabell* hvor han plasserte smakene på toppen og smakene i både kjeks og beger nedover. Han brukte også den symbolske representasjonen piler. Utregningen hans vises i Figur 15A, kapittel 4.1.3.

Den tredje og siste eleven som skilte seg ut var elev nr. 11 som brukte både *lage en tabell* og *prøve og feile* i oppgave 1, *prøve og feile* i oppgave 2 og en blanding av *prøve og feile* og *visualisering* i oppgave 3. Eleven benyttet seg derfor av *prøve og feile* i alle oppgavene. Tabellen i oppgave 1 er delt opp i ulike ruter hvor hver rute er antall sjokoladeruter elev kan få (se Figur 6E kapittel 4.1.1). I oppgave 2 hadde hun notert «hester = 6» og «høner=2» før hun videre forklarte under intervjuet at hun hadde brukt multiplikasjon for å finne svaret. I siste oppgave hadde hun brukt *visualisering* ved at hun tegnet opp fire is-kombinasjoner i beger (V+S, V+J, V+P og I+V). Hun forklarer i intervjuet hun la merke til at en smak kunne ha fire kombinasjoner, og dermed kunne hun multiplisere fire (antall kombinasjoner en smak kan ha) med antall smaker (fem) og kom frem til at det var 20 ulike kombinasjoner. I svaret hennes var det ikke tatt i betraktning at det var både kjeks og beger.

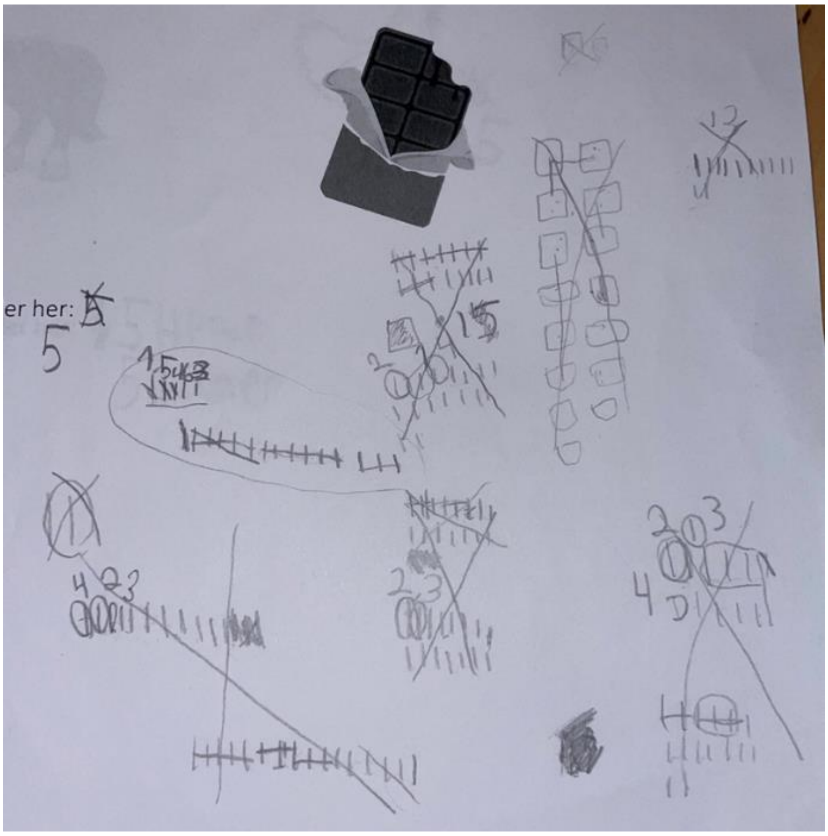
Elever som bruker forskjellige problemløsningsstrategier i de ulike oppgavene vil på samme måte som elever som endrer underveis i oppgavene utvikle sin problemløsningskompetanse. Elevene har forståelse for at ingen oppgaver kan løses likt. Ved å prøve ut ulike strategier i ulike oppgaver vil dette bidra med at elevene både utvikler strategiene de kan fra før, og det gir elevene muligheten til å tilegne seg nye. Dette vil også utvikle elevens representasjonskompetanse i valg av representasjoner og utviklingen av begrepsforståelsen.

4.3 Fordypning av elevbesvarelser

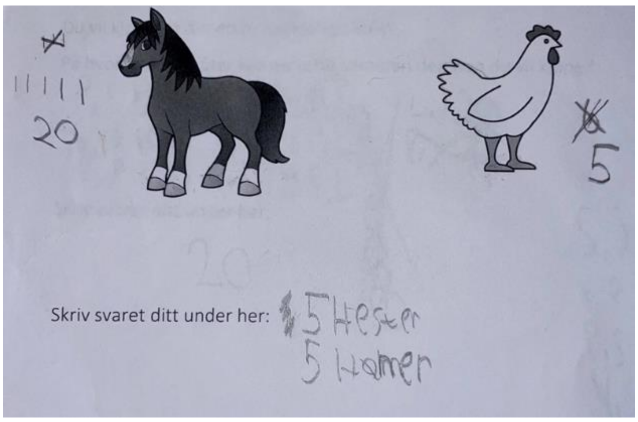
For å dypere besvare forskningsspørsmålene velger jeg å trekke frem enkelt elever og å se på helheten i deres arbeid. Alle navnene som blir brukt på eleven er oppdiktet for å kunne skille og sammenligne elevene. Bakgrunnen for å se på helheten av enkelt elever er for å gå mer i dybden på hvilke strategier og representasjoner som bli benyttet, men også for å se om de enkelte elevene varierer strategier og representasjoner.

<u>Marie (elev nr. 13)</u>

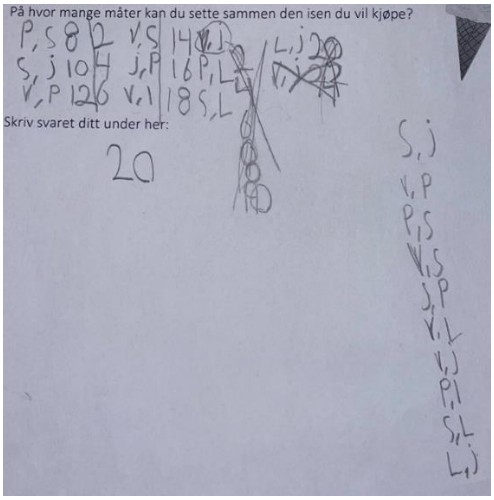
Oppgave 1



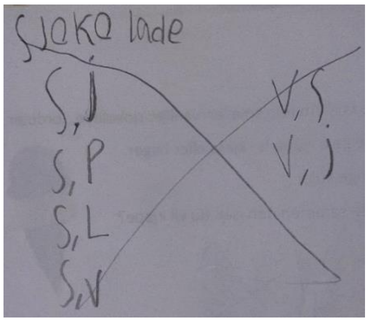
Oppgave 2



Oppgave 3



Baksiden



Figur 19: Marie (elev nr. 13) sine løsninger

Marie leverte hefte sitt etter 64 minutter. Marie svarte riktig på oppgave 3, og hadde et riktig svar på oppgave 1 til tross for hva utregningen hennes viste. Under intervjuet forteller Marie at hun syns problemløsning er vanskelig. Alle oppgavene hennes viser mye matematisk tenkning. Marie bruker relativ lik representasjon i alle oppgavene, symbolsk. I oppgave 1 hadde hun skrevet et annet svar enn det utregningen hennes viste. Svaret hennes viser at hun fant fem elever, mens utregningen hennes viser fire elever. Marie har forsøkt mange ganger for å finne en løsning. Alle metodene var en visuell representasjon hvor hun tegnet 15 sjokoladebiter, enten i form av tellestreker eller små kvadrater. Deretter hadde hun prøvd å fordele slik at ingen fikk samme antall. Hele prosessen hennes viser mye matematisk tenkning, og at hun har forsøkt å passe på opplysningen ved at ingen skulle få samme antall biter. En kan anta at hun først tegnet et forenklet bilde av sjokoladerutene før hun videre fordelte. Hun fordeler tre ruter, to ruter og deretter fire ruter. Hun kunne kommet i mål hvis hun hadde samlet de seks resterende som en sekser eller fordelt dem med en og fem. Hun gir seg og prøver de neste forsøkene med tellestreker. I den siste utregningen hennes (markert med sirkel rundt for å indikere) legger jeg merke til at hun har riktig antall tellestreker, som er riktig fordelt, men når hun skal skrive opp de ulike tallene hun fant hadde hun lagt til et 4–tall. Grunnen til at hun la til dette 4–tallet antar jeg kan skyldes at hun fant fire elever i løsningen hennes med strekene, og det ble da lagt til når hun skulle skrive ned hvor mye de ulike elevene fikk. Denne eleven er i forståelsesfasen da hun forstår oppgaven.

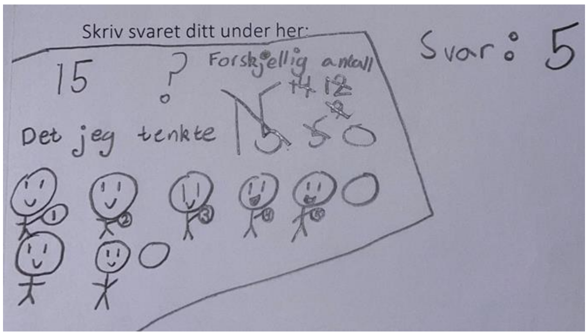
I oppgave 2 hadde Marie gjort regnefeil. Hun forsøkte med fem hester og fant ut at dette ville bli 20 bein. De fem hestene ble markert med streker på siden av bildet til hesten. Videre forsøkte hun å regne ut hvor mange høner hun kunne få med tolv bein (32 bein – 20 bein =12 bein). Dermed kom hun fram til at det ville bli seks hoder. Hun forsto at det ville bli elleve hoder til sammen med de fem første hestene addert med de seks nye. Hun hadde da krysset ut det ene hodet og skrevet at det ble «5 hester» og «5 høner». Når hun hadde krysset bort det ene hodet hadde hun glemt å trekke fra to bein, dermed ble det feil svar.

Oppgave 3 hadde Marie regnet ut riktig. I denne oppgaven hadde hun skrevet opp alle de ulike kombinasjonene hun kunne lage med de ulike smakene. Hun hadde passet på at hun ikke lagde en løsning to ganger, og krysset over der hun gjorde det en gang. I tillegg til de ulike besvarelsene hadde hun skrevet ned antallet is hun da kunne lage. Ved siden av den første kombinasjonen hadde hun skrevet ned «2» for å markere at man kunne ha denne kombinasjonen i både kjeks og beger, og skrevet «4» ved siden av den neste kombinasjonen for å vise at det ble fire kombinasjoner til sammen. På baksiden av arket har Marie også gjort et forsøk på å løse oppgaven, men satt et kryss over. Tankegangen hennes er vanskelig å utdype seg om, men det kan antydes at hun forsøkte å skrive de ulike kombinasjonene hun kunne lage med smakene og arbeider systematisk. Baksiden ble ikke diskutert under intervjuet. I den systematiske fordelingen har hun startet med sjokolade hvor hun fant fire kombinasjoner. Deretter prøver hun med vanilje. Her ble det kun notert ned to kombinasjoner hvor blant annet V.S (vanilje og sjokolade) ble skrevet. Dette gjør derfor at denne kombinasjonen blir dobbel.

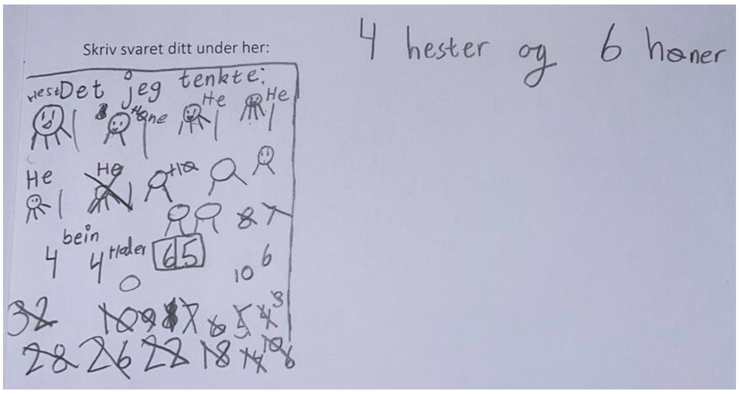
Under samtalen vår snakket vi om de ulike feilene hun hadde gjort. I oppgave 1 snakket vi om den lille slurven som hadde skjedd. Hun husket ikke hvorfor hun hadde tatt med 4–tallet, men hun så at det ville bli riktig når vi tok bort den. Marie lurte også på hvordan jeg ville løst denne oppgaven, og jeg forklarte at det er flere løsninger, før jeg viste en metode hvor jeg også brukte tellestreker. I oppgave 2 spurte jeg om hva som skjer når vi tar bort et hode. Hun svarte da at det minsker med antall bein. Når jeg pekte på oppgaven hennes skjønte hun at det derfor ville bli feil.

Sara (elev nr. 16)

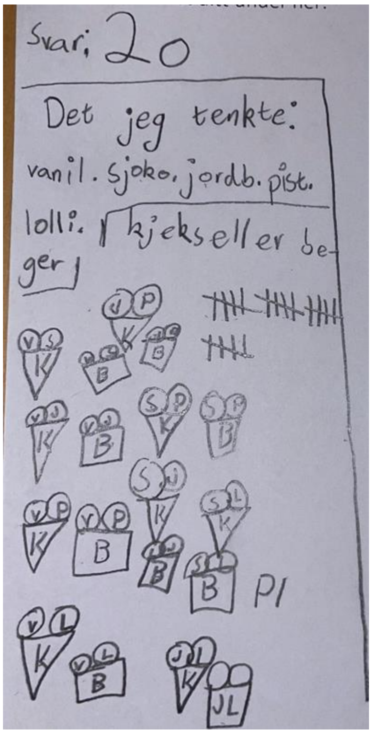
Oppgave 1



Oppgave 2



Oppgave 3



Figur 20: Sara (elev nr. 16) sine løsninger

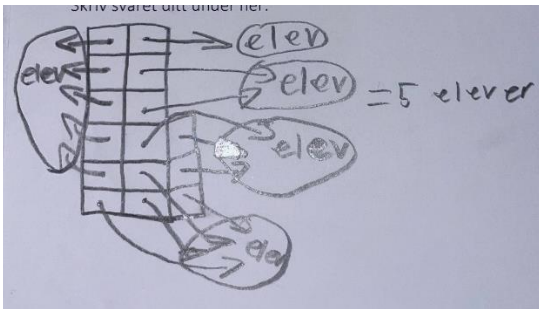
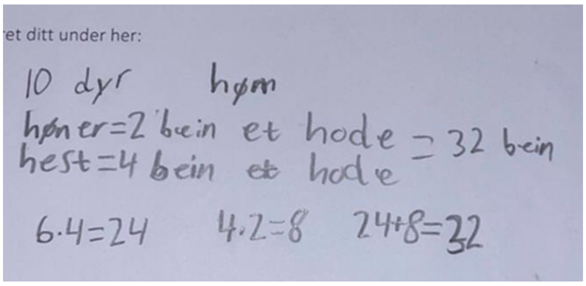
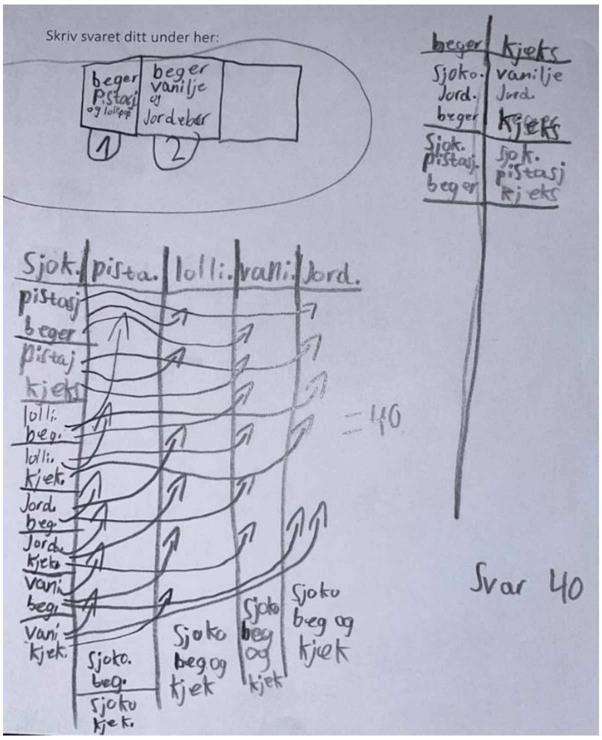
Sara leverte hefte sitt etter 20 minutter, og hadde riktig på oppgave 1 og 3. Dette er en elev som bruker visuell representasjon i alle oppgavene med en «regnehjelp» i form av tall eller tellestreker. Sara syntes det er veldig gøy å arbeide med problemløsning.

I oppgave 1 illustrerte hun forskjellige elever ved hjelp av strekfigurer, hver av dem bærer en sirkel som representerer mengden biter de har i hendene. Her gjorde hun en riktig fordeling hvor første fikk en, andre fikk to, tredje fikk tre, fjerde fikk fire og siste fikk fem. Samtidig utførte hun beregninger ved siden av for å sikre nøyaktighet. Hun bruker en visuell representasjon ved å tegne strekfigurer og sirkler med tall.

Neste oppgave tegner Sara enkle dyr ved å tegne sirkler og streker under (fire for hest og to for høner). Hun forsøkte med forskjellige dyr og regnet på samme måte ved siden av slik hun gjorde i oppgave 1. Dette viser seg å være vanskelig og hun kommer frem til løsningen «4 hester og 6 høner». Utregningen hennes viser mye matematisk tenkning, og hun prøver hele tiden å passe på antall bein og hoder. Selv med assistanse i form av en «tellehjelp» ved siden av tolker jeg situasjonen som at hun først opprettholder kontroll, men at det senere oppstår en grad av usikkerhet. Løsningen hennes stemmer med antall hoder, men blir feil antall bein (blir totalt 28 bein). Jeg forstår det slik at når hun prøver å fjerne én høne om gangen, oppstår det noen regnefeil.

I den siste oppgaven har Sara forsøkt å visualisere de ulike kombinasjonene hun kan skape både med kjeks og beger. De åtte kombinasjonene til venstre er representert dobbelt, både med kjeks og beger, og alle inneholder vaniljesmak. De resterende kombinasjonene er også representert dobbelt med både kjeks og beger, men er skissert i tilfeldig rekkefølge med hensyn til smak. Videre har hun notert at hun har funnet 20 kombinasjoner, noe som er en riktig løsning. Imidlertid har hun kun skissert 18 kombinasjoner enten med kjeks eller beger, eller 19 om en inkluderer den kombinasjonen hun ikke har tegnet verken på kjeks eller beger, kalt PL. Siden hun bare har skissert PL en gang, mangler hun denne kombinasjonen både med kjeks og beger. Jeg tolker hennes valg om å ikke tegne den siste kombinasjonen som en bevisst forståelse av at hun allerede hadde identifisert svaret. Ved siden av hver tegning har hun notert 20 tellestreker, noe som antyder at hun har forsøkt å holde styr på antallet kombinasjoner ved å telle dem.

Theodor (elev nr. 18)

Oppgave 1

Oppgave 2

Oppgave 3


Figur 21: Theodor (elev nr. 18) sine løsninger

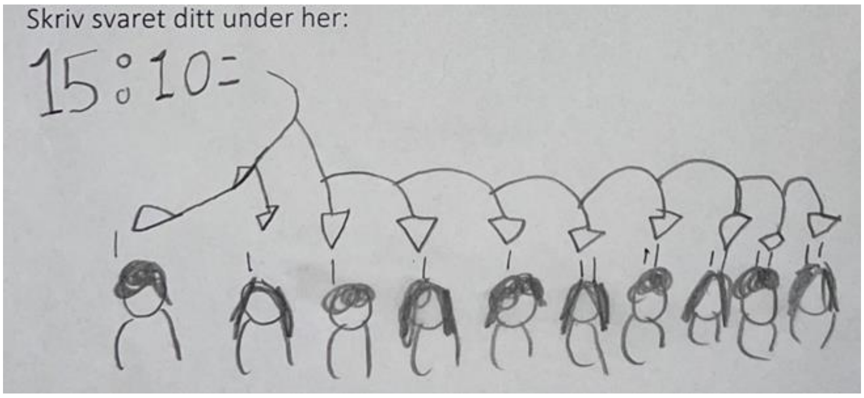
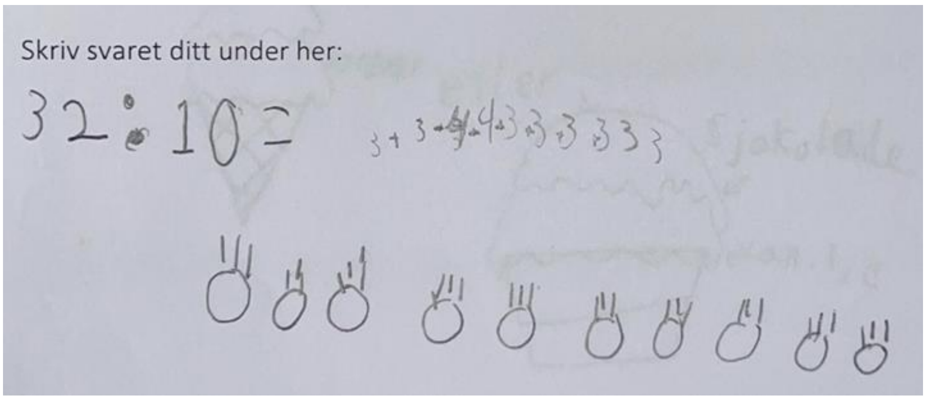
Theodor leverte heftet sitt etter 27 minutter. Dette er over gjennomsnittet for gutter som var på 18 minutter. Løsningene hans kan tyde på at den mest tidkrevende var oppgave 3. Han hadde riktig på alle oppgavene dersom en ser på de elevene som mente at rekkefølgen på smakene i oppgave 3 hadde betydning. Theodor syns problemløsning er veldig morsomt og han trives godt å arbeide med slike oppgaver. Han forteller videre i intervjuet at han liker best å arbeide alene med slike oppgaver.

I oppgave 1 visualiserer han ved å tegne opp en annerledes sjokoladeplate med 2x6 nedover og de resterende tre rutene ved siden av. Min første refleksjon dreier seg rundt spørsmålet om hvorfor han unnlot å konstruere en sjokoladeplate med 2x7 og den siste ruten ved siden av, eller ved en sjokoladeplate som var 3x5. Når han skulle fordele rutene brukte han piler bort til en sirkel som skulle representere en elev. Han fordelte nedover sjokoladeplaten, og passet på at ingen fikk samme antall.

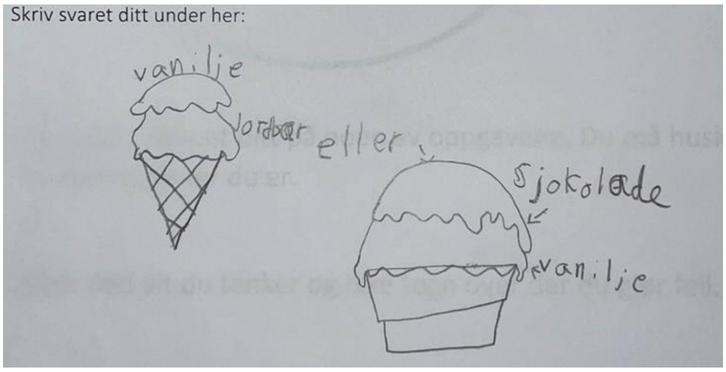
I oppgave 2 skrev Theodor nøkkelinformasjonen før han begynte å løse oppgaven. Han noterte antall bein og hoder for hvert dyr, i tillegg til den totale mengden bein han skulle ende opp med. Øverst på arket skrev han også «10 dyr» for å indikere at det skulle være ti hoder totalt. Det står også skrevet «høm» over oversikten, og jeg tolker dette som et forsøk på å skrive høne. Til tross for at likhetstegnet blir feil brukt (beskrives i kapittel 4.5) synes jeg oppsettet hans har en god funksjon for å holde oversikten. Videre bruker han symbolsk representasjon i form av multiplikasjon for å finne ut hvor mange bein et visst antall dyr har, før han adderer de sammen. Strategien hans var *prøve og feile* hvor han først gjettet med seks hester og konstaterte deretter at det ville resultere i fire høner, slik at både antallet bein og hoder stemte overens. Det ville vært interessant å se hvordan Theodor hadde arbeidet videre dersom han hadde prøvd med et annet antall hester og fått feil.

Den siste oppgaven er den jeg synes er mest interessant. Her har Theodor forsøk på tre ulike tabeller. Den første gikk ut på at han skrev ulike kombinasjoner i beger bortover, og den andre var to kolonner (beger og kjeks) hvor han skrev kombinasjonene nedover. Begge disse måtene for tabell forklarte han under intervjuet at var tidkrevende, og han bestemte seg for å prøve en annen. I den nye tabellen skrev han opp de ulike smakene bortover øverst, og de ulike smakene dobbelt nedover (i beger og kjeks). Eksempelvis «pistasj beger, pistasj kjeks, lolli beger lolli kjeks». Theodor bruker forkortelser på noen av smakene når han skriver de ned. Han skriver: lolli, jord, og sjoko. På forkortelsene hans har han husket punktum etter, noe som kan være en indikator på at han er faglig sterk i norsk, samt husker viktige regler for punktum og forkortelser. Denne type tabell er en god systematisk tabell som gir han en god oversikt. Theodor viser også faglig styrke når han leser oppgavene da han har fått med seg alle viktige opplysninger i oppgavene. Til tross for en systematisk tabell blir sjokolade gjemt i hjørnet. Dette gjør at han ikke får laget noen kombinasjoner med sjokolade. Han innser dette på slutten og skriver sjokolade i beger og kjeks nederst i de fire andre smakene. Han bruker den symbolske representasjonen piler når han skal lage de ulike kombinasjonene ved å tegne piler fra de ulike smakene i beger og kjeks og til smakene i kolonnene. Det er tegnet 24 piler. Svaret hans er 40 uten noen flere piler eller utregninger. Jeg tolker det slik at han ser at hver smak i sjokolade og beger kan lages med kan lages fire ganger med hver smak. For eksempel under pistasj blir kombinasjonene pistasj-sjokolade beger, pistasj-sjokolade kjeks, sjokolade-pistasj beger og sjokolade-pistasj kjeks. Da hver av smakene kan ha fire kombinasjoner får han 4x4=16. Deretter legger han disse 16 til de 24 pilene og finner svaret sitt 40. Denne form for tabell hos Theodor viser mye matematisk tenking.

<u>Sofie (elev nr. 21)</u>

Oppgave 1

Oppgave 2


Oppgave 3



Figur 22: Sofie (elev nr. 21) sine løsninger

Sofie leverte sitt hefte etter 10 minutter, og hadde ingen oppgaver riktig. Alle oppgavene hadde et forsøk på å løse oppgaven, til tross for at hun levert raskt. Sofie syns problemløsning er gøy, men litt vanskelig. Hun liker derfor best å arbeide med slike oppgaver sammen med andre slik at en kan dele ideer og finne løsningen sammen. I de to første oppgavene har hun brukt symbolsk representasjon ved å bruke divisjon i et forsøk på å dele likt. På den måten kan en antyde at Sofie tenker å dele er alltid å dele likt, og ikke er å fordele. I oppgave 1 brukte hun både en symbolsk og en visuell representasjon. Her delte hun ut 15 sjokoladebitene på ti elever. Grunnen til at hun valgte ti elever var tilfeldig og et gjett, altså at hun benyttet seg av strategien *prøve og feile*. Sofie ga hver av elevene en bit hver, før hun delte de resterende fem bitene på de siste fem elevene. På den måten fikk de to hver. Da Sofie illustrerte disse ti elevene, skisserte hun noe som kunne tyde på annenhver gutt (kort hår) og jente (langt hår). I denne oppgaven bruker hun også den symbolske representasjonen piler i fordelingen.

Oppgave 2 bruker Sofie også divisjon. Her deler hun 32 bein på 10 hoder. Ved å bruke divisjon med 32 bein delt på ti hoder kommer hun frem til et interessant svar. Nemlig at hvert dyr får tre hver, og to får fire. I utregningen hennes bruker hun sirkler til å fordele med streker oppå. Hun skriver også opp et regnestykke bestående av hvor mange hver enkelt får. Dette antar jeg er grunnet behovet for å passe på at utregningen blir riktig, men samtidig også for å vise hvor mange hver enkelt får ved hjelp av tall. Det er interessant at hun tenker at hvert dyr får tre ben. Jeg antar at i løpet av beregningene har hun glemt at hun arbeider med dyr og kun fokusert på den abstrakte matematikken. Hadde hun regnet ut 32:10 som et vanlig regnestykke ville svaret blitt 3,2. Det er positivt at hun valgte å fordele de to gjenværende «beina» på to av sirklene, i stedet for å bryte dem ned ytterligere. En annen fascinerende ting ved løsningen hennes er at hun valgte å tegne strekene oppå sirklene slik at det fremstår som hårstrå, fremfor under som bein. Løsningen til Sofie ville vært interessant å fokusere mer på i et klasserom. På den måten kunne en snakket mer om hvordan tankegangen hennes var. Denne utregningen er den mest interessante løsningen blant alle elevbesvarelsene. Feil bruk av likhetstegnet kan være en manglende symbol- og formalismekompetanse, og eleven forstår heller ikke kompleksiteten i regnestykket. Noe eleven selv ikke oppdager da hun satte tre bein på dyrene. Hester eller høner har normalt ikke tre bein.

Siste oppgave tenker Sofie hvilke is hun selv ville valgt, i likhet med tre andre elever. Dette forteller hun under intervjuet. Hun bruker *visualisering* som en strategi og representasjon ved å tegne opp to forskjellige is, en med vanilje og sjokolade i kjeks og en med sjokolade og vanilje i beger.

Denne eleven har ikke forstått noen av oppgavene, og sliter med forståelsesfasen og å få den matematiske ideen. Sofie har ikke forstått i oppgave 1 at ingen elever skulle få samme antall, i oppgave 2 at hun arbeider med dyr som har to og fire bein, og i oppgave 3 at hun skal finne alle kombinasjonene som er mulig å lage.

4.4 Engasjement for problemløsning

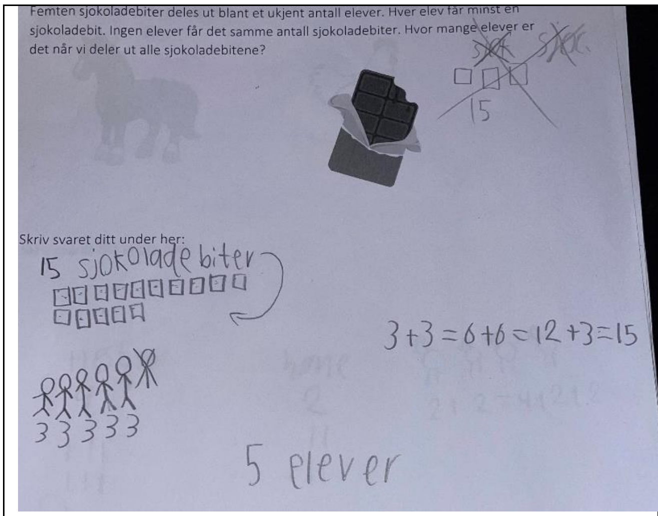
Gjennomgående i intervjuene ble det vist engasjement for problemløsningsoppgaver. Elevene i undersøkelsen min hadde nylig hatt om problemløsning og ulike problemløsningsstrategier. Dette ble jeg fortalt av læreren deres før gjennomføringen. Elevene arbeidet her i grupper noe som muliggjorde diskusjoner om mulige løsningsforslag. I klasserommet la jeg i tillegg merke til en plakat som hang på veggen med ulike problemløsningsstrategier, lignende Klaveness et al. beskrivelser (2019, s. 184). At elevene har lært om problemløsning tidligere hadde sannsynlig en positiv innvirkning da dette trygger elevene med noe kjent, helt i tråd med læreplanen. Dette bidro til utviklingen av deres valgte fremgangsmåter og strategier.

Intervjuguiden inkluderte et spørsmål om hvordan elevene syns det er å jobbe med problemløsningsoppgaver. Her svarte 78% av elevene at de syns det er gøy eller morsomt, 17% svarte «sånn passe», og 5% svarte at de ikke liker det. En del av elevene svarte at de synes det er vanskelig. Det ble derfor gjort et valg å lage et diagram som inkluderte elevene som svarte at de syntes det var vanskelig. De nye tallene ble da at 58% svarte ja, og 25% svarte at det var vanskelig.

Underveis i intervjuene ble det også gjort et valg å inkludere spørsmålet om elevene likte å arbeide alene eller å samarbeide i når de jobbet med problemløsning. Dette var grunnet at elevene tidligere hadde arbeidet sammen i grupper. Flere av elevene svarte at de likte å samarbeide når de fikk spørsmålet om de likte problemløsningsoppgaver. Svarene deres var jevnt fordelt over hvem som likte hva. 56% svarte at de likte å samarbeide, mens 44% likte best å jobbe alene. Elevene som svarte ja forklarte at de trivdes å samarbeide og jobbe i grupper grunnet delingskulturen, hvor de kunne dele ideer og forslag. Flere av elevene spurte også underveis om de kunne få flere slike problemløsningsoppgaver og ønsket meg tilbake, dette var koselig å høre. Dette viser et klart engasjement for problemløsningsoppgaver. Observasjon og analyse av funn viste også at alle elevene forsøkte å gjøre en innsats og at de tok oppgavene seriøst. Alle elevbesvarelsene viste at elevene hadde notert ned et tall eller utregning.

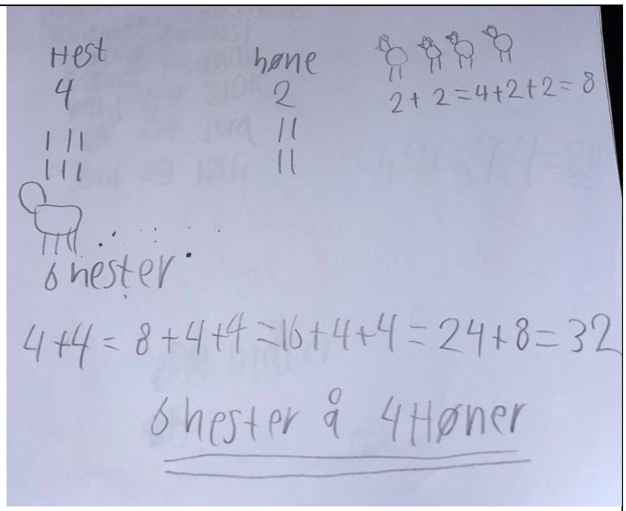
4.5 Elever som bruker likhetstegnet feil

Elever skal kunne mestre å bruke symbolene riktig (Niss & Jensen, 2002, s. 58). Ved å se på bruk av likhetstegnet er det totalt fire elever som bruker symbolet for likhetstegnet feil, hvorav den ene eleven har brukt tegnet feil i to av oppgavene. Dette er elever som bruker likhetstegnet som et fortsettelsestegn. Dette vil si at elevene ikke har forståelse for at det må være lik verdi på begge sider av likhetstegnet. I tillegg til at dette er manglende symbol- og formalismekompetanse kan det tyde på en manglende begrepsforståelse, tankegangskompetanse (Niss & Jensen, 2002, s. 44 & 58). Alle utregningene viser mye matematisk tenking hvor elevene gjør mye oversiktlig og fornuftig matematikk. At det blir en formell feil med likhetstegnet i oppgavene, vil ikke vise en stor svakhet da selv voksne studenter kan gjøre samme feil. På den måten blir bruken av likhetstegnet ikke helt feil. Her er det viktig at en som lærer ser styrkene ved bruken av likhetstegnet, fremfor en svakhet og at det blir feil bruk.



3 + 3 = 6 + 6 = 12 + 3 = 15

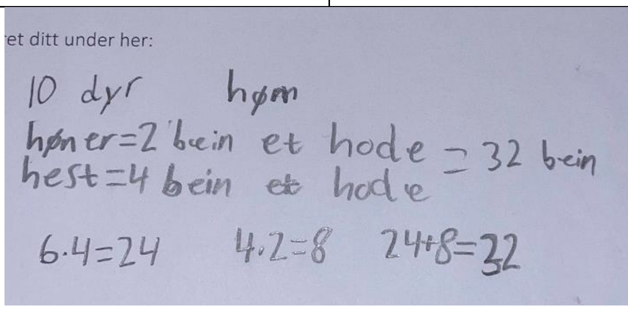
Elev nr. 5



2 + 2 = 4 + 2 + 2 = 8

4 + 4 = 8 + 4 + 4 = 16 + 4 + 4 = 24 + 8 = 32

Elev nr. 5



Elev nr. 18

Figur 23A, 23B og 23C: Feil bruk av likhetstegnet

4.6 Oppsummering

Oppsummering av analysen viser at elevene strever med problemløsning, da det er 13 (av 22) elever som hadde riktig på oppgave 1, og åtte elever hadde riktig på både oppgave 2 og 3. Elevene viser likevel et engasjement for problemløsning. Det var et stort tidsspenn på antall minutter første elev (åtte minutter) og de siste elevene (64 minutter) brukte på oppgavene. Det ble målt et gjennomsnitt på 24 minutter på tiden elevene brukte. Videre viste analysen at elevene benytter seg i hovedsak av visuell eller symbolsk representasjoner, og *visualisering* og *prøve og feile* som strategier. Videre viste elevbesvarelsene at få elever bytter strategi eller representasjon i samme/ eller i de forskjellige oppgavene. En kan se forskjellen på elevene som bruker mer abstrakte figurer, eller som bruker symbolsk representasjon fremfor visuell. Det forventes at de vil utvikle sine tegninger, og gradvis gå over til mer ikoniske (Duval, 2006, s. 108). Det ble også lagt merke til at de elevene som tegnet detaljerte dyr var i hovedsak jenter. Dette kan antageligvis være at jenter er generelt mer glade i å tegne og liker hester. De som tegnet detaljerte tegninger kan ha brukt mye tid på å få fine tegninger, noe som vil være feil bruk av tid i en slik kontekst.

5 Drøfting

Målet med dette masterprosjektet har vært å se *hvordan kommer femtetrinn elevers problemløsningskompetanse til syne i deres skriftlige notater under problemløsning?* Det ble gjennomført tre problemløsningsoppgaver hvor en 5. klasse skulle løse og notere ned sine tankeganger. Det ble gjennomført observasjon av elevene underveis og intervjuer i etterkant. Intervjuene skulle gi meg som forsker mer informasjon rundt deres tankemåter da elevene måtte forklare hva de hadde gjort og tenkt. For å belyse problemstillingen min har jeg satt meg inn i relevant teori om problemløsning og representasjoner. Hovedteorien var ved bruk av beskrivelser fra læreplanen (2019), strategier i problemløsning beskrevet av Klaveness et al. (2019), Polyas problemløsningsprosess (1945), rammeverk innen representasjoner beskrevet av Lesh et al., (1987), Hana (2014) og Duval (2006), og kompetansemodellen til Mogens Niss og Tomas Højgaard Jensen (2002).

I dette kapittelet vil det bli drøftet om de ulike koblingene som ble observert mellom teorien, og hvordan teorien kan ses i elevbesvarelsene. Videre vil det bli drøftet om hvordan representasjonene ble brukt i elevbesvarelsene, behandling og overganger, lærerens rolle og litt om problemløsningskompetansen. Til slutt vil det bli beskrevet mer om kommentarer rundt de valgte oppgavene, utvalget mitt og en metoderefleksjon.

5.1 Hvordan representasjonene ble brukt i elevbesvarelsene?

Matematikk er et abstrakt fag og er kun tilgjengelig gjennom representasjoner (Duval, 2006, s. 107). Elevene trenger derfor tilrettelegging rundt bruk av representasjoner, samt få muligheten til å velge (Duval,2006, s. 108; Kunnskapsdepartementet, 2019, s. 3). Det er derfor viktig at elevene får tilegnet seg den kunnskapen og ressurser som kreves for å ta en selvstendig vurdering av bruk av strategi og representasjoner i problemløsningsoppgaver. Analysen av elevbesvarelsene viste at elevene benyttet seg av symbolske eller visuelle representasjoner (Kunnskapsdepartementet, 2019, s. 3; Lesh et al. 1987, s. 1). Visualisering er både en strategi og en representasjon. Beskrivelsene av hvordan elevene visualiserte viser derfor trekk til begge definisjonene. Elever som tegner figurer eller modeller som kan gi et mentalt bilde av oppgaven bruker strategien *visualisering* (Johnson, 2018, s. 2; Klaveness et al., 2019, s. 190). Tidligere forskning viser at tegning er en svært god strategi når elevene arbeider med problemløsning (Rellensmann et al., 2017, s. 404). Videre forventes det at elevene går fra nøye og detaljerte tegninger, til mer ikoniske og mindre detaljerte tegninger (Duval, 2006, s. 108). Elevbesvarelsene viste at elevene hadde ulike tegninger i grad av detaljer. I oppgavene var det både detaljerte tegninger av en sjokoladeplate, hester, høner og is, eller mer ikoniske tegninger hvor de benyttet seg av ulike geometriske figurer (sirkler, streker, firkanter og trekanter). Elevene som tegnet mer abstrakte tegninger viser et høyere kompetansenivå, hvor de har utviklet ferdighetene sine. Mer trening og flere oppgaver hvor elevene må bruke ulike former for visualisering vil bidra å styrke utviklingen deres (Kunnskapsdepartementet, 2019, s. 9). Oppgaver hvor elevene har tegnet mye kan være en antydning på at eleven er glad i å tegne til vanlig. En elev som er glad i å tegne vil nok antageligvis bruke enhver anledning den har til å tegne, mens en elev som ikke liker å tegne vil nok benytte seg av andre strategier og representasjoner.

Visualiseringen i oppgave 1 var enten i form av sjokoladebiter, en hel sjokoladeplate, ulike elever i form av enkle strekfigurer eller sirkler som skulle representere hoder. Elevene brukte også tellestreker som skulle representere antall sjokoladeruter. Tellestreker kan (som tidligere beskrevet) være en bro mellom visuell og symbolsk representasjon da det både kan representere tallverdier eller gi en visuell fremstilling av antall. Oppgave 1 hadde lite forskjeller på tegningen til elevene når en skal se på hvor detaljerte og nøye de var. Forskjellen kan antagelig skilles mellom elevene som tegner tellestreker kan ha kommet lenger i utviklingen enn elevene som tegner 15 firkanter. Motsatt ble utviklingen hos elevene i oppgave 2 og 3 vist da det var lettere å se et skille på elevene som tegnet mer detaljert, og hvilke elever som tegnet mer ikonisk. Både oppgave 2 og 3 hadde elever som tegnet detaljerte tegninger. Visualiseringen i oppgave 2 ble vist med nøyaktige tegninger av dyrene eller mer abstrakte i form av sirkler som hoder og streker som bein. I oppgave 3 ble visualiseringen vist med tegninger av is-kombinasjoner i kjeks og beger, i form av trekanter og firkanter.

Innen visuell representasjon kan en se på strategien lage systematiske tabeller (Klaveness et al., 2019, s. 194–196). Det var et fåtall av elevene som benyttet seg av denne strategien. Ved *å lage en systematisk tabell* fikk elevene god oversikt over de ulike tallene og verdiene de noterte, og det ga dem muligheten til å se tallene eller verdiene opp mot hverandre. Dette bidrar til bedre oversikt, og gir økt mulighet for å finne riktig løsning ved hjelp av tabellen. Det var totalt en i oppgave 1, og to i både oppgave 2 og oppgave 3. Tabeller kan kobles opp mot representasjonskompetansen (Niss &

Jensen, 2002, s. 56) og første og andre fase i Polya sin problemløsningsprosess (Polya, 1945, s. 6–8). Det kan ses i sammenheng med representasjonskompetansen da den innebærer evnen til å kunne forstå, arbeide og tolke ulike typer matematiske representasjoner, samt kunne bruke representasjonene effektivt og på en meningsfull måte (Niss & Jensen, 2002, s. 56). Både visuell og symbolsk representasjon kan kobles mot representasjonskompetansen da elevene må bruke representasjonen riktig, og velge den mest hensiktsmessige representasjonen til oppgavene. Analysen viste at elevene hadde brukt gode representasjoner etter elevens evne og matematiske kompetanse. Det var forskjell på hvilke representasjoner som ble benyttet og hvordan de ble brukt.

Tegningene viste at elevene hadde konstruert modeller som var relevant for oppgaven, som også kunne være til hjelp med å finne løsningen (Rellensmann et al., 2017, s. 403). Tegningen hadde ivertatt det matematiske objektet og kunne bidra til en bedre forståelse. Forståelse av oppgaven kan også kobles opp mot Polyas første fase, å forstå problemet (Polya, 1945, s. 6). Ved å se på forståelse av problemet i oppgave 1 var det flere elever som hadde glemt eller oversett opplysningen med at ingen skulle få samme antall biter. Bildet av sjokoladeplaten skapte også en forvirring for den ene eleven. Samme utfordring med at elevene glemte eller hadde oversett en opplysning, ble også vist i oppgave 2. I oppgave 2 var det også elever som ikke hadde forstått at dersom de fjernet en av verdiene fra utregningen, ville dette påvirke den andre. Flere elever hadde glemt riktig antall bein, men hadde riktig antall hoder, eller motsatt. Hovedproblemet med forståelsen i oppgave 3 handlet om at elevene skulle lage så mange kombinasjoner de klarte, og ikke hvilken is de selv hadde valgt. Resultatene viste at det var fire elever, tilsvarende 18%, som hadde tenkt hvilke is de ville hatt. De tenkte ut fra sin egen erfaring og klarte ikke å ta inn den nye matematiske situasjonen det var spørsmål om. Noen av elevene hadde også problemer med å håndtere både de forskjellige smakene, og at det var to beholdere (kjeks og beger).

Bruk av symbolsk representasjon ble vist ved at elevene brukte tall, sifre, ord, bokstaver og piler (Hana, 2014, s. 144; Johnson, 2018, s. 3; Knudtzon, 2019, s. 142). Elevene noterte ned relevante regnestykker som kunne bidra i løsningen av oppgavene. Når elevene velger å bruke symbolske representasjoner kan dette skyldes at de arbeider lettere med tall og symboler fremfor visuelle representasjoner. Det kan også være oppgaver som legger mer opp til løsninger med tall. Oppgave 2 kunne blant annet blitt løst ved hjelp av ligninger dersom elevene hadde hatt god kjennskap til bruk av ligninger. Symbolet piler ble observert hos et par av elevene. Her brukte elevene piler i

fordelingen av sjokoladerutene, og for å lage ulike kombinasjoner av is. At elevene velger å bruke piler kan være grunnet mer oversiktlig fordeling, og for å skrive mindre. Det er enklere å plassere piler mellom de ulike smakene i oppgave 3 fremfor å skrive alle kombinasjonene.
Det ble også vist elever som brukte symbolet likhetstegnet feil. Totalt var det fire elever som hadde brukt likhetstegnet mer som et fortsettelsestegn. Feil bruk av likhetstegnet vil være en manglende symbol- og formalismekompetanse da det innebærer å håndtere riktig bruk av symbolene (Niss & Jensen, 2002, s. 44). Dersom tallene på begge sidene av likhetstegnet ikke har samme vil det bli feil bruk. Til tross for feil bruk viste ikke disse elevene en svakhet i den matematiske tenkningen. Elevene viser stor matematisk tenkning i hvordan de tenker og kommer frem til svarene. Dersom en hadde sett på elevenes oppgaver felles kunne en som lærer snakket om hvorfor det blir feil bruk og hvordan elevene kunne skrevet opp regnestykkene annerledes. På den måten kan elevene få en god lærdom i riktig håndtering, og det kan gi en bedre innsikt hos elevene som brukte det feil, og det kan bidra at elevene lærer av hverandre.

I forkant av undersøkelsen ble det vurdert om elevene skulle få tilgang til konkreter som en representasjon. Dette kunne vært en styrke for elevene som trenger en støtte i arbeidet med problemløsningsoppgaver. Det ble gjort et valg om å ikke ha de med da det skaper vanskeligheter for metoden min. Da burde det vært med bruk av video for å kunne analyser hvordan de bruker konkretene. Derfor faller den konkrete representasjonen i en slik metode som jeg valgte. På samme måte faller den verbale representasjonen i form av muntlighet, da elevene ikke har mulighet til å snakke og forklare oppgavene høyt. Verbal representasjon ble derimot brukt som skriftlig språk av en elev i både oppgave 1 og 3 (Monoyiou et al., 2007, sitert i Knudtzon, 2019, s. 134). Bakgrunnen for at en elev benyttet seg av verbal representasjon i form av skriftlig språk kan være grunnet beskjeden de fikk om å notere hva de tenkte. Her kan eleven tenkt bokstavelig, altså at han måtte skrive hvordan han ville løst oppgavene, i tråd med den gitte instruksjonen de fikk. Eksempelvis i oppgave 1: «~~Den første eleven får X 1, Den andre får – 2~~ […]» (se Figur 9A). Der jeg har markert ord med gjennomstreking har eleven klusset over teksten sin.

5.2 Behandling og overgang innen et semiotisk system

I det matematiske arbeidet ble det vist elever som arbeidet innen ett representasjonssystem, behandling, og elever som byttet til et annet system, gjorde en overgang (Duval, 2006, s. 111–114). Når elevene gjør en behandling fra oppgaven velger de en form for representasjon, for eksempel tegning (visuell), før de videre lager en relevant form for tegning og løser oppgaven. Her arbeider de innen samme representasjonssystem helt til oppgaven er løst. Eksempelvis ble dette vist hos en elev, elev nr. 2, som gjorde en behandling fra oppgave 1 og tegnet en sjokoladeplate før han videre fordelte rutene og fant svaret. Dersom elevene ser at de vil ha vanskeligheter med å løse oppgaven innen det valgte systemet, kan de gjøre en overgang til et annet system, for eksempel fra tall (symbolsk) til tabell (visuell). Et par elever viste at de gjorde en overgang fra et system til et annet. Dette ble blant annet vist hos en elev som startet innen det visuelle representasjonssystemet før hun videre gikk over til tall innen det symbolske. Dette var i oppgave 1 hvor hun startet med å tegne en sjokoladeplate, før kjapt gjorde en overgang til tall hvor hun lagde ulike rekker med tall. Etter at hun gjorde en overgang og benyttet seg av *prøve og feile* strategien klarte hun oppgaven. Det ble også observert elever som arbeidet innen to representasjonssystemer samtidig. Disse elevene brukte både tall eller bokstaver innen symbolsk og hadde en visuell støtte. Det kan være vanskelig å antyde om elevene arbeidet samtidig med representasjonene eller om de arbeidet med den ene først og deretter den andre, da løsningen er satt opp slik at det kan være begge deler. Ved å se på løsningen til Sara (kapittel 4.3) i oppgave 2 kan en antyde at hun tegnet et visst antall dyr før hun videre telte ved hjelp av tall. En annen elev som brukte kombinasjon mellom symbolsk og visuell representasjon hadde skrevet de ulike kombinasjonene hun fant i oppgave 3 med en visuell støtte under i form av firkanter, som skal representere beger.

5.3 Lærerens rolle

Læreren har ulike roller beskrevet i kompetansemodellen til Niss og Jensen (2002) som skal bidra for å skape god læring for elevene. I et masterprosjekt vil det være vanskelig å passe på alle de ulike rollene som kompetansemodellen beskriver. Utarbeidingen av oppgavene prøvde å legges mest mulig til rette for femte klasseelever, uten å ha en kjennskap til den bestemte elevgruppen. På forhånd måtte jeg som forsker tenke gjennom mulige løsninger på de ulike oppgavene, og tenke gjennom hvilke feil elevene kunne gjøre. For å kunne drøfte og forstå elevenes tekster måtte jeg på forhånd ha en viss kjennskap til hvilke svar som kunne forventes, slik at jeg kunne se nøye over hva elevene hadde skrevet og tenkt i etterkant. Intervjuene vil gi meg en bedre innsikt i hvordan elevene hadde tenkt da elevene kunne forklare sine tenkemåter, og hvordan de kom frem til svarene. Dette er viktig da det ofte kan være vanskelig å se hva elevene har tenkt i oppgaver hvor det ikke er skrevet et fullstendigsvar eller har en utregning. Enkelte elevers håndskrift kan også være vanskelig å antyde og tolke.

Lærerens rolle hvor en skal gå igjennom svarene og oppgavene vil være vanskelig i en slik setning hvor elevene skal levere inn et hefte uten å arbeide videre med de i et klasserom. En svikt i Polyas (1945) siste fase kan derfor vises da denne fasen innebærer å se tilbake og reflekter over hva som har blitt gjort (s. 14). I et vanlig klasserom ville læreren hatt muligheten til å dele ut heftene igjen, og på den måten kunne elevene ha delta i sin egen retting. Dette åpner for mye viktig læring, ved at elevene kan se hva de har gjort og hva de har fått til og hvor de eventuelt har stoppet opp. Å arbeide med oppgavene felles gir også elevene mulighet til å sammenligne med læringsparter. På den måten kunne de se om de hadde tenkt på samme måte, og om de fikk samme svar. Hadde de hatt samme svar kunne de sammenlignet strategi og hvordan de løste oppgaven, mens dersom de hadde hatt ulikt svar måtte de sett nærmere på oppgaven og funnet ut hvem som hadde riktig.

Intervjuene kunne derimot gi elevene en liten mulighet til å kunne se over arbeidene sine. Alle elevene måtte forklare hvordan de hadde tenkt, og hva de hadde gjort. Under samtalene kunne elevene se over oppgavene sammen med en voksen. Elevene som hadde gjort en feil fikk først spørsmål om de visste om feilen. Dersom elevene ikke visste hvorfor de hadde gjort feil ble oppgaven opplest for dem med et trykk på den delen av oppgaveteksten de hadde utelatt. I oppgave 1 var det «*Ingen elever får det samme antall sjokoladebiter*», i oppgave 2: «*Til sammen har dyrene 32 bein og 10 hoder*», og i oppgave 3: «*På hvor mange måter [...]*». Flere elever fikk da en aha-følelse, altså at elevene viste en følelse av at de forsto hva de hadde gjort feil. Elevene fikk da muligheten til å løse oppgaven på nytt. Først fikk de prøve på egenhånd, men dersom de fortsatt hadde vanskeligheter kom jeg med hint som kunne være til hjelp. Hvis de fremdeles syntes det var vanskelig gikk vi i gjennom oppgavene mens jeg løste og forklarte hva som ble gjort.

At elevene forklarer tenkemåtene sine er under det ene kompetansemålet for 5. trinn i matematikk (Kunnskapsdepartementet, 2019, s. 8). Det kan også kobles opp mot kommunikasjonskompetansen da elevene må formidle seg matematisk og med et tydelig språk slik at mottakeren forstår (Niss & Jensen, 2002, s. 60). Samtale med eleven og hvordan tankeprosessen har fungert kan åpne opp for gode diskusjoner om matematikk. Læreren kan hjelpe eleven med å forstå hva som er galt og hva som er gjort riktig. Videre kan gode samtaler med bruk av både fagbegreper og tekniske termer gi elevene økt kompetanse og bidra med å gi elevene et bedre matematisk ordforråd.

Blant intervjuene varierte det på hvor mye av fasen se tilbake og reflektere som ble benyttet. Intervjuene fokuserte mest på de som ikke klarte oppgavene, fremfor de som klarte det. Dette sørger for at elevene som ikke har forstått oppgavene fikk mer lærdom av sine feil enn de som klarte det. Elevene som klarte oppgavene fikk skryt for at de klarte det, men det ble ikke gjennomgått noe mer i dybden på hvorfor og hvordan de klarte det. Dette var grunnet tidspresset jeg hadde på å gjennomføre intervjuene.

5.4 Problemløsningskompetanse

Elevbesvarelsene viser at problemløsning er utfordrende. Som teorien beskriver så innebærer problemløsningskompetansen at elevene skal kunne løse alle mulige matematiske problemer, både åpne og lukkede oppgaver (Niss & Jensen, 2002, s. 49). Problemene vil være også være individuelle da et problem for en kan være en rutine for en annen (Björkquist, 2003, s. 54; Boesen, 2006, s. 31; Niss & Jensen, 2002, s. 49). I oppgavene hadde elevene problemer med å ta alle opplysningene og håndtere de riktig. De strever med å hente den viktige informasjonen og elevene klarte ikke å lese oppgaven med en tilstrekkelig nøyaktighet. I dette tilfellet mener jeg at elevene burde vært i stand til å forstå oppgaven ettersom de fikk vite flere viktige opplysninger. I tillegg mener jeg elevene burde vært i stand til å løse denne oppgaven da dette var en matematikkoppgave, og ikke et spørsmål om interesse og lyster. Oppgave 1 og 2 kan også vise tegn til manglende kommunikasjonskompetanse, grunnet at elevene ikke har fått med seg all den viktige informasjonen. slik at de forsto problemet. På den måten kan det også ses i sammenheng med Polyas første fase, å forstå problemet (Polya, 1945, s. 6). Ved å se på forståelse av problemet i oppgave 1 var det flere elever som hadde glemt eller oversett opplysningen med at ingen elever skulle få samme antall biter. Samme utfordring i oppgave 1 med at elevene glemte eller oversett en opplysning, ble også vist i oppgave 2. I oppgave 2 var det også elever som ikke hadde forstått at dersom de fjernet en av verdiene fra utregningen, ville dette påvirke den andre. Flere elever hadde glemt riktig antall bein, men hadde riktig antall hoder, eller motsatt. Hovedproblemet med forståelsen i oppgave 3 handlet om at elevene skulle lage så mange kombinasjoner de klarte uten repetisjon, og ikke hvilken is de selv hadde valgt.

Elevene hadde i tillegg problemer med å skille praktisk virkelighet fra den spesielle situasjonen i en matematikk oppgave, det var en kontekstdominans (Wistedt, 1993, s. 44). Dette gjaldt særlig i oppgave 3 hvor elevene hadde med sin egen virkelighet inn i arbeidet med den matematiske oppgaven. Her må elevene si farvel til virkeligheten og gå inn matematisk. Det var også synlig i oppgave 1 hvor elevene delte likt. I virkeligheten ville elevene ha fordelt rettferdig, likt mellom alle elevene.

5.5 Kritikk av oppgavevalget

Etter analyse og drøfting av elevbesvarelsene ble det dannet ulike ettertanker. Ettertankene rundt oppgave 1 omhandler oppgaveformuleringen. Oppgaven ble inspirert av en av problemløsningsoppgave på matematikk.org. I originalteksten sto det «Hvor mange aper kan vi på det meste dele disse bananene på?» (Matematikk.org, u.å.). Når jeg skulle endre oppgaven endret jeg ordene *kan vi* med *er det*, og i denne oversettelsen var jeg ikke klar over at mine ord gjør at det lettere forventes bare en løsning, mens ordet «*kan»* inviterer til flere løsninger. Løsningsforslaget på originalen viste også bare et forslag. Til ettertanke burde jeg vært klar over formuleringen av oppgaven, da noen elever kanskje ville lagt merke til at det kunne vært flere ulike løsninger. Det er også gjort en kritisk tanke rundt bruk av bildet i oppgaven. En elev hadde gjort en feil ved å inkludere konkret bildet av sjokoladeplaten i utregningen. Eleven hadde tatt med bildet av sjokoladeplaten i utregningen. Denne eleven hadde multiplisert de 15 sjokoladebitene som sto i oppgaveteksten med de 10 rutene han telte på bildet, og funnet svaret sitt 150. Bildet burde ha vært endret til en sjokoladeplate med 15 ruter, eller fjernes helt. Hadde figuren hatt akkurat 15 sjokoladeruter ville oppgaven antageligvis vært lettere. Ordlyden er avgjørende for matematisk innhold og hvor vanskelig oppgaven blir. Men på en måte kunne veiledende bilde og veiledende tekst gå imot hverandre og styrke sansene.

Ettertanken rundt oppgave 2 omhandler valg av dyr. Dette er en standard ligningsoppgave som flere kjenner til. Da denne oppgaven gir god mulighet til å løses ved ligning burde jeg ha sørget for at begge dyrene ikke starter med samme forbokstav (H). Det burde vært valgt et annet firebeintdyr enn hest, for eksempel sau eller gris. Strategien *prøve og feile* gir raskt svar hvis elevene starter med fem av hvert dyr, da er 30 bein brukt og det er to igjen. Det gir seks hester og fire høner. Oppgaven kunne vært laget med mer ulikt antall, da ville prøvingen tatt litt lenger tid. I denne oppgaven hadde jeg forventet at noen elever hadde tegnet eller skrevet opp ti hoder og fordelt to bein på hver, da er det brukt 20 bein brukt og 12 resterende. Videre kunne elevene fordelt de 12 beina med to og to for å forandre seks høner til hester.

Refleksjon rundt oppgave 3 omhandler også oppgaveformuleringen, da oppgaven nå legger opp til to mulige løsninger. Hvis det blir presisert at rekkefølgen ikke har noe å si er oppgaven mer entydig. En skriftlig oppgave som elevene skal sitte alene med er mer avhengig av tekstformuleringen. I klassesituasjonen kan dette gi interessante samtaler. En annen ettertanke handler om opplysningene elevene fikk i oppgaven. Dersom oppgaven ikke hadde vært dobbel, altså med både i valg av kjeks og beger, hadde det vært færre opplysninger å håndtere. På den måten ville flere elever fått riktig svar.

Ved å se på de ulike oppgavene ville det vært av interesse å se hvordan elever med en høyere kompetanse ville løst de ulike oppgavene, og sett hvilke strategier og representasjoner de bruker. Det kunne for eksempel vært av interesse å se hvordan ungdomsskoleelever eller videregåendeelever løser slike oppgaver. Det kunne også vært interessant å se hvordan voksne ville løst oppgavene, da voksne etter erfaring ofte overtenker eller tenker for avansert. Av mer avansert strategi i oppgave 2 kan dette være å tegne opp at alle dyrene skulle ha vært høner. På denne måten ville en hatt 16 høner, når vi har 32 bein. Videre kunne en slått sammen to og to høner for å danne en hest, og fortsatt med dette frem til en fant ti hoder til sammen. Blant mer avanserte strategier kunne oppgavene ha blitt løst mer algebraisk og ved bruk av likninger. Forskeren er også på en sti med kanskje *prøve og feile*. Meningen i vitenskap er å være seg bevisst om feilen og erklære det åpent.

5.6 Utvalget mitt

Utvalget i denne undersøkelsen besto av 22 elever, 10 gutter og 12 jenter. Klassen besto av opprinnelig 23 elever, men en elev ønsket ikke å delta, derfor er mitt datamateriale basert på 22 elever.

Fordelen ved mitt utvalg er at jeg vil kunne vise en god del av det vi vil finne i en vanlig norsk femteklasse. Datamaterialet mitt består av 66 elevbesvarelser fordelt på tre oppgaver. Dette åpner for at en kan tydeligere se hvilke strategier og representasjoner som blir brukt, men det er påvirket av tidligere undervisning og erfaringer i denne klassen.

Siden det er valgt en kvalitativ tilnærming og et begrenset antall deltakere kan jeg ikke vise tallforhold og prosentvis da en enkelt elev vil påvirke tallene mye.

5.7 Metoderefleksjon

Troverdighet og pålitelighet kan styrkes ved at avvik og svakheter ved metoden legges frem. Alle tolkninger som blir presentert i drøfting og analyse er mine egne tolkninger av innholdet. Videre er det viktig å merke at det er jeg som har funnet oppgavene. En svakhet ved metoden min var bruken av observasjon. Informasjonen som ble observert hadde liten betydning i det endelige resultatet. Den informasjonen observasjonen ga var interessen elevene viste, og hvor lang tid elevene brukte. Det jeg oppnådde med observasjonen var at noen elever arbeidet lenger da de fikk beskjed om å se over løsningene sine. Observatøreffekten (Dalland et al., 2021, s. 130) kan ha hatt en påvirkning på oppførselen til elevene ettersom at de kan ha hatt et ønske om å gjøre det bra. Den kan også ha det gjort det enklere for elevene å være med på intervjuet i etterkant, når de hadde fått en liten kjennskap til meg. Analyse av elevbesvarelsene og observasjonen viste at alle elever hadde prøvd å løse oppgavene. Dette kan indikere at observatøreffekten spilte en rolle blant utvalget i min undersøkelse. Det burde også vært fokusert mer rundt kodingen og kategoriseringene i forkant av undersøkelsen. Dette kunne antagelig ha sørget for mer presise tolkninger og analyser.

6 Avslutning

Målet med masteroppgaven har vært å utrede om det finnes variasjon i 5. klassingers problemløsningskompetanse, og hvilke strategier og representasjoner de bruker. Resultater av funn og drøfting viser at problemløsning er utfordrende for 5. klassinger. Flere av elevene strevde med å forstå oppgavene og å hente ut den relevante informasjonen. Til tross for dette ble det vist et positivt engasjement for problemløsning. Ved å se på bruken av representasjoner benytter elevene seg i hovedsak av visuell eller symbolsk representasjon. Innen strategiene for problemløsning benytter elevene seg i mest av *visualisering* og *prøve og feile*. Bakgrunnen for dette kan være kjennskapen elevene har til disse og at dette er strategier som passer til de gitte oppgavene. I arbeidet med å kartlegge elevers problemløsningskompetanse må elevene få mulighet til å løse ulike oppgaver som tester forskjellige ferdigheter. De må også få tilbud om å se over besvarelsene sine slik at de kan lære av sine feil, dermed også videreutvikle fremgangsmåtene sine. Dette var vanskelig i en slik setting som dette masterprosjektet. Elevene fikk kun mulighet til å se over løsningene sine under intervjuene. Hvilke strategier elevene i mitt prosjekt anvender støttes av tidligere forskning som viser at de mest brukte strategiene på tredje trinn er *gjett og sjekk* (Ottesen & Guttormsen, 2023, s. 68), mens i tekstbøkene på åttende trinn er strategiene *løs en del av problemet* den mest brukte og nummer to er *lage en visualisering* (Kongelf, 2017, s. 25).

Av dette masterprosjektet har flere viktige punkter rundt problemløsning blitt synlige. Jeg har fått økt forståelse for selve oppgaveformuleringen, fundamentet språket bygger på og at formuleringen kan få endringer som kan påvirke mye. Dette ble blant annet vist i oppgave 1 hvor jeg hadde lukket oppgaven mer enn jeg trodde. Oppgaven kunne vært rikere dersom den hadde vært formulert annerledes. Videre har jeg blitt mer trygg på bruk av strategier og representasjoner, hva jeg kan forvente og hvordan jeg kan arbeide med det. Det er viktig å reflektere over oppgavene og hvilke strategier og representasjonene elevene bruker slik at en i lærerrolle er godt forberedt på elevenes løsninger.

Det er mitt ønske at arbeidet også kan være opplysende, lærerikt og av interesse for lærere og lærerstudenter.

6.1 Veien videre

Videre ville det vært hensiktsmessig å dra matematiske problemløsningsoppgaver enda ytterligere inn i skolen for å bygge opp innunder læreplanen for matematikk og overordnet del av læreplanen. Dette er for å bidra at elevene skal tenke kritisk, skape matematisk kreativitet, være engasjerte og nysgjerrige.

Det ville også vært en interessant studie å involvere elevene i gjennomgang og retting av sine egne oppgaver, med veiledning fra en voksen. På denne måten kan elevene få en økt innsikt i deres egen tenkning, samtidig som det kan bidra til utviklingen av deres problemløsningskompetanse ved å lære av sine feil og fremgangsmåter. Det å *prøve og feile*, men går videre, det er selve progresjonen som får gro.

Dersom en skulle gjennomført et lignende masterprosjekt senere ville jeg videreutviklet forskningen med fokus på elevgruppen, hvor de kunne jobbet mer i et fellesskap. Her ville jeg gjennomført oppgaven der elevene skulle arbeidet sammen i grupper. På den måten kunne elevene som hadde vanskeligheter med problemløsning fått en støtte i samarbeidet hvor de kunne delt ideer og løsningsforslag. Dette kunne åpnet for flere interessante løsninger og antageligvis ville flere elever funnet riktig løsning. Materialet i problemløsning er også i seg selv et mål.

Valgte oppgaver for gjennomføringen kunne vært utarbeidet innen samme matematiske tema. På den måten kunne det vært hensiktsmessig å sammenligne valgte strategier og representasjoner hos elevene.

Litteraturliste

Anker, T. (2021). *Analyse i praksis – En håndbok for masterstudenter.* (1. utgave). Cappelen Damm Akademisk.

Björkquist, O. (2003). Matematisk problemløsning. I B. Grevholm (Red.), *Matematikk for skolen* (s. 51–70). Fagbokforlaget Vigmostad & Bjørke AS.

Boesen, J. (2006). Assessing mathematical creativity – Comparing national and teacher-made tests, explaining differences and examining impact [Doktorgradsavhandling, Umeå universitetet]. ResearchGate. https://www.researchgate.net/publication/277805890_Assessing_mathematical_creativity_comparing_national_and_teacher-made_tests_explaining_differences_and_examining_impact

Carlson, M. P., & Bloom, I. (2005). The Cyclic Nature of Problem Solving: An Emergent Multidimensional Problem-Solving Framework. Educational Studies in Mathematics, 58(1), 45–75. https://doi.org/10.1007/s10649-005-0808-x

Clipart Library. (u.å.). *Free Clip Art Library*. Hentet 5. februar 2023 fra https://clipart-library.com/

Dalland, C. P., Bjørnestad, E. & Andersson-Bakken, E. (2021). Observasjon som metode i barnehage- og klasseromsforskning. I E. Andersson-Bakken & C. P. Dalland (red.), *Metoder i klasseromsforskning: forskningsdesign, datainnsamling og analyse* (1.utgave, s. 125–152). Universitetsforlaget.

Dalland, O. (2017). *Metode og oppgaveskriving* (6. utg.). Gyldendal Akademisk.

Duval, R. (2006). *A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics*. Educational Studies in Mathematics, 61(1/2), 103–131. http://www.jstor.org/stable/25472062

Hana, G. M. (2014). *Matematiske tenkemåter*. Caspar Forlag.

Johannesen, A., Tufte, P. A. & Christoffersen, L. (2021). *Introduksjon til samfunnsvitenskapelig metode* (6. utg.). Abstrakt forlag.

Johnson, E. L. (2018). A New Look at the Representations for Mathematical Concepts: Expanding on Lesh's Model of Representations of Mathematical Concepts. I *Forum on Public Policy Online* (Vol. 2018, No. 1). Oxford Round Table. https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1191692.pdf

Karlsen, L. (2017). *Tenk det! Utforskning, forståelse og samarbeid – elever som tenker sjæl i matematikk* (1. utg.). Cappelen Damm.

Klaveness, E., Karlsen, L., & Kverndokken, K. (Red.). (2019*). 101 grep for å aktivisere elever i matematikk: matematikkdidaktikk i teori og praksis* (1. utg.). Fagbokforlaget.

Knudtzon, S. H. (2019). overskrift. I E. Klaveness, L. Karlsen & K. Kverndokken (Red.), *101 grep for å aktivisere elever i matematikk: matematikkdidaktikk i teori og praksis* (1. utg., s. 133–157). Fagbokforlaget.

Kongelf, T. R. (2011). What characterises the heuristic approaches in mathematics textbooks used in lower secondary schools in Norway. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 16(4), 5-44. https://ncm.gu.se/wp-content/uploads/2020/06/16_4_005044_kongelf.pdf

Kunnskapsdepartementet. (2013). *Læreplan i matematikk fellesfag (MAT1-04)*. Fastsatt som forskrift. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2006. https://www.udir.no/kl06/MAT1-04?lplang=http://data.udir.no/kl06/nob

Kunnskapsdepartementet. (2017). *Overordnet del – verdier og prinsipper for grunnopplæringen*. Fastsatt som forskrift ved kongelig resolusjon. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020. https://www.udir.no/lk20/overordnet-del/?lang=nob

Kunnskapsdepartementet. (2019). *Læreplan i matematikk 1.–10. (MAT01-05)*. Fastsatt som forskrift. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020. https://www.udir.no/lk20/mat01-05?lang=nob

Lesh, R., Post, T. & Behr, M. (1987). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. I C. Janvier (red*.), Problems of representations in the teaching and learning of mathematics* (s. 33-40). Lawrence Erlbaum.

M87, Mønsterplan for grunnskolen 1987, Kirke- og undervisningsdepartementet, Aschehoug & Co (W. Nygaard) Oslo 1987.

Matematikk.org. (u.å.). *Tekstnøtt: Deling av bananer*. Hentet 5. februar 2023 fra https://www.matematikk.org/tekstnott.html?tid=105031

Niss, M. & Jensen, T. H. (2002). *Kompetencer og matematiklæring: Ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark* (1. utg.). Undervisningsministeriets forlag. https://www.researchgate.net/publication/290429774_Kompetencer_og_matematiklaering_Ideer_og_inspiration_til_udvikling_af_matematikundervisning_i_Danmark

Nyeng, F. (2012). *Nøkkelbegreper i forskningsmetode og vitenskapsteori* (1. utg.). Fagbokforlaget.

Ottesen, K. & Guttormsen, E. (2023). Matematiske problemløsningsoppgaver i læreverk på småtrinnet [Masteroppgave, Universitet i Østfold]. https://hdl.handle.net/11250/3084952

Polya, G. & Conway, J. H. (1945). *PART I. IN THE CLASSROOM. In How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method* (s. 1–32). Princeton University Press. https://doi.org/10.2307/j.ctvc773pk.9

Rellensmann, J., Schukajlow, S., Blomberg, J., & Leopold, C. (2022). Effects of drawing instructions and strategic knowledge on mathematical modeling performance: Mediated by the use of the drawing strategy. *Applied Cognitive Psychology*, 36(2), 402–417. https://doi.org/10.1002/acp.3930

Skovholt, K., Landmark, A. M. D., Sikveland, R. O. & Sølem, M. S. (2021). *Samtaleanalyse: en praktisk innføring.* (1. utg.). Cappelen Damm Akademisk.

Svenkerud, S. W. (2021). Intervjuer i klasseromsforskning. I E. Andersson-Bakken & C. P. Dalland (red.), *Metoder i klasseromsforskning: forskningsdesign, datainnsamling og analyse* (1.utgave, s. 91–103). Universitetsforlaget.

Svingen, O. E. L. (2018). *Representasjoner*. Matematikksenteret. https://www.matematikksenteret.no/sites/default/files/attachments/Elever%20som%20presterer%20lavt/P4_M1Representasjoner-i-matematikk_fagtekst.pdf

Sæter, C. F. (2022). Elevers representasjoner når de løser tekstoppgaver [Masteroppgave, Universitet i Sørøst–Norge]. USN Universitetsbibliotek. https://hdl.handle.net/11250/3014460

Torkildsen, S. H. (2017). *Matematisk problemløsning*. Matematikksenteret. https://www.matematikksenteret.no/sites/default/files/media/filer/MAM/Torkildsen%20Matematisk%20Probleml%C3%B8sing.pdf

Universitetet i Oslo. (2023, 11. mai). *Trends in International Mathematics and Science Study (TIMSS)*. https://www.uv.uio.no/ils/forskning/prosjekter/timss/

Utdanningsdirektoratet. (2017, 4. mai). *Hva måler nasjonal prøve i regning?*. https://www.udir.no/eksamen-og-prover/prover/nasjonale-prover/mestringsbeskrivelser-og-hva-provene-maler/hva-maler-nasjonal-prove-i-regning/

Utdanningsdirektoratet. (2022, 7. juli). *PP-tjenesten (PPT)*. https://www.udir.no/laring-og-trivsel/spesialpedagogikk/pp-tjenesten/

Veen, J. H. (2022). Semiotiske representasjoner i problemløsning [Masteroppgave, Universitet i Sørøst–Norge]. USN Universitetsbiblioteket. https://hdl.handle.net/11250/3016079

Wistedt, I. (1993). Elevers svårigheter att formulera matematiska problem. *Nordisk matematikkdidaktikk, Vol.1 (1),* s.40–54

Oversikt over tabeller

Liste over vedlegg

Vedlegg 1: Informasjonsskriv til foreldrene

Vedlegg 2: Undervisningsplanleggingsskjema

Vedlegg 3: Intervjuguide

Vedlegg 4: Oppgavehefte elevene fikk utdelt

Vedlegg 1: Informasjonsskrivet til foreldrene

Hei, mitt navn er Martine Jøssong og jeg går 5. året på grunnskolelærer 1-7 på Universitetet i Sørøst–Norge. [redacted]. Jeg skal ta master i matematikk, og ønsker å gjennomføre forskningen min i klasse 5[redacted] [redacted]dag neste uke. Her vil det bli gjort et opplegg som omhandler problemløsning i matematikk, og hvordan elevene arbeider med slike oppgaver. Her vil jeg også se på ulike misoppfatninger som kan bli gjort.

I forskningen min vil alle opplysninger bli holdt anonyme, og skal ikke bli mulige å spore tilbake. Etter forskningen vil alle ark bli makulert, og brent. Elevens navn og identitet har ingen betydning for min oppgave, og jeg skal sørge for at alt av opplysninger og gjennomføringer blir holdt anonymt. I arbeidet med forskningen kommer jeg til å observere underveis, og se hvordan de arbeider.
I etterkant kommer jeg til å gjennomføre enkelte anonyme intervjuer for å høre hvordan eleven har tenkt, og kommet fram til svaret.

Dersom du har noen spørsmål, er det bare å sende en melding til meg på 225755@usn.no

Dokumentet har blitt retusjert for å opprettholde anonymitet

Vedlegg 2: Undervisningsplanleggingsskjema

Undervisningsplanlegging

-planleggingsskjema-

NAVN: Martine Jøssong		**DATO:**
ELEVGRUPPE: 5 …	**TID:** 1–2 skoletimer	**FAG/TEMA:** Matematikk – problemløsning

RAMMEFAKTORER: (læremidler, romforhold, organisering av dagen, antall voksne)

- Pultene i klasserommet står en og en. Slik at elevene får arbeidet alene og ikke ser på sidemann
- Voksne i rommet: 1 lærer som styrer undervisningen, meg som observatør, og eventuelle assistenter på enkeltelever + en lærer som kan være ute/inne med elevene som er ferdig med oppgavene.
- Elevene får utdelt oppgave ark, kun behov for gråblyant (ønsket er at elevene ikke visker ut feil, grunnet ønske å se tankeprosessen deres)

Undervisningsopplegget vil vare rundt 1 – 2 undervisningstimer, avhengig av hvor raske elevene er. Elevene skal stoppe når alle oppgavene er besvart, og ikke bli stoppet av tiden. Oppgaveheftene er nummerert på toppen når elevene får de utdelt. Dette er fordi i etterkant kan jeg intervju de aktuelle elevene jeg ønsker å finne ut mer av hvordan de har tenkt, uten å benytte navn

MÅL:

Kompetansemål fra LK20 som skal dekkes:

- *utvikle og bruke ulike strategier for regning med positive tall og brøk og forklare tenkemåtene sine*

Kjerneelementer:

Utforsking og problemløsing

Representasjon og kommunikasjon

Mål for økten (**hvorfor**): (formålet og hensikten med undervisningen) Målet er at elevene skal få jobbet med ulike problemløsende oppgaver. Målet med økten er å se hvordan elevene arbeider med problemløsende oppgaver.					
GRUNNLEGGENDE FERDIGHETER denne økten: (størst fokus på)	Muntlig	Lese	Skrive	IKT	Regne **X**
INNHOLD (**hva**): (plan for timen med faglig innhold) Første del av undervisningen består av en kjapp gjennomgang på hva problemløsning er. Lærer forklarer at elevene må huske hvilket nummer de får, slik at jeg får intervjuet elevene i etterkant av oppgavene (samme dag om mulig, eventuelt dagen etter) Videre forklarer lærer oppgavene og hva de skal gjøre på de ulike oppgavene. Lærer forklarer også at dersom elevene svarer feil så er det viktig at de ikke visker bort svarene sine, men heller setter et kryss over slik at vi vet det er feil. Tankeprosessen til elevene er også ønsket, så forklaring om at elevene skal skrive ned hele tankeprosessen og hvordan de tenker er essensielt. Under arbeidet med oppgavene kan lærer gå rundt dersom elevene har spørsmål, men det viktig at den kun forklarer hva oppgaven spør om og ikke hjelper for mye med hvordan de skal komme frem til svaret. Etter elevene har svart på oppgavene legger de heftet opp på kateteret, og går ut av klasserommet eller setter seg ned og leser (kommer an på tilgjengeligheten av en ekstra voksen, eller hva lærer helst ønsker). Problemløsning definert av Kunnskapsløfte: (om lærer ønsker en begrepsforklaring) *Problemløsning handler om å tilegne seg metoder for å løse et ukjent problem. Det handler også om å benytte seg av kjente fremgangsmåter for å løse det ukjente.* Resonering definert av TIMSS: (om lærer ønsker en begrepsforklaring) ***Å resonnere****: innebærer å tenke logisk, analysere situasjoner og sammenhenger, generalisere resultater, kombinere informasjon, begrunne påstander og løse problemer som ikke er rutinepreget.*					

ARBEIDSMÅTER (**hvordan**, praktisk gjennomføring av økten) MLEO

M	Målet med økten er å se hvordan elevene arbeider med problemløsende oppgaver
L	Forklare hva problemløsning er Forklare oppgavene
E	Arbeider med oppgavene
O	Martine takker for seg, og at elevene ville være med på undersøkelsen

I etterkant av undervisningsøkten

Etter gjennomført undervisning ønsker jeg å gjennomføre enkelte intervju med elevene for å høre hvordan de har tenkt og arbeidet med.

Elevene må huske hvilket nummer de hadde på oppgaveheftet. Dette er fordi jeg ser på nummeret på de heftene jeg ønsker at elevene skal forklare mer i dybden hva de har tenkt.

Hvor: til dette trenger jeg et grupperom til disposisjon, slik at intervjuene ikke blir avbryt.

Tid: intervjuene vil være korte med ferdiglagde spørsmål som jeg stiller elevene. Her vil jeg hente så mange rekker i løpet av dagen. Dersom det er mulighet ønsker jeg å gjennomføre flere intervju dagen etter, hvis det trengs.

Læreren vil ikke ha noen oppgaver rundt intervjuene, og kan jobbe som normalt etter utføringen av undersøkelsen i klasserommet.

Vedlegg 3: Intervjuguide

Intervjuguide

Kan du forklare hvordan du tenkte her?	
Hva gjorde du her? (mer spesifikk)	
Hva synes du var mest vanskelig med denne oppgaven?	
Syns du det var vanskelig å finne ut hvordan du skulle regne ut oppgaven?	
Hva syns du om problemløsningsoppgaver?	

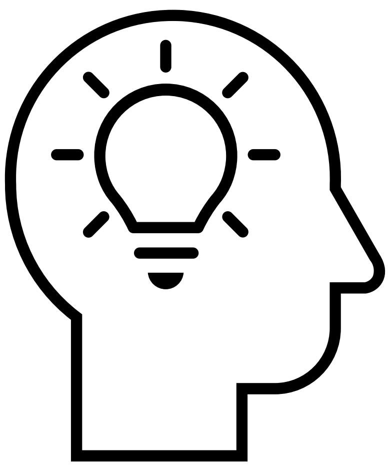
Hvis du ser på oppgaven her nå, ser du hva du har gjort feil (dersom en har svart feil, kan jeg se om eleven har tenkt på en annen måte)	
Andre spørsmål som dukker opp underveis	

Vedlegg 4: Oppgaveheftet elevene fikk utdelt

Du er nummer

Ikke skriv navnet ditt på noen av oppgavene. Du må huske hvilket nummer du er.

Skriv ned alt du tenker og ikke tegn over der du gjør feil.



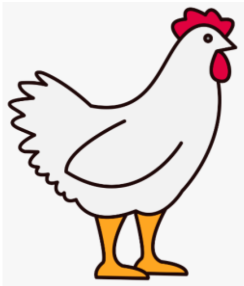
Oppgave 1: Deling av sjokoladebiter

Femten sjokoladebiter deles ut blant et ukjent antall elever. Hver elev får minst en sjokoladebit. Ingen elever får det samme antall sjokoladebiter. Hvor mange elever er det når vi deler ut alle sjokoladebitene?

Skriv svaret ditt under her:

Oppgave 2: Hvor mange hester og høner?

På gården finnes det både hester og høner. Til sammen har dyrene 32 bein og 10 hoder. Hvor mange hester og hvor mange høner er det på gården?



Skriv svaret ditt under her:

Oppgave 3: Iskrem

Du skal kjøpe kuleis og kan velge mellom fem smaker: vanilje, sjokolade, jordbær, pistasj og lollipop.

Du kan også velge å kjøpe is i kjeks eller beger.

Du vil kjøpe en is med to forskjellige kuler.

På hvor mange måter kan du sette sammen den isen du vil kjøpe?

Skriv svaret ditt under her: