Universitetet i Sørøst-Norge
Fakultet for teknologi, naturvitenskap og maritime fag
Institutt for realfag og industrisystemer
–
Mastergradsavhandling
Studieprogram: LR-MFY5100
Vår 2023

Fizzah Tahir

Affine varieteter og Zariski-topologi

Veileder: Arvid Siqveland

1 Forord

Det er med stor glede og ydmykhet at jeg nå kan presentere denne masteroppgaven i matematikk. Denne besvarelsen indikerer slutten på fem spennende, lærerike og utfordrende år, som lærerstudent ved Universitetet i Sørøst-Norge.

Prosessen frem mot denne besvarelsen har vært krevende, med tanke på at man måtte sette av tid til både jobb og familie ved siden av studiene. Motivasjonen til å fullføre siste del av det 5årige lange lektorutdanningen har likevel vært på topp og drevet meg gjennom arbeidet. De siste ordene skriver jeg med en god blanding av lettelse og stolthet.

Jeg vil med hele mitt hjerte takke min veileder, Arvid Siqveland som har hatt troen på meg fra første dag, og holdt roen i meg gjennom hele dette arbeidet. Jeg vil takke han for støtte, veiledning og inspirasjon gjennom hele skriveprosessen. En ekstra applaus for hans 24-timers service på mail med kort responstid. Dette var til spesiell stor hjelp når jeg satt fast med frustrasjon og usikkerhet.

I tillegg vil jeg takke min mann som har vært der gjennom hele denne tiden. En ekte motivator, støttespiller og en som alltid hadde et lommetørkle klar når man ville renne noen tårer. Jeg vil også uttrykke min takknemlighet ovenfor familie, venner og kolleger. Særlig mine foreldre som har støttet og motivert meg gjennom hele utdannelsen, søsken som alltid har vært der når man trengte dem, en svigermor som alltid hadde maten klar på bordet etter en lang økt med skriving og ikke minst resten av storfamilien som har vært der gjennom tykt og tynt. Med masse erfaring og kunnskap i lomma er jeg nå klar for et nytt kapittel som lektor på ungdomsskolen.

Innholdsfortegnelse

2 Innledning

I dagens norske skoler kan elever oppleve matematikkfaget som svært utfordrende. Faget består hovedsakelig av tall og bokstaver, og kan dermed bidra til vanskeligheter for elever med begrenset interesse for faget. Mangel på interesse kan føre til at elever bruker lengre tid på å bygge opp motivasjonen til å lære og jobbe med faget. I likhet med dette opplever mange elever utfordringer med å tilegne seg grunnleggende ferdigheter innenfor faget, inkludert de fire regneartene. Dette er et kompetansemål som er ganske vesentlig, da det blant annet fungerer som et fundament for videre progresjon i faget (41).

Opptil 20 prosent av elevene som går ut av grunnskolen, befinner seg på 4-5. klassenivå i matematikkferdigheter (2). Dette kan skyldes flere faktorer, blant annet at en del av disse elevene har en misoppfatning om at de ikke kan skolematematikken, der de lider av den såkalte matematikkangsten. Som følge av dette er det flere elever som mister det faglige underveis. Dette fører til store konsekvenser for deres tro og engasjement i faget, og blant annet for deres videre utdannings- og karrieremuligheter.

Det er mange lærere som er enige i at den gode læreren bør settes inn allerede fra 1.trinn i grunnskolen. Dette fordi det er her grunnlaget for faget blir lagt. Lærerne kan bidra til å skape et godt læringsmiljø og et læringstrykk, som kan være med på å øke deres interesse og motivasjon for læring. Dette kan være gull verdt for det akademiske senere i livet (41). Spørsmålet videre blir da; hva er det som definerer den gode læreren? Er det slik at den gode læreren er den som har utdanning i matematikk, er det den gode formidleren eller er det den som har god kompetanse innenfor lærevansker og kartlegging av matematikkferdigheter? Det finnes vel ikke ett fasit svar, men kanskje det er behov for at den gode læreren trenger kompetanse innenfor alle disse områdene?

Det er på videregående skoler i Norge at elever først og fremst har ansvaret for å velge et mattefag som passer deres nivå og ambisjoner. De fleste velger S- eller R-matte, fordi det er matematikken som gir flest valgmuligheter, med tanke på utdanning og valgfriheten. Begge retninger retter seg mot forskjellige områder i yrkeslivet, som blant annet realfag, informatikk, medisin, ernæring, odontologi og ikke minst mange studier innenfor økonomi, administrasjon og ledelse (10). Dette tatt i betraktning er det ganske viktig at lærere som skal ut i videregående skoler kan kommunisere det matematiske språket og bidra til at elever velger det som passer dem best. Det er derfor jeg i denne oppgaven har valgt å utdype meg i noen temaer innenfor abstrakt matematikk. Dette møter de på universitetet. Spørsmålene som man kan stille seg gjennom denne oppgaven er blant annet hvor gode eksamensoppgavene i matematikk fra videregående skoler er for matematikken på universitetet? Hvor godt forbereder eksamensoppgavene på videregående skoler elevene til høyere utdanning? Hadde det ikke vært bedre med mer forståelse og logikk enn pugging? Hva er meningen bak dette?

2.1 Bakgrunn for valg av problemstilling

Gjennom studieløpet har jeg alltid interessert meg for hvordan man kan forstå matematikk på den beste mulige måten og i tillegg hvordan man kan lære bort faget på den beste mulige måten. Hvorfor er det slik at det er flere som misliker faget så sterkt, at de får angst bare de hører ordet matematikk? Hvorfor er det mer pugging enn forståele og logikk hos de fleste elever og studenter? Interessen for dette økte etter hver praksisperiode vi hadde i løpet av de fem årene i lektorutdanningen. Dette førte til at jeg ønsket å skrive litt om hvor godt forberedt er egentlig en elev med matematikk på videregående skole for universitetsmatematikken. *Oppgavens problemstilling er betydningen av oppgavene i matematikk R1 og R2 som forberedelse til studier i matematiske fag*.

2.2 Oppgavens oppbygging

Denne masteroppgaven er en faglig besvarelse innenfor matematikk, med temaet topologi og affine varieteter. Besvarelsen vil starte med en introduksjon av ulike eksamensoppgaver fra både R1- og R2-matematikk på videregående skoler. Dette er eksamensoppgaver fra den nye læreplanen LK20. Deretter vil vi komme inn på den mer abstrakte matematikken, som tar for seg topologi, affine varieteter og zariski-topologien. Kapitlet om topologi tar for seg de grunnleggende konseptene innenfor temaet, som blant annet diskrete og trivielle topologier, kontinuerlige funksjoner, kvotienttopologien og ikke minst sammenhengende og kompakte rom. Dette er kun noen få av flere temaer som vil bli tatt tak i. Deretter vil det være et kapittel om ringer og ring homomorfisme, etterfulgt av idealer, affine varieteter og zariski-topologien. Besvarelsen avsluttes med en konklusjon som oppsummerer de viktigste punktene.

3 Eksamensoppgaver

Kunnskapsløftet er en skolereform i grunnskolen og videregående opplæring vedtatt av Stortinget i juni 2004. Reformen ble innført fra høsten 2006 og førte til endringer i læreplaner, vurderingssystemer og struktur (26). 14 år senere, altså i 2020 ble det vedtatt en ny læreplan, altså kunnskapsløftet LK20. Fagfornyelsen (LK20) ble lansert som en fornyelse av eksisterende læreplanverk (LK06) (16). Målet er at det skal bli gitt ut et læreplanverk som forbereder elevene på fremtiden. Fagene skal få mer relevant innhold og tydeligere prioriteringer, samt forberede sammenhengen mellom fagene. I tillegg skal fagfornyelsen styrke utviklingen av elevenes dybdelæring og forståelse. Temaer som demokrati og medborgerskap, bærekraftig utvikling og folkehelse og livsmestring skal prioriteres i fag der det er relevant (39).

Den nye læreplanen åpner opp for utforskning og problemløsning. Her skal elevene bli gode på argumentasjon, kommunikasjon og resonnering. I tillegg er den nye læreplanen mer praktisk, med økt fokus på problemløsning og anvendelse av praktiske situasjoner som kan knyttes opp mot virkelige situasjoner. Dette kan bidra til at elevene ser større sammenhenger og får en forståelse som er nyttig og relevant. Med dette tatt i betraktning kan det bidra til at elevene får mer motivasjon og interesse for faget, samt en bedre forståelse (37). Denne forståelsen og anvendelsen kan være en fordel for de studentene som ønsker å studere matematiske fag på universitetet. De vil dermed ha et sterkere grunnlag i både matematisk teori og anvendelse, samt at de kan uttrykke seg både muntlig og skriftlig som er en viktig ferdighet for høyere utdanning (37).

Oppgavene nedenfor er en introduksjon på masteroppgaven. Dette er grunnlaget for den matematiske teorien vi kommer inn på senere. Det er ulike oppgaver fra både R1- og R2-matematikk. Disse oppgavene belyser ulike temaer som blir anvendt i matematikkfaget på videregående skoler i Norge.

Oppgave 1 er fra eksamen R1 høst 2022 (del 1) og oppgave 2 er fra eksamen R1 vår 2022 (del 1).

OPPGAVE 1:

Marianne har skrevet følgende program:

```
1  def f(x):
2      return (6*x-3)/(x-1)    # Definerer funksjonen f(x) = (6x-3)/(x-1)
3
4  h = 0.00001
5  def Df(x):
6      return (f(x+h)-f(x))/h
7
8  a = 1.5                     # En startverdi
9  while Df(a)< -3:
10     a = a+0.001
11
12 b = f(a) - Df(a)*a          # Regner ut konstantleddet
13
14 print("y = -3x +", b)
```

Bestem verdien av variabelen *b* som defineres på linje 12.

Denne oppgaven omhandler programmering. Oppgaven går ut på at man skal bestemme en verdi for b. Man blir først og fremst introdusert for funksjonen;

$$f(x) = \frac{(6x-3)}{(x-1)} \tag{1}$$

Marianne skal prøve å finne når den deriverte av f blir -3 så finner ligningen til tangenten som har stigning -3 og der $x \geq 1,5$.
Denne oppgaven kan enten regnes ut ved algebraisk metode eller at man utfører det ved å programmere. Ulempen med sistnevnte er at det blir for mange kjøringer inne i while-løkken.

Dersom man velger å programmere, blir da funksjonen først definert og deretter den deriverte numerisk. Det velges en startverdi for x $a = 1,5$ og while løkken blir kjørt så lenge den deriverte er mindre enn -3. Når det er gjort regnes det skjæring med y-aksen (b), hvor det deretter printes ut likningen for tangenten (22).
Vi kan bruke algebraisk metode for å finne verdien av b, framfor å følge programmet på

grunn av ulempen som er nevnt ovenfor.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{6x-3}{x-1} \\
f'(x) &= \frac{6\times(x-1)-(6x-3)\times 1}{(x-1)^2} = \frac{6x-6-6x+3}{(x-1)^2} = \frac{-3}{(x-1)^2} \\
f'(x) &= -3 \\
-3 &= \frac{-3}{(x-1)^2} \Rightarrow -3(x-1)^2 = -3 \\
(x-1)^2 &= 1 \Rightarrow x-1 = \pm\sqrt{1} = \pm 1 \\
x-1 &= 1 \Rightarrow x = 2 \\
x-1 &= -1 \Rightarrow x = 0
\end{aligned}
$$

Fra programmet vet vi at startverdien er $1,5$, som fører til at vi kan droppe å regne ut for $x = 0$.

$$
\begin{aligned}
x &= 2 \\
f(2) &= \frac{6\times 2-3}{2-1} = 9 \\
y &= ax+b \\
y &= f'(x)\times x+b \\
y &= -3x+b \\
9 &= -3\times 2+b \\
b &= 9+16 = 15 \\
y &= -3x+15
\end{aligned}
$$

Dette kan man lett teste ved hjelp av python, og vi får da (22);

```
In [3]: def f(x):
            return (6*x-3)/(x-1)    # Definerer funksjonen f(x) = (6x-3)/(x-1)

        h = 0.00001

        def Df(x):
            return (f(x+h)-f(x))/h

        a = 1.5                     # En startverdi
        while Df(a)< -3:
                a = a+0.001
        b =f(a)- Df(a)*a            # Regner ut konstant leddet

        print("y = -3x+", b)

        y = -3x+ 14.999940000478432
```

Oppgave 2:

Vi har tre punkter $A(1,2)$, $B(-1,5)$ og $C(t,4)$ der $t \in \mathbb{R}$.

a) Bestem t slik at $\angle BAC = 90°$.

b) Bestem t slik at A, B og C ligger på en rett linje.

Denne oppgaven tar for seg temaer i geometri. Her kan man bruke forskjellige løsninger for å komme frem til riktig svar. Blant annet kan man både bruke Pytagoras setning og vektorer for å løse oppgaven. Geometri er et svært relevant tema for topologi, som vi skal komme inn på senere. Nedenfor kommer et løsningsforslag for oppgave 2.

Løsningsforslag til oppgave 2a (17):

$$\overrightarrow{AC} = [t-1, 4-2] = [t-1, 2]$$
$$\overrightarrow{AB} = [-1-1, 5-2] = [-2, 3]$$

Dersom vinkelen mellom to vektorer er 90 grader, er skalarproduktet av disse to vektorene lik 0.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB} &= 0 \\
[t-1, 2] \times [-2, 3] &= 0 \\
(t-1) \times (-2) + 2 \times 3 &= 0 \\
-2t + 2 + 6 &= 0 \\
-2t &= -8 \\
t &= 4
\end{aligned}$$

Løsningsforslag til oppgave 2b (17):

Dersom $A, B\ og\ C$ skal ligge på en rett linje, er $\overrightarrow{AC}$ og $\overrightarrow{AB}$ parallelle. Da har vi at:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AC} &= k \times \overrightarrow{AB} \\
[t-1, 2] &= k \times [-2, 3]
\end{aligned}$$

Det gir oss to likninger:

$$\text{I: } t - 1 = -2k$$
$$\text{II: } 2 = 3k \Rightarrow k = \frac{2}{3}$$

Setter inn $\frac{2}{3}$ inn i likning I:

$$\begin{aligned} \text{I:} t - 1 &= -2 \times \frac{2}{3} \\ t &= \frac{-4}{3} + 1 \\ t &= \frac{-1}{3} \end{aligned}$$

Nedenfor kommer det oppgaver fra matematikk R2. Oppgave 3 er fra eksempelsettet i R2 (del 1) og oppgave 4 er fra eksempelsettet i R2 (del 2).

OPPGAVE 3:

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$$

En elev har skrevet følgende kode:

```
from math import sin, pi      # Importerer sin og pi

a = 0
b = pi
n = 10000

def f(x):
    return 2*sin(x + pi/6)    # Definerer funksjonen f

I = 0
h = (b - a)/n

for i in range(n):            # Lar i gjennomløpe tallene 0, 1, ... , n-1
    I = I + f(a + i*h)*h

print(round(I,2))
```

a) Forklar hva eleven ønsker å regne ut.

b) Hva blir det eksakte svaret på oppgaven eleven ønsker å regne ut?

Denne oppgaven er en programmeringsoppgave som tar for seg at eleven skal forklare hva vedkommende ønsker å regne ut, samt hva det eksakte svaret blir på oppgaven. Oppgave 4 tar for seg kjerneelementer som resonnering og argumentasjon. Her skal man både beskrive og programmere.

Løsningsforslag til 3a (40):

Eleven ønsker å regne ut $\int_0^{\pi} 2sin(x + \frac{\pi}{6})dx$ ved å summere arealet til 1000 rektangler i dette intervallet. Hvert intervall har bredde h, definert på linje 11. Høyden i rektanglene er $f(a + i \times h)$ der $i \in 0, 1, ..., 999$. Det er for-løkken som legger til alle disse arealene til variabelen l. På linje 16 blir svaret printet ut med to desimaler.

Løsningsforslag til 3b (40):

Vi regner ut integralet.

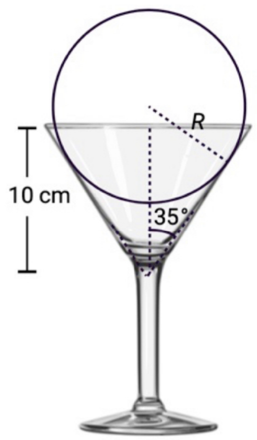
$$\begin{aligned}
\int_0^{pi} 2sin(x + \frac{\pi}{6})dx &= 2 \times [-cos(x + \frac{\pi}{6}]_0^{\pi} \\
&= 2 \times (-cos(\pi + \frac{\pi}{6}) + cos(\frac{pi}{6})) \\
&= 2 \times (\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{3}) \\
&= 2\sqrt{3}
\end{aligned}$$

Oppgave 4:

Et glass er formet som en kjegle med høyde 10 cm. Høyden i kjeglen danner en vinkel på 35° med sideflaten i kjeglen. Glasset er fullt med vann. En kule med radius R blir senket sakte ned i glasset. Se figuren til høyre.

a) Bestem hvor mye vann som vil renne over dersom $R = 7$ cm.

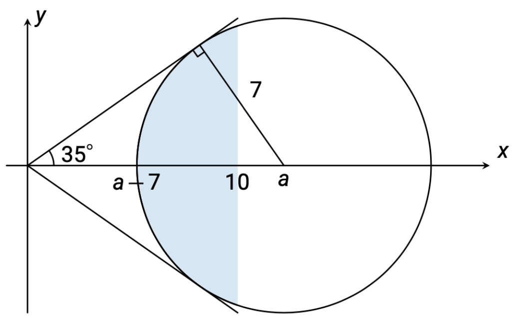
b) Bestem R slik at mest mulig vann renner ut av glasset.



Oppgave 5 omhandler temaer innenfor geometri.

Løsningsforslag til oppgave 4a (40):

Jeg roterer hele figuren 90 grader og må finne koordinatene til sentrum i sirkelen vi kan bruke til å få kuleflaten som et omdreiingslegeme.



Vi lar sirkelen ha sentrum i $(a, 0)$. Ut fra figuren ser vi at $a = \dfrac{7}{\sin 35^\circ}$. Dette gir oss at sirkelen er gitt ved likningen

$$y^2 + \left(x - \frac{7}{\sin 35^\circ}\right)^2 = 7^2 \iff y^2 = 49 - \left(x - \frac{7}{\sin 35^\circ}\right)^2$$

Det søkte volumet blir derfor

$$V = \pi \int_{a-7}^{10} \left(49 - \left(x - \frac{7}{\sin 35^\circ}\right)^2\right) dx$$

Jeg regner dette i GeoGebra CAS:

1	$a := \dfrac{7}{\sin(35^\circ)}$
2	$V := \pi \displaystyle\int_{a-7}^{10} 49 - (x-a)^2 \, dx$
	$\approx$ **V := 390.29**

Vi ser at 0,39 dL renner ut av glasset.

Løsningsforslag til oppgave 4b (40):

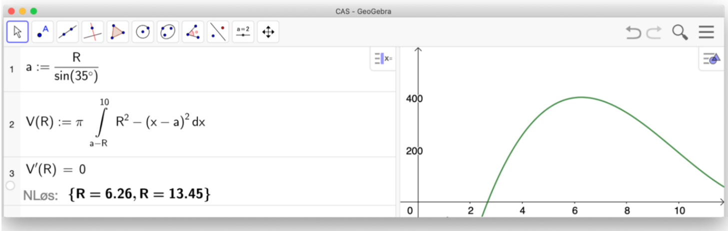
Vi får samme situasjon, men nå vil $a = \dfrac{R}{\sin(35^\circ)}$ og likningen for sirkelen er

$$y^2 = R^2 - (x-a)^2$$

Volumet av vannet som renner over blir da

$$V(R) = \pi \int_{a-R}^{10} \left(R^2 - (x-a)^2\right) \, dx$$

Løser også denne i GeoGebra CAS:



Vi ser at mest mulig vann vil renne ut av glasset dersom $R \approx 6{,}26$ cm. At det er denne verdien som gir mest vann ser vi av grafen.

Strengt att burde vi også ha sjekket tilfellet der hele kulen kommer under vann. Det vil si når $a + R < 10$. Dette er det samme som at $R < 3{,}645$. I dette tilfellet må vi regne ut

$$V(R) = \pi \int_{a-R}^{a+R} \left(R^2 - (x-a)^2\right) \, dx$$

Vi får at volumet av vannet som renner ut blir mindre i dette tilfellet. Vi forventer ikke at elevene går inn i en slik analyse av situasjonen. Ut fra selve situasjonen er det rimelig å anta at volumet blir mindre i dette tilfellet siden R blir så liten i slike tilfeller.

4 Introduksjon til topologi

Topologi kan bli sett på som studiet av kontinuerlige funksjoner, også sett på som avbildning.
Topologi er en ganske sentral del av matematikken. Temaet kan deles opp i to hovedfelter (25);

- Generell topologi
- Algebraisk topologi

I tillegg blir det beskrevet at topologi er en gren av moderne geometri, hvorav det omhandler topologiske rom, som tar for seg legemer, figurer, kurver osv. Topologi er den delen av matematikken der man studerer egenskaper ved ulike figurer eller former. Disse figurene eller formene forandres ikke uansett om vi presser dem sammen eller strekker på dem. Topologi er et tema som ikke er direkte beskrevet i læreplanen på grunnskole og videregående skole (7). men temaet knyttes opp mot emner, som blant annet geometri, kontinuitet og kombinatorikk.

I topologi har størrelse ingen betydning. Kvadrat og sirkel blir blant annet definert som at de er topologisk like (33). Med dette blir topologi for eksempel ofte kalt for gummigeometri. Dette fordi hvis du har en gummistrikk, så vil det ikke være en forskjell på ulike figurer, som for eksempel trekant, kvadrat og sirkel. Med en gummistrikk kan du forme en sirkel til både en trekant og et kvadrat, uten at strikken endrer sine egenskaper (**?**). I likhet med kvadrat og sirkel, kan kaffekopp og en smultring anses som det samme topologiske objektet, fordi $gummigeometri$ tillater oss å se på to ulike geometriske objekter som like, dersom man har muligheten til å deformere det ene til det andre (31).

Dette kapitlet vil starte med en liten introduksjon til topologi, hvor vi deretter fortsetter med temaet i neste seksjon. Nedenfor vil grunnleggende konsepter bli introdusert, i likhet med andre viktige begreper innenfor topologi-temaet.

4.1 Grunnleggende konsepter

- **Topografi:** Beskrivelse av terreng - *Topos*.
- **Topologi:** Læren om formen på det vi studerer.
- **Avstand:** d(x,y) - *metriske rom.*
- **Topologi:** Læren om kontinuitet.

La U være mengden av alle definerbare objekter. Alle mengde vi studerer i topologidelen er undermengder av U. En mengde M gir mening til utsagnet $x \in M$, det vil si M er slik at $P(x \in M)$ enten er 0 eller 1 (altså usann eller sann) (24).
Eksempler:

1. D = { 0, 1, 2, 3, 4 }
2. P = { n $\in \mathbb{N}$ | n er prim } = {2, 3, 5, 7, ...}
   B (x, ε) = { $x \in \mathbb{R}^2$: | x | $< \varepsilon$ }
   S = { n^2 | n $\in \mathbb{N}$ } = { 1, 4, 9, ... }

4.2 Inklusjon og likhet

Vi lar A og B være mengder. Vi sier at A er en undermengde av B og skriver;

$$A \subset B,$$

dersom hvert element i A, er et element i B. Under vilkår som er logiske, er betingelsen $x \in A$, bare hvis $x \in B$, slik at $(x \in A) \implies (x \in B)$. Dette tatt i betraktning, kan man også understreke her at A er inneholdt i B, for eksempel $\{1\} \subset \{1, 2\}$.
På den andre siden kan man si at A inneholder B, og skriver;

$$A \supset B,$$

noe som gir oss at hvert element i B vil også være et element i A. I dette tilfellet vil betingelsen være at $x \in A$ hvis $x \in B$, så er $(x \in A) \impliedby (x \in B)$. Dette er selvsagt tilsvarende til at $B \subset A$. Et eksempel er $\{1, 2\} \supset \{2\}$.
I tillegg til dette kan man si at A er lik B, A = B, dersom $A \subset B$ og $B \subset A$. Det betyr at $x \in A$, hvis og bare hvis $x \in B$, så er $(x \in A) \iff (x \in B)$. Et eksempel er $\{$1,2$\}$ = $\{$1,1,2$\}$.
Dersom A ikke er en undermengde av B, skriver vi det slik $A \not\subset B$, og dersom A ikke er lik B, skriver vi at $A \neq B$.

4.3 Snitt og union

La A og B være mengder. Snittet mellom A og B, eller A snittet med B, vil gi oss mengden som inneholder nøyaktig de objekter som er element i både A og B (29).

$$A \cap B = \{x \mid x \in \ A \; og \; x \ \in B\}.$$

Unionen av to mengder A og B er den mengden som inneholder nøyaktig de elementer som er element i A eller B; dette inkluderer elementene som er med i begge (29). Det betyr at alle elementer i A og alle elementer i B, men ingen andre elementer, er med i unionen. Unionen av A og B skrives $(A \cup B)$.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \; eller \; x \in B\}.$$

I tillegg til den assosiative og kommutative loven, vil disse operasjonene tilfredsstille de to distributive lovene nedenfor, for alle mengder A, B og C (29).

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

4.4 Differens og komplement

La A og B være mengder. Mengdedifferansen mellom A og B, eller A minus B, gir oss mengden som inneholder nøyaktig de objekter som er element i A, men $ikke$ element i B (29).

$$A - B = \{x \in A \mid x \notin B\}.$$

Eksempler (Mengdedifferanse):

- $\{a, b\} \setminus \{a\} = \{b\}$
- $\{a, b\} \setminus \{c, d\} = \{a, b\}$
- $\{1, 2, 3\} \setminus \emptyset = \{1, 2, 3\}$

I tillegg kan vi også angi $A - B$ som komplementet av B i A. Komplementet av en union er snittet av komplementene, og komplementet av snittet er unionen av disse. Disse reglene er kjent som *De Morgan ´s lover:*

$$A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$$
$$A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$$

4.5 Samling av mengder/ Familier

En mengde kan defineres som et matematisk objekt. Dersom man antar at en mengde består av elementer som er mengder, kan man ofte referere til det som er en samling av mengder, og gi betegnelsen $\mathscr{A}$ eller $\mathscr{B}$. Noen ganger blir mengder av mengder kalt for familier (24).

Definisjon 4.5.1 (Snitt av familier):
La $\mathscr{A}$ være en familie av mengder;

$$\underset{A \in \mathscr{A}}{\cap} A = \{x \mid x \in A \quad \text{for alle} \quad A \in \mathscr{A}\}.$$

Definisjon 4.5.2 (Kartesisk produkt):

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

Definisjon 4.5.3:

Gitt en mengde A. Da er potensmengden til A

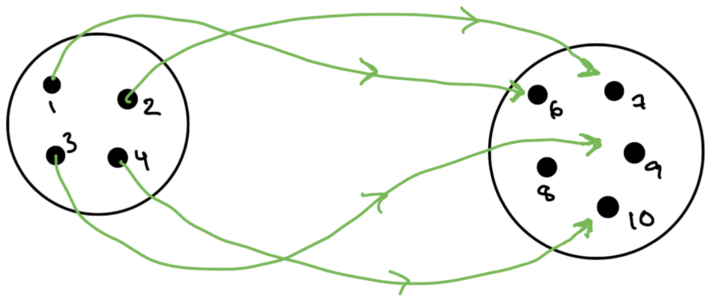
$$\rho(A) = \{B \mid B \subseteq A\}$$

Eksempel 4.5.4:
Dersom vi har en mengde A = {1,2}, vil da potensmengden bli; ρ (A) = {$\emptyset$, {1}, {2}, A}

4.6 Funksjoner

La A og B være to mengder. En funksjon f fra A til B er en regel som til hvert element i A tilordner et element i B. Vi skriver da: f: $A \longrightarrow B$. A kalles definisjonsmengden og B kalles verdiområde (24).

Eksempel 4.6.1:



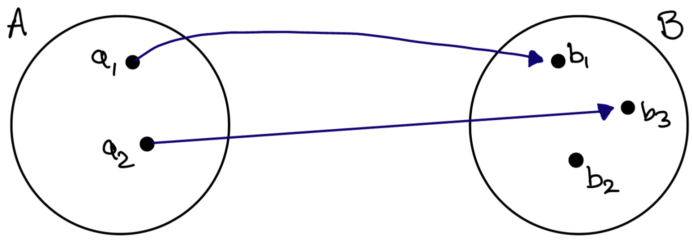
A = { 1,2,3,4} og B = { 6,7,8,9,10}.

4.7 Injektiv, surjektiv og bijektiv

Injektiv, surjektiv og bijektiv er begreper som blir brukt om forholdet mellom mengder i matematikken. Disse kan defineres slik;
Definisjon 4.7.1:
La $f : A \longrightarrow B$, vi sier da at f er;

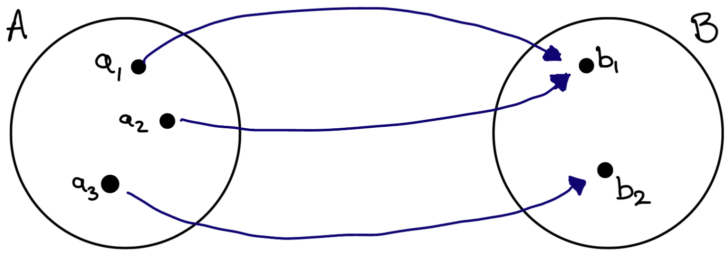
1. Injektiv hvis f(x) = f(y) bare hvis x=y, for x,y $\in$ A.
2. Surjektiv (onto) hvis det for hver y $\in$ B finnes en x $\in$ A, med f(x) = y.
3. Bijektiv (one-to-one and onto, en til en korrespondanse) hvis f er både injektiv og surjektiv, slik at det for hver y $\in$ B eksisterer en og bare en x $\in$ A med f(x) = y.

Eksempel 4.7.2:



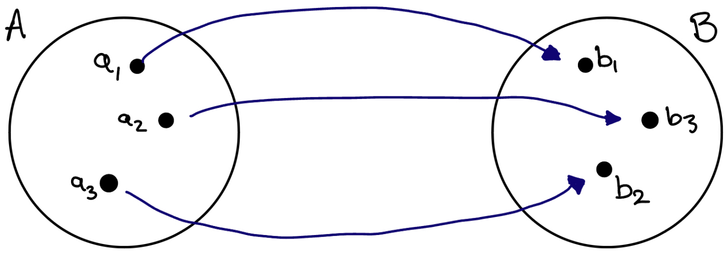
Fra bildet kan vi se at vi har en relasjon fra A til B, som er gitt ved relasjonsmengden $R = \{(a_1, b_1), (a_2, b_3)\}$. I og med at alle elementer som finnes i A har en relasjon til nøyaktig ett element i B, vil dette da være en funksjon. I tillegg vil funksjonen være injektiv, siden alle elementer i A har relasjon til ulike elementer i B. Den vil ikke være surjektiv, siden b_2 ikke er knyttet til et element i A (14).

Eksempel 4.7.3:



Figuren viser en relasjon fra A til B gitt ved relasjonsmengden $R = \{(a_1, b_1), (a_2, b_1), (a_3, b_2)\}$. I og med at alle elementer i A har en relasjon til nøyaktig ett element i B, vil dette være en funksjon. Den er derimot ikke injektiv, i og med at a_1 og a_2 har en relasjon til b_1. Imidlertid er den surjektiv, siden alle elementer i B er knyttet til minst ett element i A (14).

Eksempel 4.7.4:



Vi ser at vi har en relasjon fra A til B gitt ved relasjonsmengden $R = \{(a_1, b_1), (a_2, b_3), (a_3, b_2)\}$. I og med at alle elementer i A har en relasjon til nøyaktig ett element i b, er det en funksjon. Samtidig vil funksjonen både være injektiv og surjektiv, altså bijektiv. Dette fordi alle elementer i A har en relasjon til ulike elementer i B, alle elementer i B er knyttet til minst ett element i A (14).

4.8 Sammensetning av funksjoner

La $f : A \longrightarrow B$ og $g : B \longrightarrow C$ være funksjoner, slik at området til f er lik domenet til g. Den sammensatte funksjonen $g \circ f : A \longrightarrow C$ er da definert av regelen (24)

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

for alle $x \in A$.

4.9 Endelige mengder

For hvert ikke-negativt heltall n, vil mengden {1,2,...,n } av naturlige tall kalles en seksjon. For $n = 0$ har vi den tomme mengden $\emptyset$ og for $n = 1$ vil det være en ettpunktsmengde $\{1\}$ (24).

Lemma 4.9.1:
Hvis det finnes en injektiv funksjon

$$f : \{1, 2, ..., m\} \rightarrow \{1, 2, ..., n\},$$

så er $m \leq n$.

Korollar 4.9.2:
Det eksisterer ikke en injektiv funksjon $f : \{1, 2, ..., m\} \longrightarrow \{1, 2, ..., n\}$, dersom m > n.

Proposisjon 4.9.3:
Dersom det eksisterer en bijekson $f : \{1, 2, ..., m\} \longrightarrow \{1, 2, ..., n\}$, vil da $m = n$. Dette fordi både f og den inverse f^{-1} er injektive, og med hensyn på lemmaet ovenfor har vi at $m \leq n$ og $n \leq m$, dermed er $m = n$.

Korollar 4.9.4:
Det eksisterer ikke en bijektiv funksjon $f : \{1, 2, ..., m\} \longrightarrow \{1, 2, ..., n\}$ dersom $m \neq n$.

Definisjon 4.9.5:
En mengde er endelig dersom det eksisterer en bijektiv funksjon $f : A \longrightarrow \{1, 2, ..., n\}$ for en $n \geq 0$. I dette tilfellet sier vi at A har kardinalitet n. For eksempel, så vil den tomme mengden være endelig med kardinalitet 0, og hver ettpunktsmengde er endelig med kardinalitet 1.

Teorem 4.9.6:
Hvis A er endelig finnes det ingen bijeksjon av A med en ekte undermengde av seg selv.

Korollar 4.9.7:
$\mathbb{N}$ er ikke <u>endelig</u>.

$$\textit{For}\, f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} - \{1\}$$
$$f(n) = n + 1 \quad \textit{er ikke bijektiv}$$

Velordningsprinsippet:
Alle undermengder av $\mathbb{N}$ har et minste element.
Induksjonsprinsippet:

1. Anta at P er en påstand slik at P(1) er sann.

2. Anta at hver gang P(k) er sann, så er P(k+1) sann.

3. Da er P(n) sann for alle n $\in \mathbb{N}$.

Bevis for lemma 4.9.1 ved induksjon på n:

1. For $n = 0$ er det sant

2. Anta ≥ 1 og anta lemmaet sant for $n - 1$.
   La $f : \{1, 2, ..., m\} \longrightarrow \{1, 2, ..., n\}$ være injektiv.
   La $f(m) = k$. Da restrikterer f til injektiv

   $$g : \{1, 2, ..., m - 1\} \longrightarrow \{1, 2, ..., n\} - \{k\}.$$

   Vi får en bijeksjon

   $$h : \{1, 2, ..., n\} - \{k\} \longrightarrow \{1, 2, ..., n - 1\}$$

   gitt ved $h(x) = x$, $x \neq n$ og $h(n) = k$.

$$h \circ g : \{1, 2, ..., m - 1\} \longrightarrow \{1, 2, ..., n - 1\}.$$

Da er $m - 1 \leq n - 1 \Leftrightarrow m \leq n$.

3. Dermed er lemmaet bevist ved induksjon.

4.10 Undermengde

Lemma 4.10.1:
La $A \subset \{1, 2, ..., n\}$ være en undermengde. Det eksisterer da en bijeksjon $f : A \longrightarrow \{1, 2, ..., m\}$ for $m \leq n$. Siden A er en endelig mengde av kardinalitet $\leq$ n.

Korollar 4.10.2:
Mengden $\mathbb{N}$ av alle naturlige tall er ikke endelige (24).

5 Topologi

Definisjon 5.1:
La X være en mengde. En topologi på X er en samling Top(X) av undermengder av X slik at (24):

(1) $\emptyset$ og X ligger i Top(X)

(2) For enhver undersamling $\{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ av $Top(X)$ er unionen $U_{\alpha \in J}\, U_\alpha$ i $Top(X)$.

(3) For enhver endelig undersamling $\{U_1, ..., U_n\}$ av $Top(X)$ er snittet $U_1 \cap ... \cap U_n$ i $Top(X)$.

Et topologisk rom $(X, Top(X))$ er en mengde med en bestemt topologi $Top(X)$.

Undermengden $U \subset X$ med $U \in Top(X)$ er åpen. Viktig å notere seg at dette definerer hva det betyr å være åpen. Med denne terminologien understreker aksiomene ovenfor at;

(1) $\emptyset$ og X er åpne.

(2) Unionen av en vilkårlig åpen undermengde av X er åpen.

(3) Snittet av en endelig samling av åpen undermengde av X er åpen.

Eksempel 5.2:

$$T = \{\{\emptyset\}, \{X\}, \{a\}, \{b\}\}.$$
$$X = \{a, b\}.$$

En topologi er en familie av åpne undermengder. Så {a} $\subseteq$ T er åpen (24).
Men siden komplementet

$$X - \{a\} = \{a, b\} - \{a\} = \{b\}$$

er i T, så er {a} <u>også</u> lukket.

Eksempel 5.3:
$X = \{a, b\}$
P(X) = {$\emptyset$, {a}, {b}, X }.

- $Top(X) \subseteq$ P(X)
- $Top_0(X)$ = {$\emptyset$, X}
- $Top_1(X)$ = { $\emptyset$, {a}, X}
- $Top_2(X)$ = {$\emptyset$, {b}, X}
- $Top_3(X)$ = {$\emptyset$, {a}, {b}, X}

Eksempel 5.4:
X = {a,b,c}

1. T = { {a}, {c}, {a,b}, {a,c} }.
   Tilfredsstiller ikke aksiom (1).
2. T = { $\emptyset$, {a}, {b}, X}.
   Tilfredsstiller ikke aksiom (2), fordi {a} $\cup$ {b} $\notin$ T.
3. T = { $\emptyset$, {a,b}, {b,c}, X }.
   Tilfredsstiller ikke aksiom (3), fordi {a,b} $\cap$ {b,c} = {b} $\notin$ T.

5.1 Diskrete og trivielle topologier

La X være en mengde (24).

Definisjon 5.1.1: Diskret topologi
Diskret topologi på X er en topologi T_{disk} hvor alle undermengder U $\subset$ X er definert til å være åpne.
Samlingen av åpne undermengder vil være lik potensmengden av X: $T_{disk} = \mathcal{P}(X)$.
Vi kaller (X, T_{disk}) et diskret topologisk rom (24).

Definisjon 5.1.2: Triviell topologi
En triviell topologi på X er den topologien T_{triv} hvor det bare er undermengden $\emptyset$ og X som blir definert som åpen.
$T_{triv} = \{\emptyset, X\}$.
Vi kaller (X, T_{triv}) et trivielt topologisk rom (24).

Definisjon 5.1.3: Endelig topologisk rom
Dersom X er en endelig mengde og Top(x) er en topologi på X, kaller vi (x, Top(x)) et endelig topologisk rom.

Eksempel 5.1.4:
La X = {a,b,c}. Her er en samling av undermengder på X som ikke er topologier:

(1) {{a}, {c}, {a,b}, {a,c}} inkluderer ikke $\emptyset$ og X.

(2) {$\emptyset$, {a}, {b}, X} er lukket under union.

(3) { $\emptyset$, {a, b}, {a,c}, X } er lukket under snittet.

Definisjon 5.1.5: Kofinit topologi
La X være en mengde. La kofinit topologi T_{kof} være en samling av undermengder $U \subset X$, hvor komplementet $X - U$ er endelig, sammen med en tom mengde U = $\emptyset$ (24).

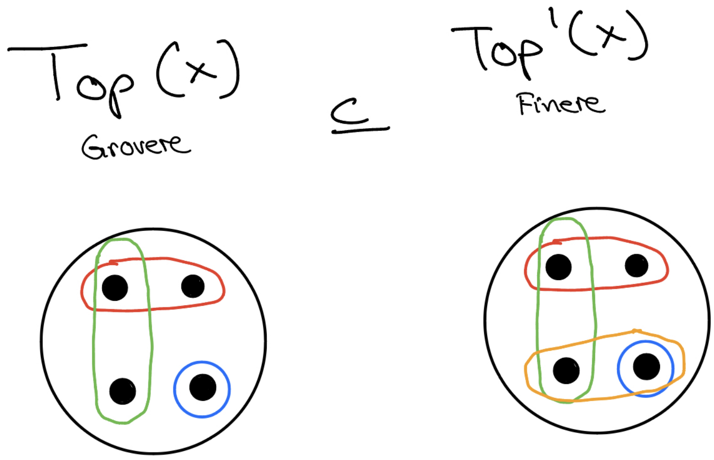
Eksempel 5.1.6:
$\langle \longleftarrow, 1 \rangle \cup \langle 1, \longrightarrow \rangle$ = u $\Rightarrow$ $\mathbb{R}$-u = {1}.
$(\langle \longleftarrow, 2 \rangle \cup \langle 2, \Longrightarrow \rangle) \cup (\langle \longleftarrow, 1 \rangle \cup \langle 1, \longrightarrow \rangle)$ = u $\Rightarrow$ $\mathbb{R}$-u = {1,2}.

$Top_{kof(X)}$ er en topologi:

1. $\emptyset$, $X \in Top_{kof}(X)$, fordi X - X = $\emptyset$
2. $\underset{\alpha\in J}{U} U_\alpha, U_\alpha \in Top_{kof}(X) \Rightarrow X$ - $\underset{\alpha\in J}{U} U_\alpha$ = $\underset{\alpha\in J}{\cap}$ $(X$- $U_\alpha)$
3. $U_1, U_2 \in Top_{kof}(X) \Rightarrow X$ - $U_1 \cap U_2$ = $(X$-$U_1) \cup (X$-$U_2)$

5.2 Grovere og finere topologi

Definisjon 5.2.1:
La X være en mengde og la Top(X) og Top$'(X)$ være to topologier på samme mengde X. Vi sier da at Top(X) er grovere enn Top$'(X)$, i tillegg til at Top$'(X)$ er finere enn Top(X), dersom Top(X) $\subset$ Top$'(X)$. Dette betyr at hver undermengde $U \subset X$ som er åpen i $(X, Top(X))$ som også er åpen i $(X, Top'(X))$ (24).



Kommentar: $f\colon X \to \mathbb{R}$ der $\mathbb{R}$ har den vanlige topologien og det vil være vanskeligere for f å være kontinuerlig i Top(X)-topologien enn i Top$'(X)$- topologien. Derfor vil analysen si at Top(X) er en sterkere topologi på x enn Top$'(X)$.

5.3 Metriske rom

En metrikk på en mengde X er en funksjon $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$, slik at (24);

(1) $d(x, y) \geq 0$, for alle $x, y \in X$ og $d(x, y) = 0$ hvis og bare hvis $x = y$.

(2) $d(y, x) = d(x, y)$ for alle $x, y \in X$.

(3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ for alle $x, y, z \in X$.

Et metrisk rom (X, d) er en mengde X med en bestemt metrikk d.

Eksempel 5.3.1:
$\mathbb{R}^2$ med $d(x, y) =\mid x - y \mid$ er et metrisk rom (24).

Definisjon 5.3.2:
La (x, d) være et metrisk rom. For hvert punkt $x \in X$ og hvert reellt tall $\epsilon > 0$, la ϵ-

ballen rundt x være i (X, d).

Eksempel 5.3.3: $\mathbb{R}$, d: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, d(x,y) = | x-y |

$$B_d(x, \epsilon) = \{y \in \mathbb{R} \mid d(x, y) < \epsilon\} = \{y \in \mathbb{R} \mid\mid x - y \mid< \epsilon\}$$

$$\begin{aligned} &\mid x - y \mid< \epsilon \\ \Leftrightarrow &-\epsilon < x - y < \epsilon \\ \Leftrightarrow &-\epsilon < y - x < \epsilon \\ \Leftrightarrow &\, x - \epsilon < y < x + \epsilon \end{aligned}$$

$$B_d(x, \epsilon) = \langle x - \epsilon, x + \epsilon \rangle.$$

Definisjon 5.3.4:
(X, d) er et metrisk rom. Den metriske topologien på X er slik (24):

$$u \in Top_d(X) \Leftrightarrow u = \bigcup_{\epsilon, x \in \mathbb{R}}, \quad B_d(x, \epsilon)$$

$\Leftrightarrow$ For alle $x \in u$ fins en $\epsilon > 0,$ slik at $B_d(x, \epsilon) \subseteq u.$

5.4 Basis for topologi

Definisjon 5.4.1:
X er en mengde. En familie $\beta \subseteq$ P(X) er en basis for en topologi på X hvis (24)

1. For hver x $\in$ X fins en B $\in \beta$, slik at x $\in$ B
   (B dekker x, β er en overdekning av x).

2. B_1, $B_2 \in \beta$ og x $\in B_1 \cap B_2$, så finnes $B_3 \in \beta$ slik at $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

Elementene i β kalles basis - åpne mengder.

Lemma 5.4.2:
$Top_\beta(X)$ er en topologi på X (24).
Bevis:

(1) u = $\emptyset \in Top_\beta(X)$
u $\in X \in Top_\beta(X)$ for alle $X \in X$ finnes $B \in \beta$ med $X \in B$, ved betingelse (1).

(2) $\underset{\alpha\in J}{\{U_\alpha\}} \subseteq Top_\beta(X)$. La v = $\underset{\alpha\in J}{u}$, u_α og $x \in$ V.

Fra definisjonen av union, finnes α slik at x $\in u_\alpha$. Her er $u_\alpha \subseteq$ V, så x $\in$ B $\subset$ U_α. Siden dette holder for alle x $\in$ V følger det at v $\in Top_\beta(X)$.

(3) La

$$\{U_i\}_{i=1}^n \subseteq Top_\beta(X).$$

La w = $u_1 \cap ... \cap u_n$.

5.5 Produkt-topologien på X $\times$ Y

La X og Y være topologiske rom. Produkt-topologien på X $\times$ Y er en topologi generert av basisen (24)

$$\beta = \{U \times V \mid \text{ U åpen i X og V åpen i Y}\}.$$

bestående av alle mengder $U \times V \subset X \times Y$, hvor U strekker seg over alle åpne undermengder av X og V strekker seg over alle åpne undermengder av Y.

β er en basis.

$$(U \times V) \cap (W \times Z) = (U \cap W) \times (V \cap Z)$$

Produkt-topologien er den groveste slik at π_1 og π_2 er kontinuerlig.
f: x $\to$ y kontinuerlig $\Leftrightarrow$ $f^{-1}(u)$ er åpen for alle åpne u $\subseteq$ y.

Anta at ϕ_1 er kontinuerlig. Får da;

$$\pi_1^{-1}(u) = u \times y$$
$$\pi_2^{-1}(v) = x \times v$$
$$(u \times y) \cap x \times v = (u \times v)$$

Eksempel 5.5.1:

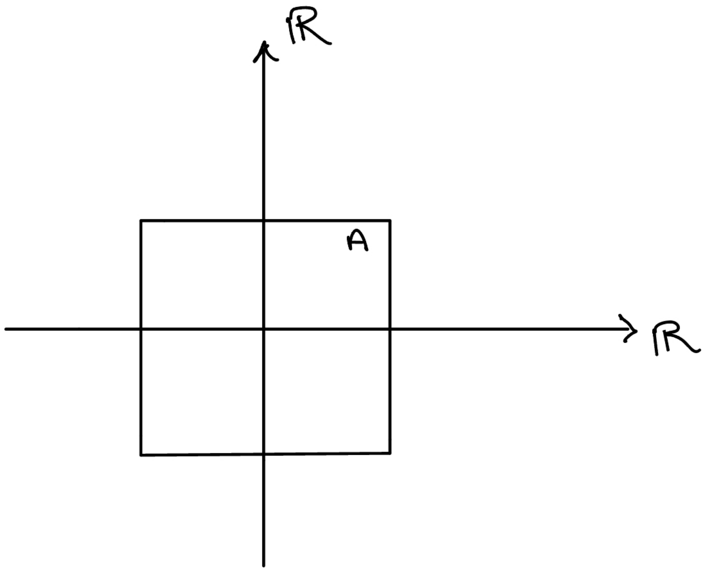
$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}.$$
$$Top(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) = \{u \times v \mid \text{u og v åpne i } \mathbb{R}\}$$

Basis:

$$\{(x - \epsilon, x + \epsilon) \times \mathbb{R} \mid x \in \mathbb{R}, \epsilon > 0\}.$$
$$\cup$$
$$\{\mathbb{R} \times (y - \epsilon, y + \epsilon) \mid y \in \mathbb{R}, \epsilon > 0\}$$

$$Top(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) = Top(\mathbb{R}^2) = \{B(\vec{v}, \epsilon)\}.$$
$$B(\vec{v}, \epsilon) = \{\vec{y} \in \mathbb{R}^2 \mid\mid \vec{v} - \vec{y} \mid < \epsilon\}.$$

5.6 Underroms-topologi



Definisjon 5.6.1:
La X være et topologisk rom, $A \subseteq X$ er en undermengde, vi får da:

5.7 Lukkede mengder og grensepunkter

En undermengde K av et topologisk rom X anses som lukket hvis (og bare hvis) komplementet $X - K$ er åpent (24).

Eksempel 5.7.1:

$$[1, 2] \subseteq \mathbb{R} \text{ er lukket fordi } \mathbb{R} \setminus [1, 2] = \langle \leftarrow, 1 \rangle \cup \langle 2, \rightarrow \rangle$$

Eksempel 5.7.2:
I den diskrete topologien T_{disk} i en mengde X, vil hver undermengde være lukket. I en triviell topologi T_{triv} vil kun undermengdene $\emptyset$ og X være lukket (24).

Proposisjon 5.7.3:
La $\mathcal{L}$ være en samling mengder i X slik at:

i) $X, \emptyset \in \mathcal{L}$

ii) Hvis $L_\alpha \in \mathcal{L}$, $\alpha \in$ I $\Rightarrow \bigcap\limits_{\alpha \in I} L_\alpha \in \mathcal{L}$.

iii) L_1 og $L_2 \in \mathcal{L} \Rightarrow L_1 \cup L_2 \in \mathcal{L}$.

Da vil Top(X) = { x - L | L $\in \mathcal{L}$ } gi en topologi på X.
Bevis:

i) x = x - $\emptyset \in$ Top(X)
$\emptyset$ = x - x $\in$ Top(X)

ii) $\bigcap\limits_{\alpha \in I}$ (x-L_α) = x - $\bigcap\limits_{\alpha \in I} L_\alpha \in$ Top(X).

iii) (x-L_1) $\cap$ (x-L_2) = x-$L_1 \cap L_2 \in$ Top(X).

Eksempel 5.7.4:

$$\mathbb{R} - \langle \frac{-1}{n}, \frac{1}{n} \rangle \text{ er lukket.}$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} (\mathbb{R} - \langle \frac{-1}{n}, \frac{1}{n} \rangle) = \mathbb{R} - \bigcap_{n=1}^{\infty} \langle \frac{-1}{n}, \frac{1}{n} \rangle = \mathbb{R} \setminus \{0\} = \langle \leftarrow, 0 \rangle \cup \langle 0, \rightarrow \rangle.$$

Terminologi: La A $\subseteq$ x være topologisk rom.

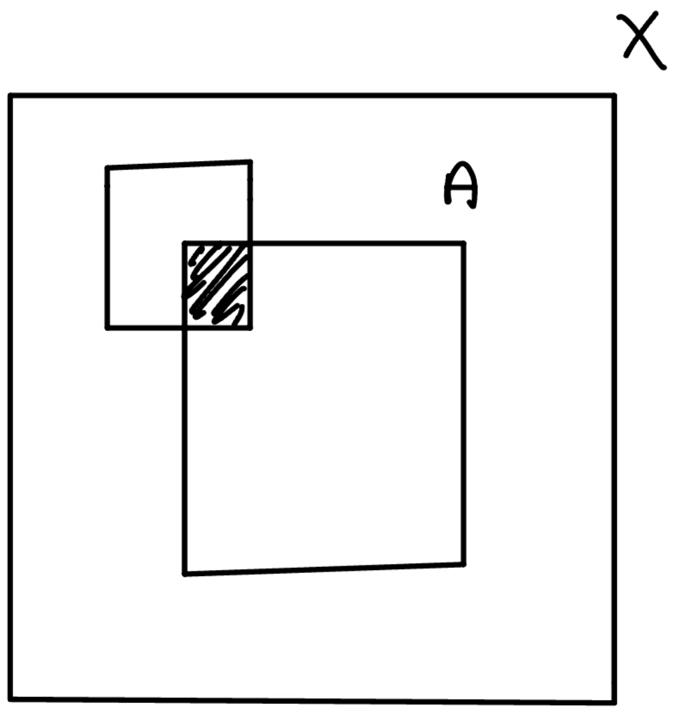
La L $\subseteq$ A $\subseteq$ X. Da kan L være lukket i A eller lukket i X, eller begge deler.

Eksempel 5.7.5:

$$\langle -2, 2\rangle \subseteq \mathbb{R}.$$

$$\langle -2, 2\rangle - \langle -1, 2\rangle \cap \langle -2, 2\rangle = \langle -2, 1] \subseteq \mathbb{R}$$

Teorem 5.7.6:
A $\subseteq$ x - underrom.
K $\subseteq$ A er lukket i A hvis og bare hvis det fins et lukket underrom L $\subseteq$ x, slik at K = A $\cap$ L.



Bevis: Anta K $\subseteq$ A er lukket. Da er K = A-u der u er åpen i A. Da er K = A - $\widetilde{u}$ $\cap$ A der $\widetilde{u}$ $\subseteq$ x er åpen.
Altså: K = A $\cap$ (x-$\widetilde{u}$) = A $\cap$ L.
Hvis K = A $\cap$ L der L er lukket i x, så er K = A - (A $\cap$ (x-L)) som er lukket i A.

5.8 Tillukning og interiør

La X være et topologisk rom og $A \subset X$ en undermengde. Da vil vi få at tillukningen $ClA = \overline{A}$ av A er snittet av alle de lukkede undermengdene av X som inneholder A. Interiøret $IntA$ til A er unionen av alle åpne undermengder av X som er inneholdt i A (24).

Eksempel 5.8.1:

$$cl \langle a, b\rangle = [a, b]$$
$$int[a, b] = \langle a, b\rangle$$

5.9 Omegner

Definisjon 5.9.1:
La X være et topologisk rom. La U være en åpen undermengde og la $x \in X$ være et punkt. U kalles en åpen omegn om x (24).

5.10 Grensepunkter

Definisjon 5.10.1:
La A være en undermengde av et topologisk rom X. $x \in X$ kalles et grensepunkt for A hvis enhver omegn om x inneholder et punkt i A forskjellig fra x.
En mengde med grensepunkter av A er ofte betegnet A' (24).

Korollar 5.10.2
En undermengde A av et topologisk rom er lukket hvis og bare hvis den inneholder alle grensepunktene.
Dette kan bevises ved at vi har $A = \overline{A}$ hvis og bare hvis $A = A \cup A$, noe som gjelder hvis og bare hvis $A \supset A'$ (24).

5.11 Hausdorff rom

Definisjon 5.11.1:
Et topologisk rom X kalles for et $Hausdorff - rom$ hvis det for hvert par bestående av punkter $x, y \in X$, med $x \neq y$, eksisterer åpne mengder $U, V \subset X$ med $x \in U, y \in V$ og $U \cap V = \emptyset$. Med andre ord at det da finnes disjunkte omegner U og V av x og y (24).

Eksempel 5.11.2:

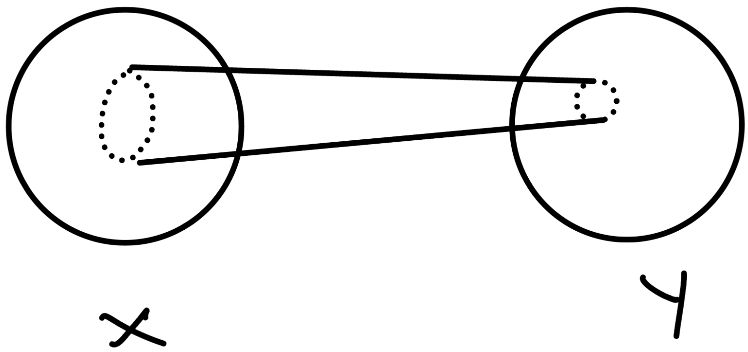
Mengden $X = \{a, b\}$ med den diskrete topologien er et Hausdorff-rom, siden det eneste paret med distinkte punkter er a og b, samtidig som de åpne undermengdene $\{a\}$ og $\{b\}$ er omegner til henholdsvis a og b.

Lemma 5.11.3:
Alle metriske rom er Hausdorff. Et hvert punkt {x} er lukket i et Hausdorff rom.

5.12 Kontinuerlige funksjoner

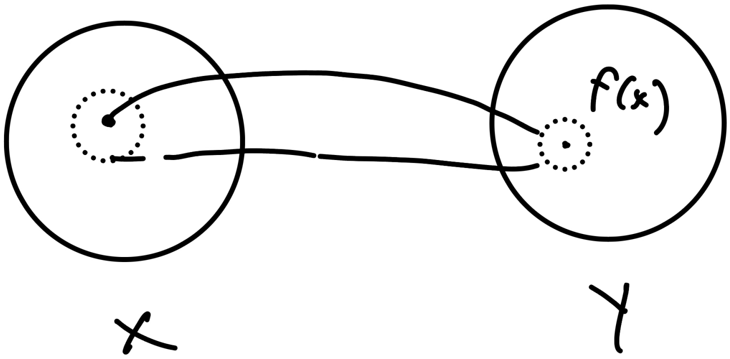
Definisjon 5.12.1:
La X og Y være topologiske rom.
En funksjon mellom to topologiske rom $f : X \rightarrow Y$ er kontinuerlig hvis $f^{-1}(u)$ er åpen i X for enhver åpen U ⊆ Y (24).

Lemma 5.12.2:
La X, Y og Z være topologiske rom.
Hvis $f : x \rightarrow y$ og $g : y \rightarrow z$ er kontinuerlig, så er $g \circ f : x \rightarrow z$ kontinuerlig.



5.13 Punktvis kontinuitet

Definisjon 5.13.1:
La X og Y være topologiske rom og $f : x \longrightarrow y$ en funksjon.
Da vil f være kontinuerlig hvis og bare hvis for hver $x \in X$ og hver omegn V av $f(x)$ finnes en omegn U av X med $f(U) \subset V$ (24).



Eksempel 5.13.2:
Hva betyr det at f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er kontinuerlig?

1) Et bevis for topologien i $\mathbb{R}$ er β = $\{\langle$ a-ϵ, a+ϵ $\rangle \mid \epsilon > 0\}$.

2) f er kontinuerlig hvis den er kontinuerlig for alle $x \in \mathbb{R}$. Det betyr at for alle $x \in \mathbb{R}$, hvis $f(x) \in \underset{åpen}{v} \subseteq \mathbb{R}$, så finnes $x \in u_x \subseteq \mathbb{R}$, slik at $f(u_x) \subseteq$ v.
Det er nok å sjekke på en basis, så la $\langle f(x) - \epsilon, f(x) + \epsilon \rangle$ være åpen om $f(x)$. Da skal det finnes en åpen $x \in \langle\ x - \delta, x + \delta\ \rangle$ slik at $f(\langle x - \delta, x + \delta\rangle) \in \langle\ f(x) - \epsilon, f(x) + \epsilon\ \rangle$.

5.14 Kontinuitet med tanke på lukkede mengder

Teorem 5.14.1:
La X og Y være topologiske rom, og $f : x \to y$. Følgende er ekvivalente (24):

1) f er kontinuerlig

2) For hver $A \subset X$ er $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$

3) For enhver lukket L i Y er $f^{-1}(L)$ lukket.

Bevis:

$$(1) \Rightarrow (2) - \text{Anta at f er kontinuerlig.}$$
$$\text{La } y = f(x) \in f(\overline{A}), \text{der } x \in \overline{A}.$$

Det betyr at for hver enhver omegn y $\in$ u $\subseteq$ y så vil $f^{-1}(u)$ være en (åpen) omegn om x og dermed møte A, det vil si $f^{-1}(u) \cap$ A $\neq \emptyset$.
Velger at a $\in$ A $\cap$ $f^{-1}(u)$. Da er f(A) $\in$ f(A) $\cap$ u $\Rightarrow$ f(A) $\cap$ u $\neq \emptyset$. Siden dette gjelder for

alle åpne y ∈ f(x) ⊆ u, får vi at f(x) ∈ f(A).

$$(2) \Rightarrow (3) - L \subseteq y \text{ lukket}, A = f^{-1}(L).$$
$$\text{Vi skal vise at } A = \overline{A}.$$
$$f(A) \subseteq L \Rightarrow \overline{f(A)} \subseteq L.$$
$$f(\overline{A}) = \overline{f(A)} \Rightarrow f(\overline{A}) \subseteq L \Rightarrow \overline{A} \subseteq f^{-1}(L) = A.$$
$$\text{Derfor er } \ A = \overline{A}.$$

$$(3) \Rightarrow (1) - \text{La } v \subseteq y \text{ åpen}.$$
$$f^{-1}(y - v) = x - f^{-1}(v)\text{lukket}.$$
$$\text{Da er} f^{-1}(v) \text{ åpen slik at } (1) \text{ holder}.$$

5.15 Homeomorfi = topologisk ekvivalens

Definisjon 5.15.1:
En bijektiv funksjon $f : X \to Y$ mellom topologiske rom som er slik at både f og f^{-1} er kontinuerlige, kalles en homeomorfi. Hvis det finnes en homeomorfi $f : X \to Y$, så kalles X og Y homeomorfe rom, eller sier vi at de er topologisk ekvivalente. Vi skriver det slik; $x \cong y$ (24).

Eksempel 5.15.2:
x = [0,1].
y = [a,b], a $<$ b.

$$f : x \to y, f(x) = a + (b-a)x$$
$$f^{-1} : y \to x. \text{ Finnes slik: } a + (b-a)x = y$$
$$\Updownarrow$$
$$\frac{a-y}{a-b} = x$$

$$
\begin{aligned}
f^{-1}(x) &= \frac{a-x}{a-b} \\
Test : f(f^{-1}(x)) &= f(\frac{a-x}{a-b}) \\
&= a + (b-a)\frac{a-x}{a-b} \\
&= a - (a-x) \\
&= x
\end{aligned}
$$

f er kontinuerlig fordi;

$$
\begin{aligned}
&f^{-1}(\langle a,b\rangle \cap [a,b]) \\
&= \langle c,d\rangle \cap [0,1]
\end{aligned}
$$

f^{-1} er kontinuerlig fordi;

$$
\begin{aligned}
&f^{-1}(\langle a,b\rangle \cap [a,b]) \\
&= \langle c,d\rangle \cap [0,1]
\end{aligned}
$$

Eksempel 5.15.3:

$$\langle a,b\rangle \cong \langle a,\infty\rangle \cong \langle -\infty,b\rangle \cong \langle -\infty,\infty\rangle = \mathbb{R}.$$

$$\text{f:}\langle -1,1\rangle \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{x}{1-x^2}$$

Vi får da;

$$
\begin{aligned}
&\frac{x}{1-x^2} = y \\
&\Leftrightarrow x = y(1-x^2) \\
&\Leftrightarrow x + yx^2 - y = 0 \\
&\Leftrightarrow x = \frac{1}{2y}(-1 \pm \sqrt{1+4y^2}) \\
&\Leftrightarrow x = \frac{1}{2y}(-1 + \sqrt{1+4y^2})
\end{aligned}
$$

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2y}(-1 + \sqrt{1+4x^2})$$

5.16 Produkttopologien

$\{x_\alpha\}_{\alpha\in J}$ - samling av mengder.

Produkt $\to \underset{\alpha\in J}{\pi}\, x_\alpha = (x_\alpha\,)_{\alpha in J}$

Eksempel 5.16.1:
$\{x_\alpha\,\}_{\alpha\in\{1,2,3\}}$

$\{\pi\,\}_{\alpha\in\{1,2,3\}}\ x_\alpha = x_1 \times x_2 \times x_3 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_i \in X_i\,\}$.

Hvis $\{x_\alpha\,\}_{\alpha\in J}$ er en samling topologiske rom så definerer vi en mengde u $\subseteq \underset{\alpha\in J}{\pi}\, x_\alpha$ som åpen hvis den er på formen u = $\underset{\alpha\in J}{\pi}\, u_\alpha$ med u_α åpen for hver $\alpha \in$ J (24).

Teorem 5.16.2:
Produkttopologien er den groveste topologien på $\underset{\alpha\in J}{\pi}\, X_\alpha$ slik at (24),
π_β: $\underset{\alpha\in J}{\pi}\, X_\alpha \to X_\beta$ er kontinuerlig.

5.17 Punktvis konvergens av funksjoner

Gitt $f, g : x \to y$.
f konvergerer punktvis mot g hvis (24)

$$\underset{x\to a}{lim}\, f(x) = \underset{x\to a}{lim}\, g(x)$$

5.18 Kvotienttopologien

Definisjon 5.18.1 (Ekvivalensrelasjoner):
En relasjon $\sim$ på en mengde X er en undermengde $R \subset X \times x$, hvor vi skriver $x \sim y$ hvis og bare hvis $(x, y) \in R$. En ekvivalensrelasjon på X er en relasjon $\sim$ som tilfredsstiller disse tre egenskapene (24);

(i) xRx for alle x $\in$ X (refleksiv)

(ii) xRy og yRz, så er xRz (transitiv)

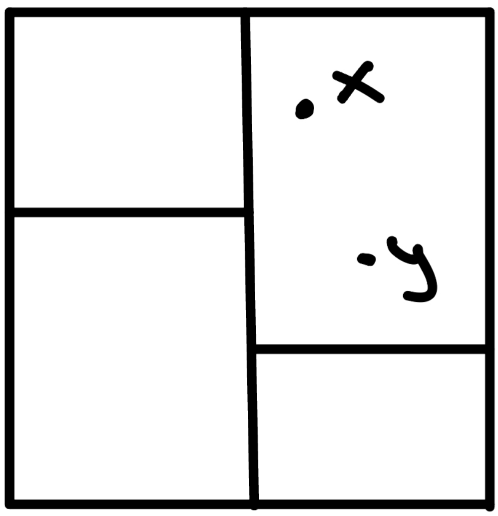
iii) xRy $\Leftrightarrow$ yRx (symmetrisk)

Definisjon 5.18.2:
La (x, R) være en mengde med en ekvivalensrelasjon. Da er ekvivalensklassen til $x \in X$ gitt med $[x] = \{y \mid yRx\}$ (24).

Lemma 5.18.3:
To ekvivalensklasser en enten like eller disjunkte.
Bevis: Anta [x] $\cap$ [y] $\neq \emptyset$. z $\in$ [x] $\cap$ [y].

$$xRz \ \wedge \ yRz \Leftrightarrow xRz \ \wedge \ zRy \Leftrightarrow xRy \Leftrightarrow x \in [y]$$
$$[x] \subseteq [y]$$

Andre veien med symmetri g [x] = [y].
Eksempel 5.18.4:



xRy hvis x og y er i samme undermengde. Ekvivalensklassene blir de disjunkte delmengdene (24).

Kvotienter av mengder med ekvivalensrelasjoner:
Gitt x med ekvivalensrelasjon $\sim$. Da definerer vi kvotienten av x med $\sim$ som x/$\sim$ = $\{$[x] | x $\in$ X $\}$.

Eksempel 5.18.5:
$\mathbb{Z}$.
x $\equiv$ y (3) hvis 3 | x-y $\Leftrightarrow$ x-y=3n $\Leftrightarrow$ x = 3n+y.

i)

$$x \equiv x(3) \Leftarrow 3 \mid x - x$$

ii)

$$\begin{aligned} & x \equiv y(3) \wedge y \equiv z(3) \\ & \Rightarrow 3 \mid x-y \wedge 3 \mid y-z \\ & \Rightarrow 3 \mid (x-y)+(y-z) \\ & \Rightarrow 3 \mid x-z \end{aligned}$$

iii)

$$3 \mid x-y \Rightarrow 3 \mid y-x \mid$$

Kvotienttopologien:
X topologiske rom, $\sim$ en ekvivalensrelasjon. Vi definerer kvotienttopologien på x/$\sim$ som den groveste topologien som gjør (24)

$$f : x \to x/\sim \text{ kontinuerlig, det vil si}$$

v $\subseteq$ x/$\sim$ er åpen hvis $f^{-1}(v) \subseteq$ x er åpen.
Hvis v $\subseteq$ x er åpen så er f(v) åpen i x/$\sim$ fordi v = $f^{-1}(f(v))$. Alle kvotientavbildninger er åpne. Den er også lukket, det vil si f(L) er lukket i x/$\sim$ når L er lukket i x (24).

Eksempel 5.18.6:

$$\begin{aligned} x &= [0,1] \times [0,1] \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 \\ y &= \text{s´} \times \text{s´} \subseteq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^4 \\ g &: [0,1] \times [0,1] \to s \times s. \end{aligned}$$

g(s,t) = (cos(2 π s), sin (2 π s), cos (2 π t), sin(2 π t))
f: [0,1] $\to$ s´, f(x) = (cos(2 π x), sin(2 π x)).
g = f $\times$ f: [0,1] $\times$ [0,1] $\to$ s´$\times$ s´surjektiv,
lukket, og vi har en kvotient-avbildning, det vil si vi får indusert en homeomorfi;

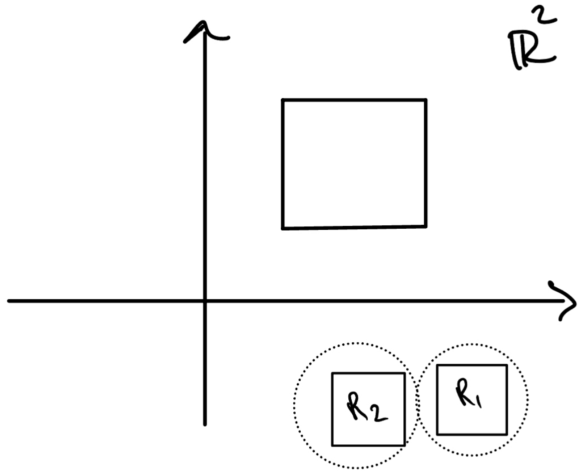
$$h : ([0,1] \times [0,1])/\sim \to \text{s´} \times \text{s´}.$$

Ekvivalensklassene er:

$$\begin{aligned}\{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\},\\ \{(s,0),(s,1)\}\ og\\ \{(0,t),(1,t)\}.\end{aligned}$$

5.19 Sammenhengende og kompakte rom

Definisjon 5.19.1:
Et topologisk rom x kalles sammenhengende hvis det ikke kan skrives som en union av to disjunkte åpne undermengder (24).



Definisjon 5.19.2:
x kalles irredusibel hvis den ikke kan skrives som en union av to lukkede ekte undermengder.

Definisjon 5.19.3:
x kalles kompakt hvis enhver åpen avdekning kan reduseres til en endelig avdekning. Det vil si;

$$x = \bigcup_{i\in J} u_i \Rightarrow x = \bigcup_{J\in\{1,\ldots,n\}} U_{ij}.$$

Definisjon 5.19.4:
x kalles veisammenhengende dersom det finnes en vei mellom to vilkårlige punkter x,y

$\in$ X. En vei er en kontinuerlig funksjon (24)

$$f : [0,1] \to \text{ slik at } f(0) = x \; og \; f(1) = y.$$

Definisjon 5.19.5:
C,D - topologiske rom. Anta at C $\cap$ D = $\emptyset$.
C $\sqcup$ D for den disjunkte unionen av C og D.

$$C \sqcup D = \{(x,0) \mid x \in C\} \cup \{(0,y) \mid y \in D\}.$$

Eksempel 5.19.6:

$$\{1,2\} \cup \{2,3\} = \{1,2,3\}$$
$$\{1,2\} \sqcup \{2,3\} = \{1,2,2', 3\}$$

Observasjon:
Hvert rom x er homeomorf til C $\sqcup$ D på en triviell måte når C = $\emptyset$ eller D = $\emptyset$. Hvis x $\cong$ C $\sqcup$ D, C $\neq \emptyset$ og D $\neq \emptyset$ kalles x usammenhengende (**?**).

Definisjon 5.19.7:
En separasjon av x er et par U,V av disjunkte ikke tomme åpne undermengder av x, slik at x = U $\cup$ V. x kalles sammenhengende hvis den ikke har noen separasjoner (24).

Lemma 5.19.8:
x er sammenhengende hvis de eneste undermengdene som er både åpne og lukkede er x og $\emptyset$.
Bevis:
I en separasjon u, v av x har vi $v = x - u$. $x = u \cup v$. Både u og v åpne gir u åpen og lukket, u og v ikke tomme gir at u er ulikt fra $\emptyset$ og x (24).

6 Ring og ring homomorfi

En ring A er en mengde med to binære operasjoner (addisjon og multiplikasjon), slik at (11);

1) A er en abelsk gruppe med hensyn på addisjon (slik at A, som har et null element, betegnet med 0, og hver x $\in$ A har en invers, -x).

2) Mulitplikasjonen er assosiativ

$$(xy)z = x(yz)$$

og distributiv over addisjon

$$x(y+z) = xy + xz, (y+z)x = yz + zx$$

I denne oppgaven skal vi bare se på ringer som er kommutative:

3)

$$xy = yx \text{ for alle } x, y \in A,$$

og som har et identitetselement (betegnet med I):

4) $\exists$ 1 $\in A$, slik at

$$xI = Ix = x \text{ for alle } x \in A.$$

Identitetselementet vil dermed være unikt.

Det er viktig å merke seg at muligheten for at I kan være lik 0, ikke blir ekskludert. Dette gir oss da at, for hvilke som helst $x \in A$, så vil vi ha (11);

$$x = xI = x0 = 0.$$

Dette gir oss at A kun vil ha et element, som er 0. I dette tilfellet vil A være null-ringen, betegnet med 0.

Eksempel 6.1:
De hele tallene, $\mathbb{Z}$ sammen med operasjonen $+$, addisjon, er et eksempel på en kommutativ ring.

Eksempel 6.2:
Sammen med vanlig addisjon og multiplikasjon vil $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ være ringer.

En ring homomorfi er en avbildning av en ring A til en ring B, slik at (11);

i)

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

ii)

$$f(xy) = f(x)f(y)$$

iii)

$$f(1) = 1.$$

7 Prim- og maksimal idealer

Definisjon 7.1:
Et ideal kalles et primideal dersom $a \cdot b \in P$, impliserer $a \in P$ eller $b \in P$.

Dette kan man ta i betraktning ved å anta at dersom man har primtall og at $a \cdot b$ kan bli dividert av P, så må P dividere enten a eller b (5).

Definisjon 7.2:
Et ideal $\mathfrak{m} \subseteq R$ kalles et maksimalt ideal, dersom det for hvilket som helst ideal $\mathfrak{i} \subseteq R$, med $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{i} \subseteq R$, gir oss at $\mathfrak{i} = \mathfrak{m}$ eller $\mathfrak{i} = R$.
Tilsvarende:

- $\mathfrak{p}$ er prim $\Leftrightarrow A/\mathfrak{p}$ er et integritetsområde.
- $\mathfrak{m}$ er maksimal $\Leftrightarrow A/\mathfrak{m}$ er en kropp.

Med dette kan man derfor si at et maksimalt ideal er prim. Primidealer er grunnleggende for kommutativ algebra.

Teorem 7.3:
Hver ring $A \neq 0$ har minst et maksimalt ideal. Viktig å huske at $ring$ betyr kommutativ

ring med 1.

Bevis:
Dette er en standard anvendelse av $Zorns\ lemma$. Lemmaet bygger på at dersom vi antar at $(Y, \leq)$ er en partielt ordnet mengde, vil alle ikke-tomme kjeder i Y ha en øvre skranke, så har Y et maksimalt element (34).
La $\sum$ være mengden av alle idealer $\neq$ (1) i A. Her er det viktig å påpeke at $\sum$ ikke er tom, siden $0 \in \sum$. For å anvende $Zorns\ lemma$ må vi kunne vise at hver kjede i $\sum$ har en øvre grense i $\sum$; la (a_α) være en kjede av idealer i $\sum$, slik at for hvert par av indekser α, β, så har vi enten $a_\alpha \subseteq a_\beta$ eller $a_\beta \subseteq a_\alpha$. Vi lar $a = U_\alpha a_\alpha$. Da er a et ideal og $1 \notin a$, fordi $1 \notin a_\alpha$ for alle α. Siden $a \in \sum$, og a er ren øvre grense til kjeden, vil det derfor med $Zorns\ lemma$ ha et maksimalt element (5) (13).

Teorem 7.4:
Anta at R er en kommutativ ring med 1. Da vil $P \subseteq R$ være et primideal hvis og bare hvis R/P er et integritetsområde.

Bevis:
Anta at P er et primideal og

$$(a+p)(b+p) = 0 + p \in R/P$$

Vi ønsker å vise at dette enten betyr at $a + p = 0$ eller $b + p = 0$, noe som da gir oss at;

$$\underline{(a+p)(b+p) = 0 + p \in R/p}$$
$$\Rightarrow ab + p = 0 + p$$
$$\Rightarrow ab \in p,$$

men i og med at dette er et primideal så betyr det at

$$\Rightarrow a \in p \text{ eller } b \in p$$
$$\Rightarrow \underline{a + p = 0 + p} \text{ eller } \underline{b + p = 0 + p}$$

Bare for å avklare så oppnår de likningene som er understreket de betingelsene hvorav R/p er et integritetsområde.
Vi skal bruke samme teorem til å utføre beviset, men bare i motsatt retning. Vi antar at

R/p er et integritetsområde og $ab \in p$. Vi ønsker å vise at enten så er $a \in p$ eller $b \in p$.

$$\Rightarrow ab + p = 0 + p \in R/p$$
$$\Rightarrow (a + p)(b + p) = 0 + p$$
$$\Rightarrow a + p = 0 + p \text{ eller } b + p = 0 + p$$
$$\Rightarrow a \in p \text{ eller } b \in p$$
$$\Rightarrow p \text{ er prim.}$$

I motsetning til primidealer så har vi maksimalidealer som er lik førstnevnte men med litt mer struktur. Derfor burde vi kunne modifisere et maksimalt ideal og få noe med mer struktur. Spørsmålet her blir altså hva som har mer struktur enn et integritetsområde, jo en kropp. Dette er det som skal bevises og vi kan anta at vi har en kommutativ ring med 1, noe som gir oss at $\mathfrak{m}$ vil være et maksimalt ideal.

Definisjon 7.5:
Et ideal $\mathfrak{a}$ i en ring A er en undermengde av A som er en additiv undergruppe og er slik at $Aa \subseteq a$.' Kvotientgruppen $A/\mathfrak{a}$ arver en unik definert multiplikasjon fra A som gjør den til en ring, kalt for kvotientring $A/\mathfrak{a}$ (5).

Teorem 7.6:
Anta at R er en kommutativ ring med 1. Da vil $\mathfrak{m} \subseteq R$ være et maksimalt ideal hvis og bare hvis $R/\mathfrak{m}$ er en kropp.

Bevis:
Anta at $\mathfrak{m} \subseteq R$ er et maksimalt ideal og at $a + \mathfrak{m} \in R/m$. Vi ønsker å anta at vi har et element som ikke er 0, innefor denne kvotientringen, noe som kan legges til ved å si at a ikke er et element;

$$a \notin \mathfrak{m},$$

altså at den ikke er lik 0.
Ta i betraktning at;

$$\langle 0 + \mathfrak{m} \rangle \subseteq \langle a + \mathfrak{m} \rangle \subseteq R/M$$

Vi får da;

$$\langle a + \mathfrak{m} \rangle = I/\mathfrak{m},$$

hvor

$$\mathfrak{m} \subseteq I \subseteq R.$$

Her er det viktig å notere seg at

$$a \in I \Rightarrow \mathfrak{m} \neq I$$

Det gir oss at;

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow I = R \; (b/c - \mathfrak{m} \text{ er maksimal}) \\
&\Rightarrow \langle a + \mathfrak{M} \rangle = R/\mathfrak{m} \\
&\Rightarrow I + \mathfrak{m} \in \langle a + \mathfrak{m} \rangle \\
&\Rightarrow b \in R,
\end{aligned}$$

hvor

$$(a + \mathfrak{m})(b + \mathfrak{m}) = I + \mathfrak{m}.$$

Deretter utfører vi enda et bevis for samme teorem, men bare i motsatt retning.

Anta att R/M er en kropp. Bruker $I \subseteq R$, hvorav vi har at $M \subseteq I \subseteq R$. Vi ønsker å vise at $I = R$.

$$\begin{aligned}
\exists a \in I \text{ med } a \notin M(a + M \neq 0 + M \in R/M) \\
\Rightarrow M \subsetneq \langle a, M \rangle \subseteq I \subseteq RR \\
\Rightarrow \; \text{Finn } b \in R \text{ med } (a + M)(b + M) = I + M
\end{aligned}$$

Dette forteller oss at;

$$I + M \in \langle a, M \rangle \subseteq I$$

Dersom det er en enhet i et ideal, så må dette idealet være hele ringen, hvor vi da får at;

$$I = R$$

Vi har dermed utført beviset, hvor vi måtte vise at $I = R$ for $\mathfrak{m}$ som er maksimal (4) (28).

Eksempel 7.7:

$$A = k[x_1, ..., x_n] - \text{ k er en kropp.}$$

La $f \in A$ være en irredusibel polynom. Med hjelp av faktorisering vil idealet (f) være prim.

Eksempel 7.8:
Et hovedideal domene er et integritetsområde, hvor et hvert ideal er hoved. I en slik ring vil hvert primideal som ikke er null være maksimal.
Dersom $(x) \neq 0$ er et primideal og $(y) \supset (x)$, så har vi $x \in (y)$.
Vi kan for eksempel si at $x = yz$, slik at $yz \in (x)$ og $y \notin (x)$, derfor vil $z \in (x)$, og vi kan anta at $z = tx$.
Da vil

$$x = yz = ytx,$$

slik at

$$yt = 1$$

og derfor får vi at $(y) = (1)$ (5)(13).

8 Affine varieteter

I studiet av algebraisk geometri er varieteter de grunnleggende objektene. En varietet er en mengde med nuller bestående av en mengde med polynomlikninger i et vilkårlig begrenset antall variabler. Korrespondansen mellom varieteter og idealer etablerer en bro mellom polynomets algebraiske natur av polynomer, ringer og geometrien av affine varieteter. Algebraiske varieteter er i sentrum av algebraisk geometri. Dette er en mengde med løsninger til et system av polynomlikninger over de reelle eller komplekse tallene. Målet med algebraisk geometri er å studere løsninger av polynomlikninger i flere variabler over et fast grunnfelt (4).

Definisjon 8.1:

La K være en kropp, og $f_1, ..., f_s \in k[x_1, ..., x_n]$.
Da er $V(f_1, ..., f_s) = \{(a_1, ..., a_n) \in k^n \mid f_i = 0\}$, for alle $1 \leq i \leq s$.
$V(f_1, ..., f_s)$ blir kalt for algebraiske mengder, definert av $f_1, ..., f_s$ (28).
$V(f_1, ..., f_s)$ er en mengde med løsninger av systemet med polynomlikninger.

$$
\begin{aligned}
f_1(x_1, ..., x_n) &= 0 \\
f_2(x_1, ..., x_n) &= 0 \\
&. \\
&. \\
&. \\
f_s(x_1, ..., x_n) &= 0
\end{aligned}
$$

I og med at vi har antatt at K er en kropp, kan vi definerer et affine n-rom over K, betegnet som A_k^n, eller bare A^n til å være mengden av alle n-tupler av elementer av K. Et element $P \in A^n$ vil bli kalt for et punkt, og dersom $P = (a_1, ..., a_n)$ med $a_i \in K$, da vil a_i bli kalt for koordinatene av P (28).

La $A = k[x_1, ..., x_n]$ være en polynom ring i n variabler over K. Basert på dette vil vi tolke elementene av A som en funksjon fra det affinske n-rommet til K, ved å definere $f(P) = f(a_1, ..., a_n)$, hvor $f \in A$ og $P \in A^n$. Altså, dersom $f \in A$ er et polynom, kan vi da snakke om mengden bestående med null av f, nemlig $Z(f) = P \in A^n \mid f(P) = 0$. Mer generelt, dersom T er en hvilken som helst delmengde av A, kan vi definere nullmengden til T til å være felles til alle elementene i T, altså (13);

$$Z(T) = P \in A^n \mid f(P) = 0, \text{for alle } f \in T.$$

Definisjon 8.2:
En undermengde Y av A^n er en algebraisk mengde dersom det eksister en undermengde $T \subseteq A$, slik at $Y = Z(T)$ (13).

Proposisjon 8.3:
Unionen av to algebraiske mengder er en algebraisk mengde. I tillegg vil snittet av hvilke som helst algebraisk mengde være en algebraisk mengde. En tom mengde er en algebraisk mengde (13).

Definisjon 8.4:
En affin algebraisk varietet er en irredusibel algebraisk mengde i $k^d = \mathbb{A}_k^d$. En mengde

blir kalt for irredusibel hvis den ikke kan skrives som en union av to ikke-tomme lukkede undermengder (13).

Definisjon 8.5:
En affin algebraisk varietet, eller enklere sagt; affin varietet, er en irredusibel lukket delmengde av A^n (med den induserte topologien). En åpen delmengde av en affine varietet er en kvasi-affine varietet (13) (5).

Teorem 8.6:
Hilbert´s Nullstellensatz er et teorem som går ut på at dersom vi lar k være et algebraisk lukket kropp. I tillegg lar vi a være et ideal i $A = k[x_1, ..., x_n]$ og la $f \in A$ være et polynom som forsvinner i alle punkter av $Z(a)$. Altså $f^r \in a$, for hvilket som helst heltall $r > 0$ (13). Dette er et teorem som er ganske vakkert og har blitt bevist flere ganger. Blant annet så har Daniel Allcock og Torgeir Aambø utført dette. Legger til referanse som kan støtte teoremet (1) (3).

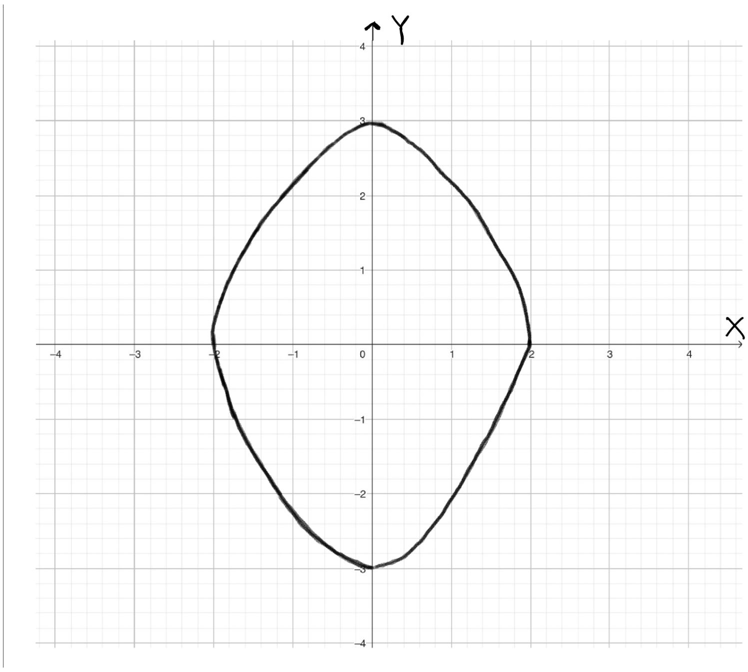
Eksempel 8.7:
Kjeglesnitt er affine varieteter (28).

$$
\begin{aligned}
V(9x^2 + 4y^2 - 36) &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 9x^2 + 4y^2 - 36 = 0\} \\
&= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 9x^2 + 4y^2 = 36\} \\
&= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1\}
\end{aligned}
$$

Denne affine varieteten er egentlig grafen av denne ellipsen. Fra tidligere kunnskap kan man forutsi at dette er en ellipse som er sentrert i origo.

- a^2 er 9
- b^2 er 4

Siden vi har 4 under x^2 og kvadratroten av 4 er 2, så må vi gå pluss og minus 2 enheter i x-retningen og plus og minus 3 enheter i y-retningen, fordi vi har 3^2 under y.

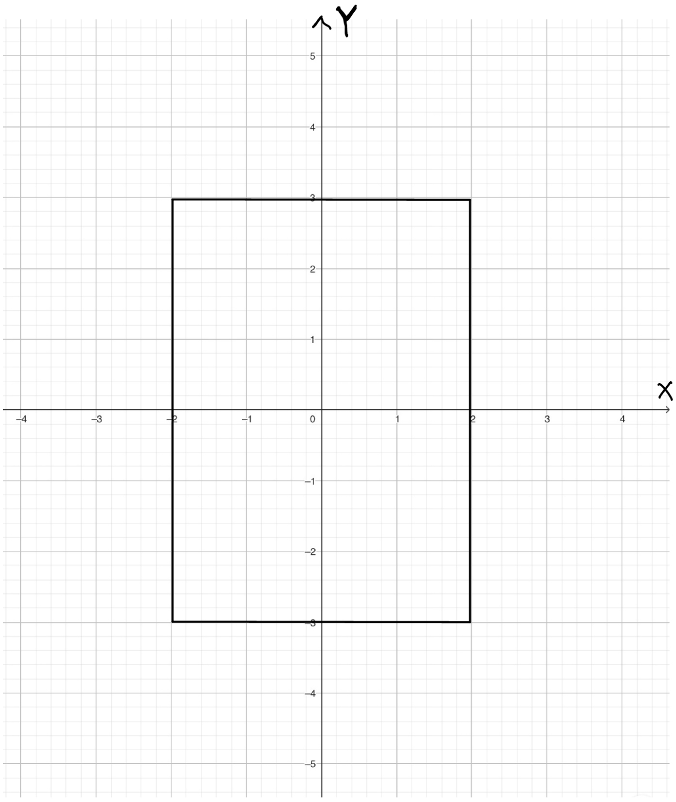


Denne ellipsen er varieteten.
Dette har bare en funksjon av to variabler og løsningssettet er en mengde i todimensjonalt rom. Viktig å notere seg at vi er i et todimensjonalt rom og at vi har endimensjonalt objekt, noe som blir gitt av en kurve.

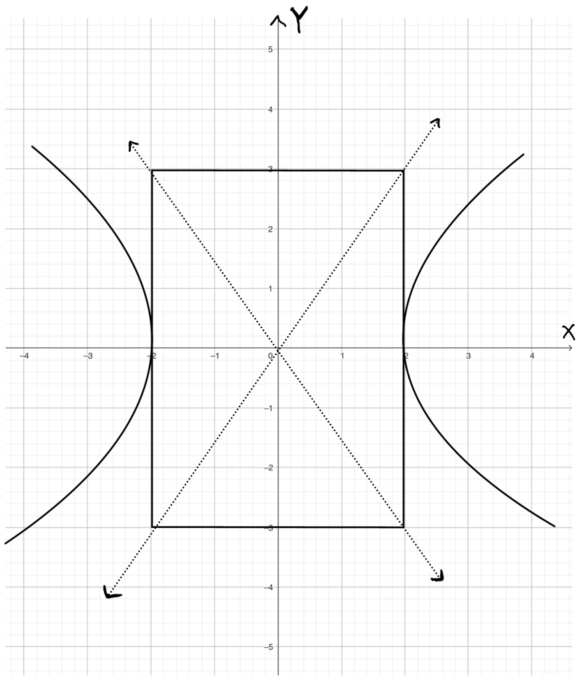
Eksempel 8.8:

$$\begin{aligned}
&V(9x^2 - 4y^2 - 36) \\
&= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 9x^2 - 4y^2 - 36 = 0\} \\
&= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1\}
\end{aligned}$$

Det betyr at grafen ovenfor er veldig lik denne, spesielt når vi starter, men med det faktumet at vi har et x-ledd som er positivt og et y-ledd som er negativt, betyr dette at det er en hyperbel og ikke en ellipse. Det gir oss;



Dette medfører at når $y = 0$, så kan man se at $x = 0$ til positiv eller negativ 2, slik at det er to punkter på grafen.



Dette er da hyperbel, noe som også er affine varieteter.

Eksempel 8.9:

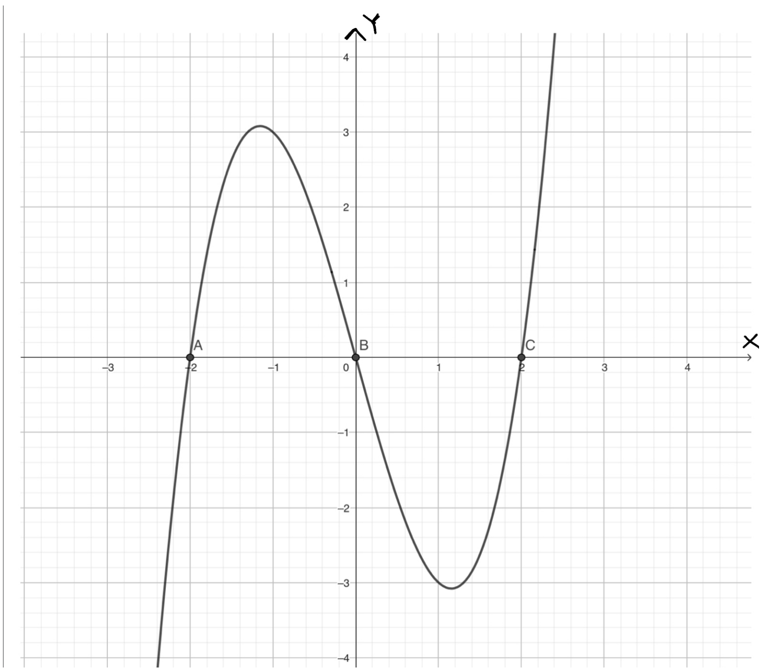
Et annet eksempel vi kan ta for oss er blant annet polynomer. Vi kan ta utgangspunktet i en kubikkfunksjon i en variabel;

$$y = x(x+2)(x-2)$$

Vi kan definere en affine varietet utifra denne funksjonen på denne måten;

$$\begin{aligned}
&V(y - x(x+2)(x-2)) \\
&= V(y - (x^3 - 4x)) \\
&= V(y - x^3 + 4x) \\
&= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y - x^3 + 4x = 0\} \\
&= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^3 + 4x\}
\end{aligned}$$

Løsningsmengden av dette og todimensjonalt rom er vår affine varietet. I tillegg så kan fra denne faktoriseringen se at dette er lik 0, dersom $x = 0, x = 2$ eller $x = -2$.



Grafen illustrerer denne affine varieteten.

Eksempel 8.10:

Rasjonale funksjoner er også et eksempel på affine varietet.

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{f(x)}{g(x)} \\
yg(x) &= f(x) \\
yg(x) - f(x) &= 0
\end{aligned}
$$

Dersom f og g er polynomer, så vil $g(x) \cdot y$ være en polynom i to variabler. Dersom vi tar det og subtraherer dette polynomet, vil jeg fortsatt sitte igjen med et polynom, noe som fører til at dette er et polynom. Løsningssettet for denne likningen er lik løsningen av $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ (28)(35)(4).

9 Zariski topologi

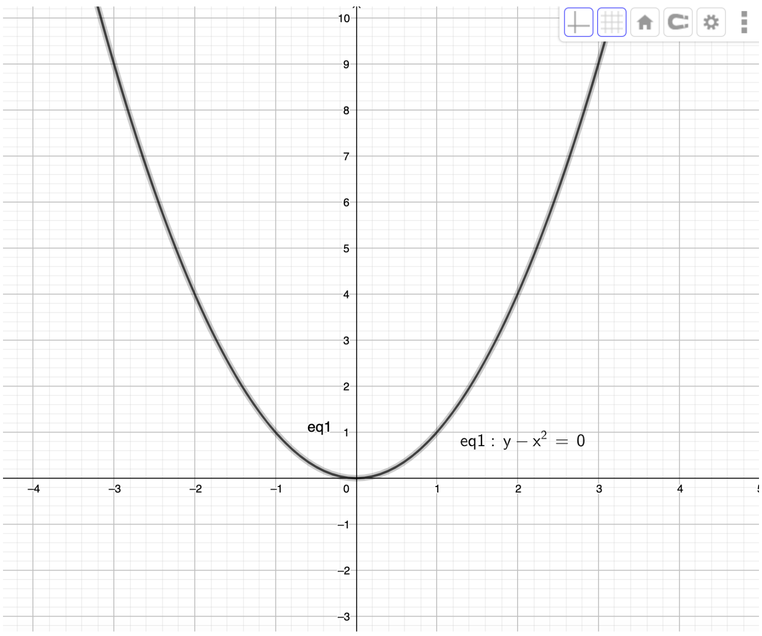
Zariski topologien er oppkalt etter den russisk-amerikanske matematikeren Oscar Zariski. Det er et eksempel på en topologi som brukes innenfor algebraisk geometri, og er spesielt god for å studere polynomlikninger (4).

Definisjon 9.1:
Zariski-topologien på A^n kan defineres som ved å ta de åpne undermengdene til å være komplementer til de algebraiske mengder. Dette er en topologi, fordi i henhold til proposisjon 9.3, er snittet mellom to åpne mengder åpent. Dessuten er den tomme mengden og hele plassen åpen(13).
Dette tatt i betraktning, kan man si at en mengde i Zariski-topologien er åpen hvis og bare hvis dens komplement er en mengde av polynomfunksjoner. I tillegg er det klart at nullpunktet til en mengde av polynomer avhenger kun av idealet i polynomringen som de blir generert av. Med hensyn til dette, så vil dannelsen av snittet av lukkede undermengder tilsvare dannelsen av summen av disse idealene. I likhet vil dannelsen av unionen av de lukkede undermengdene tilsvare dannelsen av produktet av de samme idealene. På denne måten lager Zariski-topologien en ordbok mellom begreper som omhandler topologien i et affint rom K^n og polynomring bestående av algebra (21)(12)(27).

Definisjon 9.2:
La $a = (f_1, ..., f_r) \subseteq k[x_1, ..., x_d]$. Da er $Z(a) \subseteq k^d$ definert som alle punkter P i k^d som er slik at alle $f_i(P) = 0$. $Z(a)$ kalles en algebraisk mengde, og disse danner en basis for de lukkede mengdene i Zariski-topologien.

Eksempel 9.3:
La oss anta at zariski-topologien er på den affine-linjen A^1. Hvert ideal i $A = k[x]$ er hovedideal, så hver algebraisk mengde er mengde med null i et enkelt polynom. Siden k er algebraisk lukket, kan hvert polynom som ikke er null $f(x)$ skrives som $f(x) = c(x - a_1)...c(x - a_n)$ med $c, a_1, ..., a_n \in k$. Da er $Z(f) = a_1, ..., a_n$. Dermed er de algebraiske mengdene i A^1 bare de endelige undermengdene (inkludert den tomme mengden) og hele rommet (tilvarende $f = 0$). Dermed er de åpne mengdene den tomme mengden og komplementene til endelige undermengder (13).

Eksempel 9.4:
La $f(x, y) = y - x^2$. Siden $y - x^2$ er irredusibel, så er mengden $V(f)$ som er alle x, y slik at $y - x^2 = 0$ er en affin varietet, og det vil da være parabelen (34) .



Parabelen til $y - x^2 = 0$

10 Konklusjon

Som nevnt ovenfor, er denne avhandlingen en faglig oppgave som omhandler ulike temaer i matematikk. Målet er å ta opp to ulike temaer som studenter vil møte på universitetet dersom de velger å studere matematiske fag etter endt videregående opplæring. Her blir da topologi og affine varieteter tatt opp. Man får et innblikk i mange ulike definisjoner, teoremer og ikke minst eksempler. I likhet med å belyse disse temaene, var også målet med denne avhandlingen at leseren skal få mulighet til å reflektere over hvor god matematikkundervisningen på videregående skoler er for universitetsmatematikken.

Denne masteroppgaven startet med en presentasjon av ulike oppgaver fra både matematikk R1 og matematikk R2 på videregående skoler i Norge. Deretter gikk vi gjennom abstrakt matematikk, som blant annet topologi, affine varieteter og zariski-topologien. Med dette tatt i betraktning kan man blant annet få et lite innblikk på hvor godt forberedt elevene er før veien videre til høyere utdannning. Noen av oppgavene ovenfor er relevante for studie av algebraiske varieteter, men samtidig er det noen oppgaver som er mindre relevante. Blant annet de som bør løses ved hjelp av dataverktøy eller de oppgavene som kun fremmer algoritmiske regneferdigheter.

Matematikken på videregående skoler gir en introduksjon på diverse temaer, som blant annet funksjoner, algebra, differensialregning, geometri, integralregning og ikke minst trignometri. Dette bygger på at elevene får en grunnleggende forståelse innenfor temaene, noe som kan være essensielt for elever som ønsker å studere matematikk i fremtiden. I likhet med dette er det viktig å være klar over at det er en betydelig forskjell mellom videregående matematikk og den matematikken studenter møter på universitetet.

På universitetsnivå er matematikken mer abstrakt og teoretisk. Her blir det introdusert mange ulike teorier, føring av beviser og en stor grad av selvstudium. Dette kan være positivt for studenter som har motivasjon, interesse og ikke minst grunnleggende forståelse av matematikk. Problemstillingen i denne oppgaven dreier seg om betydningen av eksamensoppgavene i R1 og R2, som leder avhandlingens avslutning. Hvilken betydning har egentlig disse oppgavene? Er elevene tilstrekkelig forberedt på universitetsmatematikken ved å ha de ulike oppgavene som de møter på eksamen? Hva ønsker vi å oppnå? Ønsker vi at de kun fremmer algoritmisk regneferdigheter, eller ønsker vi økt læring og kunnskap blant våre elever og studenter?

11 Referanser

References

[1] Aambø, T. (u.å.). On Hilbert's nullstellensatz. *NTNU.* Hentet fra: `https://wiki.math.ntnu.no/_media/ma8202/2020v/on_hilbert_s_nullstellensatz.pdf`

[2] Akselsdatter, M. (2013). Matematikkvansker - utfordringer og tiltak. *Utdannings-*

forskning. Hentet fra: https://utdanningsforskning.no/artikler/2013/matematikkvansker--utfordringer-og-tiltak/

[3] Allcock, D. (u.å.). HILBERT'S NULLSTELLENSATZ. *The university of Texas at Austin.* Hentet fra: https://web.ma.utexas.edu/users/allcock/expos/nullstellensatz3.pdf

[4] Almohammadi, R. (2005). The basic theory of varieties in algebraic geometry. *B.Sc., Taibah University*. Hentet fra: https://people.math.carleton.ca/~cingalls/studentProjects/Almohammadi.pdf

[5] Atiyah, M.F & Macdonald, I.G. (1969). Introduction to Commutative Algebra. *University of Oxford. Addison-wesley publishing company*. Hentet fra: http://math.univ-lyon1.fr/~mathieu/CoursM2-2020/AMD-ComAlg.pdf

[6] Borgan, E. (2022). Abelprisen 2022: I denne grenen av matematikk er en smultring det samme som en kaffekopp. *Forskning.no*. Hentet fra: https://forskning.no/matematikk/abelprisen-2022-i-denne-grenen-av-matematikk-er-en-smultring-det-s 1998332

[7] Borger, I.C. (u.å.). *Møbiusbånd og kleinflaske*. Matematikk.org. Hentet fra: https://www.matematikk.org/artikkel.html?tid=63127

[8] CAPPELEN DAMM AKADEMISK. (u.å.). *Qed 5-10 - Matematikk for grunnskolelærerutdanningen*. Hentet fra: https://www.cappelendammundervisning.no/sek-asset/external-resources/9788202420987-KAP%205.8%20og%205.9%20%20Kvalitative%20metoder%20i%20matematikkdidaktisk%20forskning.pdf

[9] Ellefsen, M.L., Skuland, P.H. (2021). *Elevers geometriforståelse: En kvantitativ undersøkelse om elevers geometriforståelse gjennom arbeid med og kunnskap om ikke-euklidsk geometri*. [Masteroppgave]. Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet.

[10] Eriksson, E. (2020). Bør du velge T-matte eller P-matte? *Learnlink*. Hentet fra: https://www.learnlink.no/blogg/bor-du-velge-t-matte-eller-p-matte

[11] Fjogstad, A. (2011). Masteroppgave - Galois teori. *Universitetet i Stavanger*. Hentet fra: https://uis.brage.unit.no/uis-xmlui/bitstream/handle/11250/182452/Masteroppgave.pdf?sequence=1&isAllowed=y

[12] Gathmann, A. The Zariski Topology. Hentet fra: https://agag-gathmann.math.rptu.de/class/alggeom-2014/alggeom-2014-c2.pdf

[13] Hartshorne, R. (1977). Algebraic Geometry. *Graduate text in mathematics. University of California.* Hentet fra: http://userpage.fu-berlin.de/aconstant/Alg2/Bib/Hartshorne.pdf

[14] Heide, C.F. (2019). Diskrete funksjoner. *Høgskolen i Østfoold*. Hentet fra: http://www.it.hiof.no/~cfh/mit/diskrete_funksjoner.pdf

[15] Johansen, N.V. (u.å). *Jean-Pierre Serre*. Matematikk.org. Hentet fra: https://www.matematikk.org/biografi.html?tid=62385

[16] Jensen, S.K. (2020). Fra LK06 til LK20. En sammenlignende analyse av Kunnskapsløftets overordnede læreplantekster. *UiO duo vitenarkiv*. Hentet fra: https://www.duo.uio.no/handle/10852/80311

[17] Matematikk.net. (2022). R1 2022 Vår LK20 LØSNING. Hentet fra: https://matematikk.net/side/R1_2022_V%C3%A5r_LK20_L%C3%98SNING

[18] Matematikk.net. Eksamensoppgaver. Hentet fra: https://matematikk.net/side/Eksamensoppgaver

[19] Michel, O. (u.å.). An introduction to zariski topology. Hentet fra: https://math.uchicago.edu/~may/REU2019/REUPapers/Michel.pdf

[20] Munkres, J. (2014). Topology. *Pearson new international edition.* Hentet fra: http://www.alefenu.com/libri/topologymunkres.pdf

[21] nLab. (2022). Zariski topology. Hentet fra: https://ncatlab.org/nlab/show/Zariski+topology#OnAffineVarieties

[22] Omar, F. (2022). R1 Eksamen H2022 LK20 Løsningsforslag. *PDF - matematikk.net*. Hentet fra: https://matematikk.net/side/R1_2022_H%C3%B8st_LK20_L%C3%98SNING

[23] Penn, M. (2020). Abstract algebra | maximal and prime ideals. *Youtube*. Hentet fra: https://www.youtube.com/watch?v=OVRhLIRyOUA

[24] Rognes, J. (2021, 17.november). *Lecture Notes on Topology for MAT3500/4500 following J.R. Munkres' textbook*.

[25] Store norske leksikon. (2018, 26.november). *Topologi*. Hentet fra: https://snl.no/topologi

[26] Store norske leksikon. (2022). Kunnskapsløftet. Hentet fra: https://snl.no/Kunnskapsl%C3%B8ftet

[27] Terilla, J. (2014). Zariski Topology. Hentet fra: https://math.mit.edu/~jhirsh/notes2_zariski.pdf

[28] Tulsa, S.T. (2021). Affine varieties, definition and examples of affine varieties. *Youtube*. Hentet fra: https://www.youtube.com/watch?v=CvVshreYFUw&t=124s

[29] Universitetet i Oslo UiO. (2015, 23.august). *01-Grunnleggende mengdelære* [Video]. Youtube. Hentet fra:https://www.youtube.com/watch?v=zKxiKpaPxgg&t=3325s

[30] Universitetet i Oslo UiO. (2010, 8.november). *Geometri og topologi*. Hentet fra: https://www.mn.uio.no/math/forskning/grupper/geometri-topologi/

[31] Universitetet i Oslo UiO. (2012, 21.desember). *Disputas: Thomas Gregersen*. Hentet fra: https://www.mn.uio.no/math/forskning/aktuelt/arrangementer/disputaser/tidligere-disputaser/2013/gregersen.html

[32] Universitetet i Oslo. (2018). The zariski topology and irreducible sets. Hentet fra: https://www.uio.no/studier/emner/matnat/math/MAT4210/v18/mat4210notes2.pdf

[33] Universitetet i Oslo UiO. (2019, 28.november). *Topologi*. Hentet fra: https://www.mn.uio.no/ibv/tjenester/kunnskap/plantefys/tall/topologi.html

[34] Universitetet i Oslo. (u.å.) Zorns lemma og utvalgsaksiomet. Hentet fra: https://www.uio.no/studier/emner/matnat/math/MAT1140/h16/mat1140zornh16.pdf

[35] University of Pennsylvania. (u.å.). Affine varieties. Hentet fra: https://www2.math.upenn.edu/~siegelch/Notes/ag.pdf

[36] Utdanningsdirektoratet. (2020). *Læreplan i fordypning i matematikk (MAT07-02)*. Fastsatt som forskrift. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020. Hentet fra: https://www.udir.no/lk20/mat07-02/om-faget/kjerneelementer?TilknyttedeKompetansemaal=true&anchorId=KE21

[37] Utdanningsdirektoratet. (2020). Hva er nytt i matematikk? Fastsatt som forskrift. Hentet fra: https://www.udir.no/laring-og-trivsel/lareplanverket/fagspesifikk-stotte/nytt-i-fagene/hva-er-nytt-i-matematikk/

[38] Utdanningsdirektoratet. (2021). *Læreplan i matematikk fellesfag (MAT1-04)*. Fastsatt som forskrift. Hentet fra: https://www.udir.no/kl06/MAT1-04/Hele/Hovedomraader#

[39] Utdanningsdirektoratet. (2021). Evaluering av fagfornyelsen - hva, hvorfor og hvordan. Fastsatt som forskrift. Hentet fra: https://www.udir.no/laring-og-trivsel/lareplanverket/fagfornyelsen/evaluering-av-fagfornyelsen/fagfornyelsen-hva-skal-evalueres/

[40] Utdanningsdirektoratet. (2022). Løsningsforslag med kommentarer til eksempelsett. *PDF - Matematikk.net*. Hentet fra: https://matematikk.net/matteprat/viewtopic.php?t=54250&f=13#p247967

[41] Utdannings- og forskningsdepartementet. (u.å.). Kunnskapsløftet - læreplan for grunnskolen og videregående opplæring. Hentet fra: https://www.uio.no/studier/emner/hf/ilos/FRA4109/v06/Laereplaner06FRA4109hjemmeeksamenV06.pdf