Universitetet i Sørøst-Norge
Fakultet for humaniora, idretts- og utdanningsvitenskap
–
Mastergradsavhandling
Masterprogram i grunnskolelærerutdanning trinn 1-7
Vår 2022

Jane Helen Veen

Semiotiske representasjoner i problemløsning

En kvalitativ casestudie av 6. trinnelevers bruk av representasjoner i problemløsning på vertikale flater

Universitetet i Sørøst-Norge
Fakultet for humaniora, idretts- og utdanningsvitenskap
Institutt for matematikk og naturfag
Postboks 235
3603 Kongsberg

http://www.usn.no

Denne avhandlingen representerer 45 studiepoeng

Sammendrag

Dette masterprosjektet undersøker elevers arbeid med problemløsningsoppgaver på vertikale ikke-permanente flater i et valgrikt læringsmiljø. Hensikten er å få innsikt i elevers bruk av semiotiske representasjoner og overganger mellom ulike representasjonssystem, samt undersøke hvilken sammenheng dette har med valgene og fokusskiftene i løsningsprosessen. Prosjektets problemstilling er: *"Hva kjennetegner 6.-trinnelevers bruk av semiotiske representasjoner i problemløsning på vertikale ikke-permanente flater?".*

Det er benyttet en kvalitativ casestudie med lyd- og videoobservasjon av to grupper à tre elever sin løsningsprosess av fire problemløsningsoppgaver på vertikale flater, i konteksten av Liljedahls (2021) tenkende klasserom. Datamaterialet er behandlet gjennom en abduktiv og tematisk tilnærming. Det er videre analysert ved hjelp av teoretiske rammeverk for klassifisering og transformasjon av semiotiske representasjoner, teori om gester og tegning for problemløsning, samt et rammeverk for fokusskifte og en modell for skift og valg i valgrike læringsmiljø. Prosjektet bidrar dermed også til å se sammenheng mellom ulike teoretiske rammeverk.

Prosjektet viser hvordan elever benytter semiotiske representasjoner i problemløsning, noe som kan gi refleksjon rundt undervisningspraksis for å kunne utvikle elevers problemløsningsevner. Resultatet viser at elevene benytter en kombinasjon av visuelle, symbolske og verbale representasjoner i tilknytning til gester i problemløsningsprosessen på de vertikale flatene. Elevene bruker tegning på ulike måter som en viktig drivkraft i løsningsprosessen, og tegningene bidrar til å samle gruppens fokus og muliggjør bruken av gester som en viktig del av kommunikasjonen. Det viser seg at abstrakt matematisk visualisering må læres på lik linje som ikonisk, ellers kan løsningsprosessen stoppe opp. Resultatet viser at gester er tett synkronisert med talestrømmen. Elevenes bruk av peking og muntlig språk spiller en betydelig rolle i samarbeidet i problemløsningen på de vertikale flatene. Overganger mellom ulike representasjonssystem skapes i stor grad ved hjelp av tegning, muntlig språk og gester. Det viser seg også at samarbeidet består av en dynamisk rekke av fokusskift mellom individuelle ressurser og interaksjon innad i gruppen, når valgte representasjoner og heuristikker bidrar til å drive løsningsprosessen fremover mot en nøkkelløsningside og en endelig løsning. Når elevene møter utfordringer i overganger eller står fast i løsningsprosessen håndteres dette i stor grad ved å foreta et fokusskifte mot eksterne ressurser, og elevene henvender seg da til en agent å lære av.

Abstract

This master thesis examines students' problem-solving on vertical non-permanent surfaces in a choice-affluent environment. The purpose is to gain insight into students' use of semiotic representations and conversions between different representational systems, and how this relates to the choices and focus shifts in the solution process. The research question is: *"What are the characteristics of 6th grade students' use of semiotic representations in problem-solving on vertical non-permanent surfaces?"*.

The thesis has used a qualitative case study with video observation of two groups` solution process of four problem-solving tasks on vertical surfaces, in the context of Liljedahl's (2021) thinking classrooms. The data material has been processed through an abductive and thematic approach. The data is further analyzed using theoretical frameworks for classification and transformation of semiotic representations, theory of gestures and drawing for problem-solving, as well as a framework for shift of attention and a model for the shifts and choices in choice-affluent environments. The project therefore also offers a possibility to see the coherence between different theoretical frameworks.

The study show how students use semiotic representations in problem-solving, which may give basis for reflection on one`s teaching practice to develop students' problem-solving abilities. The results of the study indicate that students use a combination of visual, symbolic and verbal representations in close connection with gestures in the problem-solving process on the vertical surfaces. The students use drawing in various ways to effect the solution process, and the drawings helps gather the focus and enable the use of gestures as an important part of the communication. Findings indicate that abstract mathematical visualization must be learned in addition to iconic visualization, otherwise the solution process might stop. The results of the study show that gestures are closely synchronized with the flow of speech. Students' use of pointing and spoken language plays a significant role in the collaboration in problem-solving on vertical surfaces. The conversions between different representational systems are largely created by means of drawing, spoken language and gestures. Findings also indicate that the collaboration consists of a dynamic pathway of shift of attention between individual resources and interaction within the group, when selected representations and heuristics contribute to moving the solution process forward towards a key solution idea and a final solution. When students face challenges in the conversions, or are stuck in the solution process, it is largely handled by making a shift of attention towards external resources and the students then turn to an agent to learn from.

Forord

Denne masteroppgaven markerer avslutningen på en lærerik og interessant femårig grunnskolelærer-utdanning ved USN. Gjennom arbeidet med dette prosjektet har jeg fått mulighet til å fordype meg i et praksisnært, aktuelt og viktig tema. Dette har gitt meg større faglig kompetanse, i tillegg til kunnskap om hvordan et forskningsarbeid kan utføres. Prosjektet har gitt meg mulighet til å observere problemløsning i et valgrikt læringsmiljø, og med det bidratt til refleksjon rundt hvordan egen undervisning kan fremme matematisk tenkning, samarbeid og bidra til å utvikle utforskende problemløsere.

Jeg ønsker først å rette en takk til elevene som deltok og læreren som tok meg varmt imot, uten dere ville det ikke blitt noen studie. Videre ønsker jeg å takke veilederen min, Elise Klaveness, for nyttige innspill og konstruktive tilbakemeldinger gjennom hele prosessen. Din kompetanse og ditt engasjement, både som veileder og foreleser, har vært svært lærerikt og inspirerende. Takk til Peter Liljedahl for at du hadde tro på prosjektet mitt, og kom med nyttige tips i innledende fase.

Jeg vil også takke medstudenter for godt samarbeid og støtte i studietiden. Dere har bidratt til at disse årene ble mye bedre enn jeg hadde forestilt meg. En stor takk til min mann for uvurderlig støtte gjennom denne prosessen. Og sist, men ikke minst, en ekstra takk til mine tålmodige barn, uten deres selvstendighet, forståelse og raushet hadde ikke dette vært mulig. Masterprosjektet har vært en berg-og-dal-bane av frustrasjon, motivasjon og glede - men nå er jeg endelig i mål.

Dalen, mai 2022

Jane Helen

Innhold

1 Innledning

«Matematikk skal forberede elevene på et samfunn og arbeidsliv i utvikling ved å gi dem kompetanse i utforsking og problemløsing.» (Kunnskapsdepartementet, 2017, s. 2).

Vårt globale samfunn er i rask utvikling med stadig endrende teknologi og kommunikasjon. Dette fremmer blant annet krav om relevante og fremtidsretta matematiske ferdigheter som også skal kunne brukes på områder som i dag er ukjent (Utdanningsdirektoratet, 2021). For å møte ukjente problem er særlig kompetanse innen samarbeid, utforskning og problemløsning essensielt (NOU 2015:8). Denne kompetansen anses som en viktig del av 21st century skills, og har en sentral rolle i dette masterprosjektet, der hensikten er å få innsikt i elevers bruk av representasjoner i problemløsning på vertikale ikke-permanente flater (NOU 2014:7).

1.1 Bakgrunn for valg av tema og aktualitet

For å kunne jobbe med problemløsning, og bli en god problemløser, er det viktig å ha kjennskap til ulike representasjoner, og kunne velge den representasjonen som til enhver tid er mest hensiktsmessig for å drive løsningsprosessen fremover (Hana, 2014, s. 159). Det er også viktig at problemløsning finner sted i valgrike læringsmiljø som legger opp til samarbeid og valg av ulike ressurser (Koichu, 2018). En stor del av dagens undervisningen i matematikk legger dessverre ikke til rette for dette, og befinner seg fortsatt i et oppgaveparadigme med mye tradisjonell tavleundervisning og individuell skriftlig oppgaveløsning (Skovsmose, 2001, s. 123; Wæge & Nosrati, 2018, s. 111). I tillegg er strukturen i klasserommet, med lærer som står foran tavlen og elever som sitter ved hver sin pult, tilnærmet lik de institusjonelle normene som har preget skolen siden den industrielle revolusjon (Pruner & Liljedahl, 2021, s. 756). Dermed får forståelse, samarbeid, problemløsning og bruken av varierte løsningsstrategier mindre oppmerksomhet. Dette står i sterk kontrast til store deler av nyere forskningslitteratur, samt intensjonen med gjeldende læreplanverk, som påpeker at elever skal legge mer vekt på strategier og fremgangsmåter enn selve svaret (Kunnskapsdepartementet, 2017, s. 2).

For å møte fremtidens kompetansekrav og utvikle gode problemløsere anbefaler nyere forskning et skifte fra oppgaveparadigme til en utforskende matematikkundervisning, der elever samarbeider om kognitivt krevende oppgaver og aktiviteter (Nosrati & Wæge, 2015; Liljedahl, 2021; Skovsmose, 2001). Som en respons til dette har Peter Liljedahl (2016) utviklet undervisningsrammen *thinking classrooms* (tenkende klasserom). Her benyttes blant annet vertikale ikke-permanente flater (whiteboards) som gir elever mulighet til å samarbeide og være kreative i problemløsningsprosesser gjennom bruk av varierte representasjoner og løsningsstrategier. Tenkende klasserom som undervisningsramme samsvarer godt med Kunnskapsløftet (2020) som vektlegger at elever skal bli gode problemløsere ved å utforske matematikk i samarbeid med andre, bruke det matematiske språket og varierte representasjoner. Fra et matematikkdidaktisk perspektiv er det da interessant å undersøke hvordan elever benytter representasjoner i arbeid med problemløsning i konteksten av et tenkende klasserom, for på den måten å kunne øke deres problemløsningsevner.

Temaet representasjoner og problemløsning er særlig relevant med tanke på fagfornyelsens kjerneelement. Kjerneelementene viser et tydelig fokus på en mer elevaktiv matematikk-undervisning, der elever utforsker og diskuterer sammenhenger, og ikke bare mottar matematikken som en pakke med sannheter (Karlsen, 2014, s. 17). Kjerneelementene er tenkt som det elever må lære for å kunne mestre og anvende faget, altså fungere som fagets bærende ideer. Blant kjerneelementene i matematikk finner vi *utforsking og problemløysing* og *representasjon og kommunikasjon.* Her handler problemløsning om å utvikle en metode for å løse et problem de ikke kjenner fra før, og elevene skal utforske og diskutere seg frem til en felles forståelse (Kunnskapsdepartementet, 2017, s. 2). En representasjon er noe som står for noe annet, og begrepet blir innen matematikkdidaktikk brukt til å betegne matematiske objekter og til å kommunisere matematiske ideer (Duval, 2006, s. 103; Hana, 2014, s. 131, 139). Representasjoner i matematikk kan være konkrete, kontekstuelle, visuelle, verbale og symbolske, og er måter å uttrykke matematiske begrep, sammenhenger og problem på (Kunnskapsdepartementet, 2017, s. 3).

Formålet med masterprosjektet er å bidra til mer kunnskap om elevers bruk av representasjoner i problemløsningsprosessen på vertikale ikke-permanente flater, et område jeg har funnet lite forskning på. Mer kunnskap om dette kan gi grunnlag for refleksjon rundt egen undervisningspraksis, og dermed hjelpe lærere å utnytte læringsmuligheter som kan oppstå i den sosiale interaksjonen innad i gruppen og mellom gruppene. Kunnskap om elevers bruk av representasjoner og deres rolle i løsningsprosessen er viktig for å kunne hjelpe elever til å kommunisere matematiske tanker, øke deres samarbeidsevner og se sammenhenger mellom begreper og matematiske ideer. Prosjektet kan gi kunnskap om hvordan man kan jobbe videre for å utvikle elevers problemløsningsevner gjennom variert bruk av representasjoner, og dermed øke deres matematiske kompetanse. God matematisk kompetanse kjennetegnes blant annet av å kunne forstå, tolke og bruke ulike representasjoner av matematiske objekt eller problem, samt å kunne forstå forbindelsene mellom disse (Røsseland, 2005, s. 52). Å kunne bruke representasjoner, oppdage sammenhenger mellom ulike representasjoner samt utvikle forståelse for overganger mellom dem, er en viktig del av å utvikle dyp matematisk forståelse (Kilpatrick et al., 2001; Niss & Jensen, 2002; Duval, 2006; Lesh et al., 1987). Studien har relevans inn mot praksisfeltet, og min begrunnelse for valg av tema er tredelt, og basert på (1) at problemløsning er en viktig kompetanse for fremtiden og dermed et relevant tema, (2) at det foreligger et behov for forskning på området, og (3) et ønske om at egen undervisning skal fremme matematisk tenkning og samarbeid, samt bidra til å utvikle utforskende problemløsere som benytter hensiktsmessige representasjoner i problemløsning i valgrike læringsmiljø.

1.2 Problemstilling og forskningsspørsmål

Hensikten med dette masterprosjektet er å få innblikk i elevers bruk av semiotiske representasjoner og overganger mellom ulike representasjonssystem, samt undersøke hvilken sammenheng dette har med valgene og fokusskiftene i problemløsningsprosessen. Ifølge Lesh et al. (1987) ligger selve forståelsen i overgangen mellom representasjoner, «not only are these distinct types of representation systems important in their own rights, but the transformation among them, and transformations within them, also are important.» (s. 2). Det er derfor viktig å ikke bare observere elevers bruk av ulike representasjoner, men også overganger mellom dem. Ifølge Pruner og Liljedahl (2021) har forskning i lang tid sett på problemløsning som en individuell og isolert aktivitet (s.1). Dette på tross av at problemløsning i stor grad er en samarbeidsprosess blant matematikere og i samfunnet ellers. I dette prosjektet vil jeg derfor se på problemløsning som en samarbeidsprosess i små grupper, og har med fokus på elevers bruk av semiotiske representasjoner utarbeidet følgende problemstilling:

«Hva kjennetegner 6.-trinnelevers bruk av semiotiske representasjoner i problemløsning på vertikale ikke-permanente flater?»

For å kunne besvare problemstillingen har jeg utformet følgende forskningsspørsmål:

1. «Hvordan anvender elevene semiotiske representasjoner i problemløsningsprosessen på de vertikale flatene, og hvordan skapes overganger mellom ulike representasjonssystem?»
2. «Hvilken sammenheng har bruken av semiotiske representasjoner med valgene og fokusskiftene i problemløsningsprosessen på de vertikale flatene?»
3. «Hvordan håndterer elevene eventuelle utfordringer i overgangen mellom ulike representasjonssystem?»

For å belyse forskningsspørsmålene og dermed besvare studiens problemstilling har jeg observert to grupper à tre elevers løsningsprosess i arbeid med fire problemløsningsoppgaver innen konteksten av et tenkende klasserom. Begrepsavklaring for sentrale begrep i problemstilling og forskningsspørsmål følger i studiens teoretiske ramme kapittel 2.

1.3 Tidligere forskning og posisjonering

Problemløsning har i lang tid blitt forsket på som en individuell aktivitet, der løsningsprosessen var basert på problemløserens tidligere kunnskap og erfaringer (Pòlya, 1949). Det har vært vanlig å dele aktiviteten inn i fire heuristiske faser; forstå problemet, lage en plan, gjennomføre planen og se tilbake (Pòlya, 1949; Liljedahl et al. 2016, s. 12-14). Senere forskning fant imidlertid ut at denne måten å beskrive problemløsningsprosessen på ikke passet for elever (Pruner & Liljedahl, 2021, s. 754). Det oppstod dermed et behov for andre heuristikker som ikke var basert på design, men på personlig tilpassing, matematiske ressurser og testing av ulike løsningsmetoder (Schoenfeld, 1985). En måte å knytte samarbeid til problemløsning er å fokusere på problemløserens *shift of attention* (fokusskifte) mellom personlige ressurser som heuristikker, medelever og kunnskapskilder som en god ramme for problemløsning (Mason, 2008, 2011).

Nyere forskning har bygget videre på de tidligere tankene og ideene om problemløsning. En videre utvikling av *shift of attention* er en modell som bygger bro mellom kunnskap om hvordan problemløsningen skjer, og hvordan man kan støtte og forbedre problemløsningen i undervisningen (Koichu, 2018). I denne modellen skifter problemløseren fokus mellom individuelle ressurser, interaksjon innad i gruppen og eksterne ressurser, og har muligheten til å ta ulike valg i løsningsprosessen som schemata (matematiske verktøy som representasjoner, heuristikker etc.) og eksterne kunnskapskilder. Det viser seg at elever retter lite fokus mot arbeidet til andre grupper når de har en god driv i løsningsprosessen, og det er først når elevene føler at de står fast at de skifter fokus mot eksterne ressurser i håp om å få nyttige hint som kan hjelpe dem videre i prosessen (Koichu, 2018). For at vellykket problemløsning skal finne sted bør det ifølge Koichu (2018) utøves i et valgrikt læringsmiljø, som for eksempel Liljedahls (2016) tenkende klasserom.

Tenkende klasserom, med bruken av vertikale flater, viser seg å fremme rike valgmuligheter i problemløsningen, og gi elever mulighet til å samarbeide (Liljedahl, 2016, 2021). Liljedahl (2021) hevder at vertikale flater bidrar til mer aktive og engasjerte elever som samarbeider bedre og tenker matematisk over lengre tid, enn om de benytter horisontale permanente flater i problemløsningen. Forskning på problemløsning i valgrike læringsmiljø viser at elever retter fokus mot eksterne ressurser når deres kollektive eller individuelle ressurser tar slutt, og gjør det enten ved å se på andres vertikale flater eller diskuterer med andre grupper (Pruner & Liljedahl, 2021). Det viser seg også at grupper som møter utfordringer i løsningsprosessen går enkelte ganger sammen og former en supergruppe, i håp om å drive prosessen fremover gjennom økt samarbeid (Pruner & Liljedahl, 2021). Pruner og Liljedahl (2021) konkluderer med at valgrike læringsmiljø, som tenkende klasserom, ikke bare forbedrer elevers problemløsningsevne, men bidrar også til å utvikle den enkelte elevs personlige repertoar av ressurser. Mitt prosjekt tar utgangspunkt i Masons (2008) *shift of attention* teori og Koichus (2018) modell, for å undersøke hvilken sammenheng bruken av representasjoner har med elevers valg og fokusskifte i løsningsprosessen, i konteksten av Liljedahls (2021) tenkende klasserom, og utdypes derfor videre i studiens teoretiske ramme kapittel 2.2.

Innen matematikkdidaktisk forskning har det blitt et sterkere fokus på representasjoner, særlig fra midten av 1980-tallet. Forskning viser at elever som jobber med realistiske problemløsningsoppgaver ofte benytter flere representasjoner multimodalt i løsningsprosessen (Lesh et al., 1983). Multiple representasjoner benyttes fordi ulike representasjoner belyser ulike aspekter ved objektet, samt øker forståelsen hos elevene (Hana, 2014, s. 147). Videre er det funnet at gode problemløsere er fleksible i bruken av representasjoner; «Good problem solvers tend to be sufficiently flexible in their use of a variety of relevant representational systems that they instinctively switch to the most convenient representation to emphasize at any given point in the solution process.» (Lesh et al., 1987, s. 6). Duval (2006) har i sin forskning klassifisert ulike representasjoner som elever benytter i matematisk aktivitet og problemløsning. I likhet med Lesh et al. (1987) trekker også han frem viktigheten av å mestre bruken av varierte representasjoner i problemløsning, samt å kunne transformere innad i- og mellom ulike representasjonssystem. Lesh (1981) og Duvals (2006) teorier har en sentral rolle i dette prosjektet og utdypes videre i kapittel 2.1.

Når det gjelder forskning på visualisering og tegning for problemløsning konkluderer Rellensmann et al. (2017) med at det å lage matematiske tegninger i arbeid med problemløsning er et lovende verktøy for å støtte elevers resonnering, forståelse og kommunikasjon (s. 74). Det krever imidlertid at elever har tilstrekkelig strategisk kunnskap om tegning, samt kompetanse til å generere nøyaktige tegninger som støtter løsningsprosessen (s. 74). Rellensmann et al. (2017) har videre kommet frem til tre ulike fordeler som kan tilskrives elevgenererte tegninger; tegninger støtter organiseringen av den gitte oppgaveinformasjonen (når elevene genererer en tegning av en oppgave må de forstå hvilke objekter som er involvert i oppgaven og hvordan disse objektene er relatert til hverandre), elevene må redusere mengden av informasjon ved å trekke ut det som er relevant og som skal representeres på tegningen, i tillegg kan tegning hjelpe elever med å trekke slutninger som er avgjørende for problemløsningen. Informasjonen i problemløsningsoppgaven kan dermed bli tydeligere gjennom tegningen, og kan hjelpe elever med å oppdage matematiske ideer og øke forståelsen for andres resonnement. Arcavi (2003) kom frem til en annen rolle for visualisering i en symbolsk kontekst; at den visuelle løsningsprosessen kan engasjere elevene i resonnement og forståelse, som lett kan utebli ved en ren symbolsk prosess eller løsning (s. 223). Visualisering kan da ha en komplementær rolle i de tre aspektene; visualisering som støtte og illustrasjon av symbolske resultater, en mulig måte å løse konflikter mellom symbolske løsninger og feil resonnement i løsningsprosessen, og en måte å hjelpe problemløserne med å gjenopprette forståelsen av en ide som lett kan overses i formelle løsninger (s. 224).

Forskning på tegning som problemløsning viser at elever som bruker tegning for problemløsning, både som prosess og produkt, får støtte av tegningen i tankeprosessen (Saundry & Nicol, 2006, s. 57). Tegningene er da mer ikoniske da de representerer en ide, en matematisk prosess eller et matematisk konsept (s. 57). Saundry og Nicol (2006) fant at tegninger kan erstatte konkretiseringsmateriale, ved at det legges inn handlinger i tegningene i form av piler, linjer, sirkler etc., og benyttes til å manipulere elementer eller telle, slik de ville gjort dersom det var fysiske konkreter (s. 68). Forskning viser også at elever som øver på å konstruere tegninger for å løse tekst- og problemløsningsoppgaver får bedre problemløsningsevner (Van Essen & Hamaker, 1990, s. 309). Van Essen og Hamaker (1990) påpeker at den strategiske kunnskapen som elever tilegner seg i løpet av tegneintervensjoner påvirker effektiviteten av elevgenererte tegninger for problemløsning (s. 309).

Innenfor forskning på problemløsning og bruken av gester i samarbeidsprosesser, fant Reynolds og Reeve (2001) at elevers gester spiller en integrert og mangesidig rolle i å oppnå samarbeidsforståelse (s. 448). De konkluderer med at gester har minst tre funksjoner i gruppesamarbeid; gester brukes for å oppnå, opprettholde og refokusere felles oppmerksomhet på problemet som skal løses, gester forsterker og utvider elevenes resonnering og kommunikasjon slik at det øker forståelsen hos medelevene (spesielt i problemløsning der fremgangsmåte og prosedyre er ukjent), og gester kan også i noen tilfeller indikere en tilstand av kognitiv usikkerhet i løsningsprosessen som kan åpne for en endring i forståelsen (s. 448). Bruken av gester kan dermed bidra til å utvikle en felles forståelse for problemet, samt heuristikker og representasjoner som benyttes i problemløsningsprosessen. Forskning viser også at gester kan virke som en ekstern representasjon som letter overgangen fra konkreter eller visualiseringer til symbolske representasjoner (s. 449). Bjuland et al. (2008) hevder at elevers gester knyttet til deres resonneringsstrategier spiller en mangefasettert rolle i å utvikle samarbeidende matematisk resonnement i små grupper i arbeid med problemløsning (s. 290).

Det ser ut til å finnes lite tidligere forskning som går direkte på hva som kjennetegner elevers bruk av semiotiske representasjoner i problemløsning på vertikale ikke-permanente flater. Mer spesifikt på representasjoner og overgangen mellom disse, samt hvilken sammenheng bruken har med valgene og skiftene i løsningsprosessen. Peter Liljedahl har selv sett et behov for forskning rundt dette temaet, men har enda ikke hatt tid til å gjennomføre det (Liljedahl, personlig kommunikasjon, 27. september 2021). Koichu (2018) påpeker at det foreligger et behov for forskning på valgrike læringsmiljø i lys av hans modell, og der modellen også kan brukes for å undersøke skiftene og valgene som problemløserne foretar seg i løsningsprosessen. Det eksisterer dermed et behov for mer forskning på området, og mitt masterprosjekt kan bidra til ny kunnskap. Prosjektet tilbyr en mulighet til å se hvordan Masons (2008) teori om fokusskifte og Koichus (2018) modell for valgrike læringsmiljø kan knyttes til Duval (2006) og Lesh (1981) sine klassifisering- og transformasjonsteorier, samt teori om gester og tegning for problemløsning. Disse rammeverkene brukes i analysen av seks elevers bruk av representasjoner i løsningsprosessen av fire virkelighetsnære problemløsningsoppgaver i konteksten av Liljedahls (2021) tenkende klasserom. Masterprosjektet mitt kan dermed bidra til å se sammenheng mellom ulike teoretiske rammeverk, og på den måten kan jeg ta del i- og utvide forskningsfeltet på elevers bruk av semiotiske representasjoner i problemløsning på vertikale ikke-permanente flater.

1.4 Oppgavens struktur

For å besvare masterprosjektets problemstilling vil jeg i *kapittel 2* redegjøre for den teoretiske rammen som trengs for å analysere empiriske funn. Her redegjøres det for representasjoner og klassifiseringsmodeller, samt gester- og tegning for problemløsning, før problemløsning i valgrike læringsmiljø og tenkende klasserom som undervisningsramme beskrives. Deretter belyses og begrunnes forskningsmetodiske valg i *kapittel 3* for å skape en transparens. Videre presenteres og analyseres empiriske funn i *kapittel 4,* før analysens funn drøftes opp mot tidligere forskning og studiens teoretiske ramme i *kapittel 5*. Til slutt gis en avslutning og prespektivering i *kapittel 6.*

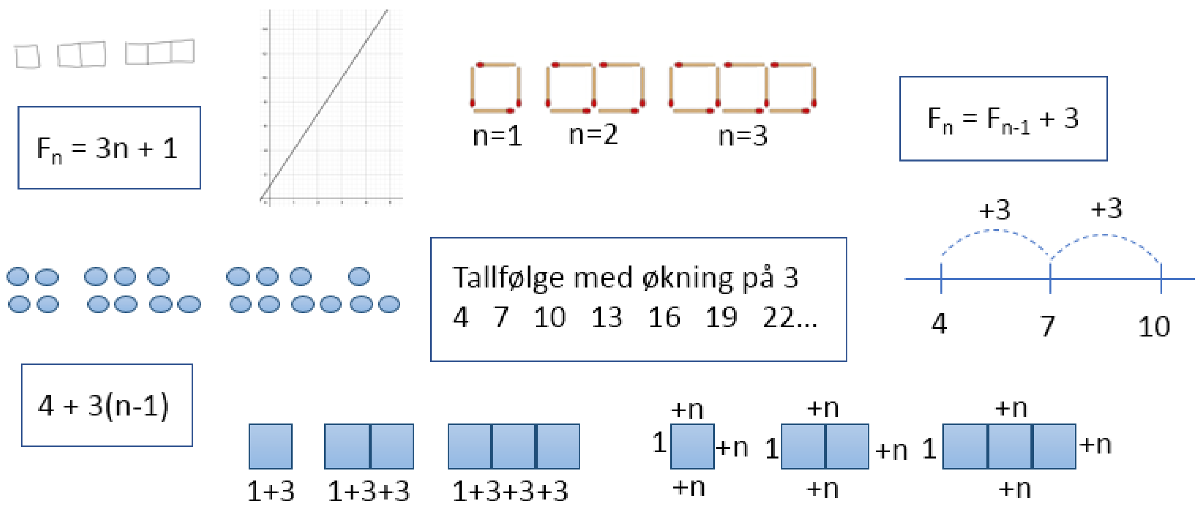
2 Teoretisk ramme

I dette masterprosjektet observeres problemløsning i et tenkende klasserom for å undersøke hva som kjennetegner elevers bruk av semiotiske representasjoner i samarbeidsprosessen på vertikale ikke-permanente flater. I dette kapittelet redegjøres det for den teoretiske rammen som trengs for å kunne analysere og drøfte empiriske funn, og dermed besvare studiens problemstilling. Innledningsvis defineres semiotiske representasjoner, før Lesh (1981) og Duvals (2006) klassifisering- og transformasjonsteorier for semiotiske representasjoner presenteres, i tillegg til teori om bruken av gester i samarbeid og kommunikasjon samt tegning for problemløsning. Deretter defineres problemløsning, før Mason (2008) teori om fokusskifte, og Koichu`s (2018) modell for skift og valg i problemløsning i valgrike læringsmiljø presenteres. Videre redegjøres det for konteksten prosjektet er basert på som er Liljedahls (2021) undervisningsramme tenkende klasserom med blant annet bruken av vertikale ikke-permanente flater. Avslutningsvis gis det en kort oppsummering av teoretisk rammeverk for analyse av datamaterialet.

2.1 Semiotiske representasjoner i matematikk

Matematiske objekt er abstrakte og eksiterer kun som kognitive ideer (Duval, 2006, s. 106). I motsetning til objekt i fag som biologi og kjemi vil aldri matematiske objekt være tilgjengelige via observasjon eller instrumenter (s. 107). Den eneste måten å få tilgang til-, og håndtere matematiske objekt er da gjennom å benytte semiotiske representasjoner som uttrykker og dermed representerer objektet (s. 107). Semiotikk er læren om tegn, og ettersom representasjoner i matematikk er knyttet til tegn i semiotiske system, kalles de for semiotiske representasjoner (Svendsen, 2022; Hana, 2014, s. 132). Det skilles mellom to ulike typer representasjoner i forskningslitteraturen; *interne representasjoner*, som består av kognitive bilder eller strukturer en person lager seg av et objekt, og *eksterne representasjoner*, som kan uttrykkes fysisk og benyttes i matematisk kommunikasjon mellom mennesker, og dermed observeres (Hana, 2014, s. 131-132; Duval, 2006, s. 104; Lesh et al., 1987, s. 1). Dette prosjektet befatter seg med *eksterne semiotiske representasjoner*, og eksempler på dette kan være tall, symboler, tabeller og figurer som benyttes spesifikt i matematikk, men også muntlig og skriftlig språk som man finner i andre fagområder (Duval, 2006; Lesh et al., 1987, s. 1). Semiotiske representasjoner er ifølge Duval (2006) redskap for å kommunisere matematikk og utvikle ny matematisk kunnskap, og viktig for å øke elevers matematiske forståelse og se sammenhenger (s. 106). Semiotiske representasjoner er dermed viktige for å utvikle, uttrykke og kommunisere matematiske ideer og tanker, blant annet i problemløsnings-prosesser på vertikale flater.

Ifølge Duval (2006) kan ingen matematisk handling utføres uten å ta i bruk et semiotisk system av representasjoner, ettersom en matematisk handling alltid innebærer å erstatte en semiotisk representasjon med en annen (s. 107). Det finnes et mangfold av semiotiske representasjoner som innehar ulike egenskaper, og bidrar til å gjøre det matematiske objektet tilgjengelig. Ved å benytte varierte representasjoner på ett og samme matematiske objekt belyses ulike aspekt ved objektet, og egenskaper som kan være skjult ved en representasjon kan da belyses ved hjelp av en annen (Hana, 2014, s. 141; Duval, 2006, s. 108). Eksempel på dette vises i figur 1 under, der varierte semiotiske representasjoner av det matematiske objektet man kan kalle *tallfølge med økning på tre* belyser ulike aspekt ved objektet.

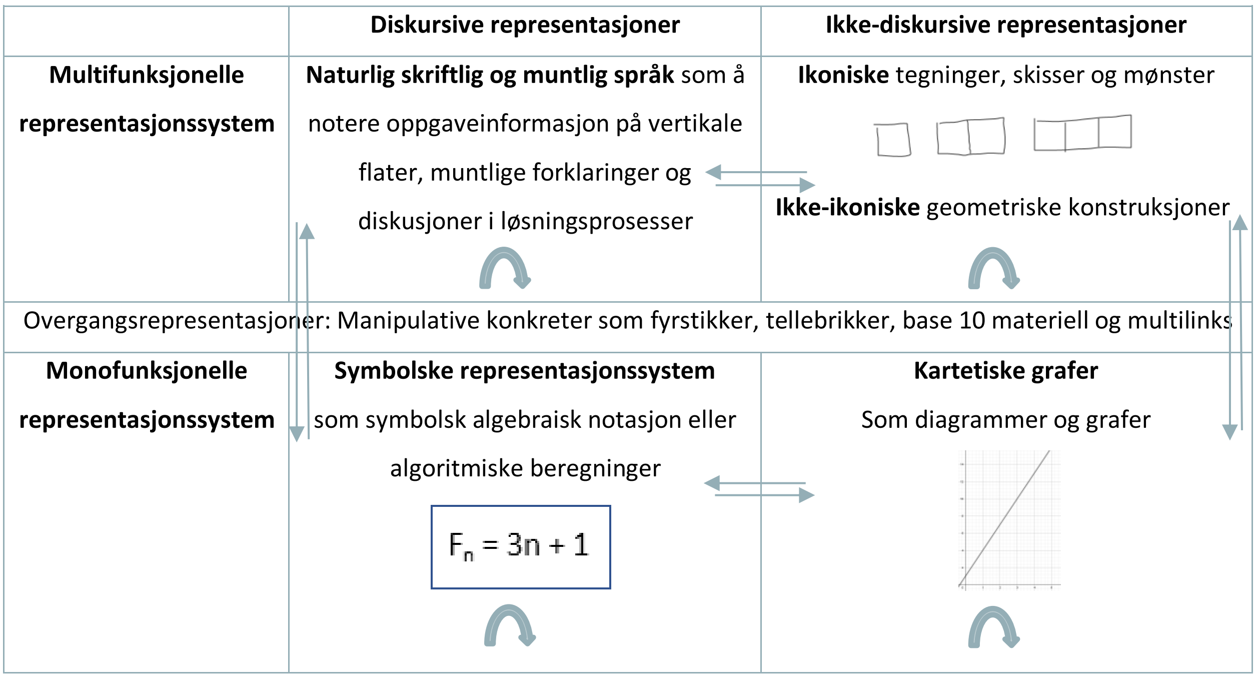


Figur 1: Varierte semiotiske representasjoner av tallfølge med økning på tre

Bruken av varierte representasjoner for å diskutere, forklare og se sammenhenger mellom matematiske ideer, både i undervisning og i problemløsning, kan ifølge Wæge og Nosrati (2018) bidra til at elevene får en dypere forståelse i matematikk (s. 97). Oppsummert vil det å forstå et matematisk objekt innebære; å kunne gjenkjenne ulike semiotiske representasjoner av objektet, å kunne fleksibelt behandle objektet i det gitte representasjonssystemet, samt å kunne transformere objektet fra et representasjonssystem til et annet (Lesh et al., 1987, s. 4; Hana, 2014, s. 131). På bakgrunn av representasjonenes egenskaper og karakter kan de klassifiseres i ulike semiotiske representasjonssystem.

2.1.1 Klassifisering av semiotiske representasjonssystem

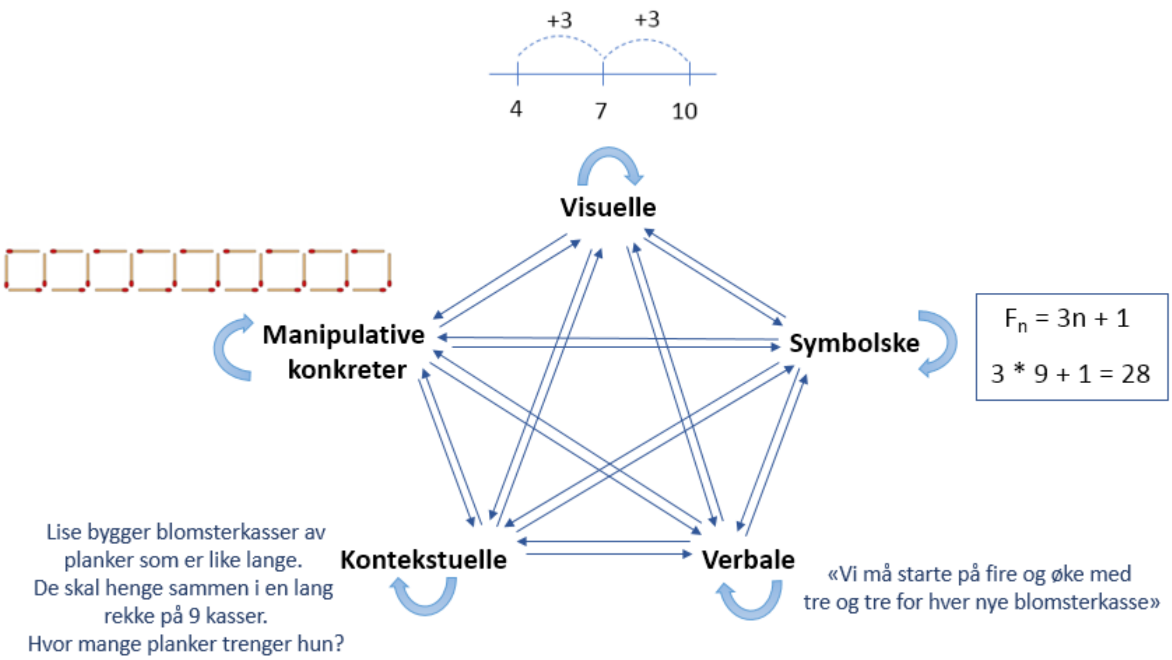
For å utføre matematisk aktivitet, som for eksempel problemløsning, trenger man tilgang på ulike semiotiske representasjonssystem som kan benyttes fritt i henhold til oppgaven som skal utføres, eller i henhold til spørsmålet som stilles (Duval, 2006, s. 108). Duval (2006) klassifiserer semiotiske representasjoner etter hvorvidt de er diskursive eller ikke, og om de er mono- eller multifunksjonelle (s. 110). Om et representasjonssystem er diskursivt handler om hvorvidt det går an å uttrykke matematiske utsagn i systemet (Hana, 2014, s. 144). Duval (2006) skiller mellom monofunksjonelle og multifunksjonelle system, fordi dette skillet er knyttet til hva slags matematiske prosesser som finner sted (Hana, 2014, s. 145). Klassifiseringen presenteres skjematisk i figuren under, og viser ulike semiotiske representasjonssystem og hvordan disse kan transformeres til andre system.



Figur 2: Klassifisering av ulike representasjonssystem - oversatt og tilpasset etter Duval (2006, s. 110)

De ulike representasjonene er delt inn etter hvilken type semiotisk system de tilhører. De monofunksjonelle representasjonssystemene, som vi finner nederst i figuren, er systemer der den eneste funksjonen er å utføre matematiske prosesser (Duval, 2006, s. 109). Til venstre finner man symbolske representasjonssystemer, der blant annet beregninger finner sted, og til høyre finner man diagrammer og grafer (Duval, 2006, s. 110). I de multifunksjonelle representasjonssystemene, som befinner seg øverst i figuren, kan også matematiske prosesser gjennomføres, men de har også andre funksjoner (s. 109). Matematiske prosesser kan for eksempel gjennomføres med det muntlige språket, men språket har også mange andre funksjoner, og er derfor et multifunksjonelt system (Hana, 2014, s. 145). Til venstre finner man naturlig muntlig og skriftlig språk, og til høyre finner man ikoniske tegninger og ikke-ikoniske visuelle fremstillinger som geometriske konstruksjoner. Duval (2006) påpeker at muntlig språk og visualiseringer ofte benyttes for å gi mening til matematiske prosesser som utføres innen det monofunksjonelle systemet (s. 127). Ifølge Duval (2006) er bruken av multifunksjonelle representasjonssystem en av de viktigste kildene til forståelse i matematikk, og er helt essensielle i matematikk og matematisk tenkning (s. 115, 126). En annen klassifisering av semiotiske representasjoner innen matematikk og problemløsning, er gitt av Lesh (1981).

Lesh (1981) identifiserer fem ulike typer matematiske representasjoner og representasjons-system som forekommer i matematisk læring og problemløsning; visuelle, symbolske, verbale, manipulative konkreter og kontekstuelle. Dette er presentert i figur 3 under, som viser eksempler på en løsningsstrategi representert i de fem ulike systemene.



Figur 3: Klassifisering av ulike representasjoner - oversatt og tilpasset etter Lesh et al. (1987)

Manipulative konkreter er fysiske representasjoner av ulikt materiell, som er designet for at elever kan lære bestemte matematiske konsept ved å manipulere dem (bevege, fjerne, ta og føle på) (Johnson, 2018, s. 2). Dette kan være fyrstikker, tellebrikker, base 10 materiell, brøkbrikker, multilinks eller lignende som kan brukes for å konkretisere og visualisere matematiske objekt, begreper eller løsningsstrategier (Lesh et al., 1987, s. 1). De innebygde relasjonene og operasjonene til manipulative konkreter passer til mange dagligdagse situasjoner, og kan øke forståelsen hos elever (Lesh et al., 1987, s. 1; Duval, 2006, s. 109). Det er imidlertid ikke alltid konkretene i seg selv som bidrar til forståelse, men manipulasjonen av dem, altså at elevene kan flytte på dem, ta bort, telle etc. (Johnson, 2018, s. 2).

Visuelle representasjoner er mer abstrakte enn manipulative konkreter, og uttrykkes ved bruk av tegning, illustrasjoner, bilder, diagrammer, tallinje eller grafiske visualiseringer (Johnson, 2018, s. 2). Elementene her kan ikke utrykke matematiske utsagn i seg selv, men sammen med ord, tall og symboler skaper de mening, og kan bidra til forståelse både i læring og matematisk kommunikasjon (Duval, 2006, s. 109). I figur 3 ses en tallinje med tilhørende symboler, og på den måten skaper visualiseringen forståelse og kan bidra i løsningsprosessen. I problemløsning på vertikale flater kan bruken av visuelle representasjoner i form av elevgenererte tegninger, være en viktig bidragsyter i løsningsprosessen, og utdypes derfor nærmere i delkapittel 2.2.4.

I det *kontekstuelle* representasjonssystemet er kunnskap organisert rundt *real-world* hendelser som fungerer som generelle kontekster for å tolke og løse enkelte matematiske oppgaver (Lesh et al. 1987, s. 1). Ved å knytte matematikk til realistiske kontekster kan problemet som skal løses oppleves mindre abstrakt og mer gjenkjennbart da det kobles til noe de kan noe om fra før, og dermed blir problemet mer håndterbart for elevene. Realistiske kontekster kan altså bidra til å skape en bro mellom tidligere kunnskap, det som skal læres, og hverdagsmatematikken. Kontekstualisering kan skje gjennom å bruke eller lage en regnefortelling, som vist i figuren over, eller ved å koble et objekt, begrep eller matematisk problem til en hverdagssituasjon, som for eksempel å bygge blomsterkasser (Johnson, 2018, s. 3). For å fremme elevers motivasjon og utholdenhet i problemløsningsoppgaver er det viktig å ta utgangspunkt i kjente kontekster som elevene finner interessante og meningsfulle (Lesh et al., 1987, s. 5).

Den muntlige måten å uttrykke matematikk på hører naturlig innunder det *verbale* representasjonssystemet. Gjennom verbale formuleringer kan elever sette ord på sine ideer og tankerekker, og øve seg på faglige begrep. Dette er svært viktig ettersom evnen til å kommunisere ideer, drøfte problem, strategier og løsninger har stor betydning for elevers læring, motivasjon og forståelse i matematikk (Wæge & Nosrati, 2018, s. 128). Verbal kommunikasjon er en viktig del av samarbeidet og problemløsningsprosessen på de vertikale flatene (Liljedahl, 2021).

Det *symbolske* representasjonssystemet refererer til skriftlige uttrykksformer i matematikk, og omhandler tall, symboler, bokstaver, ord og setninger, og kan oppfattes som den mest abstrakte representasjonsformen (Lesh et al., 1987). I likhet med verbale formuleringer finner man også her utrykk som er spesielle for matematikk som for eksempel $F_n=3n+1$ som befinner seg i det monofunksjonelle systemet, men også skriftlig tekst, som vanlige setninger og fraser, som befinner seg i det multifunksjonelle systemet (Lesh et al., 1987, s. 1; Duval, 2006).

Klassifiseringsmodellen til Lesh et al. (1987) (figur 3) er et mye brukt didaktisk rammeverk for å minne lærere på å benytte varierte semiotiske representasjoner i undervisningen. Dette bidrar til at elever ser sammenhenger, og på sikt mestrer å selv benytte ulike representasjoner og overganger mellom disse i matematisk aktivitet og problemløsning. Modellen kan også benyttes til å samtale om forskjellige typer semiotiske representasjoner, og eventuelt benyttes for å undersøke elevers bruk av representasjoner og deres evne til å transformere mellom ulike representasjoner. I likhet med Duvals (2006) modell (figur 2) understreker også klassifiserings-modellen til Lesh et al. (1987) at elevenes evne til å representere og behandle matematiske objekt i de fem ulike systemene er viktig i seg selv. Det er derimot overganger mellom ulike representasjonssystem som er det viktigste for forståelse og læring av matematikk (Duval, 2006). Det å kunne bruke varierte semiotiske representasjoner og se sammenhenger mellom dem kan da danne grunnlag for en dypere matematisk forståelse (Lesh et al., 1987; Duval, 2006).

2.1.2 Transformasjoner mellom semiotiske representasjoner

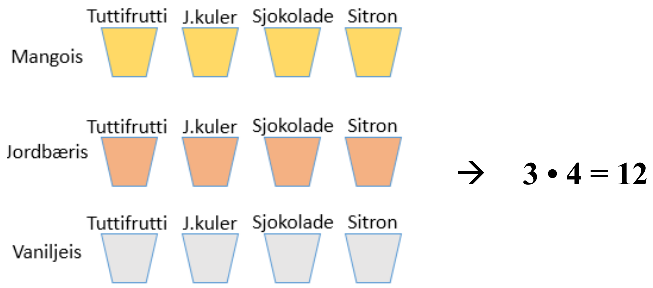
Å veksle mellom- og forandre på representasjoner kalles transformasjoner mellom semiotiske representasjoner (Hana, 2014, s. 147). Transformasjoner er helt sentrale i klassifiserings-modellene til Lesh et al. (1987) og Duval (2006). Begge modellene skiller mellom to ulike typer transformasjoner; between-system mapping/conversion, oversatt til *overganger*, og within-system operations/treatment, oversatt til *behandlinger* (Lesh et al., 1987, s. 3; Duval, 2006, s. 111). En *behandling* kjennetegnes ved at man utfører en matematisk operasjon innenfor et og samme representasjonssystem (Duval, 2006, s. 111). Et eksempel her kan være:

$$F_n = 4 + 3(n-1) = 4 + 3n - 3 = 3n + 1$$

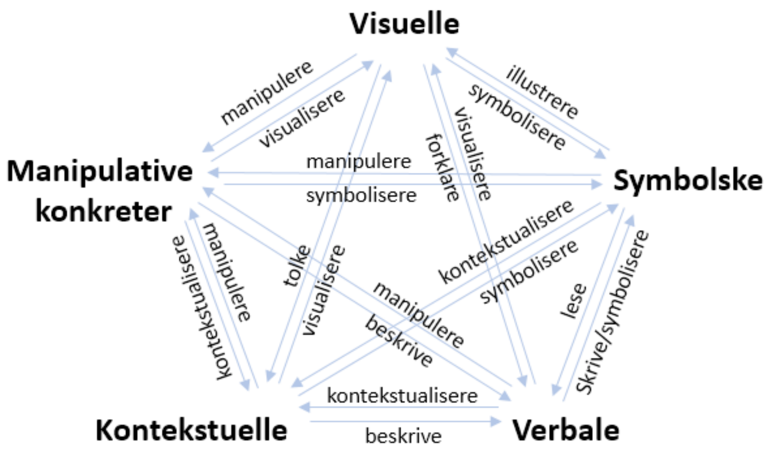
Behandlingen fra det første til det andre uttrykket, i eksempelet over, omtales ofte som å *multiplisere inn i parentesen*, og uttrykker en identitet innenfor algebra. Behandlingen fra det andre til tredje uttrykket uttales ofte som å *trekke sammen* i matematikk. I klassifiseringsmodellen til Duval (2006) figur 2, er behandlinger markert med tjukke bøyde piler, og i modellen til Lesh et al. (1987) figur 3, tilsvarer behandlinger piler som viser til samme representasjonssystem.

En *overgang* kjennetegnes ved at et matematisk objekt transformeres fra et representasjons-system til et annet, og kan ses som rette piler i figur 2 (Duval, 2006, s. 112). Et eksempel på dette kan være:

Kiosken har tre ulike smaker på is; mango, jordbær og vanilje. I tillegg har de fire ulike typer strø; jordbærkuler, tuttifrutti, sjokolade og sitron. Hvor mange ulike kombinasjoner av is og strø kan du velge mellom?



Her benyttes tre forskjellige typer representasjonssystem; kontekstuelt, visuelt og symbolsk. Ved løsning av det kontekstuelle problemet skjer to overganger; først en visualisering og deretter en symbolisering. Overganger kan i Lesh et al. (1987) sin klassifiseringsmodell, figur 3, ses som rette piler mellom de ulike representasjonssystemene. Figur 4 under viser en oversatt og tilpasset versjon av en tidligere variant av Lesh (1981) sin modell. I dette prosjektet benyttes modellen for å identifisere og navngi overganger mellom ulike representasjonssystem som elevene foretar seg i løsningsprosessen.



Figur 4: Overgangsprosesser - oversatt og tilpasset etter Lesh (1981)

Behandlinger viser altså til en eller flere transformasjoner innenfor det samme representasjonssystemet, mens overganger viser til en transformasjon mellom ulike representasjonssystem. Ifølge Duval (2006) er behandlinger viktige rent matematisk, men det er overganger som er den avgjørende faktoren for læring (s. 103). «..the ability to change from one representation system to another is very often the critical threshold for progress in learning and for problem-solving» (s. 107). Han peker også på at overganger er transformasjoner som er mer komplekse enn behandlinger, ettersom enhver endring av system først krever en gjenkjennelse av det samme matematiske objektet representert ulikt (s. 112). I kombinatorikkeksempelet over kan det dukke opp utfordringer med hvilken regneart som skal benyttes, tolkning av ulike begrep, å trekke ut viktig informasjon etc. Man kan ikke ta for gitt at overganger mellom ulike representasjoner foregår automatisk og knirkefritt (Hana, 2014, s. 131). Duval (2006) poengterer at overganger dermed bør få mye mer oppmerksomhet i matematikkundervisningen enn det tradisjonelt har fått (s. 105). I problemløsning benytter man seg ofte av flere ulike representasjoner og overganger mellom disse, og som nevnt innledningsvis kjennetegnes gode problemløsere av deres fleksible bruk av representasjoner med ulike egenskaper (Lesh et al., 1987, s. 6). I dette prosjektet observeres problemløsning på vertikale ikke-permanente flater for å undersøke hva som kjennetegner elevers bruk av matematiske representasjoner og overganger mellom disse i valgene og skiftene elevene foretar seg i løsningsprosessen. Dermed vektlegges transformasjoner av typen *overganger* her, og behandlinger får da liten plass.

I tillegg til bruk av ulike semiotiske representasjonssystem i matematisk tenkning og problemløsning, kreves det også kognitiv koordinasjon (Duval, 2006, s. 126). Man må koordinere de ulike representasjonene samtidig som man koordinerer endringen i representasjonen, elever må da kunne identifisere likheter og forskjeller mellom representasjoner for å kunne bruke dem effektivt sammen (Hana, 2014, s. 168). Det krever dermed kognitive aktiviteter, og ofte bruk av flere representasjoner multimodalt, for å omgjøre informasjonen fra en representasjon til en annen slik at en overgang kan skje (Lesh et al., 1987, s. 5, 7). Dette kan for eksempel være når man benytter muntlig språk for å beskrive overganger, som i kombinatorikkoppgaven over der elever må mestre utfordringen med å gå fra det kontekstuelle, via en elevgenerert tegning og til det symbolske, mens de benytter muntlig språk og gester for å øke forståelsen og støtte overgangene i løsningsprosessen. Her kan overgangen betraktes som en en-til-en korrespondanse mellom representasjonssystemene. Duval (2006) kaller slike situasjoner for overganger som er mer kongruente (s. 122). For at en overgang skal være *kongruent* kreves det at den innehar en en-til-en korrespondanse, at alle elementene er representert og at organiseringen av dem er den samme som i det opprinnelige representasjonssystemet (Duval, 2006, s. 122). Dermed er det vanskelig med helt kongruente overganger (ellers hadde ikke ulike representasjoner gitt ulik informasjon om objektet), men de kan gjøres mer eller mindre kongruente (s. 122-124). Vel så ofte er oppgaven av en slik art at det derfor vanskeliggjør kongruente overganger. Dette kan man blant annet se ved blokktegning (utdypes i delkapittel 2.2.4), der visualiseringen har et høyt abstraksjonsnivå som vanskeliggjør at overgangen i stor grad kan gjøres kongruent. Matematisk forståelse skjer gjennom en koordinering av ulike representasjoner, og matematiske tankeprosesser er da avhengig av en kognitiv synergi av representasjonssystem (Duval, 2006, s. 126).

For å koordinere kommunikasjon, og underbygge overganger i matematikkundervisningen og i problemløsning, er det viktig at overganger gjøres eksplisitte. Eksplisitte overganger handler om å tydeliggjøre og øke forståelsen i overgangen mellom ulike representasjonssystem, samt å uttrykke sammenhengene mellom representasjonene (Solem, 2020, s. 38). Dette kan gjøres ved at lærer, og elever som samarbeider i løsningsprosesser, benytter ulike mediatorer som piler, ringe rundt, understreking, markere med ulike farger, muntlig språk, kroppsspråk og gester. Gester kan bidra til å økt forståelse av muntlige forklaringer og resonnement, og kan fungere som en viktig støtte i overganger mellom ulike representasjoner på de vertikale flatene. For å gi mening i den matematiske kommunikasjonen og overgangene mellom de ulike representasjonssystem i gruppesamarbeidet kan gester dermed spille en stor rolle.

2.1.3 Gesters rolle i problemløsningsprosesser

Gester og språk er to sider av samme sak, og gester kan defineres som; spontane bevegelser av armer og hender som er tett synkronisert med talestrømmen (McNeill, 1992, s. 11). Gester kan dermed ses på som kroppsbevegelser som er direkte involvert i kommunikasjonsprosesser, og som er med på å forsterke meningen av muntlige utsagn (Roth, 2002). Gester kan ha aspekter av mer enn en av følgende dimensjoner; *ikoniske* (symbolske håndbevegelser, som å løfte hendene for å indikere at alle skal reise seg), *metaforiske* (billedlige og som representerer en abstrakt ide, som å tegne et kvadrat i luften, eller vise det ved å bruke fire fingre mot hverandre), *deiktiske* (pekebevegelser som ofte utføres med pekefingeren, for eksempel å peke på en visuell representasjon av figurmønster), *rytmiske* (gjentatte gester som understreker muntlig utsagn, som prikking/banking med pekefinger for eksempel) (McNeill, 2005; Bjuland et al., 2008). I tillegg er gester en del av *sosial interaktivitet*, altså en del av samhandlingen mellom mennesker, som blant annet i samspillet og kommunikasjonen mellom elever i en problemløsningsprosess på vertikale flater (McNeill, 2005).

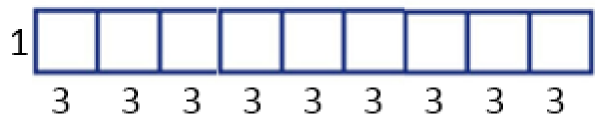
Gester kan ses på som en bro mellom det visuelle og det verbale, da gester binder sammen handling, bilder, minne, tale og matematisk problemløsning (Edwards, 2005, s. 135). Edwards (2005) påpeker at sekvensen av gester ofte er synkronisert med beskrivelsen av problemløsningen (s. 137). Dermed kan gester spille en viktig rolle i å komme frem til en løsningside ved at elever peker på viktige element og representasjoner i løsningsprosessen, og bidra til selve løsningen av problemet (s. 137). Gester har dermed en viktig funksjon i løsningsprosessen og i gruppesamarbeidet på de vertikale flatene i dette prosjektet, i tillegg til å skape bro mellom det verbale og det visuelle. Visuelle representasjoner, blant annet i form av elevgenererte tegninger, kan som nevnt i beskrivelsen av Lesh (1981) sin klassifiseringsmodell være en viktig bidragsyter i problemløsningsprosessen.

2.1.4 Visualisering – tegning for problemløsning

Visualisering er evnen, prosessen og produktet av å skape, tolke, benytte og reflektere over, bilder, tegninger og diagrammer, kognitivt, på papir/tavler eller digitalt, med det formål å skildre og formidle informasjon, tenke på og utvikle tidligere ukjente ideer, samt fremme forståelse (Arcavi, 2003, s. 217). Arcavi (2003) peker på at visualisering blir anerkjent som en nøkkelkomponent i resonnering, problemløsning og bevis (s. 235). Visualisering både som produkt, kreativ løsningsprosess, tolkning og refleksjon har en økende synlighet i matematikk og i undervisning (s. 1). Det skyldes at tegnestrategier er et viktig redskap for å fremme elevers læring og problemløsning (Rellensmann et al., 2017, s. 53).

I problemløsning beskriver tegninger prosessen og produktet av å generere en illustrasjon som korresponderer med objekt og relasjoner beskrevet i oppgaven (Rellensmann et al., 2017, s. 54). Nøyaktigheten til tegninger beskriver dermed i hvilken grad en tegning representerer riktig objekt og relasjoner i oppgaven (s. 56). Rellensmann et al. (2017) skiller mellom to typer tegninger; *situasjonstegning* som er en representasjon av problemsituasjonen og billedlig skildrer objektene beskrevet i oppgaven i henhold til deres visuelle utseende, og *matematisk tegning* som gir en representasjon av den matematiske modellen, og viser dermed kun løsningsrelevante objekter fra problemsituasjonen som alle er redusert til sine relevante matematiske egenskaper (s. 57). En situasjonstegning som skildrer problemets overflatestruktur har et lavt abstraksjonsnivå, mens en tegning som fokuserer på problemets matematiske struktur her et høyt abstraksjonsnivå (s. 56). I dette prosjektet betegnes matematisk tegning som *abstrakt matematisk visualisering*, for å understreke det abstrakte. Elever genererer ikke alltid rene situasjonelle eller abstrakte matematiske tegninger, men ofte en kombinasjon. I dette prosjektet betegnes denne kombinasjonen som *ikonisk matematisk visualisering*, hvor begrepet ikonisk er inspirert av Duvals (2006) klassifiseringsmodell. Dette er tegninger bestående av streker og enkle former, med eller uten tilhørende symbol, skapt for å etterligne og representere de matematiske objektene i problemløsningsoppgaven. Ikonisk matematisk visualisering er mer konkret enn abstrakt matematisk visualisering.

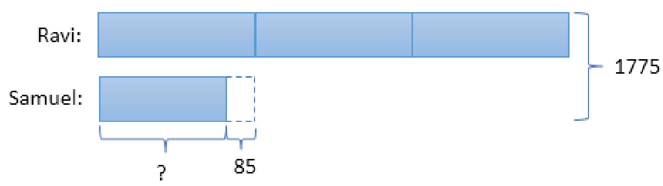
Visualisering gjennom en elevtegning kan ifølge Arcavi (2003) bidra til en overgang, en symbolisering, ettersom en tegning kan være en faktor for å skape forståelse (s. 220). Det vil her si at tegninger kan bidra til en felles forståelse av et problem eller en ide, og dermed til en overgang fra det visuelle til det symbolske. Dette kan for eksempel være gjennom en *ikonisk matematisk visualisering* av en *tallfølge med økning på tre* på de vertikale flatene, som kan bidra til forståelse og utarbeiding av en generell formel:



Her ser man at figuren øker med 3 hver gang, og man kan dermed utarbeide en eksplisitt formel: $F_n = 3n + 1$

En *abstrakt matematisk visualisering* kan blant annet være en blokktegning. Blokktegning er en spesifikk visualiseringsteknikk med høyt abstraksjonsnivå og nøyaktighet, samtidig som den kan bidra i symboliseringsprosessen, og dermed føre til en mer vellykket problemløsning (Osman et al., 2018, s. 1). Denne strategien ble introdusert i matematikkundervisningen i Singapore på 1990-tallet, og kan bidra til kreativ tenkning i arbeid med problemløsnings-oppgaver (Osman et al., 2018, s. 2). Blokktegning er en form for visuell algebra, hvor et matematisk problem visualiseres gjennom blokker eller rektangler som representerer kjente og ukjente tall, som i oppgaven under (Hornigold, 2021; Har, 2007, s. 3).

Ravi og Samuel hadde 1775 frimerker til sammen. Samuel kjøper så 85 frimerker til. Ravi har nå tre ganger så mange frimerker som Samuel. Hvor mange frimerker hadde Samuel før han kjøpte flere?



Her ser man at blokktegning er et verktøy som gir elever et middel til å håndtere informasjon og kompleksitet, og samtidig kommunisere deres tenkning gjennom bruk av visuelle elementer (Har, 2007, s. 3). Ved hjelp av blokktegning kan altså problemet visualiseres slik at det blir lettere å se hvordan oppgaven kan løses. Elevgenererte blokktegninger kan ifølge Osman et al. (2018) være et verdifullt verktøy for å løse ikke-rutinemessige problem, da det gir elever mulighet til å forstå, se sammenhenger samt bidra i løsningsprosessen, og dermed øke deres problemløsningsevner (s. 2-7). Visualisering i form av tegning kan dermed gi god hjelp med å få oversikt over problemet, øke forståelsen og bidra i problemløsningen (Hana, 2014, s. 174). Visualisering fungerer da som en viktig komponent i den matematiske problemløsningen.

2.2 Matematisk problemløsning

Matematisk problemløsning er som nevnt innledningsvis sett på som et viktig aspekt innen undervisning- og læring av matematikk, da dette er en viktig ferdighet som elever bør inneha, særlig i møte med fremtidig arbeidsliv (Liljedahl et al., 2016, s. 1, Osman et al., 2018, s. 1). Det finnes utallige måter å definere problemløsning på, men det eksisterer en felles enighet om at problemløsning er det man gjør når man ikke helt vet hva man skal gjøre (Liljedahl, 2021, s. 19). Problemløsning er derfor ikke en nøyaktig anvendelse av en kjent prosedyre eller formel. En oppgave kan dermed være et problem for en elev, men behøver ikke være det for en annen. Det betyr også at det som en gang var et problem for en elev på et tidspunkt, ikke trenger å være det senere. Problemløsning handler om mer enn selve svaret, det handler like mye om å finne ulike måter å løse problemet på, som å løse det (Høines, 1998, s. 169). Da blir arbeid med problemløsning både et mål for undervisningen og en arbeidsmåte for å utvikle kompetanse (Lampert, 1990). *Vellykket problemløsning* handler da om løsningsprosessen og de valgene og fokusskiftene elevene tar for å drive prosessen fremover. Det er dermed ikke svaret som er målet i en vellykket problemløsning, men drivkraften i løsningsprosessen som fremmer elevenes læring.

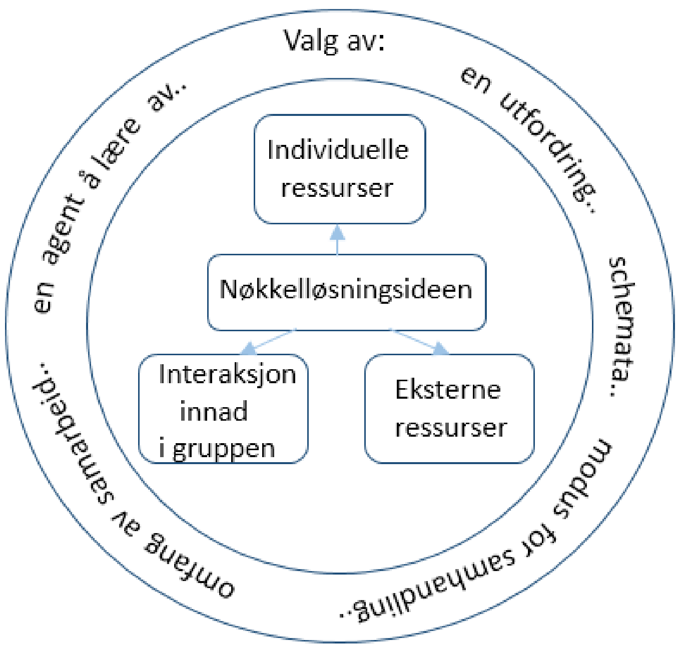
Problemløsning hjelper elever med å løse problemer knyttet til hverdagslige kontekster ved å benytte deres matematiske kunnskaper og ferdigheter på nye måter (Osman et al., 2018, s. 1). Det er mange faktorer som påvirker elevers problemløsningsevner, blant annet elevers bruk av effektive semiotiske representasjoner og overganger mellom disse, bruk av gester for å gi muntlige utsagn mening og for å skape bro mellom det muntlige og det visuelle, samt visualisering gjennom elevgenererte tegninger som har en viktig rolle i løsningsprosessen (Lesh et al., 1987; Arcavi, 2003; Van Essen & Hamaker, 1990; Edwards, 2005). Lærerens pedagogiske undervisningsmåte er en annen viktig faktor når det gjelder elevers problemløsningsevner (Osman et al., 2018, s. 2). Det er dermed behov for et utforskende elevaktivt læringsmiljø som bygger på et sosiokulturelt læringssyn, og som legger til rette for at elever kan samarbeide om kognitivt krevende oppgaver, og på den måten utvikle sine problemløsningsevner. I et klasserom innebærer dette arbeidsmåter der nysgjerrighet, kreativitet og evne til å se sammenhenger er viktige komponenter, og der elevene får trening i å resonnere, kommunisere og benytte ulike representasjoner og heuristikker (Klaveness et al., 2019, s. 177). For å få til dette trenger man valgrike læringsmiljø som gir elever mulighet til å tenke matematisk (Koichu, 2018; Liljedahl, 2021). Her samarbeider elever i problemløsningsprosessen mens de foretar ulike valg og fokusskifte mellom ulike ressurser.

2.2.1 Valg og fokusskifte i problemløsningsprosesser i valgrike læringsmiljø

Uttrykket *noticing* handler om å legge merke til noe, for eksempel legge merke til detaljer i en tegning som kan drive prosessen fremover og i mål, i motsetning til å handle på bakgrunn av vane eller automatiserte regneoperasjoner (Mason, 2011, s. 1, 2). Mason (2011) forklarer noticing som en forskyvning, eller et skifte av oppmerksomhet (s. 11). For å karakterisere *shifts of attention* (fokusskifte) vurderer Mason (2008, 2016a) *hva* problemløseren retter fokus mot og *hvordan* hun gjør dette gjennom å se på skifter i fokuset. Han stiller også spørsmål om *når* man skal introdusere og arbeide med problemløsningsoppgaver i klasserommet, og *når* lærer skal gripe inn og på *hvilken* måte (Mason, 2008, 2016b).

Fokus er en manifestasjon av vilje og intensjon, og har ifølge Mason (2008) en makro- og en mikrostruktur (s. 4). På makronivå varierer fokus i multiplisitet, og kan da være rettet mot et- eller flere steder på en gang, og svarer til Masons (2008) *what* (s. 4). Man kan dermed på makronivå observere *hva* problemløseren retter fokuset sitt mot. Utover dette har også fokus mikrokvaliteter som svarer til Masons (2008) *how*, og her kan man observere *hvordan* problemløseren strukturerer- og endrer fokus (s. 5). På mikronivå skiller Mason (2008) mellom fem ulike måter å strukturere fokus; problemløseren (1) fokuserer på helheten heller enn detaljene (for eksempel for å få et overblikk over problemløsningsoppgaven), (2) fokuserer på spesifikke detaljer (som å trekke ut en viktig detalj fra den elevgenererte tegningen), (3) gjenkjenner sammenhenger mellom spesifikke elementer (se sammenhenger mellom for eksempel visualiseringen av ulike is-kombinasjoner og tallsymboler), (4) gjenkjenner egenskapene ved det representerte objektet (som å oppdage produktregelen ved en kombinatorikkoppgave), og til slutt (5) resonnerer på grunnlag av de gjenkjente egenskapene (baserer videre resonnement på en ide, som å benytte produktregelen i det endelige løsningsforslaget) (s. 5). Palatnik og Koichu (2014, 2015) legger til et *why* til masons *what, how* and *when*, for å kunne studere *hvorfor* problemløseren skifter fokus fra et objekt til et annet på den måten hun gjør. Årsaken kan for eksempel være fordi hun står fast, finner ut at heuristikken ikke fungerer som tenkt, eller må benytte seg av hint fra eksterne ressurser for å komme videre i prosessen.

Koichus (2018) *skift og valg modell* (SCM-modell), bygger videre på ulike teorier og tidligere forskning innen problemløsning, blant annet arbeidet til Pòlya, Schoenfeld og Mason. Masons (2008) teori om fokusskifte, redegjort for over, er det overordnede konseptuelle rammeverket som modellen har sitt utspring fra (Koichu, 2018, s. 309). SCM-modellen for matematisk problemløsning, figur 5, fremmer ideen om at løsningsprosessen består av en rekke valg problemløseren tar, samt beskriver hvordan hun skifter fokus i prosessen. Premisset her er at en nøkkelløsningside til et problem er konstruert som et resultat av skiftende fokus mellom deltakernes individuelle ressurser, interaksjonen innad i gruppen, og eksterne ressurser (som andre grupper, læreverk, digitale hjelpemidler, lærer etc.) (s. 308).



Figur 5: Presentasjon av SCM-modellen - oversatt og tilpasset etter Koichu (2018, s. 310)

Den indre delen av modellen omhandler prosessen som kan kalles heuristiske tilnærmingsmåter, med referanse til Pòlya (1945) og Schoenfeld (1992). Heuristiske tilnærmingsmåter er beskrivelse av generelle problemløsningsstrategier som elever kan benytte i løsningsprosesser. Det kan for eksempel være; å se etter mønster, lage en visualisering, prøve og feile/gjett og sjekk, arbeide baklengs, endre angrepsmåte, lage en systematisk tabell eller tenke på et tilsvarende problem (Bjørnestad et al., 2013, s. 273). I den indre delen av modellen i figur 5, ser man på hvilke aktiviteter og ressurser problemløseren skifter fokuset mellom på veien mot et løsningsforslag av et matematisk problem (Koichu, 2018, s. 309). Nøkkelløsningsideen er i senter av modellen ettersom dette er en heuristisk ide som en av problemløseren kommer frem til og deler med resten av gruppen, og som kan føre til en full løsning av problemet (s. 310).

Den ytre delen av modellen omhandler en rekke valg som problemløseren kan ta når det konstrueres en kjede av fokusskift i prosessen mot å finne en nøkkelløsningside til problemet (Koichu, 2018, s. 309). Modellen tar hensyn til følgende valg; valg av en utfordring som må håndteres, valg av schemata, som er alle mulige matematiske verktøy og ressurser (representasjoner, heuristikker, strategier) problemløseren har tilgjengelig og kan benytte i problemløsningsprosessen for å håndtere utfordringen, valg av modus for samhandling, valg av omfang av samarbeid, og valg av en agent å lære av (s. 309; Koichu, personlig kommunikasjon, 29. mars 2022). Sett opp mot problemløsning i Liljedahls (2021) tenkende klasserom og dette forskningsprosjektet handler dette om; valg av relevant informasjon i problemløsnings-oppgaven, valg av heuristikker og representasjoner som kan bidra i løsningsprosessen, valg av hvor aktive man er og hvilken rolle man har i gruppen, og valg av en agent å lære av for å motta små hint eller innhente kunnskap som kan drive løsningsprosessen videre.

Kort oppsummert bygger SCM-modellen på tre premisser; (1) det er en problemløser som oppdager nøkkelløsningsideen, selv i et gruppesamarbeid, (2) en nøkkelløsningside fremkommer som et fokusskifte i en rekke av flere skift i løsningsprosessen, og (3) rekken av fokusskift er fastsatt av valg problemløseren har mulighet til å ta (s. 311). Valgene kan tas ved å benytte seg av følgende ressurser; individuelle ressurser, interaksjon innad i gruppen, og interaksjon med en ekstern ressurs, som for eksempel hint fra en lærer, en medelev eller en annen gruppe, internett, lærebok etc. (s. 311).

Når problemløsning ses på som en samarbeidsprosess åpnes muligheten for at fokusskift kan bli påvirket av innspill fra andre, og gruppesamarbeidet kan da øke hver enkel problemløsers mulighet til å komme frem til en nøkkelløsningside (Koichu, 2018, s. 314). Muligheten til interaksjon med en ekstern ressurs kan endre fokusskiftene til problemløseren, og i verste fall så mye at det ikke lenger handler om problemløsning, men en løsningsforståelsesprosess. Koichu (2018) påpeker derfor viktigheten av at eksterne ressurser (lærer, medelever i andre grupper) kun bidrar med små hint eller påpeker viktige fakta, og ikke presenterer hele løsningen for problemløseren eller gruppen (s. 317). Rekkene av fokusskift i problemløsningsprosesser fastsettes i hovedsak av valg som problemløseren har mulighet til å foreta seg. Det er matematikklæreren som legger til rette for hvilke valg elevene kan ta, og derfor er det ifølge Koichu (2018) viktig å ha dette i tankene både med tanke på oppgaver, organisering av samarbeidsprosesser og etablering av et elevaktivt læringsmiljø (s. 319).

Elevaktiv læring har utspring i John Dewey (1963), som har med sin teori *learning by doing* en ide om at elever bør være mer involverte i hva og hvordan de lærer (Koichu, 2018, s. 320). Koichu (2018) bygger på Deweys (1963) ide, og kaller det for *constructing choice-affluent learning environments* (s. 320). Med valgrike læringsmiljø mener Koichu (2018) miljø der elever kan velge det mest passende til enhver tid av de ulike valgene og fokusskiftene beskrevet i SCM-modellen over (s. 320). For at vellykket problemløsning skal finne sted fremhever Koichu (2018) viktigheten av et læringsmiljø som gir elever mulighet til å være kreative, samhandle og ha valgmuligheter i problemløsningsprosessen (s. 320). Liljedahls (2021) tenkende klasserom er et eksempel på et slikt valgrikt læringsmiljø.

2.2.2 Tenkende klasserom og vertikale ikke-permanente flater

Tenkende klasserom som undervisningsramme gir elever mulighet til å samarbeide om kognitivt krevende oppgaver, hvor målet er å få flere elever til å tenke matematisk over lengre tid (Pruner & Liljedahl, 2021, s. 756). Liljedahls (2021) forskning bygger på 14 faktorer som utgjør kjernen i hver matematikklærers praksis. Dette er blant annet; hvilke oppgavetyper man bør benytte, hvordan sette sammen grupper, hvor bør elevene jobbe, og hvordan besvare spørsmål (s. 14). Han presenterer den praksisen i hver av disse faktorene som genererer mest matematisk tenkning. *Building thinking classrooms framework*, er altså et rammeverk bestående 14 praksiser for å forme et tenkende klasserom (s. 281). Oppsummert har tenkende klasserom følgende definerende egenskaper; elever løser problemløsningsoppgaver i synlige tilfeldige grupper på vertikale ikke-permanente flater (Pruner & Liljedahl, 2021, s. 756). Videre utdypes disse egenskapene, sammen med enkelte av praksisene som er av særlig relevans for dette prosjektet.

For å få elever til å tenke mer i matematikkundervisningen trenger de noe å tenke på, og noe som oppmuntrer til tenkning (Liljedahl, 2021, s. 19). I matematikk kan dette være i form av *problemløsningsoppgaver*, og da gjerne knyttet til hverdagslige kontekster. Gode problemløsningsoppgaver krever at elevene setter seg fast og deretter tenker, eksperimenterer, prøver og mislykkes, og at de bruker sin kunnskap på nye måter for å komme seg videre i løsningsprosessen (s. 20). Oppgavene bør også ha en viss tilknytning til matematiske tema og kompetansemål, men da bør de ifølge Liljedahl (2021) presenteres før elevene har lært hvordan de løser oppgaver innen emnet (s. 27). Dette kan være å benytte en problemløsningsoppgave innen kombinatorikk som introduksjon til sannsynlighetsregning, der elever selv får mulighet til å oppdage og forstå sammenhenger, som produktregelen, før den presenteres av lærer. Like viktig som gode problemløsningsoppgaver er *hvordan* de presenteres for elevene (Liljedahl, 2021, s. 99).

Problemløsningsoppgaver presenteres ofte som en tekstoppgave fra en lærebok, skriftlig på tavlen eller på en smarttavle. Det viser seg imidlertid at oppgaver fra lærebøker fører til mindre tenking enn om oppgaver presenteres muntlig (Liljedahl, 2021, s. 101). Muntlig presentasjon gir lærer mulighet til å løfte frem eller forklare viktige element i oppgaven, og besvare eventuelle spørsmål elever måtte ha. Elever tenker også mer og kommer raskere i gang med løsningsprosessen når oppgaven presenteres for dem mens de står samlet rundt læreren, enn om de sitter ved pulten (Liljedahl, 2021, s. 103). For å fremme et tenkende klasserom er det derfor viktig å benytte gode problemløsningsoppgaver og ha fokus på hvordan de presenteres for elevene, men det er ikke nok i seg selv, hvordan grupper dannes er også av betydning (Pruner & Liljedahl, 2021, s. 756; Liljedahl, 2021, s. 30).

Elevsamarbeid er et viktig aspekt i klasseromspraksisen, og har en dyp innvirkning på læring når samarbeidet fungerer som tiltenkt (Liljedahl, 2021, s. 39). Den tradisjonelle grupperingsmetoden kan vanskeliggjøre oppnåelsen av denne dype læringen (s. 40). Dette skjer på grunn av en ubalanse mellom elevers- og lærers mål, og elevene entrer ofte gruppen som passive deltakere uten intensjon om å tenke eller bidra med ideer i løsningsprosessen (s. 41). En annen strategi for gruppedannelser er *synlige tilfeldige grupper*, ved for eksempel bruk av nummererte ispinner som elevene trekker. Denne enkle synlige grupperingsstrategien kan føre til en positiv endring i elevenes tankesett, og gjør at de entrer et gruppesamarbeid med intensjon om å tenke og bidra (s. 44). I tillegg kan grupperingsstrategien bidra til å bryte ned sosiale barrierer i klasserommet, øke kunnskapsmobiliteten innad i og mellom gruppene, øke viljen til å samarbeide samt øke engasjementet for matematikk (s. 45-49).

Liljedahl (2021) peker også på at den ideelle gruppestørrelsen fra 3. trinn og oppover er tre elever, da dette gir en fin balanse mellom redundans (språk, interesser, kunnskap etc.) og mangfold i ideer, tanker, representasjoner etc. (s. 44). Elevene kan med fordel få ulike roller i gruppene; *skriveren* har hovedansvar for å notere tanker og ideer på den vertikale flaten gjennom bruk av ulike representasjoner, *fortelleren* har ansvar for å presentere løsningsprosessen muntlig for andre grupper, og *speideren* har ansvar for å speide etter små hint. For at elevene skal opprettholde flyten og engasjementet i løsningsprosessen er det viktig at lærer tilbyr asynkrone hint ved behov (s. 156). I tenkende klasserom fungerer da lærer som et støttende stillas og hjelper elever inn i den proksimale utviklingssonen, altså sonen der en elevs muligheter utvides i et sosialt samspill med andre (Imsen, 2014, s. 194). Med små hint fra lærer, kan potensielt kunnskapsnivå komme til syne og bidra i problemløsningsprosessen (Stray & Wittek, 2014, s. 164, 139). I likhet med Koichu (2018) peker også Liljedahl (2021) på viktigheten av at eksterne ressurser, som lærer eller andre grupper, kun bidrar med små hint eller påpeker viktige fakta, og ikke presenterer hele løsningen for elevene (s. 157). Med gode problemløsningsoppgaver og synlige tilfeldige grupperinger à tre elever, er man på god vei for å oppnå et tenkende klasserom, men det krever også at man utfordrer de institusjonelle normene som finnes i mange av dagens klasserom.

Tilfeldig gruppering og samarbeid om løsningsprosesser på *vertikale ikke-permanente flater,* som whiteboards, krittavler, vindu etc., viser seg å ha en positiv og dyp effekt på elevers tenkning og engasjement (Liljedahl, 2021, s. 58). Elevene tenker over lengre perioder, diskuterer mer matematikk og er mer utholdende, selv når oppgaven er vanskelig. En av årsakene til dette er at elevene raskt kan viske bort eventuelle feil, som reduserer risikoen ved å teste ut ulike heuristikker og ideer (s. 60). Å jobbe stående medfører dessuten en bedre positur, som igjen er knyttet til en økning i energi og humør (Peper & Lin, 2012). Det gir også større rom for ulike former for non-verbal kommunikasjon, som gester, ansiktsuttrykk og kroppsspråk, i tillegg til å ha en positiv effekt på kunnskapsmobiliteten (Liljedahl, 2021, s. 61). Å la elever jobbe vertikalt gjør arbeidet deres synlig for alle i rommet og fremmer interaksjon, som dermed øker muligheten for at ideer vil bevege seg mellom grupper (s. 61).

En økende kunnskapsmobilitet fører også til at elevene stoler mer på hverandre, både innad i- og mellom gruppene, og dermed synker avhengigheten av læreren som eneste kunnskapskilde i rommet, og elevers autonomi fremmes (s. 61, 137). Når elever jobber individuelt sittende ved pulten føler de seg ofte anonyme, og det fører til at elever blir uengasjerte. Når elever jobber ved de vertikale flatene fjernes denne anonymiteten, og sjansen for at fokuset rettes mot elementer i løsningsprosessen økes (s. 62). Samtidig gir det læreren mulighet til å se alt som foregår i rommet samt hvor gruppene er i løsningsprosessen, og dermed gi små hint og tilbakemeldinger ved behov. En avsluttende Gallery walk, der lærer og elever fører en detaljert diskusjon av oppgaven ved å benytte gruppenes arbeid på de vertikale flatene for en gjennomgang av ulike løsningsforslag, bidrar til større grad av elevmedvirkende læring og dybdelæring (s. 176).

Tenkende klasserom som undervisningsramme tar Vygotskys råd på alvor ved å legge til rette for at elever kan invitere andre inn i sin tenkning når de arbeider med problemløsning (Stray & Wittek, 2014, s. 145). Ved å la elever jobbe med problemløsning i synlige tilfeldige grupper på vertikale flater, legger man opp til matematisk tenkning og samarbeid i et sosiokulturelt perspektiv (Pruner & Liljedahl, 2021, s. 756; Imsen, 2014, s. 194). Sosiokulturelle teorier ser på læring som et sosialt fenomen, der kunnskap konstrueres gjennom praktiske aktiviteter i interaksjon og samhandling med andre i læringsmiljøet (Skaalvik & Skaalvik, 2018, s. 32). Vygotsky ser på språk som noe mer enn språk i betydning «nasjonalspråk», han tenker på språk som et fleksibelt semiotisk system av tegn (Sälsjö, 2016, s. 111). Som valgrikt læringsmiljø gir tenkende klasserom elever mulighet til å samarbeide og være kreative i arbeid med problemløsningsoppgaver gjennom bruk av varierte representasjoner i valgene og fokusskiftene i løsningsprosessen. Nøkkelløsningsideen konstrueres som et resultat av skiftende oppmerksomhet mellom deltakernes individuelle ressurser, interaksjonen innad i gruppen, og eksterne ressurser som andre grupper, oppgaveteksten og lærerens hint, i likhet med Koichus (2018) SCM-modell.

2.3 Oppsummering av teoretisk rammeverk for analyse

I dette prosjektet undersøkes det hvordan elever benytter semiotiske representasjoner i problemløsning på vertikale flater. Elevenes bruk av representasjoner, samt overgangen mellom ulike monofunksjonelle- og multifunksjonelle representasjonssystemene, analyseres ved hjelp av Lesh (1981, 1987) og Duvals (2006) klassifiserings- og transformasjonsteorier. Bruken av elevgenererte tegninger, samt muntlig språk og gester analyseres med utgangspunkt i begrep fra Rellensmann et al. (2017) og Arcavis (2003) teorier om tegning for problemløsning, samt Roth (2002) og McNeills (2005) teori om gester og gesters rolle i problemløsning. Med bakgrunn i Masons (2008) teori om fokusskifte og Koichus (2018) skift og valg modell for valgrike læringsmiljø, analyseres elevenes fokus på makro- og mikronivå samt deres fokusskifter og valg av blant annet schemata og en agent å lære av. Det undersøkes dermed hvordan problemløsningsprosessen drives fremover mot en nøkkelløsningside og en endelig løsning gjennom elevenes bruk av representasjoner og overganger mellom dem, samt hvilken sammenheng dette har med elevenes valg og fokusskifter i løsningsprosessen i konteksten av Liljedahls (2021) tenkende klasserom. Datamaterialet som behandles og analysers er transkriberte video- og lydopptak samt foto av elevenes arbeid på de vertikale flatene. Analysens funn drøftes ut fra tidligere forskning samt den teoretiske rammen redegjort for her.

3 Metode

Det er i denne kvalitative casestudien undersøkt kjennetegn på elevers bruk av semiotiske representasjoner i problemløsning. For å kunne belyse dette er det observert to elevgrupper, à tre elever, sin løsningsprosess i arbeid med fire problemløsningsoppgaver på vertikale flater. Det er gjennomført video- og lydopptak av samarbeidsprosessen og fotografering av elevarbeid underveis. Datamaterialet er behandlet og kodet gjennom en abduktiv og tematisk tilnærming, der kodene fremstod ved nærlesing av materialet, og deretter sett i lys av de teoretiske perspektivene. På den måten utvidet empiri og teori gjensidig forståelsen. Datamaterialet er videre analysert ved hjelp av Duval (2006) og Lesh et al. (1987) sine rammeverk for klassifisering og transformasjon av semiotiske representasjoner, begreper fra Mason (2008) og Koichus (2018) teorier om fokusskifte i valgrike læringsmiljø, samt teori om bruken av gester- og visuelle representasjoner i samarbeid og problemløsning.

I dette kapittelet belyses forskningsmetodiske valg som er tatt underveis i prosjektet. Valgene begrunnes for å skape en transparens slik at det er mulig for andre å etterprøve resultatene og vurdere forskningens gyldighet og pålitelighet (Postholm & Jacobsen, 2018; Anker, 2020). Innledningsvis presenteres kvalitativ casestudie som metode, tilknyttet refleksjoner rundt egen forskerrolle. Videre presenteres metode for datainnsamling, utvalg, problemløsningsoppgaver, og metode for bearbeiding og analyseprosess. Avslutningsvis belyses kvaliteten og troverdigheten av forskningsarbeidet, samt etiske betraktninger tilknyttet prosjektet.

3.1 Kvalitativ metode og casestudie

Metode betyr opprinnelig *det å følge en bestemt vei mot et mål*, hvor målet er kunnskap (Høgheim, 2020, s. 27). Målet med dette masterprosjektet har vært å få kunnskap om elevers bruk av semiotiske representasjoner og hvordan overganger skapes i deres valg og fokusskifter i problemløsningsprosessen på vertikale flater. Ettersom det var ønskelig å gå i dybden på et matematisk fenomen og belyse elevenes løsningsprosess, ble en kvalitativ casestudie valgt. Sentrale kjennetegn ved kvalitative metoder er nærhet til praksisfeltet, et lavt antall informanter der man søker å gå i dybden, og der fremstillingen tar sikte på å formidle forståelse (Postholm & Jacobsen, 2018; Dalland, 2017). Målsetningen med en casestudie er nettopp å presentere grundig forståelse av en case i en spesiell kontekst (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 64). I dette prosjektet er en gruppe 6. trinnelever observert for å forstå hvordan akkurat disse elevene benytter representasjoner i løsningsprosessen i samhandling med hverandre. Konteksten er basert på Liljedahls (2021) tenkende klasserom, som fremmer rike valgmuligheter, samarbeid og kreativitet i et sosiokulturelt perspektiv. Forskningsprosjektet er basert på en hermeneutisk tilnærming der jeg gjennom deltakende observasjon med video- og lydopptak fikk en dypere forståelse av elevenes meningsskapende prosess. Formålet med hermeneutisk praksis er å oppnå forståelse gjennom fortolkning av tekster og menneskers handlinger (Kvarv, 2021, s. 84). Tolkningsprosessen av datamaterialet var dynamisk gjennom en bevegelse mellom å betrakte delene og helheten for å se dette i sammenheng, og analyseprosessen i denne studien kan dermed beskrives som en hermeneutisk sirkel (Kvarv, 2021, s. 149). En kvalitativ casestudie gir dermed et godt grunnlag for rike observasjoner og beskrivelser som bidrar til å belyse problemstillingen (Dalland, 2017, s. 53).

Ved kvalitative studier er nærhet til feltet en viktig forutsetning (NESH, 2016). Gjennom kvalitativ observasjon var jeg i direkte dialog med elevene som deltok, og dermed en del av det som ble observert. Det var da viktig å erkjenne at jeg som forsker og menneske er subjektiv (Dalland, 2017, s. 59). Det man sanser og observerer påvirkes hele tiden av egne erfaringer og kunnskap, det var derfor essensielt å ha et kritisk blikk på- og god refleksjon rundt egen forskerrolle. Observasjoner, video- og lydopptak måtte transkriberes, analyseres og tolkes, og tolkningene ble farget av meg som forsker, mine verdier, erfaringer og forforståelse. Mennesker vil ifølge Gadamers filosofi alltid ha en forut-forståelse eller forventning til det som skal forstås, og det er først når denne forut-forståelsen konfronteres med det som skal forstås at det oppnås forståelse (Kvarv, 2021, s. 89). Det var dermed viktig at jeg var bevisst min egen forforståelse, og sensitiv til at egne holdninger i minst mulig grad skulle prege forskningsprosessen og påvirke det endelige forskningsresultatet. I tillegg til refleksjon rundt egen forskerrolle krever kvalitative studier at det redegjøres for metode for datainnsamling for å skape transparens.

3.2 Redegjørelse for innsamling av datamateriale

For å samle inn data er det gjennomført observasjon med video- og lydopptak av to grupper à tre elever sin problemløsningsprosess på vertikale flater. Videre utdypes observasjon som metode for datainnsamling, samt en beskrivelse av utvalgsprosessen og gjennomføringen av observasjonen.

3.2.1 Observasjon med video- og lydopptak

Observasjon er ett av flere redskap man kan benytte seg av for innsamling av data fra forskningsfeltet (Postholm, 2010, s. 55). I kvalitativ forskning gjennomføres observasjon i stor grad i naturlige omgivelser og situasjoner slik de utspiller seg, hvor forskeren kan fange opp både menneskelig aktivitet og den fysiske settingen hvor aktiviteten finner sted, for eksempel i et klasserom (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 113). Observasjon som redskap gir dermed mulighet til å se med egne øyne hvordan elevene handler og samhandler (Dalland, 2017, s. 97). I dette prosjektet vil det spesifikt si hvordan elevene benytter ulike semiotiske representasjoner i valgene og skiftene i løsningsprosessene, samt hvordan de forholder seg til de vertikale flatene og eksterne ressurser

Det er vanskelig, og kanskje umulig å få med seg elevers bruk av semiotiske representasjoner og overganger mellom disse til enhver tid kun gjennom observasjon. Dette kan føre til tap av viktige funn. Lyd og bilde av det som observeres gir forskeren derimot mulighet til å se og høre opptaket flere ganger for å sikre at man får med flest mulig detaljer (Dalland, 2017, s. 119). I tillegg kan andre se opptaket og bekrefte eller avkrefte forskerens tolkninger, og dermed fungere som en forskningsmessig kvalitetssikring (Dalland, 2017, s. 119). Det ble derfor benyttet video- og lydopptak for datainnsamling i prosjektet mitt, da videoobservasjon muliggjorde en detaljert analyse av elevenes bruk av semiotiske representasjoner og overgangen mellom dem, deres fokusskifter i løsningsprosessen og bruken av gester (Derry et al., 2010, s. 7). Et videokamera er en nøytral observatør, og når jeg i tillegg til egne observasjoner hadde videoopptak med lyd, samt foto av elevarbeid, hadde jeg en bredere dekning av det som skulle observeres (Dalland, 2017, s. 119).

I observasjonsprosessen kan forskeren innta ulike roller, alt fra en passiv rolle som «fullstendig observatør» til å delta i størst mulig grad som «fullstendig deltaker» (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 115-116). Deltakende observasjon innebærer at forskeren deltar i de sosiale prosessene som studeres for på den måten å innhente data (Dalland, 2017, s. 97). Ved å innta en deltakende observatørrolle kan forskeren bryte inn med spørsmål, snakke og samhandle med dem som observeres (Anker, 2021, s. 36). I denne casestudien ble rollen som deltakende observatør valgt for å få en dypere forståelse for elevenes løsningsprosess, samt for å imøtekomme noen av Liljedahls (2021) rammer for et tenkende klasserom. Rammene innebærer blant annet at problemløsningsoppgaver presenteres muntlig for elevene, små hint og svar på spørsmål gis underveis ved behov, samt at det benyttes gruppesamarbeid på vertikale ikke-permanente flater i arbeid med problemløsningen. Jeg ønsket likevel å påvirke elevene minst mulig i løsningsprosessen, og dermed forholdt jeg meg i bakgrunnen og inntok en tilskuerrolle, men ga små hint asynkront og stilte spørsmål der jeg anså det som hensiktsmessig. Når man skal benytte observasjon som redskap for datainnsamling, er det i tillegg til valg av observatørrolle også nødvendig å ta stilling til hvilken grad av struktur man legger opp til (Dalland, 2017, s. 104).

Strukturert observasjon krever ifølge Dalland (2017) en mer detaljert planlegging enn den åpne tilnærmingen en ustrukturert observasjon innebærer (s. 104). Gjennom bruken av Lesh et al. (1987) og Duvals (2006) rammeverk, samt Mason (2008) og Koichus (2018) teorier om fokusskifter som teoretisk rammeverk for analyse, var det allerede gitt hva som burde observeres. Selv om formålet med observasjonen var bestemt ønsket jeg likevel å være åpen for interessante og uforutsette funn, og dermed ble en semistrukturert observasjon benyttet i observasjonen av problemløsningsprosessene. I tillegg til grad av struktur og valg av observatørrolle krever kvalitative observasjoner at datatilfanget begrenses for å ikke bli for omfattende og tidkrevende.

For å begrense datamaterialet bestod utvalget av to grupper à tre elever som samarbeidet om løsningsprosessen av fire problemløsningsoppgaver. Utvalget er således ikke representativt og kan dermed ikke generaliseres, men det er mulig å si noe om hva som kjennetegnet akkurat disse elevenes bruk av semiotiske representasjoner i problemløsningen. Kvalitative casestudier gir likevel en dyp innsikt i prosesser som man ikke får ved kvantitative studier, og innsikten kan da komme til nytte på et generelt nivå likevel. Denne studien kan bidra til ny kunnskap på et område som det ifølge Liljedahl (2021) og Koichu (2018) eksisterer et behov for forskning på. Selv om utvalget er begrenset, kan dette forskningsprosjektet gi meg og andre matematikklærere grunnlag for refleksjon rundt egen undervisningspraksis. Prosjektet kan tilpasses og overføres til klasserom der lærere gjenkjenner elementer som belyses, da matematiske representasjoner er særlig viktige for den matematiske forståelsen, og som brobygger mellom virkeligheten, matematikken i klasserommet og tidligere kunnskap, og har en essensiell rolle i problemløsning (Lesh et al., 1987).

3.2.2 Utvalg

Det er hensikten med studien som påvirker beslutninger om utvalg (Cohen et al., 2017). Hensikten med dette prosjektet er å beskrive hva som kjennetegner 6.-trinnelevers bruk av semiotiske representasjoner i arbeid med problemløsnings på vertikale flater. Målet er da som nevnt ikke å generalisere og si noe om alle elevers bruk, men å gå i dybden på et lite utvalg og beskrive i detalj. For å kunne gå i dybden og samle inn relevante data som kunne bidra til å besvare problemstillingen var det viktig at utvalget hadde kjennskap til tenkende klasserom som undervisningsramme. Elevene burde altså ha erfaring med problemløsning i tilfeldige grupper, og være kjent med bruken av vertikale flater i undervisningen. Liljedahls (2021) tenkende klasserom utfordrer både oppgaveparadigme og de institusjonelle normene som nevnt innledningsvis, og han påpeker at det tar tid å etablere en utforskende praksis. Det var derfor hensiktsmessig at utvalget hadde innarbeidet tenkende klasserom som undervisningsramme, og at elevene da hadde de nødvendige erfaringene for å få til gode samarbeidsprosesser og bruk av representasjoner i løsningsprosessen på de vertikale flatene. Det ble dermed valgt et strategisk utvalg i denne casestudien, der man henvender seg til en gruppe eller enkeltpersoner som man på forhånd mener har noe spesielt å bidra med i undersøkelsen (Dalland, 2017, s. 56).

Jeg ønsket å undersøke elever på mellomtrinnet fordi elever her trolig har erfaring med bruken av varierte semiotiske representasjoner i matematisk aktivitet og problemløsning. Valget falt da på elever i 6. eller 7. trinn, en aldersgruppe som trolig kunne vise meg en del, samt at jeg kunne få mulighet til å tilegne meg mest mulig kunnskap om prosjektets tema. Utvalgsprosessen ble foretatt ved at jeg henvendte meg til ulike fagpersoner innen matematikkdidaktikk, som igjen kunne henvise videre til lærere som hadde kjennskap med tenkende klasserom som undervisningsramme. Etter utallige henvendelser til ulike rektorer, lærere og fagpersoner kontaktet jeg matematikksenteret ved NTNU etter tips fra veileder. Matematikksenteret henviste meg videre til en matematikklærer som benyttet vertikale flater i undervisningen, og som takket ja til å stille sine elever til disposisjon, forutsatt at de samtykket til å delta. Læreren underviste matematikk i to parallellklasser på 6. trinn, og elevene hadde erfaring med utforskende undervisning og bruken av vertikale flater. Selv om det var ønskelig å kun observere to grupper à tre elever ble alle elevene på 6. trinn informert. Dette for å sikre at elevene følte seg inkludert, samt for å sikre tilstrekkelig med deltakere og datamateriale. Læreren informerte elevene om prosjektet gjennom informert samtykkeskjema tilpasset elevenes aldre (se samtykkeskjema vedlegg 1). Det var 11 elever som i samråd med sine foresatte ga sitt samtykke til å delta, og som dermed samtykket til å bli observert med video- og lydopptak mens de samarbeidet om problemløsning på vertikale flater.

I et teams-møte med læreren i starten av januar ble det gitt utdypende informasjon om hensikten med prosjektet, samt informasjon om den praktiske gjennomføringen. Her ble de endelige problemløsningsoppgavene valgt ut i samråd med lærer, som anbefalte å starte med oppgaven *kvadratisk mønster*, da elevene hadde tidligere erfaring med figurtalloppgaver. Dermed kunne en kjent oppgave bidra til at elevene senket skuldrene og fikk en god start. Ettersom alle de 11 elevene som samtykket til å delta oppfylte kriteriene for utvalg, samt hadde gode samarbeidsevner, ble vi enige om at læreren skulle tilfeldig trekke 6 av disse til å delta i selve prosjektet. Ifølge Cohen et al. (2017) og Dalland (2017) bør forskere bruke litt tid på å bli kjent med deltakerne (s. 310, s. 102). For at elevene skulle bli kjent med meg og bli mindre påvirket av min tilstedeværelse under observasjonen fikk jeg besøke skolen og delta i en 110 minutter lang undervisningsøkt.

Mitt første møte med elevene var gjennom dette besøket, noen dager i forkant av selve datainnsamlingen. Her fikk jeg presentert meg selv og prosjektet mitt. De 11 elevene som hadde samtykket til å delta ble tatt med inn på grupperommet der observasjonen skulle finne sted. Jeg valgte å samle alle 11 selv om kun 6 av elevene skulle delta, dette i tilfelle fravær på selve observasjonsdagen. Her fikk elevene en nærmere beskrivelse av formålet med studien, hvordan datainnsamlingen ville foregå, samt informasjon om behandling av personopplysninger. Elevene fikk også mulighet til å stille spørsmål om meg og prosjektet, og mulighet til å trekke seg om det var noen som ønsket det. Etterpå fikk jeg delta i en undervisningsøkt i matematikk, der elevene jobbet med ulike problemløsningsoppgaver på vertikale flater i Liljedahls (2021) tenkende klasserom kontekst, i likhet med konteksten eget prosjekt. Her fikk elevene erfare hvilken type oppgaver som ventet dem, samt at de fikk mulighet til å bli kjent med meg i en trygg klasseromssituasjon. Det ga også meg mulighet til å bli kjent med elevene og se bruken av vertikale flater i praksis, samt trygge meg i vårt neste møte. Besøket bidro muligens til at vårt neste møte også ble mer forutsigbart og tryggere for elevene, og trolig også til å ufarliggjøre deltakelsen i forskningsprosjektet.

3.2.3 Gjennomføring av observasjon

For å begrense datamaterialet og kunne gå i dybden, valgte jeg som nevnt å observere to grupper à tre elever. Videokamera og mikrofoner ble lånt av eDU-medieproduksjon ved USN, som også ga nødvendig opplæring for å håndtere utstyret. Rommet hvor datainnsamlingen fant sted ble klargjort i forkant av skolestart, vertikale flater ble hengt opp og nummerert, og penner ble lagt klart på et bord. To videokamera ble rigget og montert på stativ, rettet mot hver sin flate, og tilhørende mikrofoner ble teipet fast på de to vertikale flatene. Deretter ble utstyret testet og zoomet inn slik at både flatene og elevenes gester, kroppsspråk og samarbeid ble fanget i kameralinsen. Fastmontert videokamera ble vurdert som minst forstyrrende, samtidig som jeg kunne bevege meg fritt i rommet underveis. Det ble benyttet to kamera for å kunne filme begge gruppene samtidig slik at deres fokusskifte mot eksterne ressurser kunne observeres og analyseres. Plakat med *opptak pågår* ble hengt opp på døren inn til rommet for å unngå forstyrrelser, men også for å unngå å få med andre elever eller lærere på opptaket, og på den måten ivareta deres og deltakernes personvern. Før opptaket startet gjentok jeg informasjon om elevenes rettigheter i forbindelse med behandling av personopplysninger. Personopplysninger og forskningsetikk er nærmere beskrevet i kapittel 3.6. Jeg forklarte igjen hensikten med studien min, og påpekte at riktig svar ikke var viktig, men at det var løsningsprosessen som var av interesse. Deretter ble videoopptaket satt på og datainnsamlingen startet.

Konteksten er som nevnt viktig i kvalitative casestudier, og her ble den basert på Liljedahls (2021) tenkende klasserom. I tillegg til bruken av *vertikale ikke-permanente flater* ble dermed grupperingsmetoden *synlige tilfeldige grupper* valgt, hvor elevene trakk nummererte ispinner som tilsa hvilken gruppe de tilhørte. Det var *3 elever per gruppe* i likhet med det Liljedahl (2021) fremhever som den ideelle gruppestørrelsen, og elevene fordelte ulike roller innad i gruppen; *skriver, speider* og *forteller*. Problemløsningsoppgavene ble *presentert muntlig* for elevene mens de stod samlet rundt meg, dette for å kunne fremheve viktige element og besvare eventuelle spørsmål elevene måtte ha, i tillegg bidro det til at gruppene kom raskt i gang med tenkningen og løsningsprosessen. Oppgaven ble også festet synlig på veggen slik at gruppene kunne hente ut nødvendig informasjon underveis i prosessen. Problemløsningsoppgavene elevene arbeidet med er detaljert beskrevet i kapittel 3.3.

For å redusere min påvirkning i selve løsningsprosessen forholdt jeg meg som nevnt i bakgrunnen og inntok en tilskuerrolle, men ga *asynkrone hint* ved behov slik Liljedahl (2021) påpeker er viktig for å opprettholde flyt og engasjement i løsningsprosessen. I tillegg kunne elevene ta ulike *valg* (blant annet valg av schemata, omfang av samarbeid og en agent å lære av). De kunne også *skifte fokus* mellom *individuelle ressurser, ressurser innad i gruppen* og *eksterne ressurser* i prosessen, i likhet med Koichus (2018) SCM-modell. Ved å basere konteksten på tenkende klasserom knyttet jeg dermed Liljedahls (2021) undervisningsramme og Koichus (2018) SCM-modell sammen, ettersom rammen fremmer samarbeid, valgrikdom og fokusskifte for å finne en nøkkelløsningside som bidrar til å drive løsningsprosessen fremover mot en endelig løsning. Hver oppgave ble avsluttet med en *Gallery walk,* der elevene presenterte sin løsningsprosess, og fotografering av elevarbeidet på de vertikale flatene. Å benytte et valgrikt læringsmiljø i samarbeidsprosessen var ikke nok i seg selv, problemløsningsoppgavene måtte også fremme valgrikdom, blant annet bruk av varierte representasjoner og heuristikker.

3.3 Elevenes problemløsningsoppgaver

Liljedahl (2021) bruker uttrykket *thinking tasks* om oppgaver som oppfordrer til tenking og gir elever noe å tenke på, og i matematikk kan dette være problemløsningsoppgaver tilknyttet hverdagslige kontekster (Pruner & Liljedahl, 2021, s. 756). For å kunne studere elevenes bruk av semiotiske representasjoner, måtte problemløsningsoppgavene fremme bruken av varierte representasjoner og overganger mellom ulike representasjonssystem i løsningsprosessen, som beskrevet av Lesh et al. (1987) og Duval (2006). Oppgavene la også opp til ulik bruk av visualiseringer, da to av oppgavene omhandlet objekt som var konkrete og dermed enklere å tegne, mens de andre to omhandlet mer abstrakte matematiske objekt som tid og en ukjent.

Det var også viktig at oppgavene var innenfor elevenes proksimale utviklingssone. Det vil si at oppgavene måtte kunne løses med den samlede kompetansen innad i gruppen som er forventet at elever på 6. trinn har, samt med små hint fra meg som støttende stillas i løsningsprosessen. Matematisk tema for oppgavene var i denne undersøkelsen ikke relevant, men måtte befinne seg innenfor et område som var kjent for elevene eller som var tilknyttet fagfornyelsens kjerneelement eller kompetansemål. Dette er i tråd med Pruner og Liljedahls (2021) anbefaling, der målet med problemløsningsoppgaver er «...to get more students thinking, and thinking for longer periods of time, within the context of curriculum" (Pruner & Liljedahl, 2021, s. 756).

På bakgrunn av dette ble fire problemløsningsoppgaver valgt, alle tilknyttet hverdagslige tema og som gav rom for bruk av varierte representasjoner og løsningsstrategier. I tillegg la oppgavene opp til at elevene skulle sette seg fast for deretter å tenke, eksperimentere, prøve og feile for å komme seg videre og frem til en løsning, i tråd med Liljedahls (2021) beskrivelse av hva gode problemløsningsoppgaver er (s. 20). Videre presenteres og beskrives problemløsningsoppgavene og det vises noen mulige løsningsstrategier elevene kunne tenkes å benytte.

3.3.1 Kvadratisk mønster

Den første oppgaven elevene fikk jobbe med er en figurtalloppgave, her hentet fra Motus Læring sitt hefte *Oppgaver som legger til rette for utforsking og kreativitet* for mellomtrinnet.

Marthe og Markus prøver å lage kvadratiske mønster ved hjelp av fyrstikker.

Her kan du se mønsteret de har laget.

Hvor mange fyrstikker trenger de for å lage figuren som har 9 kvadrater?

De har til sammen 100 fyrstikker.

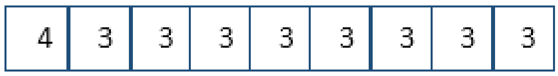
Hvor mange kvadrater vil figuren ha dersom de ønsker å bruke flest mulig av fyrstikkene?

Figur 6: Problemløsningsoppgave 1 - Kvadratisk mønster

Oppgaven omhandler figurtall som er nyttig innen utvikling av algebraisk tenkning, ettersom det fremmer bruken av visualisering og konkretiseringsmateriell som kan hjelpe elever å se mønster og få til overgangen fra symbolsk aritmetikk til symbolsk algebra. I algebraisk tenkning kan man benytte symbolsk algebraisk notasjon som verktøy, men oppgaver kan også løses uten bruk av symbolsk algebra, gjennom å lete etter mønster, systemer, variabler og sammenhenger (Kieran, 2004, s. 149). Fagfornyelsens kjerneelement *abstraksjon og generalisering* påpeker at elever skal utforske tall, utregninger og figurer for å finne sammenhenger og deretter formalisere ved å bruke symbolsk algebra eller formålstjenlige representasjoner (Kunnskapsdepartementet, 2021, s. 31).

I denne problemløsningsoppgaven gjelder det å finne ut hva som endrer seg fra en figur til den neste, altså *se etter mønster* og sammenhenger. Oppgaven presenteres i det kontekstuelle representasjonssystemet, og elevene kan blant annet benytte visuelle modeller, muntlig språk og symboler i løsningsprosessen. Til det første kvadratet brukes det 4 fyrstikker, og for hvert nytt kvadrat brukes 3 nye fyrstikker.

Man ser at figuren øker med 3 hver gang og kan dermed utarbeide en rekursiv formel der påfølgende figur i rekken kan utrykkes ved $F_n = F_{n-1} + 3$ eller visualiseres og formuleres ved en eksplisitt formel slik:



3 fyrstikker · antall kvadrater + 1 fyrstikk eller ved: $F_n = 3n + 1$ (n er antall kvadrater)

Det neste spørsmålet i oppgaven gjør at elevene kan tenke motsatt vei, altså benytte heuristikken *arbeide baklengs*. Her har elevene allerede 100 fyrstikker, og en måte å løse oppgaven på er å først ta bort den ene konstante fyrstikken. Da står de igjen med 99 fyrstikker, som gir 99:3 = 33 kvadrater.

3.3.2 Krysse en gammel bro

Den andre oppgaven elevene fikk jobbe med er hentet, og fritt oversatt, fra Peter Liljedahls oversikt over *gode problemløsningsoppgaver* (Liljedahl, 2021, 27. september).

Ada, Bodil, Christian og Daniel er ute og går da de kommer til en gammel bro. Broen er svak og kan bare bære vekten til **to** av dem om gangen. Fordi de har det travelt, må de krysse broen på minst mulig tid. På hver krysning må de dessuten ha **en lommelykt** for å kunne se, men de har bare en lommelykt og den kan ikke kastes over. På grunn av noen mindre skader må de krysse broen i ulik hastighet.

Ada kan krysse på **1** minutt, Bodil på **2** minutter, Christian på **5** minutter og Daniel på **10** minutter.

*Ada tenker et øyeblikk og sier at overfarten kan fullføres på **17 minutter.***

Hvordan kan dette gjøres?

Figur 7: Problemløsningsoppgave 2 - Krysse en gammel bro

I denne oppgaven vil nok de fleste elever i utgangspunktet tenke at Ada, som er den raskeste, bør løpe frem og tilbake med lommelykta hver gang. Dette er imidlertid ikke tilfelle, og det gir ikke svaret på 17 minutter. Dermed legger oppgaven opp til mye diskusjon og blant annet heuristikken *prøving og feiling.* Tiden på 17 minutter kan oppnås ved å få Christian og Daniel til å krysse sammen. Oppgaven kan løses ved følgende bevegelser gjennom for eksempel problemløsningsstrategien *en systematisk tabell*:

Her er Ada - A(1), Bodil - B(2), Christian – C(5) og Daniel – D(10)

Bevegelse	**Tid**
A(1) & B(2) krysser med lommelykta	2
A(1) returnerer med lommelykta	1
C(5) & D(10) krysser med lommelykta	10
B(2) returnerer med lommelykta	2
A(1) & B(2) krysser med lommelykta	2
	17

Alternativt kan Bodil returnere med lommelykta første gang og Ada andre gang, noe som gir samme tid. Som de andre oppgavene presenteres også denne i det kontekstuelle representasjons-systemet og elevene kan benytte varierte representasjoner i løsningsprosessen.

3.3.3 Hvor mye har de spart?

Den tredje oppgaven er hentet fra Nasjonale prøver for 5. trinn, og i likhet med oppgaven om kvadratisk mønster omhandler også denne algebraisk tenkning tilknyttet en hverdagslig kontekst.

Celine, Thea og Filip sparer penger til de skal på ferie.

Celine har spart tre ganger så mye som Filip

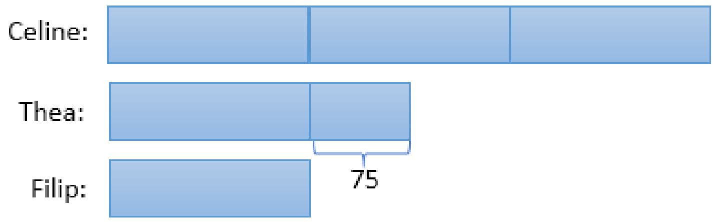
Thea har spart halvparten så mye som Celine

Thea har spart 75kr mer enn Filip

Hvor mye har hver av dem spart?

Figur 8: Problemløsningsoppgave 3 - Hvor mye har de spart?

Oppgaven kan løses ved hjelp av symbolsk algebra og likninger. Det er ikke forventet at elever på 6. trinn skal kunne løse denne oppgaven ved hjelp av symbolsk algebra, derfor kan oppgaven også løses ved å benytte visuell modellering som for eksempel blokktegning. Blokktegning er som nevnt en form for visuell algebra hvor blokker representerer kjente og ukjente tall (Hornigold, 2021; Har, 2007). Oppgaven kan løses med følgende visualisering:



Her ser man at en halv blokk må være 75 kroner da Thea har 75 mer enn Filip, en hel blokk må da være 150 kroner. Her gjelder det å tegne forholdet mellom blokkene korrekt for å kunne se hele og halve blokker. Oppgaven kan også løses innen det symbolske representasjonssystemet ved et algebraisk ligningssystem der variablene *f* står for det som Filip har spart:

Celine: 3f

Thea: C / 2 $\rightarrow$ t = 3 f / 2

Thea: f + 75 $\rightarrow$ t = f + 75

$$\left.\begin{array}{l} t = 3f/2 \\ t = f + 75 \end{array}\right\} \quad 3f / 2 = f + 75$$

3f / 2 = f + 75

3f / 2·2 = (f + 75)·2

3f = 2f + 150

3f – 2f = 2f + 150 – 2f

f = 150

Da ser man at Celine har spart 3·150, som er 450kr, Thea har spart 450/2, som er 225kr, og Filip har spart 150kr.

3.3.4 Yoghurtis

Den fjerde og siste oppgaven er en oppgave innen kombinatorikk tilknyttet en hverdagslig kontekst, her hentet fra Motus Læring sitt hefte *Oppgaver som legger til rette for utforsking og kreativitet* for småtrinn og mellomtrinn.

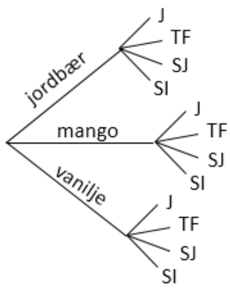
På en 7-eleven har de **tre** ulike smaker på yoghurtisen. Du kan velge mellom jordbær, mango og vanilje. I tillegg har de **fire** ulike typer strø- jordbærkuler, tuttifrutti, sjokolade og sitron.
Hvor mange forskjellige kombinasjoner av is og strø kan du velge mellom?

Enn om de også hadde sjokolade-yoghurtis, og i tillegg både bringebær og lakrisstrø.
Hvor mange kombinasjoner ville du da kunne velge mellom?

Figur 9: Problemløsningsoppgave 4 - Yoghurtis

I denne oppgaven skal elevene finne det totale antall kombinasjoner. Oppgaven gir elevene mulighet til å utforske og oppdage produktregelen, da sammensatte kombinasjoner multipliseres sammen. Det igjen handler om algebraisk tenkning, ettersom det omhandler å generalisere en regel. Dette kan man se ved å benytte semiotiske representasjoner i form av en tegning, et veidiagram eller sette opp et valgtre som til høyre, med følgende forkortelser for strøssel: jordbærkuler- J, Tuttifrutti- TF, sjokolade- SJ og sitron- SI.

Man ser av valgtreet at det blir $3 \cdot 4 = 12$ mulige kombinasjoner av is og strøssel man kan velge mellom. På del to blir det $4 \cdot 6 = 24$ mulige kombinasjoner. Oppgaven kan også løses ved bruk av andre elevgenererte tegninger som da fungerer som verktøy i problemløsningsprosessen, som vist i kombinatorikk eksempelet i delkapittel 2.1.2



3.4 Bearbeiding og analyse av datamaterialet

Kvalitativ forskning handler som nevnt om å utforske menneskelige prosesser og problemer i en virkelig setting eller virkelighetsnær kontekst, og datamaterialet analyseres gjennom å velge ut, systematisere, søke etter mønster, kategorier og tema, samt å tolke (Anker, 2020, s. 11). For bearbeiding og analyse av det empiriske materialet er det i dette prosjektet benyttet en abduktiv tilnærming, og analyseprosessen er basert på en tematisk analyse der jeg fant koder ved nærlesing av materialet, og deretter løftet blikket til de teoretiske perspektivene og så kodene i lys av dem (Anker, 2020, s. 79). Videre redegjøres det for tematisk- og abduktiv analyse, og deretter beskrives analyseprosessen av datamaterialet.

3.4.1 Tematisk analyse gjennom abduktiv tilnærming

Tematisk analyse er en metode for å identifisere, analysere og beskrive mønster og tema i datamaterialet (Braun & Clarke, 2006, s. 4). Braun og Clarke (2006) presenterer seks faser for tematisk analyse; fase 1 innebærer å få en oversikt over datamaterialet gjennom transkribering, i fase 2 lages koder fra interessante aspekter som man koder datamaterialet med, deretter i fase 3- 5 samles koder som passer sammen i overordnede tema, som sjekkes opp mot datamaterialet og navngis (s. 12). I siste fase velger man ut gode eksempler fra de ulike temaene, analyserer disse og skriver dem ut, samt knytter det hele til problemstillingen og forskningen som ligger til grunn slik at leseren kan forstå prosessen (s. 12). Fasene i tematisk analyse er ikke faste, og man kan bevege seg frem og tilbake mellom kodene, temaene og datamaterialet. Mønster eller tema kan identifiseres induktivt, deduktivt eller ved en kombinasjon (s. 8).

Praktisk kunnskap utvikler seg både gjennom det induktive (man observerer eller sanser noe, og forskeren går fra empiri til teori) og det deduktive (man ser om antakelser får støtte eller ikke i empiri, forskeren går da fra teori til empiri) (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 101-104). Det er vanskelig å se verden og egen forskning «tabula rasa», altså helt uten antakelser og forforståelse, da tolkningene farges av forskeren og er dermed preget av subjektivitet (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 102). Dermed ble en kombinasjon av induktiv og deduktiv koding benyttet, altså en abduktiv tilnærming (Anker, 2020, s. 79). Før datainnsamling orienterte jeg meg innen relevant teori som kunne belyse prosjektets tema og problemstilling, men var likevel åpen for interessante og uforutsette funn. I etterkant av observasjon og transkribering var det nødvendig å innhente utfyllende teori om bruk av gester og tegning for problemløsning. Dette for å kunne analysere datamaterialet tilstrekkelig. Ifølge Alvesson og Sköldberg (2009) benevnes pendlingen frem og tilbake mellom datamaterialet, teorier og forskerens perspektiv som abduktiv tilnærming (referert i Postholm & Jacobsen, 2018, s. 102). Abduksjon handler da om å se empiri og teori i sammenheng, og fokusere på det som er uventet for å prøve å finne en forklaring på dette. Abduksjon er dermed en vekselvirkning mellom teori og empiri der ingen av de to har forrang (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 103).

3.4.2 Transkribering av video- og lydopptak

Bearbeiding og tolking handler om å gjøre datamaterialet klart til analyse, og det er ifølge Høgheim (2020) lettere å analysere et skriftlig materiale enn et video- og lydopptak (s. 133). Transkribering kan forklares som omforming av muntlig datamateriale til tekst (s. 133). I denne studien ble video- og lydopptak omformet til tekst for å gjengi det som ble sagt, og i stor grad for å beskrive elevenes bruk av representasjoner, handlinger, valg og fokus. Alle data ble anonymisert med fiktive navn ved transkribering og bearbeiding i tråd med innmeldingen til NSD. I transkriberingsprosessen var det nødvendig med flere gjennomganger av opptaket for å få tak i flest mulig detaljer. Elevenes dialekt var ikke av essens for oppgavens formål, og dermed transkriberte jeg på bokmål, og la inn gester og handlinger i parentes etter hvert som de oppstod. For å gjengi elevenes løsningsprosess så nøyaktig som mulig ble det lagt inn små pauser og enkelte tegn. Fiktive navn på elevene ble i transkripsjonene forkortet til forbokstaven; Gruppe 1: **A**manda, **B**jarne og **C**hristian, Gruppe 2: **D**aniel, **E**lse og **F**rida. Transkripsjonsnøkkelen er gjengitt i tabell 1 under.

ABCDEF	For å se hvem som er aktiv og hva de gjør
-	Muntlig aktivitet
(…)	Kommentar og beskrivelse av handling (peke, skrive, tegne etc.)
!	Ekstra trykk, ord fremheves
?	Spørrende eller usikker
..	Kort pause
...	Lengre pause

Tabell 1: Transkripsjonsnøkkel

3.4.3 Analyseprosessen av datamaterialet

Begrepet analyse kommer fra gammelgresk og betyr *å løse*, som i å brekke opp til håndterbare biter og størrelser (Anker, 2020, s. 17). En vid forståelse av analyse vektlegger at alt arbeidet med datamaterialet der man forsøker å gi mening til det, er en del av analyseprosessen (Anker, 2020, s. 17). Coffey og Atkinson (1996) hevder at det viktigste i analyseprosessen er å finne gode måter å tenke med materialet, og derfor må analysen gjøres håndterbar. Det var dermed nyttig å dele analyseprosessen inn i de tematiske fasene til Braun og Clarke (2006). Da tematisk analyse er fleksibel og i mindre grad opptatt av hyppighet og telling, og mer opptatt av konteksten og informasjon som kan ligge i det uuttalte, passet dette godt til mine forskningsspørsmål (Anker, 2020, s. 40; Braun & Clarke, 2006, s. 3). I tillegg bidro videoopptakene til at jeg kunne identifisere handlinger, gester, valg og fokusskifte, og dermed ha fokus på kontekst og det uuttalte. Transkripsjonene var omfattende i sidetall, og etter at mine første tanker rundt dataene var notert var det nødvendig å komprimere datamaterialet for å skape en bedre oversikt for videre analyse.

For å komprimere datamaterialet gikk jeg gjennom transkripsjonene og stilte spørsmål til teksten linje for linje, dette for å kunne skille ut det som var mest relevant for studiens problemstilling. Følgende analytiske spørsmål ble benyttet: *Hva gjør den enkelte elev her?*, *hva gjør gruppen?* og *hvor ligger fokus?*. Svarene på spørsmålene førte til opprettelser av koder som ble lagt inn i en tabellarisk oversikt over gruppenes løsningsprosesser i de fire oppgavene. Kodene ble så sett i lys av de teoretiske perspektivene, og det ble stilt nye spørsmål til datamaterialet for å utfylle- og legge til flere koder, samt for å koble materialet til teori og få et mer detaljert bilde over elevenes løsningsprosess. Detaljerte analytiske spørsmål var blant annet: *hvilken representasjon benyttes, hvordan brukes den og hvilken overgang identifiseres her?* knyttet til Duval (2006) og Lesh et al. (1987) sine rammeverk, *hvilke valg tas og hvorfor skifter problemløseren fokus?, hva kan være nøkkelløsningsideen og hvem og hva fører til den* knyttet til Koichu (2018) SCM-modell. Jeg koblet dermed kodene til teori og markerte dem i ulike farger, samt la inn utfyllende svar på de mer detaljerte analytiske spørsmålene, som eksemplifisert i tabell 2 under.

→ **ABC** alle fokus mot tavla, **A** peker på tavle tegner kvadrat med fing /visualisering via gest/**,** → **ABC** fokus hel tegning, **B** tegner 9 kvadrater mens teller /tegning + verbalt/visualisering/, **A** peker på tavle telle og gange med 3 /verbalt/, → fokus fra helhet til detalj 3, **B** teller og peker på kvadrat 1 /verbalt/, **C** peker på detalj (+1), **A** peker på tegning, **B** 3·9=27 /behandling/verbalt/, **C** peker på første kvadrat → **C** fokus mot ett kvadrat, detalj, **B** skriver 1 på hver side av kvadratene /tilfører symbol/, **C** peker på siste fyrstikk i tegningen (***<u>nøkkelløsningside</u>*** «en har 4», men blir ignorert) → **C** fokus mot detalj og sammenheng, **B** skriver /symbol/, **A** peker på tavla 3 3 3, **B** 3·7=21 /behandling/, → fokus hel tegning, **B** verifiserer peker på tavla og teller, **B** skriver regnestykke 7·3=21 21+8=29/symbolisering/, → fokus fra tegning til symboler, → fokus fra del 1 til del 2, **HINT** sjekk svar → fokusskifte fra IS & IG til EK lærer, ABC → fokus mot hele tegningen, **A** peker og teller /verbalt/, **C** peker på strek venstre siste kvadrat → fokus mot detaljer, sammenheng og egenskap, **ABC** videre resonnement /verbalt/ + peking basert på C, **B** skriver 3 inni 1. og siste kvadrat /tilfører symbol/, **A** peker på 1. kvadrat teller og peker 4 i den ene, **ABC** diskusjon telling og peking, **C** ser på den andre gruppa → fokusskifte **ER** usikkerhet, **B** skriver 3·9 /symbolisering/, → fokus fra del 1 til del 2, **ABC** muntlig diskusjon om ulike fremgangsmetoder /verbalt/, **IR** + **IG** + peking går hånd i hånd, **B** ser på den andre gruppa → fokusskifte **ER** usikkerhet, står fast, C er på oppgavetekst → fokusskifte **ER** usikkerhet, står fast, **ABC** videre muntlig diskusjon /verbalt/, **ABC** ser på den andre gruppa og oppgavetekst → fokusskifte **ER** usikkerhet, står fast, **C** peker på tavle → fokus hel tegning del 1, er den riktig?, **B** skiver 3·r ruter=9 -generell formel/symbol//symbolisering/, **A** ser på den andre gruppa → A fokusskifte **ER** usikkerhet, **C** peker på tegning, 4 her, 3 resten ***<u>nøkkelløsningside</u>*** → fokus fra hele tegningen til detaljer ser sammenhengen og egenskapen → **ABC** videre resonnement basert på nøkkelløsningside, **A** /verbalt/ 3·8+4=28, B skriver symboler på tavla /behandling/symbolisering/ **LØSNING** → fokus fra del 1 til del 2

Tabell 2: Komprimering av elevenes løsningsprosess og koding av datamaterialet

I oversikten over løsningsprosessene ble alle fokusskifter identifisert etter Koichu (2018) og Masons (2008) rammeverk, og markert med pil → og forkortelser for om det var mot **IR** individuelle ressurser, **IG** interaksjon og ressurser innad i gruppen eller **ER** eksterne ressurser som den andre gruppen, oppgaveteksten eller hint fra meg. Dette knyttes også til hvilke valg problemløseren tar i fokusskifte, blant annet er individuelle ressurser koblet opp mot schemata, og eksterne ressurser koblet mot en agent å lære av. Fokus på makronivå ble markert i blått, altså *hva* problemløseren retter fokus mot og *hvordan* fokuset skifter, samt *hvorfor* fokusskifte skjer (står fast, feil heuristikk, benytter hint etc.). Fokus på mikronivå, altså mot helhet, detalj, sammenheng, egenskap etc. ble markert i lilla. Ulike representasjoner, overganger og behandlinger ble identifisert etter Lesh (1981) og Duvals (2006) rammeverk, og markert på følgende måte; /representasjon/, /overgang/ og /behandling/. Gester og andre mediatorer ble identifisert etter McNeills (2005) teori og markert med oransje. I tillegg ble ***nøkkelløsningside***, HINT og LØSNING markert.

Løsningsprosessene ble komprimert i tabeller for å kode og få en oversikt over elevenes handlinger og valg, bruk av representasjoner samt hvilke fokusskifter de foretok seg. Med forskningsspørsmålene foran meg studerte jeg tabellene og begynte å se etter kjennetegn på elevenes bruk av semiotiske representasjoner gjennom å identifisere mønster, sammenhenger og eventuelle avvik. Jeg så også på hvordan dette kunne bidra til å belyse forskningsspørsmålene, og dermed besvare prosjektets problemstilling. Kodene ble dermed brukt for å identifisere og systematisere meningsbærende enheter i datamaterialet (Anker, 2020, s. 76). Det begynte så å danne seg tema, og denne samordningen bestod i å se om flere meningsbærende enheter kunne samles i samme meningsinnhold (Braun & Clarke, 2006, s. 14). Etter hvert som jeg jobbet med kodingen, så det i lys av teori, og studerte tabellene pekte det seg ut tre tema; v*isuelle representasjoner, verbale representasjoner og gester* og *en agent å lære av*. I analysedelen er det tatt med eksemplifiserende utdrag av datamaterialet under hvert tema, som kan bidra til å belyse forskningsspørsmålene. I tillegg er fotografiene av elevarbeidet på de vertikale flatene presentert for å tydeliggjøre tema og funn. Funnene er beskrevet og tolket i lys av det teoretiske rammeverket.

3.5 Studiens kvalitet og troverdighet

For å kunne vurdere kvaliteten i forskningsarbeid er det tradisjonelt benyttet begrepene validitet og reliabilitet, særlig tilknyttet kvantitativ forskning (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 222). Validitet handler om det som er undersøkt, altså om datamaterialet har relevans i forhold til problemstillingen, mens reliabilitet handler om målingenes stabilitet, altså om man får de samme resultatene dersom man måler et annet utvalg eller samme utvalg igjen (Kvarv, 2021, s. 62-63). Innen kvalitativ forskning erstattes disse begrepene ofte med gyldighet (indre validitet), overførbarhet (ytre validitet) og pålitelighet (reliabilitet), og det gjøres også videre her (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 222-223).

Gyldighet er knyttet til tolkningen av datamaterialet, og handler om hvorvidt tolkningene er gyldige i forhold til den virkeligheten det påstås at studeres og analyseres, og de begrep og teori som benyttes for å beskrive denne virkeligheten, samt om det er samsvar mellom datamaterialet og funn (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 229). Det innebærer blant annet at valgt metode for datainnsamling, og valgt kontekst og problemløsningsoppgaver faktisk undersøker de forskningsspørsmålene jeg har stilt. Det innebærer også at funn og konklusjoner som er trukket frem kan forsvares med datamaterialet og den teoretiske rammen som er brukt i analysen. For å øke gyldigheten har jeg sammen med veileder analysert utdrag av dataene i et analyseseminar. Funn fra analysen er begrunnet gjennom utdrag fra datamateriale, og analyseprosessen er redegjort for og eksemplifisert i delkapittel 3.4. Jeg har dermed forsøkt å skape en transparens slik at leseren skal forstå min tolkning og dermed kunne etterprøve min analyse.

Ytre gyldighet eller *overførbarhet* er knyttet til om prosjektets funn og konklusjoner kan generaliseres og overføres til andre kontekster (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 238). Det er som nevnt ikke mulig å generalisere funnene i denne kvalitative casestudien, da utvalget på 6 elever ikke er representativt for 6. trinnelever i norsk skole generelt. Det har likevel vært mulig å si noe om hva som kjennetegner disse elevenes bruk av semiotiske representasjoner i problemløsning på vertikale flater. Lærere kan dermed gjenkjenne elementer som belyses i studien og overføre det til egen undervisningspraksis, slik at resultatene fra studien kan komme til nytte på generelt nivå. Studien bidrar også til ny kunnskap på et område det eksisterer lite forskning på, og dette kan da igjen være interessant for videre forskning. For å belyse overførbarheten av funn, samt bidra til at leseren selv kan vurdere dette, har jeg omfattende beskrevet utvalg, kontekst, problemløsningsoppgaver, metodevalg for datainnsamling og analyseprosessen.

For at leseren skal kunne stole på en studie, må den være pålitelig (Anker, 2020, s. 108). *Pålitelighet* er knyttet til resultatenes troverdighet, det vil si om fremstillingen av datamaterialet er godt gjennomført, slik at andre kan benytte samme begrepsapparat og oppdage samme resultat. For å styrke påliteligheten har jeg gjort forskningsprosessen synlig gjennom detaljerte beskrivelser, slik at leseren selv kan reflektere over dem. Ved å gjennomføre datainnsamlingen på en ukjent skole med ukjente elever unngikk jeg at tidligere relasjoner mellom forsker og informanter påvirket problemløsningsprosessen. Min tilstedeværelse og rolle som deltakende observatør, samt mine hint kan likevel ha påvirket elevene. Et større utvalg ville trolig gitt et annet resultat, da elevene kunne foretatt flere fokusskifter mot ulike grupper som eksterne ressurser i løsningsprosessen. Ved flere *agenter å lære av*, ville det muligens vært mindre behov for hint fra meg. Likevel var utvalget tilpasset mitt mål om å gå i dybden og beskrive i detalj, noe som i denne studiens omfang kun var mulig ved et begrenset utvalg og datamateriale. Bruk av videoobservasjon kan også ha påvirket elevenes samarbeid, løsningsprosess og utholdenhet. Selv om elevene fremstod lite påvirket av kameras tilstedeværelse, kan det tenkes at problemløsning i en ordinær klasseromssituasjon uten kamera muligens ville gitt et annet resultat. Valg av lyd- og videoopptak for datainnsamling samt foto av elevarbeidet på de vertikale flatene, muliggjorde en detaljert analyse av elevenes gester, handlinger, fokusskifter og bruk av semiotiske representasjoner som ikke ville vært mulig ved ren observasjon, og bidrog dermed til å styrke prosjektets pålitelighet.

3.6 Etiske betraktninger og behandling av personopplysninger

Noen av de viktigste hensyn jeg måtte ta i masterprosjektet mitt var de som gjaldt forskningsetikk. Jeg har forholdt meg til de fagspesifikke forskningsetiske retningslinjene for samfunnsvitenskap, humaniora, juss og teologi utarbeidet av Den nasjonale forskningsetiske komite for samfunnsfag og humaniora (NESH u.å.), og sørget for at eget arbeid er i tråd med juridiske lover og forskrifter. All forskning som innebærer behandling av personopplysninger, skal meldes til Norsk senter for forskningsdata (NSD) (Anker, 2020, s. 105). NSD regner samtykkeskjema samt lyd- og videoopptak som personopplysninger, derfor ble masterprosjektet allerede i oktober meldt til NSD. Meldeskjemaet med tilhørende datalagringsplan ble godkjent 25.11.2021, se vurdering fra NSD vedlegg 2. Etter datainnsamling ble video- og lydopptak samt foto av elevarbeid overført til kryptert disk-fil og lagret i OneDrive skyen til USN i henhold til retningslinjene hos USN og NSD. Alle data ble anonymisert ved behandling og bearbeiding i tråd med innmeldingen til NSD. Kamerautstyr ble som nevnt lånt av eDu-medieproduksjon ved USN.

Mine forpliktelser overfor elevene som deltok, var det viktigste forskningsetiske hensynet jeg måtte ta, særlig ettersom elevene var under 15 år. Jeg har tatt hensyn til dette ved å tydelig informere dem om prosjektet, personvern og om frivillig deltakelse flere ganger i prosessen. I tillegg har jeg innhentet informert samtykke fra foresatte, og på den måten ivaretatt kravet om fritt informert samtykke (NESH, 2016, s. 20). For å sikre at elevene deltok frivillig var det viktig for meg at elevene også signerte samtykkeskjema. Jeg anså det derfor nødvendig å utarbeide et todelt skjema som inneholdt alderstilpasset informasjon til elevene på et språk de kunne forstå, samt en del rettet mot de foresatte, se informert samtykkeskjema vedlegg 1. I tillegg ba jeg læreren om å tydelig formidle til elevene at det var frivillig å delta ved utdeling av samtykkeskjema. Dette, samt skjemaet, ga forhåpentligvis elevene nok informasjon til å ta et valg om deltaking, samt motvirke at elevene følte seg presset til å delta.

Det var mitt ansvar som forsker å unngå at elevene ble utsatt for belastninger eller ubehag. Jeg valgte dermed, som nevnt tidligere, å besøke skolen og bli kjent med elevene i forkant av datainnsamlingen, dette for å ufarliggjøre situasjonen og trygge elevene. For at elevene i ikke skulle gå glipp av undervisning mens datainnsamlingen pågikk, valgte jeg og lærer i samråd å la resten av elevene i begge klassene jobbe med de samme problemløsningsoppgavene i klasserommet. Dette ga dem i tillegg tilnærmet lik erfaring og læringsutbytte. Det var viktig for meg å ivareta elevene gjennom hele prosessen ved å ha elevenes beste i tankene. Elevene som deltok var godt forberedt på hva som ville møte dem denne dagen, både gjennom informasjon, samtykkeskjema og besøket på skolen i forkant, og ble godt ivaretatt under datainnsamlingen. Elevene viste her det samme engasjementet og tryggheten jeg observerte i undervisningsøkten noen dager i forkant, noe som også reflekteres i presentasjonen av analysen under.

4 Analyse av empiriske funn

I dette kapittelet presenteres analysen av to elevgruppers bruk av semiotiske representasjoner og overganger mellom disse, samt hvilken sammenheng bruken har med elevenes valg og fokusskifter i løsningsprosessen av fire problemløsningsoppgaver. Dette for å belyse studiens forskningsspørsmål og dermed besvare problemstillingen; «Hva kjennetegner 6. trinnelevers bruk av semiotiske representasjoner i problemløsning på vertikale ikke-permanente flater?». Datamaterialet bestående av lyd- og videoopptak, samt foto av elevarbeid på de vertikale flatene, er behandlet og kodet gjennom en abduktiv tilnærming basert på en tematisk analyseprosess. Dette for å finne tre hovedtema som reflekterer elevenes bruk av semiotiske representasjoner i problemløsning; v*isuelle representasjoner*, *verbale representasjoner og gester* og *en agent å lære av*. Med utgangspunkt i koding og tematisering analyseres kjennetegn på elevenes bruk av semiotiske representasjoner ved hjelp av begreper fra Lesh (1981, 1987) og Duvals (2006) rammeverk, Mason (2008) og Koichus (2018) rammeverk og SCM-modell, samt fra teori om gester og tegning for problemløsning. Kapittelet er strukturert med et delkapittel for hvert av de tre hovedtemaene, samt et avsluttende delkapittel hvor analysens funn kort oppsummeres.

4.1 Visuelle representasjoner

Temaet visuelle representasjoner dreier seg om elevenes valg og bruk av tegning med tilhørende symboler i løsningsprosessen på de vertikale flatene. Elevene benytter *ikonisk matematisk visualiseringer* i to av oppgavene, men har utfordringer med visualiseringen når objektene i oppgaveteksten er mindre konkrete og mer abstrakte som tid og en ukjent. På bakgrunn av dette er temaet delt inn i to underkategorier; *ikonisk matematisk visualisering* og *abstrakt matematisk visualisering*.

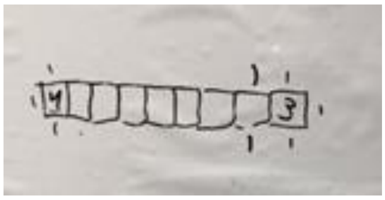
4.1.1 Ikonisk matematisk visualisering

Underkategorien ikonisk matematisk visualisering viser at elevene bruker tegning på ulike måter i løsningsprosessen. Elevene bruker tegning for å studere problemet, de bruker tegning i prosess, til selvkontroll, samt for å forklare tankerekker og løsningsprosess til andre. Videre følger et utdrag av transkripsjoner og fotografi av elevenes vertikale flater for å eksemplifisere bruken.

Elevene *bruker tegning for å studere* og lete etter mønster. Innledningsvis i oppgaven *kvadratisk mønster* velger elevene i gruppe 1 schemata ved å benytte heuristikken lag en visualisering. Valget tar de for å håndtere utfordringen i oppgaven samt for å studere og bruke tegningen videre i løsningsprosessen. Elevene tegner opp hele figuren bestående av 9 kvadrater.

Amanda:	- det vi kan gjøre er å lage (peker på den vertikale flaten (VF) og tegner kvadrater med fingeren)
Bjarne:	- lage 9 kvadrater
Bjarne:	- 1, 2, 3-9 (tegner figuren på VF, mens han teller antall kvadrater høyt)

Elevene kommer her raskt i gang med samarbeidet ved at Amanda foreslår å benytte en visuell multifunksjonell representasjon. Bjarne tegner figuren som vist på bilde 1, og elevene i gruppen har fokuset rettet mot helheten i tegningen på mikronivå. Elevene studerer deretter tegningen for å se etter mønster, og tegningen brukes aktivt videre i løsnings-prosessen som eksemplifisert under.



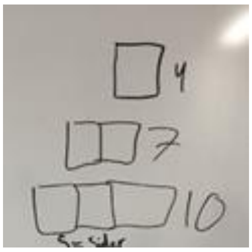
Bilde 1: Gruppe 1 sin visualisering i oppgave 1

Amanda:	- nå tror jeg det bare er å telle, for det er på en måte 1 2 3 på hvert kvadrat, så ganger med 9 (peker på fyrstikkene i hvert kvadrat på tegningen mens hun teller)
Bjarne:	-nei, siden man tar bare to her... (teller mens han peker på figuren)
Christian:	- men det er jo en på tuppen der og (peker på detaljer i figuren)
Amanda:	- men se, hvis vi tar 1 2 3, 1 2 3 (teller og peker på fyrstikkene i kvadratene)
Bjarne:	- å ja, det er 3 på alle, 3 ganger 9 det er jo..
Amanda:	- 27
Christian:	- men det er jo først det her da (peker på den første fyrstikken i kvadratet)
Amanda:	- men det spiller ikke noe rolle...
Bjarne:	- hvis vi skriver at her finnes det en (skriver tallet 1 på hver side av kvadratene)
Christian:	- mhm, ja det blir vel sånn, men på den streken der (peker på siste fyrstikk i det siste kvadratet på figuren)
Bjarne:	- men da får den her 4
Christian:	- ja, akkurat, det er en som har 4 (nøkkelløsningside, blir forkastet)
Bjarne:	- ok, så disse to på kantene må ha 4 (skriver 4 i første og siste kvadrat)

Utdraget viser hvordan fokuset skifter fra helhet i tegningen til at økningen for hvert kvadrat er tre. På mikronivå går dermed elevene fra å ha et helhetlig overblikk til å trekke ut en viktig detalj i tegningen, som bidrar til at de ser mønster og sammenhenger som videre resonnement baseres på. I tillegg bidrar tegningen til å samle gruppens fokus mot den vertikale flaten på makronivå. Tegningen brukes aktivt i løsningsprosessen gjennom å se etter mønster for å utforme en eksplisitt formel som representeres verbalt og symbolsk. Utdraget over viser at fokusskiftene og valget av en visualisering bidrar til at Christian relativt tidlig i prosessen oppdager og presenterer en nøkkelløsningside. Dette samsvarer med Koichus (2018) SCM-modell der nøkkelløsningsideen fremkommer som et resultat av skiftende fokus i løsningsprosessen. Denne ideen blir imidlertid forkastet av resten av gruppen, og løsningsprosessen fortsetter.

Elevene *bruker tegning i prosess*. Elevene i gruppe 2 velger også å benytte heuristikken lag en visualisering i oppgaven *kvadratisk mønster,* men ulikt fra gruppe 1. Valget tar de for å håndtere informasjonen i oppgaven samt for å trekke slutninger i utformingen av en formel, som utdraget under viser.

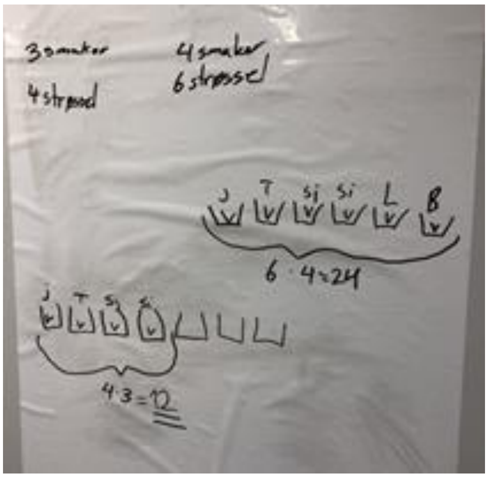
Else:	- vi bør kanskje lage en sånn formel? (ser på Frida)
Frida:	- ja det burde vi gjøre, i det første kvadratet er det 4
DEF:	(ser på oppgaveteksten mens de diskuterer)
Daniel:	- skal vi tegne eller skrive?
Frida:	- hvis ett kvadrat er 4 (tegner ett kvadrat og skriver 4)
Else:	- og to er sju
Frida:	(tegner to kvadrat og skriver 7)
Else:	- tre er ti
Frida:	- tre er ti ja (tegner tre kvadrat og skriver 10)
Else:	- det er liksom +3 hver gang ...
Frida:	- hvis eneren har 4 så kan man ta 8·3 som er 24 (nøkkelløsningside)



Bilde 2: Gruppe 2 sin prosesstegning i oppgave 1

Utdraget viser at Frida tegner figurene fra oppgaveteksten gjennom prosesstegning med tilhørende tallsymbol, se bilde 2. Elevene kobler tallsymboler til tegningen som bidrar til å tydeliggjøre informasjonen i oppgaven, og hjelper elevene med å oppdage at antall fyrstikker øker med 3 for hvert nye kvadrat. Prosesstegningen bidrar dermed til å trekke slutninger for å finne en rekursiv formel verbalt, og deretter en eksplisitt formel. Fokuset på mikronivå blir direkte rettet mot detaljen +3 heller enn helheten i tegningen, som hos gruppe 1. I motsetning til gruppe 1 viser utdraget over at fokuset på makronivå varierer i multiplisitet, og er rettet mot flere steder vekselsvis; mot den vertikale flaten, oppgaveteksten og elevene innad i gruppen. Det veksles altså mellom individuelle ressurser, interaksjon innad i gruppen, og i større grad mot oppgaveteksten som ekstern ressurs. Det virker nærliggende å tro at dette er fordi de benytter prosesstegning, der tegningen oppstår samtidig som de tenker, og dermed ikke har en felles visualisering som samler gruppens fokus. Nøkkelløsningsideene fremkommer gjennom valg av prosesstegning og fokusskiftene. Gruppen bruker prosesstegning i en rekursiv tankegang, før de utarbeider en eksplisitt formel representert verbalt og symbolsk.

Et annet eksempel av tegning i prosess, som jeg ønsker å trekke frem, er løsningsprosessen til gruppe 1 i oppgaven *yoghurtis*. Her velger elevene innledningsvis å skrive ned, og på den måten få oversikt over, informasjonen i oppgaven, som vist øverst på bilde 3 av den vertikale flaten. Valget tar de for å håndtere informasjonen i oppgaveteksten, som videre representeres i tegningen de genererer, gjennom heuristikken lag en visualisering. Tegningen driver prosessen fremover som vist i utdraget under, og bidrar til å samle gruppens fokus mot den vertikale flaten på makronivå. På mikronivå går fokuset fra helhet til detaljer i tegningen, gjennom peking, telling og kobling til symboler, som vist under.



Bilde 3: Gruppe 1 sin visualisering i prosess i oppgave 4

Amanda: - vanilje og sjokolade, og vanilje og sitron (skriver V & SJ, V og SI)

Amanda: -ok, så tegner vi opp 1 2 3 4 (teller mens ho peker på de fire begrene, og tegner flere beger)

Christian: - nei, vent litt nå, nå blir det det der (peker på de fire begrene) - ganger 3. (nøkkelløsningside)

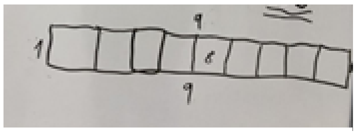
Amanda: - ja, det blir det (sveiper pennen over de fire begrene) - 4 ganger 3

Christian: - 4 ganger 3, 12! Ferdig!

Amanda: (tegner bue/klamme på de 4 første begrene og skriver 4·3) - jo se her, fordi at det er 3 ulike smaker (peker på VF og skriver =12)

Utdraget viser at Amanda tegner beger med is, med tilhørende symboler, i prosess, og elevene bruker da prosesstegning for å drive løsningsprosessen fremover. Etter flere fokusskifter mellom individuelle ressurser og interaksjon innad i gruppen, oppdager Christian nøkkelløsningsideen om å gange 4 med 3. Her spiller visualiseringen en avgjørende rolle med å trekke slutninger i løsningsprosessen frem mot nøkkelløsningsideen og endelig løsning. Tegningen bidrar til at elevene oppdager produktregelen, er en faktor for å skape forståelse, samt bidrar til en symbolisering og en vellykket overgang fra det multifunksjonelle kontekstuelle representasjonssystemet, via det visuelle, til det monofunksjonelle symbolske systemet. Bilde 3 viser at Amanda benytter klamme (*andre mediatorer*) for å trekke sammen og vise at det er 4 ulike strøssel man kan ha på 3 ulike typer yoghurtis, og at dette igjen gir 4·3 som er 12 ulike kombinasjoner, samt kobler bokstaver og tallsymbol til visualiseringen. Flere av elevenes overganger kan regnes som delvis kongruente ved at de har en en-til-en korrespondanse mellom representasjonssystemene, som forsterkes gjennom peking og muntlig språk. Ved å benytte klamme som nevnt over gjøres overgangene eksplisitte, noe som bidrar til økt forståelse innad i gruppen, men også til at andre medelever forstår både tegning, overganger og dermed løsningsprosessen.

Elevene *bruker tegning som selvkontroll* for å sjekke svaret, blant annet i oppgaven *kvadratisk mønster*. Dette eksemplifiseres gjennom to utdrag fra løsningsprosessen til gruppe 2, samt gruppens illustrasjon i bilde 4.



Bilde 4: Gruppe 2 sin illustrasjon av oppgave 3

Else: - hvis vi sier at vi tar 9 der, 9 der, 2 her og 8 her (peker på tegningen) (nøkkelløsningside gjennom endret tankegang/strategi)

Gruppe 2 utarbeider formelen k·2+k-1 etter mye diskusjon innad i gruppen. De er usikre på formelen, og for å sjekke svaret velger Else å generere en illustrasjon som vist på bilde 4.

Utdraget og bilde 4 viser også at Else endrer fokus i gruppens tankegang ved å gå bort fra +3, og til å gruppere fyrstikkene på en ny måte; 9 over, 9 under, 8 i midten og 2 på sidene. Nøkkelløsningsideen fremkommer også her gjennom fokusskiftene, som bidrar til at Else oppdager ideen omtrent samtidig som Frida, selv om de er ulike. Nøkkelløsningsideen til Else er riktig, men likevel blir formelen feil ved at de tar –1 i stedet for +1. Mens gruppe 1 bruker tegningen til å se etter mønster og utarbeide en eksplisitt formel, bruker altså gruppe 2 prosesstegning for å visualisere en rekursiv tankegang, og deretter illustrerer de en figur for å teste ut den eksplisitte formelen de har utarbeidet, samt som støtte og illustrasjon av det symbolske resultatet.

Videre bruker elevene tegningen for å sjekke og feilsøke formelen de har utarbeidet, når Else oppdager at formelen ikke stemmer.

Else: - jeg vet ikke, ok, vi må tenke litt her... (visker ut deler av formelen, mens resten av gruppa feilsøker) (skriver videre på VF (9·2)+(9-1)

Else: - 9·2 er riktig, men 9-1..?

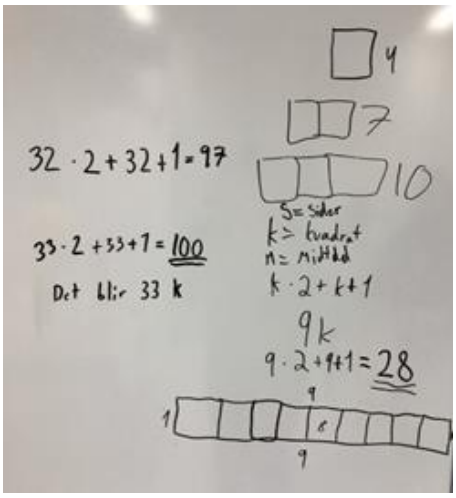
Frida: - vi har glemt den der.. Vi må ta 9.. (peker på detalj i tegningen)

Else: - ni minus en pluss to, vi tok ikke med disse her sidene, så da blir det +2 (skriver +2 bak formelen)

Else: - kan jeg prøve på en ting? (visker ut slutten av formelen og skriver k·2+k+1)

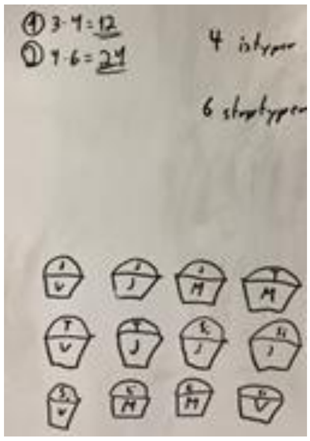
Frida: - 26, 28, det blir 28

Her viser utdraget at gruppe 2 har litt utfordringer med å utarbeide riktig formel. Overgangen fra kontekst til symboler blir dermed problematisk. Suksessfull symbolisering skapes til slutt i en interaksjon mellom Else og Frida, og håndteres ved å benytte illustrasjonen. Det visuelle blir her en viktig drivkraft for å overkomme utfordringen, og brukes for å sjekke svaret gjennom å feilsøke i tegningen og deretter utarbeide korrekt formel som vist i bilde 5. Elevene bruker dermed tegningen til selvkontroll for å sjekke svaret.



Bilde 5: Gruppe 2 sin løsningsprosess av oppgave 3

Elevene *bruker tegning for å forklare* tankerekken og løsningsprosessen i Gallery walk. I oppgaven *yoghurtis* bruker elevene i gruppe 1 prosesstegning, som overgang fra kontekst til symboler, og for å løse problemet (bilde 6). Tegningen driver da løsningsprosessen frem mot en endelig løsning som eksemplifisert tidligere. Elevene i gruppe 2 går motsatt vei, og går fra kontekst via språk til symboler, og genererer avslutningsvis en illustrasjon, som utdraget under viser.



Bilde 6: Gruppe 2 sin løsningsprosess av oppgave 4

Frida: - hvor mange forskjellige kombinasjoner.. Så du kan ta en istype med fire ulike strøssel på hver.

Daniel: - ja

Frida: - så du får fire på hver eneste is, 12 da (nøkkelløsningside og løsning)

Daniel: - men kan vi blande isen.., nei det går ikke

Frida: - du kan starte med å tegne vanilje fire ganger

Else: - ja (tegner flere beger og markerer 4 beger med V, J og M, for vanilje jordbær og mango) - ok, så vanilje først, jeg gjør bare sånn ok? (tegner is i skålene)

Til slutt i løsningsprosessen etter at løsningen på del 1 og del 2 er funnet gjennom muntlig resonnement, skriver de symbolene og behandlingen på den vertikale flaten.

Frida. - vi tar først eneren her og toeren der (skriver 1 og 2 med ring rundt)

Frida: - 3 ganger 4 er 12, og 4 ganger 6 er 24 (skriver symboler mens hun prater)

Utdraget viser at nøkkelløsningsideen fremkommer tidlig i løsningsprosessen. Fokuset på makronivå er ikke rettet mot den vertikale flaten frem mot løsningen, trolig ettersom de ikke har en tegning som bidrar til å samle gruppens fokus. Frida foretar en behandling og en overgang fra oppgavekonteksten til symboler gjennom verbal resonnering. Utdraget og bilde 6 viser videre at elevene presenterer de endelige løsningene og de algoritmiske prosessene i det symbolske monofunksjonelle representasjonssystemet. Dette kobler de til det multifunksjonelle visuelle systemet i avsluttende Gallery walk, ved å benytte gester og muntlig språk for å forklare løsningsprosessen. Illustrasjonen utarbeides dermed ikke for å bidra i- og drive problemløsningsprosessen fremover, men for å brukes til å forklare og kommunisere løsningen til elevene i den andre gruppen.

Analysen i utdragene over viser at tegningene bidrar til å samle fokus og brukes på ulike måter som drivkraft i løsningsprosessen; elevene utarbeider tegningen i sin helhet for å studere problemet, elevene bruker tegning i prosess, elevene bruker tegning til selvkontroll der de dobbeltsjekker om tankerekker og svar er riktige, og elevene bruker tegning for å forklare løsningsprosessen for andre. Tegningen muliggjør også bruken av gester og fremmer dermed trolig forståelse i kommunikasjonen og samarbeidsprosessen.

4.1.2 Abstrakt matematisk visualisering

Underkategorien abstrakt matematisk tegning viser at elevene møter flere utfordringer når objektene i oppgaveteksten er mindre konkrete og mer abstrakt, som tid og en ukjent; utfordringer med overganger, som igjen skaper utfordring med å generere en tegning. Disse utfordringene fører til at problemløsningsprosessen stopper opp.

Elevene *har utfordringer med å generere en abstrakt matematisk visualisering*. Dette eksemplifiseres med utdrag av gruppe 1 sitt arbeid med oppgaven *hvor mye har de spart.* Innledningsvis vurderer elevene valg av schemata for å håndtere utfordringen i oppgaven, mens de står foran oppgaveteksten og diskuterer. Det kan tenkes at den høye graden av abstrakthet vanskeliggjør det å bruke en visualisering innledningsvis, da det å illustrere en ukjent størrelse er utfordrende. Utdraget under viser den innledende prosessen med å hente ut og strukturere informasjon fra oppgaven.

Amanda: - så Thea har spart en todel av Celina, og Filip en tredel av Celina (skriver T=½ og F=1/3 på VF), (ser på oppgaveteksten) - og han 75?

Bjarne: - nei, Thea har spart 75 kroner mer enn Filip

Amanda: (skriver T 75 kr mer enn F)

Christian: - ok....

Amanda: - men eh, hm.., er 75 liksom den ene tredelen da? (ser på B & C) -det vet vi jo ikke..

Christian: - vi kan jo bare prøve noe på starten og se om det funker?

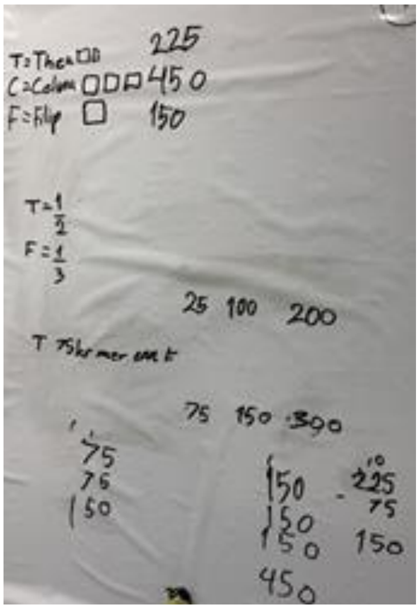
Forsker: - et lite tips; det kan være lurt å tegne

Christian: - hvis du tegner liksom...

Amanda: - men tegne...??

ABC: (holder seg videre i det symbolske systemet og tester ut tallkombinasjoner)

Utdraget viser at elevene har utfordringer med å tegne den ukjente. I de to foregående oppgavene representerer objektet et antall og elevene har ingen problem med å tegne, men her inneholder oppgaven noe nytt (brøkdel av en ukjent), og dette ser ut til å problematisere visualiseringen. På grunn av dette holder trolig elevene seg i det monofunksjonelle symbolske representasjonssystemet mens de benytter heuristikken prøve og feile på ulike tallkombinasjoner. Elevene har altså utfordringer med overgangen fra det kontekstuelle representasjonssystemet til det visuelle systemet. Både vansker med visualiseringen og abstraksjonsgraden i oppgaven fører trolig til gjentatte fokusskifter. Etter en lang stund ser jeg at de begynner å miste motet og spør om de trenger et lite hint.



Bilde 7: Gruppe 1 sin løsningsprosess av oppgave 3

ABC: - ja!!

Forsker: - hvis vi sier at Filip har så mye (tegner en blokk bak Filip) -hvor mye har Thea og Celine da?

Amanda: - ja da har Celine tre sånne (tegner 3 blokker bak C) - og Thea har to

Christian: - nei, to og en halv, henne har, nei, en og en halv (del av nøkkelløsningside, oppstår etter hint)

Her viser utdraget at mine hint er avgjørende både for deler av nøkkelløsningsideen, og for å drive prosessen videre da elevene ser ut til å gi opp. Dette er i tråd med Liljedahl (2021) som påpeker viktigheten av asynkrone hint fra lærer for å opprettholde flyt og engasjement i løsningsprosessen, og dermed bidra i problemløsningen som et støttende stillas. Utdraget og bilde 7 viser videre at elevene klarer å generere en abstrakt visualisering lignende en blokktegning etter mitt andre hint. Tegningen bidrar til å samle elevenes fokus mot den vertikale flaten på makronivå, og mot detaljene på mikronivå, mens de iherdig prøver å finne ut hvor mye barna har spart.

Utfordringene elevene møter *stopper problemløsningsprosessen*. Dette eksemplifiseres i oppgaven *hvor mye har de spart*, der elevene i gruppe 1 benytter heuristikken prøv og feil mens de prøver å finne den ukjente. Det tyder dermed på at det ikke bare er overgangen fra kontekst til visualisering som er utfordrende, men også overgangen fra blokktegning til symboler. Når de diskuterer og tester ut tall visker de hele tiden bort tidligere forsøk, da bruken av vertikale flater innbyr til nettopp dette. Elevene er heller ikke redde for å prøve og feile ettersom de raskt kan viske ut eventuelle feil. Det kan derimot tenkes at den konstante viskingen fører til at elevene mister oversikten i prosessen, som igjen kan tenkes å føre til at løsningsprosessen drøyer ut.

Christian: - hva om han har 100, da har hun 300
ABC: (gruppen vender blikket mot forsker)
Forsker: - se på de to blokkene bak Thea, 75 kroner mer enn Filip
Amanda: - men da kan det være 125, hvis den blokken der er 25 og den er 100 (peker på blokkene) -vent, vent..
Christian: - prøv å finne den da (peker på blokken bak Filip)
Amanda: - hvis den er 25, da er den 50, det går ikke nei..
Bjarne: - går det å dele 175 på 2?
Christian: - ja, det går jo
Amanda: - ja, men..
Bjarne: - sikker? siden det er femmer, det er femmer i, og det går ikke..
Christian: - ok, da må han ha spart noe som
Bjarne: - det må være et helt tall

Her viser utdraget at overgangen fra det multifunksjonelle visuelle representasjonssystemet til det monofunksjonelle symbolske systemet er utfordrende. Det kan tenkes at det er på grunn av det høye abstraksjonsnivået i blokktegningen, som dermed vanskeliggjør en kongruent overgang, altså en en-til-en oversettelse fra tegningen til symboler. Elevene holder seg innenfor aritmetikken, muligens fordi algebraisk tankegang rundt en ukjent er utfordrende. De prøver og feiler med ulike tallkombinasjoner, men forkaster ideene på bakgrunn av at de får halve kroner. Dette betyr antageligvis at elevenes tidligere erfaringer med liknende oppgaver bare har gitt hele tall til svar. Fokuset er på mikronivå rettet mot detaljer i blokktegningen, dette kan ses på grunn av pekingen. Fokuset skifter mellom individuelle ressurser, interaksjon innad i gruppen og med eksterne ressurser som her er hint fra meg.

Elevene *velger å ikke tegne for å visualisere abstrakt objekt.* I oppgaven *krysse en gammel bro* har elevene mulighet til å benytte ulike representasjoner, visualiseringer og blant annet heuristikken lag en systematisk tabell. De kan blant annet tegne en ikonisk matematisk tegning med bruk av piler for å representere bevegelse eller en abstrakt matematisk tegning som en blokktegning, men ingen av gruppene gjør det. Årsaken til dette kan tenkes å være at elevene opplever tid og forflytning som abstrakt, og dermed ikke vet hvordan de kan visualisere det. Det benyttes dermed ikke visualisering gjennom elevgenererte tegninger i løsningsprosessen i denne oppgaven.

Analysen i dette delkapittelet viser at de matematiske objektene, en ukjent og tid, er mer abstrakte enn antall fyrstikker og kombinasjoner av yoghurtis. Høy grad av abstraksjon fører til at tegningene ikke kan brukes direkte til å telle, slik vi ser i ikonisk matematisk tegning, og dermed er det utfordrende for elevene å koble sammen symbol og tegning. Utfordringene viser seg dermed i overgangene mellom ulike representasjoner, og fører til at løsningsprosessen stopper opp.

4.2 Verbale representasjoner og gester

Temaet dreier seg om elevenes bruk av verbale representasjoner og gester i samarbeids-prosessen i arbeidet med problemløsningsoppgavene. Språket og pekingen viser seg å spille en avgjørende rolle i løsningsprosessen, der bruken av gester er tett synkronisert med talestrømmen. I tillegg til å bidra i kommunikasjonen mellom elevene fungerer de også som egne representasjoner og i noen tilfeller skaper de selve overgangen mellom ulike representasjonssystem.

Elevene *bruker muntlig språk for å skape overganger* mellom ulike representasjonssystem. Dette vises gjennom utdrag av den innledende løsningsprosessen til gruppe 2 i oppgaven *kvadratisk mønster*, som viser en annen overgang enn den vi ser hos gruppe 1 presentert i delkapittel 4.1.1 over. Her ser vi en overgang fra det multifunksjonelle kontekstuelle representasjonssystemet via det verbale til det monofunksjonelle symbolske systemet.

Frida:	- hvis ett kvadrat er 4 (tegner ett kvadrat og skriver 4)
Else:	- og to er sju
Frida:	(tegner to kvadrat og skriver 7)
Else:	- tre er ti
Frida:	- tre er ti ja (tegner tre kvadrat og skriver 10)

Utdraget viser at Frida og Else sine fokusskift mellom individuelle ressurser og interaksjon med hverandre gir en overgang fra oppgavekontekst via språket til en symbolisering. Her benyttes ikke peking slik som hos gruppe 1, men overgangen skjer verbalt gjennom en beskrivelse av tankerekker i samhandlingen mellom jentene, samtidig som de benytter prosesstegning. Her skapes overgangen gjennom det verbale, og man kan si at språket er selve overgangen. Dette kan også ses i løsningsprosessen av oppgaven *yoghurtis* i utdraget under.

Frida:	- det er tre forskjellige smaker og fire forskjellige strø, så du kan bare ta hvert eneste strø på en, hvis du tar vanilje da så tar du de fire forskjellige strøene på, sant, så da blir det enkelt, da blir det 12

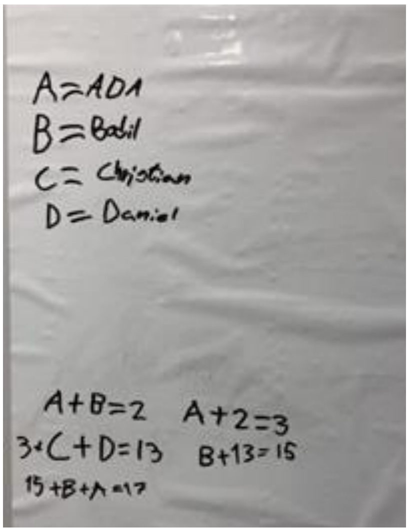
Utdraget viser at Frida foretar en muntlig overgang fra det multifunksjonelle kontekstuelle representasjonssystemet til det monofunksjonelle symbolske systemet. Frida gjør en verbal overgang, og man kan igjen si at språket er selve overgangen.

Elevene *bruker gester som en ekstern representasjon, og som overgang* mellom ulike representasjonssystem. Dette eksemplifiseres med utdrag fra den innledende løsningsprosessen i oppgaven *kvadratiske mønster* til gruppe 1, som viser overgangen mellom multifunksjonelle representasjonssystem; fra det kontekstuelle systemet der oppgaven presenteres, via det verbale til det visuelle.

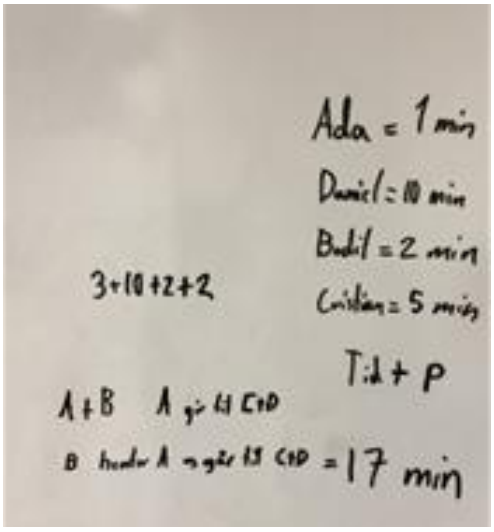
Amanda:	- det vi kan gjøre er å lage (peker på den vertikale flaten (VF) og tegner kvadrater med fingen)
Bjarne:	- lage 9 kvadrater
Bjarne:	- 1, 2.. (tegner figuren på VF, mens han teller antall kvadrater høyt)

Her viser utdraget at Amanda gjør en overgang fra oppgavekonteksten til en visualisering gjennom bruk av peking og muntlig språk. Overgangen mellom de ulike multifunksjonelle representasjons-systemene skapes da ved at hun presenterer ideen sin ved å benytte en gest av metaforisk dimensjon gjennom å tegne den abstrakte ideen kvadrater med fingen på den vertikale flaten. Dette fører til at Bjarne fysisk tegner de ni kvadratene gjennom en visualisering. Her fungerer gesten som en representasjon i seg selv, og ikke bare støtter gesten overgangen fra det kontekstuelle til det visuelle, men fungerer også som selve overgangen. Gesten bidrar også til å samle fokuset til elevene mot den vertikale flaten, på makronivå.

Elevene *bruker kroppsspråk og peker i luften ved manglende tegning*. Bruken av andre gester enn peking eksemplifiseres i oppgaven *krysse en gammel bro*. Her velger elevene å ikke benytte visualisering gjennom elevgenererte tegninger i løsningsprosessen, som nevnt tidligere. Elevene i begge gruppene holder seg dermed kun i det multifunksjonelle verbale- og det monofunksjonelle symbolske representasjonssystemet som vist på bilde 8 og 9, og etterfølgende utdrag fra transkripsjoner.



Bilde 8: Gruppe 1 sin løsningsprosess av oppgave 2



Bilde 9: Gruppe 2 sin løsningsprosess av oppgave 2

Det ser her ut som at elevene tenker i en tabellstruktur-form, selv om dette ikke fremstår helt tydelig. Innledningsvis i løsningsprosessen av oppgaven velger gruppe 1 schemata ved en verbal representasjon og heuristikken gjett og sjekk, som eksemplifisert under.

Amanda:	- det jeg først tenker er at Ada bør kanskje starte, og gå sammen Daniel som bruker 10 minutter
Bjarne:	- ja, hun på 1 minutt

Christian: - da bruker de 10 minutter til sammen da

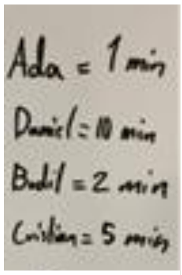
Amanda: - og da må Ada gå tilbake over med lommelykta, så jeg tenker at egentlig Ada må være den som går frem og tilbake med lommelykta

Christian: - ja for hun bruker 1 minutt

Bjarne: - skal vi starte med Daniel først da?

Amanda. - ok, så da kan vi ta Daniel og Ada over, eller vi kan ta sånn D og A forkortelser (studerer oppgaveteksten) -det er faktisk ABCD (skriver ABCD)

Her viser utdraget at løsningsprosessen i stor grad er basert på det verbale multifunksjonelle representasjonssystemet. Det er også her det gjøres behandlinger gjennom muntlig diskusjon i samarbeidet. Fokuset skifter mellom individuelle ressurser, interaksjon i gruppen og oppgaveteksten for å hente ut informasjon. Ettersom ingen visuell støtte benyttes, er fokuset på makronivå i mindre grad samlet mot den vertikale flaten, men mer mot gruppemedlemmene. Her benytter elevene lite peking i mangel på visuell støtte å peke på. Utover i løsningsprosessen gestikulerer elevene i lufta, trolig fordi de synes det er vanskelig å finne løsningen.



Bilde10: Utklipp av vertikal flate

Mens gruppe 1 starter med gjett og sjekk, viser utdraget under at gruppe 2 innledningsvis velger å organisere informasjonen fra oppgaveteksten på den vertikale flaten for å ha oversikten der, se utklipp av den vertikale flaten bilde 10.

Daniel: - skal vi skrive ned noe informasjon først? (studerer oppgaveteksten sammen med Frida, og videreformidler til Else)

Else: (skriver ned viktig informasjon på VF, som vist på bile? Over)

Daniel: (ser bort på den andre gruppen for inspirasjon)

Frida: - Ada bør kanskje være den som krysser med lommelykta hver gang for å bruke minst mulig minutter?

…

Frida: - hvis Ada skal gå over med lommelykta hver gang så må vi plusse på 1 minutt på alle, men ikke siste gangen, fordi da skal hun ikke tilbake

Else: - men de bruker bare 10 minutter

Else: - å ja, hun må jo gå tilbake..

Frida: - ja, da blir det 11 minutter til sammen, frem og tilbake, og etter det så går C (peker på VF) som blir 5 og A tilbake igjen som blir 6, så da blir det 17 (..) allerede...

Utdraget over viser at gruppe 2 også befinner seg i stor grad i det verbale representasjonssystemet der det gjøres overgang fra kontekst til symboler, og behandlinger gjennom muntlig språk. Fokuset på makronivå samles og rettes i større grad mot den vertikale flaten på grunn av informasjonen som er nedskrevet. Her ser man også fokusskifter mellom individuelle ressurser, interaksjon i gruppen, og eksterne ressurser som den andre gruppen, dette da elevene ser ut til å trenge inspirasjon og hjelp i løsningsprosessens innledende fase.

Utdragene fra oppgaven *krysse en gammel bro* tyder dermed på at gester i form av peking benyttes i mindre grad når det ikke foreligger en visualisering eller illustrasjon på de vertikale flatene. I oppgaver som inneholder mer abstrakte objekter som i mindre grad kan telles, og dermed viser seg vanskeligere å tegne, kan det også tenkes at språket spiller en større rolle. Dette da elevene bruker språket for å kommunisere ideer og bidra til gjensidig forståelse i løsningsprosessen i mangel på noe visuelt å støtte seg på.

Elevene *bruker gester og muntlig språk for å håndtere utfordringer i overganger* mellom ulike representasjonssystem. For å eksemplifisere dette brukes utdrag av løsningsprosessen til gruppe 1 i oppgaven *kvadratisk mønster.* Etter at gruppe 1 har diskutert seg frem til at det er 3 fyrstikker i hvert kvadrat og fått svaret 27, og startet på del to av oppgaven, utbryter Christian "har vi egentlig den første delen riktig?" mens han peker på tavla.

Christian:	- der er det jo fire til sammen på den første boksen der (peker på det første kvadratet) (Samme nøkkelløsningside som tidlig i løsningsprosessen)
Christian:	- se, hvis den her er 4, så er resten 3 (peker på kvadratene i tegningen)
Amanda:	- ja, men vi sa jo at den der er 3.. (peker på det første kvadratet)
Christian:	- ja, men da må en av dem være fire (peker på det første og det siste kvadratet)
Bjarne:	- det er riktig, det er en som er fire
Amanda:	- å ja, ja nå skjønte jeg det (peker på tegningen og teller fyrstikker)
Amanda:	- da er det pluss 4 da, 3 ganger 8 pluss 4 da
Bjarne:	- nei det blir 4 ganger 9 (visker ut tidligere utregning)
Amanda:	-nei, det blir jo ikke det siden det er bare en som har 4 (peker på det siste kvadratet)
Christian:	- det kan være den første og, men bare en av dem
Bjarne:	- å (skriver 3·8=24, +4=28)

Elevene i gruppe 1 har utfordringer med endene i tegningen sin, først ved å anta at både det første og det siste kvadratet har fire fyrstikker, for så å anta at alle kvadratene har 3 fyrstikker.

De har altså utfordring med overgangen fra det visuelle til det symbolske. Utdraget over viser at Christians deiktiske peking på detaljer i tegningen fungerer som en bro mellom det verbale og det visuelle, og bidrar til at nøkkelløsningsideen igjen oppstår og endelig blir forstått. Den synkroniserte bruken av muntlig språk og peking bidrar til en mer kongruent en-til-en korrespondanse mellom det verbale og det visuelle multifunksjonelle representasjonssystemene og det monofunksjonelle symbolske systemet. Korrespondansen gjøres eksplisitt ved bruk av peking på detaljer i tegningen for å bidra til å øke forståelsen av den verbale forklaringen. Det kan tolkes slik at Christian bruker deiktiske gester for å bidra til at gruppen retter et felles fokus mot nøkkelløsningsideen og løsningsforslaget som de oppdager er feil. Gestene ser også ut til å forsterke elevenes kommunikasjon slik at det ser ut til å øke forståelsen først hos Amanda og deretter hos Bjarne.

Utdragene i dette kapittelet viser gesters viktige dimensjon i den sosiale interaksjonen i løsningsprosessen på de vertikale flatene. I tillegg setter elevene ord på sine ideer og tankerekker gjennom verbale formuleringer, som dermed er viktig i kommunikasjon og forståelse. Utdragene viser også hvordan språket og gestene bidrar til å drive løsningsprosessen fremover. Muntlig språk, fortrinnsvis brukt til resonnering, forklaring og diskusjon, og gester, stort sett gjennom peking på de vertikale flatene, er en stor del av samarbeidsprosessen og fokusskiftene mellom individuelle ressurser og interaksjon innad i gruppen. Dette kan ses i mer eller mindre grad hos begge gruppene i løsningsprosessene i denne studien. Bruken av gester er ofte tett synkronisert med talestrømmen, og gester er da direkte involvert i kommunikasjonsprosessen og er med på å forsterke meningen av muntlige utsagn i likhet med Roths (2002) definisjon av gester.

4.3 En agent å lære av

Dette temaet dreier seg om elevenes valg og fokusskifter når de møter utfordringer i overgangen mellom ulike representasjonssystem, trenger bekreftelse på eget resonnement, eller når de står fast i løsningsprosessen.

Elevene *velger en agent å lære av når de møter utfordringer med overganger* mellom ulike representasjonssystem. I løsningsprosessen av oppgaven *hvor mye har de spart*, har elevene i begge gruppene utfordringer med overgangen fra det multifunksjonelle visuelle representasjonssystemet til det monofunksjonelle symbolske representasjonssystemet. Elevene er igjen i ferd med å gi opp, og jeg ser behov for å gi et hint til gruppe 1.

Forsker: - husk at Thea har 75 kroner mer enn Filip, se på blokken bak Thea, hvis en halv blokk er...?

Amanda: - 75, da er en hel boks ååå ja (snur seg mot VF og skriver 75) - fordi at hvis en halv blokk er 75, så blir en hel blokk (del av nøkkelløsningside, oppstår etter hint)

Christian: - 150

Amanda: - sa blir en hel blokk 150 ja, og hun (peker på Celine og de tre blokkene på VF) har tre av de så da blir det 150..

Christian: - ganger 3

Elevene i gruppe 2 står også fast, og jeg ber speideren gå bort til den andre gruppen for å få et hint av dem. De forstår imidlertid ikke hintet helt, så jeg gir dem et hint til.

Forsker: - hvis en halv blokk er 75, hvor mye er en hel blokk da?

Frida: - da blir det 150, å gud da.. (del av nøkkelløsningside, oppstår etter hint)

Her viser utdragene at mine hint igjen bidrar til at siste del av nøkkelløsningsideen fremkommer hos begge gruppene. Nøkkelløsningsideen i denne oppgaven er todelt hos begge gruppene, og består dermed av to ulike ideer. I gruppe 1 er det Amanda som har begge delene av nøkkelløsningsideene, mens det i gruppe 2 kommer Else frem til den første delen og Frida den neste. Dette samsvarer ikke med SCM-modellen der nøkkelløsningsideen beskrives som en ide som en av problemløserne kommer frem til. Nøkkelløsningsideen kommer som et fokusskifte mot- og valg av *en agent å lære fra*, altså mot eksterne ressurser som i dette tilfellet er meg. Når det gjelder overgangen fra det multifunksjonelle visuelle representasjonssystemet til det monofunksjonelle symbolske systemet viser det seg at visualiseringen ikke bidrar i like stor grad som de ikonisk matematiske tegningene gjør i oppgavene *kvadratisk mønster* og *yoghurtis*. Utdragene over viser at det er flere hint fra meg som er den største bidragsyteren, altså *en agent å lære av*.

Elevene *velger en agent å lære av når de trenger bekreftelse på eget resonnement.* I oppgaven kvadratisk mønster kommer elevene i gruppe 2 frem til endelig løsning på del 1 av oppgaven, etter feilsøking i illustrasjonen sin.

Else: - kan jeg prøve på en ting? (visker ut slutten av formelen og skriver k·2+k+1)

Frida: - 26, 28, det blir 28... (DEF ser bort på den andre gruppen for bekreftelse)

Else: - ja, det er riktig, ja, det er 28 (skriver =28 med to streker under svaret)

Frida: - skal jeg spørre om det er riktig? (snur seg mot forsker for bekreftelse)

Frida:	- er det 28
Forsker:	(nikker og smiler)
DEF:	(smiler)

Utdraget viser her at alle elevene på gruppen retter blikket mot den andre gruppen, og skifter dermed fokus mot eksterne ressurser, og velger *en agent å lære av* for å få bekreftelse på resonnement og løsning. Frida er fortsatt litt usikker og skifter fokus mot meg, og velger dermed *en annen agent å lære av*, for igjen å få bekreftelse på formelen og løsningen til Else.

Elevene *velger en agent å lære av når de står fast i løsningsprosessen* og dermed ikke klarer å komme frem til nøkkelløsningsideen. I oppgaven *krysse en gammel bro* tenker begge gruppene i utgangspunktet at Ada, som er den raskeste, bør løpe frem og tilbake med lommelykta hver gang. Det viser seg etter en lang prosess med mye diskusjon, prøving og feiling at dette ikke gir riktig svar. Det må et spesifikt hint til fra meg før de endrer tankegangen sin, altså *en agent å lære av*. Det viser seg at nøkkelløsningsideen også her er todelt. Elevene i begge gruppene er i ferd med å miste motet etter flere forsøk med ulike personer som krysser broen sammen, og jeg spør om de trenger et hint.

Amanda:	- ja!
Forsker:	- C og D bør gå over sammen en gang, kanskje ikke i starten, men en gang (del av nøkkelløsningside)
Amanda:	- men Ada kan jo bli igjen over broen, og så gå tilbake igjen med lommelykta (del av nøkkelløsningside)
Frida:	- hæ?
Amanda:	- Ada kan jo bli igjen på den andre siden av broen, så tar noen andre lommelykta, og så kan hun gå senere
Frida:	- jo, det går an det,…, hvis en går med Ada, og så går
Amanda:	- så får den lommelykta
Frida:	- så går den over, henter en ny en, og så går Ada over til slutt
Daniel:	- ja, det er faktisk sant
Amanda:	- ja, nå skjønner jeg hvorfor de burde gå sammen, fordi da tar det 10 minutter i stedet for (peker på navnene på tavla, 15)
Bjarne:	- Ada og Bodil
Amanda:	- nei, jo det kan funke (visker ut på tavla) - det må være...
Bjarne:	- siden C og D skulle gå sammen
Amanda:	- ja det er sant

Her viser utdraget at mitt hint direkte er en del av en nøkkelløsningside, og at Amanda umiddelbart etter hintet kommer med andre del av nøkkelløsningsideen. Igjen er den todelt og fremkommer av to ulike personer, men som fokusskifte mellom individuelle ressurser og eksterne ressurser. Begge gruppene velger *en agent å lære* av når løsningsprosessen er i ferd med å stoppe opp. Etter Amanda har formidlet sin ide, begynner begge gruppene å samhandle for at alle skal forstå nøkkelløsningsideen til Amanda. Elevene går dermed sammen og danner en større gruppe, og retter fokus mot hverandre på makronivå. Gjennom verbale formuleringer setter Amanda og Frida ord på sine ideer og tankerekker, som har stor betydning for at resten av elevenes forståelse. Amandas nøkkelløsningside bidrar til at elevene retter fokus mot detaljerte egenskaper i oppgaven, som de baserer videre resonnement på, for å til slutt finne den endelige løsningen. Fokuset veksler mellom individuelle ressurser, interaksjon på tvers av gruppene og med en agent å lære av. Utdraget over viser også at det ikke bare er speideren som skifter fokus mot eksterne ressurser, men alle elevene i begge gruppene skifter fokus mot *en agent å lære av*, og deretter mot medelever i den andre gruppen.

Når elevene møter utfordringer med overganger mellom representasjonssystem, trenger en bekreftelse på eget resonnement eller står fast i løsningsprosessen, skifter de fokus mot eksterne ressurser, som den andre gruppen, oppgaveteksten eller meg for hint. Eksemplifisering og utdrag flere steder i analysen viser dessuten at elevene ikke alltid velger samme agent å lære fra. En elev på gruppen kan velge å rette fokus mot meg, en velger å rette fokus mot oppgaveteksten og en velger fokusskifte mot den andre gruppen. Hvem som gjør hva, varierer fra gang til gang i løsningsprosessene. Ut fra observasjoner og utdrag i dette kapittelet viser det seg at elevenes behov for *en agent å lære av*, og da særlig i form av hint fra meg eller den andre gruppen, er størst i oppgaver som inneholder mer abstrakte matematiske objekt, som tid og en ukjent, og dermed er vanskeligere å visualisere på egenhånd. Ved matematiske objekt som direkte kan visualiseres og telles viser det seg at elevene ikke har behov for støtte og hint i like stor grad, men skifter fokus mot eksterne ressurser mer for bekreftelser for egne tankerekke, ideer eller løsningsforslag.

4.4 Oppsummering av funn fra analysen

Gjennom bearbeiding og analyse av datamaterialet kom det frem tre hovedtema; visuelle representasjoner, verbale representasjoner og gester, og en agent å lære av. Analyse av *visuelle representasjoner* viser at elevene benytter to typer tegninger i løsningsprosessen på de vertikale flatene; ikonisk matematisk visualisering og abstrakt matematisk visualisering. Analysen viser at elevene genererer og bruker *ikonisk matematisk visualisering* på fire ulike måter; elevene utarbeider tegning i sin helhet *for å studere problemet*, elevene bruker tegning *i prosess* for å drive løsningsprosessen fremover mot en nøkkelløsningside, elevene bruker tegning *for selvkontroll* der de dobbeltsjekker om tankerekker og svar er riktige, og elevene bruker tegning *for å forklare* løsningsprosessen for andre i avsluttende Gallery walk. Elevgenererte tegninger bidrar til å *samle gruppens fokus* mot de vertikale flatene, og fremmer en dynamisk kombinasjon av fokusskift mellom interne ressurser og interaksjon innad i gruppen, og er dermed en viktig drivkraft i problemløsningsprosessen. Analysen viser videre at elevene trolig har lite erfaring med blokktegning og *abstrakt matematisk visualisering*, og møter dermed flere utfordringer når objektene i oppgaveteksten er mindre konkrete og mer abstrakt, som tid og en ukjent. *Utfordringene viser seg i overganger*, som igjen skaper *utfordring med å generere en tegning*, og dette fører til at *problemløsningsprosessen stopper opp*.

Analyse av *verbale representasjoner og gester* viser at elevens bruk av peking er tett synkronisert med talestrømmen, og viser dermed gesters viktige dimensjon i den sosiale interaksjonen i løsningsprosessen på de vertikale flatene. I tillegg setter elevene ord på sine ideer og tankerekker gjennom verbale formuleringer, som er viktig i kommunikasjon og forståelse. Analysen viser at elevene bruker *gester som overgang eller støtte i overgangen* mellom ulike representasjonssystem, og enkelte ganger *som en ekstern representasjon.* De bruker også *muntlig språk for å skape overganger*. Når elevene ikke har en tegning på den vertikale flaten som bidrar til å samle fokus bruker elevene *kroppsspråk og peker i luften* i større grad enn å peke på flaten. *Gester og språket benyttes for å håndtere utfordringer i overganger* mellom representasjonssystem. Analysen viser også at samarbeidet i problemløsningen på de vertikale flatene består av en dynamisk kombinasjon av fokusskifter mellom individuelle ressurser og interaksjon innad i gruppene, som fremkommer gjennom ideformidling, dialog og diskusjon i kombinasjon med peking i hele løsningsprosessen.

Analyse av temaet *en agent å lære av* viser at elevene skifter fokus mot eksterne ressurser som den andre gruppen, oppgaveteksten eller meg for å få hint når løsningsprosessen stopper opp, de velger altså en agent å lære av. Dette valget og fokusskifte tar elevene når de *står fast i løsningsprosessen*, *trenger bekreftelse* på eget resonnement, eller når de *møter utfordringer i overgangen* mellom ulike representasjonssystem. Det viser seg at nøkkelløsningsideen kan være delt. Analysen viser også at elevene ikke alltid velger samme agent å lære fra, samt at elevenes behov for en agent å lære av er størst i oppgaver som inneholder mer abstrakte matematiske objekt, som tid og en ukjent, og dermed er vanskeligere å visualisere.

5 Diskusjon

Jeg har i denne kvalitative casestudien undersøkt *hva som kjennetegner 6. trinnelevers bruk av semiotiske representasjoner i problemløsning på vertikale ikke-permanente flater.* For å kunne belyse dette er det ved hjelp Lesh (1981, 1987) og Duvals (2006) rammeverk, samt teori om gester- og tegning for problemløsning, analysert elevenes bruk av representasjoner og overganger mellom ulike representasjonssystem i arbeid med fire problemløsningsoppgaver. Det er videre benyttet Masons (2008) og Koichus (2018) rammeverk og SCM-modell for å se på hvilken sammenheng bruken av representasjoner har med elevenes valg og fokusskifte i problemløsningsprosessen i et valgrikt læringsmiljø, som her er basert på Liljedahls (2021) tenkende klasserom.

I dette kapittelet diskuteres analysens funn opp mot prosjektets teoretiske ramme samt tidligere forskning, og ses i sammenheng med praksis i skolen. Diskusjonen belyser prosjektets tre forskningsspørsmål; «Hvordan anvender elevene semiotiske representasjoner i problemløsningsprosessen på de vertikale flatene, og hvordan skapes overganger mellom ulike representasjonssystem?», «Hvilken sammenheng har bruken av semiotiske representasjoner med valgene og fokusskiftene i problemløsningsprosessen på de vertikale flatene?», samt «Hvordan håndterer elevene eventuelle utfordringer i overgangen mellom ulike representasjonssystem?», og bidrar dermed til å besvare problemstillingen.

Kapittelet er tredelt tilsvarende analysens tema. Først diskuteres *elevers bruk av tegning i problemløsning.* Her drøftes blant annet elevgenererte tegningers rolle i problemløsningsprosessen som en viktig kilde til forståelse og kommunikasjon. Videre diskuteres prosesstegningers bidrag til vellykkede overganger, støtte i tankeprosessen og som ivaretaking av oppgaveinformasjonen, samt bruken av tegning til selvkontroll. Viktigheten av at abstrakt matematisk visualisering læres for å kunne bidra i løsningsprosessen drøftes også. Deretter diskuteres *muntlighet og peking i problemløsning* som bidrar til å gi mening i kommunikasjonsprosessen, fremmer fokusskifte mellom ulike ressurser og fungerer som støtte i overganger, og enkelte ganger som overgang og ekstern representasjon i seg selv. Avslutningsvis diskuteres *elevers valg når alt stopper opp*. Her drøftes at en vellykket problemløsning er avhengig av et valgrikt læringsmiljø som gir elever mulighet til å skifte fokus mot eksterne ressurser, og velge en agent å lære av, når individuelle og kollektive ressurser tar slutt og når de møter utfordringer i overgangen mellom ulike representasjonssystem.

5.1 Elevers bruk av tegning i problemløsning

Undersøkelsen viser at elevene bruker en kombinasjon av det Rellensmann et al. (2017) kaller situasjonstegning og matematisk tegning i to av oppgavene. Denne kombinasjonen har jeg valgt å betegne *ikonisk matematisk visualisering.* Elevene viser god kunnskap om ikonisk matematisk visualisering og tegning for problemløsning, da tegningene består av enkle former med tilhørende symboler skapt for å etterligne og representere de matematiske objektene i oppgaven. Tegninger kan ifølge Duval (2006) sjeldent utrykke matematiske utsagn i seg selv, men ved at elevene kobler tall og bokstaver til tegningene skaper de mening, og sammen med muntlig språk bidrar de til forståelse i den matematisk kommunikasjon i løsningsprosessen. I problemløsning beskriver tegninger ifølge Rellensmann et al. (2017) prosessen og produktet av å generere en illustrasjon som korresponderer med objekter og relasjoner beskrevet i oppgaven. Mine funn viser at elevene genererer tegninger både i prosess og i sin helhet som produkt. Tegning i prosess viser seg å ivareta objektet og relasjonene i problemløsningsoppgaven i større grad enn når tegningen genereres i sin helhet for å studeres, trolig fordi tegningen oppstår mens de tenker. Analysen viser at gruppe 1, som tegner en kvadratfigur med ni kvadrater for deretter å se etter mønster, har utfordringer med å se at det første kvadratet har fire fyrstikker og deretter en økning på tre for hvert nye kvadrat. Dermed oppstår utfordringer i overgangen fra det visuelle til det symbolske representasjonssystemet. Bruken av prosesstegning viser seg imidlertid å bidra til mer vellykkede overganger. Dette vises tydelig i visualiseringen til elevene i gruppe 1 i oppgaven *yoghurtis*. Prosesstegningen bidrar her til forståelse hos medelever og en vellykket overgang, blant annet gjennom bruken av *andre mediatorer* slik at overgangen gjøres eksplisitt. Dermed tydeliggjøres overgangen og øker trolig forståelsen hos medelevene, i likhet med hva Solem (2020) peker på. Elever bør derfor lære prosesstegning og det å være eksplisitte i overgangene, for eksempel ved bruk av klammer, farger etc. Flere av overgangene i prosesstegningene kan også betraktes som kongruente i høy grad, da elevene foretar en en-til-en korrespondanse slik Duval (2006) beskriver det, noe som også bidrar til å øke forståelsen i samarbeidet. I tillegg kobles symboler til tegningen og elevene koordinerer da flere representasjoner multimodalt, identifiserer likheter og sammenhenger mellom de ulike representasjonssystemene, for å omgjøre informasjonen fra en representasjon til en annen slik at overgangen skjer, i tråd med Duval (2006), Lesh et al. (1987) og Hana (2014). Elevene viser dermed at de innehar god kognitiv koordinasjon som Duval (2006) påpeker kreves i matematisk tenking og problemløsning.

Analysen viser også at elevenes bruk av prosesstegning ivaretar alle de tre fordelene som Rellensmann et al. (2017) tilskriver elevgenererte tegninger i sin forskning. For det første støtter prosesstegning i større grad organiseringen av den gitte oppgaveinformasjonen, da viktig informasjon blir ivaretatt gjennom blant annet tilknytning til symboler underveis i genereringen. For det andre reduserer elevene mengden av informasjon ved å trekke ut det som er mest relevant og representerer det i tegningen. For det tredje viser det seg at prosesstegning hjelper elevene med å trekke slutninger som er avgjørende for at nøkkelløsningsideen fremkommer, og dermed den endelige løsningen, i større grad enn tegningen som studeres i sin helhet. Saundry og Nicol (2006) fant i sin forskning at elever som bruker tegning for problemløsning, både som prosess og produkt, får støtte av tegningen i tankeprosessen. Min undersøkelse viser også dette, men det kan tyde på at tegning som prosess støtter bedre opp om tankeprosessen og bidrar i større grad til at en nøkkelløsningside fremkommer, enn tegning som produkt. Det kan dermed tenkes at prosesstegning og eksplisitte overganger bør øves på i tilknytning til problemløsning på vertikale flater, da denne visualiseringen ivaretar oppgaveinformasjonen på en god måte, og dermed bidrar til forståelse samt å trekke slutninger som er avgjørende for å drive problemløsningen fremover mot en endelig løsning.

I tillegg til de tre fordelene Rellensmann et al. (2017) fant i sin forskning, kan mine funn tilskrive elevgenerert ikonisk matematisk tegning for problemløsning en fjerde fordel. Elevene bruker nemlig tegning til selvkontroll der de dobbeltsjekker om tankerekker og svar er riktig. Analysen viser at elevene i gruppe 2 utarbeider en eksplisitt formel ved hjelp av prosesstegning i *kvadratisk mønster* oppgaven. De oppdager etter hvert at formelen ikke stemmer, og velger da schemata ved å generere en illustrasjon av de ni kvadrater for å ettersjekke svaret. Ifølge Arcavi (2003) kan visualisering gjennom elevtegning bidra til en symbolisering, ettersom tegningen kan være en faktor for å skape forståelse. Gjennom å utarbeide en illustrasjon som ivaretar oppgavens matematiske objekt, og bruke den til å feilsøking, bidrar tegningen til felles forståelse hos elevene. Dermed skapes en vellykket overgang fra det kontekstuelle multifunksjonelle representasjonssystemet, via det visuelle til det monofunksjonelle symbolske systemet. Dette funnet støtter Arcavis (2003) tidligere forskning, der han kom frem til at en visuell løsningsprosess kan engasjere elevene i resonnement og forståelse som lett kan utebli ved en ren symbolsk prosess eller løsning. Han fant at visualisering kan ha en komplementær rolle i tre aspekter; støtte og illustrasjon av symbolske løsninger, en mulig måte å løse konflikter mellom symbolske løsninger og feil resonnement i løsningsprosessen, samt hjelpe problemløserne med å gjenopprette forståelsen av en ide som de overså i den formelle løsningen. I lys av dette viser mitt funn at elever i arbeid med problemløsningsoppgaver på vertikale flater kan bruke tegning til selvkontroll, til å oppdage feil i eget resonnement, og dermed kan illustrasjoner bidra til vellykkede overganger og dermed vellykket problemløsning. I tillegg til å bruke egne tegninger til selvkontroll, muliggjør problemløsning på de vertikale flatene at elevene kan vurdere og få bekreftelser på løsning og prosess ved å foreta et fokusskifte mot eksterne ressurser, og se seg rundt og vurdere andre gruppers løsninger i likhet med hva Liljedahl (2021) hevder i sin forskning. Det kan dermed tenkes at bruk av tegning for selvkontroll bør få et større fokus i undervisningen, slik at elever selv kan dobbeltsjekke ideer og løsninger før fasit presenteres.

I det innledende arbeidet med oppgaven *kvadratisk mønster* velger begge gruppene schemata ved heuristikken *lag en visualisering* og da en visuell multifunksjonell semiotisk representasjon. Oppgaven inneholder en illustrasjon av fyrstikkmønsteret som trolig fremmer bruken av visuell modellering, og det kan dermed tenkes at elevenes valg tas ut fra dette. Men ettersom elevene også velger samme schemata i oppgaven *yoghurtis* kan det være nærliggende å tro at elevene handler på bakgrunn av tidligere kunnskap og erfaring fra problemløsning på vertikale flater. Problemløsningsoppgavene som benyttes i prosjektet er tilknyttet hverdagslige kontekster slik Pruner og Liljedahl (2021) oppfordrer til. Dette kan ha bidratt til at skape bro mellom tidligere kunnskap og det matematiske problemet som skal håndteres i likhet med hva Lesh et al. (1987) påpeker. Det å forstå et matematisk objekt innebærer ifølge Lesh et al. (1987) blant annet å kunne gjenkjenne ulike representasjoner av objektet, samt å kunne transformere objektet fra et representasjonssystem til et annet. Gjennom elevenes valg av schemata, og overgang fra det kontekstuelle til det visuelle multifunksjonelle representasjonssystemet, og deretter til det symbolske monofunksjonelle systemet, viser de god forståelse for det matematiske objektet i oppgaven, både her og i oppgaven *yoghurtis.* Elevene benytter da flere representasjoner multimodalt, noe som støtter Lesh, Landau og Hamilton (1983) sin tidligere forskning på realistiske problemløsningsoppgaver. De to andre oppgavene inneholder mindre konkrete og mer abstrakte objekter som tid og en ukjent, og her møter elevene flere utfordringer i overgangene. Det kan dermed se ut til at elevene har mindre erfaring med, og dermed mindre forståelse for objekt som ikke kan telles og visualiseres direkte. Elevene har trolig tidligere benyttet tegning som erstatning for konkretiseringsmateriale, der elementene kan manipuleres og brukes direkte til å telle, i likhet med hva Saundry og Nicol (2006) fant i sin forskning, men møter altså utfordringer med mer abstrakte objekt. Dette er et funn jeg ikke har funnet beskrevet i litteraturen.

I oppgavene *hvor mye har de spart* og *krysse en gammel bro* møter elevene utfordringer med å generere en abstrakt matematisk visualisering når de matematiske objektene i oppgaven innehar et høyt abstraksjonsnivå. Elevene har utfordringer med å tegne den ukjente og har trolig ikke kunnskap om blokktegning eller erfaring med abstrakt matematisk visualisering. Det er da rimelig å anta at tidligere erfaringer og kunnskap har noe å si for elevers problemløsning, slik Pòlya (1949) fremmet i sin forskning. Undersøkelsen viser derimot at tilgang til ulike ressurser slik Schoenfeld (1985) foreslo, samarbeid i løsningsprosessen i likhet med hva Mason (2008) introduserte, samt tilgang på ulike valg, blant annet av representasjoner og eksterne ressurser, i et valgrikt læringsmiljø som tilrettelegger for dette slik Koichu (2018) påpeker, er avgjørende for en vellykket problemløsning. Uten et valgrikt læringsmiljø der elevene kan velge det mest passende til enhver tid av ulike ressurser og fokusskifte i problemløsningsprosessen, som beskrevet i SCM-modell, kan ifølge Koichu (2018) ikke en vellykket problemløsning finne sted. Mine funn støtter dette, og viser at elevens valg og fokusskifte mot eksterne ressurser, og da hint fra var meg som forsker, er avgjørende for at elevene klarer å generere en tegning, og få til en overgang fra det visuelle til det symbolske representasjonssystemet, som driver løsningsprosessen fremover. Det er da rimelig å anta at arbeid med problemløsningsoppgaver som samarbeidsprosess i valgrike læringsmiljø fremmer en mer vellykket problemløsning og dermed bør få mer fokus i skolens praksis.

En abstrakt matematisk visualisering med høyt abstraksjonsnivå kan være en blokktegning. Ifølge Osman et al. (2018) er blokktegning et verdifullt verktøy for å løse problemløsnings-oppgaver, da det fremmer forståelse, mulighet til å se sammenhenger og dermed øker elevenes problemløsningsevner. Har (2007) ser også på blokktegning som et verktøy som gir elever mulighet til å håndtere informasjon, kompleksitet og samtidig kommunisere deres tenkning, og ifølge Osman et al (2018) bidra i symboliseringsprosessen og føre til en vellykket problemløsning. Mine funn støtter derimot ikke dette uten videre, da elevene som nevnt over har utfordringer abstrakt matematisk visualisering, både i genereringen av en visualisering og i symboliseringen. Det er likevel rimelig å anta at blokktegning kan være et nyttig verktøy i problemløsning dersom det læres og øves på. Van Essen og Hamaker (1990) kom i sin forskning frem til at elever som øver på å konstruere tegninger for å løse tekst- og problemløsningsoppgaver får bedre problemløsningsevner. De påpeker også at den strategiske kunnskapen som elever tilegner seg i løpet av tegneintervensjoner påvirker effektiviteten av elevgenererte tegninger for problemløsning. Dette fremmer viktigheten av det å lære seg å tegne enkle og nøyaktige visuelle modeller som ivaretar essensiell informasjon fra oppgaven, da mine funn viser at utfordringer i overganger oppstår, og problemløsningsprosessen stopper opp uten denne kunnskapen. Duval (2006) påpeker at man ikke kan ta for gitt at overganger foregår automatisk og knirkefritt, og dermed bør man i tillegg til å øve på abstrakt matematisk visualisering også gi overganger mer oppmerksomhet i undervisningen i likhet med hans poengtering. Bedre kunnskap om abstrakt visualisering og bruken av varierte og hensiktsmessige representasjoner, samt overganger mellom ulike representasjonssystem vil trolig bidra til å øke elevenes problemløsningsevner. Dette da gode problemløsere ifølge Lesh et al. (1987) blant annet kjennetegnes av deres fleksible bruk av representasjoner. Rellensmann et al. (2017) konkluderer i sin forskning med at det å lage matematiske tegninger i arbeid med problemløsning er et lovende verktøy for å støtte elevers resonnering, forståelse og kommunikasjon. Det krever at elever har tilstrekkelig strategisk kunnskap om tegning, samt kompetanse til å generere nøyaktige tegninger som støtter løsningsprosessen. I lys av dette er det rimelig å konkludere med at abstrakt matematisk visualisering må læres på lik linje som ikonisk matematisk visualisering, for å kunne bidra positivt i problemløsningsprosessen.

Funn og drøftingen over viser at elevgenererte tegninger har en viktig rolle i å drive løsningsprosessen fremover, og er en kilde til forståelse og kommunikasjon ved at elevene gjentatt henviser til den gjennom peking og muntlig språk, i likhet med Duvals (2006) beskrivelse av multifunksjonelle representasjoner. Undersøkelsen viser at elevgenererte tegninger på vertikale flater bidrar til å samle elevgruppens fokus, og dermed til å oppdage detaljer og sammenhenger som er avgjørende for driven i løsningsprosessen samt for å oppdage nøkkelløsningsideen. Tegningene fremmer også en dynamisk kombinasjon av fokusskifter mellom interne ressurser og interaksjon innad i gruppen, og muliggjør bruken av gester som en viktig del av kommunikasjonen og som brobygger mellom det visuelle og det verbale i likhet med hva Edwards (2005) peker på. Det viser seg at abstrakt matematisk visualisering må læres og øves på, ellers kan løsningsprosessen stoppe opp. Ved å ha fokus på nøyaktig generering av elevtegninger og presis bruk, i tillegg til overganger mellom ulike representasjonssystem i undervisningen, kan elevers problemløsningsevner og matematiske forståelse trolig økes. Undersøkelsen viser at dette med fordel kan læres og øves på i et tenkende klasserom med bruk av vertikale flater. Dette samsvarer med Pruner og Liljedahls (2021) forskning som konkluderer med at problemløsning i valgrike læringsmiljø ikke bare forbedrer elevers problemløsningsevner, men bidrar også til å utvikle den enkelte elevs personlige repertoar av ressurser, som blant annet fleksible representasjoner og heuristikker.

5.2 Muntlighet og peking i problemløsning

McNeill (1992) definerer gester som spontane bevegelser av armer og hender som er tett synkronisert med talestrømmen. Undersøkelsen min viser også at elevenes peking er tett synkronisert med talestrømmen i problemløsningsprosessen. Bruken av gester bidrar dermed til å forsterke meningen av muntlige utsagn slik Roth (2002) påpeker, og viser gesters viktige dimensjon i den sosiale interaksjonen i løsningsprosessen på de vertikale flatene. Peking ses i større grad når elevene bruker tegning som produkt for å studere problemet, enn når elevene bruker prosesstegning. Det kan tenkes at årsaken til dette er at tegning i prosess fremstår simultant med elevenes tankeprosess, og dermed er muligens behovet for gesters forsterking av det muntlige resonnementet ikke like stort. Edwards (2005) påpeker at gester kan ses på som en bro mellom det visuelle og det verbale, da gester binder sammen handling, tale og problemløsning. Dette støtter min studie, men det viser seg altså å ikke være fullt så fremtredende i prosesstegning. Funn viser likevel at gester benyttes i stor grad i løsningsprosessene på de vertikale flater, noe som går igjen i utdragene i analysen samt observasjoner gjort under datainnsamlingen.

Studiens funn viser at elevene setter ord på sine ideer og tankerekker gjennom verbale formuleringer, og knytter ytringene i stor grad til peking på tegningene på de vertikale flatene. Dette bidrar da til å kommunisere og drøfte problemet og løsningsforslaget, samt skape overganger, noe som igjen bidrar til større forståelse slik Wæge og Nosrati (2018) peker på. I likhet med hva Liljedahl (2021) trekker frem viser min undersøkelse at verbal kommunikasjon er en viktig del av samarbeidet og problemløsningsprosessen på de vertikale flatene. Han peker også på at bruken av vertikale flater og stående problemløsning gir større rom for ulike former for non-verbal kommunikasjon, noe min studie støtter. Det kan tenkes at gester får en annen betydning når elevene står rundt de vertikale flatene og jobber sammen, enn om de sitter rundt et bord og benytter en permanent horisontal flate. Det er da rimelig å anta at stående problemløsning fremmer bruken av gester i løsningsprosessen, da det muliggjør bruk av hele kroppsspråket. Dette kan føre til større forståelse i kommunikasjonsprosessen og dermed bidrar til å drive problemløsningen fremover mot en nøkkelløsningside og en endelig løsning. Ved fravær av visuelle modeller brukes det mindre peking og mer gestikulering i luften, noe som fører til at fokuset ikke samles mot de vertikale flatene og viktige detaljer. Undersøkelsen viser dermed at tegninger på de vertikale flatene fungerer som en *center of attention*, og bidrar til å samle elevenes fokus. Gjennom elevens bruk av tegning, muntlig språk og gester, samt elevenes fokusskifte mellom ulike ressurser, oppdages detaljer og nøkkelløsningsideer som driver prosessen fremover slik Mason (2011) beskriver *noticing*. Undersøkelsen viser dermed at tenkende klasserom som valgrikt læringsmiljø og bruken av vertikale flater legger til rette for bruken av varierte representasjoner i tilknytning til gester som bidrar til en vellykket problemløsning.

Reynolds og Reeve (2001) fant i sin forskning at gester kan virke som en ekstern representasjon som letter overgangen fra visuelle til symbolske representasjoner, noe denne studien støtter. Min undersøkelse viser at elevene benytter gester som en ekstern representasjon som letter overganger mellom representasjoner. Men i motsetning til tidligere forskning ser det ut til at *metaforisk gest* som ekstern representasjon ikke bare letter overgangen mellom ulike representasjonssystem, men at den også kan fungere som selve overgangen. Dette vises tydelig i gruppe 1 sitt innledende arbeid med oppgaven *kvadratisk mønster*. Gester skaper da ikke bare bro mellom det verbale og det visuelle, slik Edwards (2005) påpeker, men kan sies å være selve broen i form av både en ekstern representasjon og selve overgangen. Det er da nærliggende å tenke at overganger mellom ulike representasjoner i problemløsning ikke bare skjer fra et system til et annet, slik Lesh (1981) og Duval (2006) skriver, men at transformasjoner mellom representasjoner også kan skapes av gester, slik at gesten er overgangen. Ved at gester i denne studien også fungerer som eksterne representasjoner, kan det tenkes at det finnes andre og mer hensiktsmessige måter å klassifisere semiotiske representasjoner på enn det Lesh (1981) og Duval (2006) gjør. Det må legges til at funnet gjelder denne studien, med et begrenset utvalg og samarbeid rundt vertikale flater, men det kan likevel tenkes at dette også er tilfelle for annen matematisk aktivitet i andre situasjoner. For å finne svar på dette trengs det mer forskning på gesters bruk i matematisk aktivitet. Uansett klassifisering viser undersøkelsen min at gester tilknyttet muntlig språk har en viktig funksjon i kommunikasjonen i problemløsningsprosessen på de vertikale flatene, og brukes også for å håndtere utfordringer i overganger mellom ulike representasjonssystem.

Analysen viser at elevene i gruppe 1 møter utfordringer med overgangen fra helhetstegningen til en symbolisering i oppgaven *kvadratisk mønster*. Her fungerer bruken av *deiktisk peking* som en bro, og bidrar i stor grad til at nøkkelløsningen fremkommer og endelig blir forstått. Bruken av gester og muntlig språk i tilknytning til den elevgenererte tegningen er dermed med på å løse utfordringen og bidrar til en vellykket symbolisering og til endelig løsning, i likhet med hva Edwards (2005) peker på. Som nevnt i analysen bidrar også den synkroniserte bruken til en mer kongruent overgang som gjøres eksplisitt for å øke forståelsen hos de to andre eleven i gruppen, i tråd med Solem (2020) og Duval (2006). Edwards (2005) påpeker at gester kan spille en viktig rolle i å komme frem til løsningsideen eller nøkkelløsningsideen som Koichu (2018) kaller det, ved at elever peker på viktige element og representasjoner i løsningsprosessen. Dette stemmer overens med mine funn som viser at gester og muntlig språk bidrar til å gi mening i kommunikasjonsprosessen i gruppesamarbeidet på de vertikale flatene, fremmer fokusskifte mellom individuelle ressurser og interaksjon innad i gruppen, og dermed bidrar til selve løsningen av problemet. Undersøkelsen viser at bruken av gester og *andre mediatorer* for å skape eksplisitte og kongruente overganger, i likhet med det Duval (2006) og Solem (2020) påpeker, fremmer forståelsen, og dermed bør også gester ha en naturlig plass i undervisningen. Reynolds og Reeve (2001) konkluderte i sin forskning med at gester har minst tre funksjoner i gruppesamarbeid i problemløsning, noe mine funn støtter. Elevene bruker gester til å oppnå og refokusere felles fokus mot detaljer i tegningen på de vertikale flatene, gestene bidrar til å forsterke og utvide elevens resonnering og kommunikasjon, slik at det både øker- og åpner opp for en endring i forståelsen hos medelever. Det er da rimelig å konkludere med at muntlig språk, ofte tett synkronisert med bruken av gester, spiller en viktig rolle i samarbeidet og problemløsningsprosessen på de vertikale ikke-permanente flatene i Liljedahls (2021) tenkende klasserom.

Funn og drøftingen over viser at i tillegg til å skape forståelse i kommunikasjonen, drive løsningsprosessen fremover og fremme fokusskifter mellom ulike ressurser, fungerer gester som egne representasjoner og skaper også selve overgangen mellom ulike representasjonssystem. Elevenes bruk av gester knyttet til deres resonneringsstrategier spiller dermed en mangefasettert rolle i å utvikle samarbeidende matematisk resonnement i små grupper i arbeid med problemløsning på vertikale flater i likhet med hva Bjuland et al. (2008) hevder i sin forskning. Verbale representasjoner i tilknytning til bruken av gester er dermed altavgjørende for forståelse, samarbeidet og problemløsningsprosessene på de vertikale flatene.

5.3 Elevers valg når alt stopper opp

Undersøkelsen viser at problemløsningsprosessen stopper opp når elevene møter utfordringer i overganger mellom representasjonssystem, og når elevenes individuelle ressurser og gruppens kollektive ressurser tar slutt. Elevene foretar da et fokusskifte fra den dynamiske interaksjonen mellom individuelle ressurser og gruppens ressurser, mot eksterne ressurser og velger da en agent å lære av. Dette funnet bekrefter Pruner og Liljedahls (2021) forskning, der de kom frem til at elever retter fokus mot eksterne ressurser når gruppens ressurser tar slutt. Analysen viser at valget tas for å få verdifull informasjon fra den andre gruppens vertikale flate, hente ut informasjon fra oppgaveteksten eller få hint fra meg, slik at den eksterne kunnskapskilden kan hjelpe dem videre i løsningsprosessen. Dette samsvarer med forskningen til Koichu (2018) som fant at elever som står fast i løsningsprosessen skifter fokus mot eksterne ressurser ved å se på andre gruppers arbeid i håp om å få nyttige hint eller tips som kan hjelpe dem videre. Undersøkelsen min viser også at elever retter mindre fokus mot den vertikale flaten til den andre gruppen når valgte representasjoner og heuristikker bidrar til en god driv i løsningsprosessen. Behovet for en agent å lære av viser seg å være mest fremtredende i de to oppgavene som inneholder objekt med høyere abstraksjonsnivå, som tid og en ukjent. Årsaken til dette kan som nevnt tidligere være elevenes manglende erfaring med abstrakt matematisk visualisering som igjen gir utfordringer i overgangen mellom ulike representasjonssystem. Undersøkelsen viser at problemløsning i Liljedahls (2021) tenkende klasserom fremmer valgmuligheter og gir elever mulighet til å samarbeide og velge en agent å lære av ved å skifte fokus mot eksterne ressurser når løsningsprosessen stopper opp. Det er rimelig å anta at stående problemløsning og bruken av vertikale flater fremmer dette valget, og at individuell problemløsning på papir trolig ikke gir eleven samme valgmuligheter og dermed ikke samme mulighet til en vellykket problemløsning.

Gjennom problemløsning som samarbeidsprosess på vertikale flater får elevene altså mulighet til å foreta fokusskifte mot eksterne ressurser og velge en agent å lære av. Dette bidrar til å drive løsningsprosessen fremover, og øker dermed elevenes mulighet til å komme fremt til en nøkkelløsningside og en endelig løsning, i likhet med hva Koichu (2018) peker på. Undersøkelsen viser at mine hint flere ganger er avgjørende for vellykkede overganger samt bidrar til at nøkkelløsningsideen fremkommer, og at elevene opplever en vellykket problemløsning. Mine asynkrone hint i elevenes arbeid med problemløsningsoppgavene bidrar dermed til å opprettholde flyten og engasjementet i elevenes løsningsprosess, slik Liljedahl (2021) peker på. Jeg fungerer da som støttende stillas ved å hjelpe elevene inn i den proksimale utviklingssonen. Både Koichu (2018) og Liljedahl (2021) fremhever viktigheten av at eksterne ressurser ikke presenterer hele løsningen for elevene, men at de kun gir små hint eller peker på viktige detaljer. Selv om hele løsninger ikke ble presentert for elevene, kan det likevel tenkes at mine hint var for direkte, og at jeg muligens kunne presentert andre hint i problemløsningsprosessen. Om mine hint var riktige eller om andre hint ville bidratt til andre løsninger eller nøkkelløsningsideer, er noe min undersøkelse ikke kan svare på. Det trengs mer forskning på problemløsning som samarbeidsprosess på vertikale flater i valgrike læringsmiljø for å få kunnskap om når man skal legge inn hint, samt hvilke hint man bør gi. Som lærer er det uansett viktig å ha tenkt igjennom hvilke hint man kan gi utfra problemløsningsoppgavens utforming, og være forberedt på elevenes fokusskifte mot deg som en agent å lære av.

Analysen viser at elevene velger en agent å lære av når de står fast i løsningsprosessen. Et interessant funn viser seg i elevenes arbeid med oppgaven *krysse en gammel bro*. Her er det matematiske objektet tid, og viser seg vanskelig å visualisere trolig på grunn av manglende erfaring og kunnskap. Funn fra analysen viser at elevene i begge gruppene her går sammen og danner en *supergruppe*, for på den måten å bruke begge gruppers kollektive ressurser i et forsøk på å drive løsningsprosessen frem mot en endelig løsning. Pruner og Liljedahl (2021) fant også et tilfelle av samarbeid gjennom dannelse av en supergruppe i sin forskning. Det kan tenkes at supergrupper kan dannes av flere enn to elevgrupper, noe denne studien ikke kan svare på da den kun består av to grupper. Dersom videre forskning viser at dette er tilfelle, legger ikke bare vertikale flater og tenkende klasserom opp til samarbeid innad i grupper og mulighet for fokusskifte mot eksterne ressurser og andre grupper, men kan da også fremme dannelsen av supergrupper og økt samarbeid mellom flere elevgrupper.

Undersøkelsen viser også at nøkkelløsningsideen ofte fremkommer av en elev som et fokusskifte i en rekke av flere skift fastsatt av elevens valg i løsningsprosessen, i likhet med Koichus (2018) SCM-modell. Utfra min analyse kan det derimot se ut til at dette ikke alltid er tilfelle, og at nøkkelløsningsideen kan være delt og fremkomme av flere personer, ikke bare en problemløser slik Koichus (2018) premisser for modellen tilsier. Dette funnet kan ikke generaliseres, da utvalget i studien min er begrenset. Dersom videre forskning viser samme tendens kan det være rimelig å anta at premissene for Koichus (2018) skift og valg-modell muligens bør inkludere denne muligheten, eller eventuelt definere nøkkelløsningsideen tydeligere som den siste og avgjørende biten av problemløsningsprosessen. Man kan også stille seg spørsmål om nøkkelløsningsideen bør være modellens senter, eller om det kanskje bør være selve løsningsprosessen som står i senter. Disse spørsmålene er vanskelig å besvare på bakgrunn av min undersøkelse, og også her viser det seg å være behov for mer forskning.

Ifølge Lesh et al. (1987), Arcavi (2003), Rellensmann et al. (2017) og Edwards (2005) er det flere faktorer som påvirker elevers problemløsningsevne, blant annet bruken av varierte representasjoner og overganger mellom dem, bruken av gester for å gi muntlige utsagn mening og forsterke forståelsen i overganger, samt tegning for problemløsning. Diskusjonen i dette kapittelet viser at det ikke bare er nøyaktig matematisk tegning og bruken av varierte semiotiske representasjoner og eksplisitte overganger gjennom bruk av gester, som bør få fokus i undervisningen for å øke elevers problemløsningsevner. Lærerens pedagogiske praksis er også en avgjørende faktor slik Osman et al. (2018) peker på. Undervisningsrammen tenkende klasserom viser seg å fremme rike valgmuligheter, som valg av representasjoner og heuristikker. Den gir også muligheter til fokusskifte mellom ulike ressurser i problemløsningen som bidrar til at nøkkelløsningsideen fremkommer. I tillegg gir den gode muligheter for samarbeid, diskusjon og bruk av gester. Undersøkelsen viser dermed at det med fordel kan benyttes vertikale flater i arbeid med problemløsning, for på den måten å tilrettelegge for bruken av varierte representasjoner, samarbeid, dynamiske fokusskifter og en agent å lære av når ressursene tar slutt, som igjen kan bidra til en vellykket problemløsning samt til å øke elevers problemløsningsevner. Det viser seg dermed at valgrike læringsmiljø er avgjørende for en vellykket problemløsning, der elevene kan velge en agent å lære av når de står fast og løsningsprosessen stopper opp.

6 Avslutning og perspektivering

Dette masterprosjektet undersøker hvordan elever benytter semiotiske representasjoner i problemløsning på vertikale ikke-permanente flater, noe som kan gi grunnlag for refleksjon rundt undervisningspraksis for å utvikle elevers problemløsningsevner. Hensikten med masterprosjektet har vært å få kunnskap om elevers bruk av semiotiske representasjoner og overganger mellom ulike representasjonssystem, samt undersøke hvilken sammenheng dette har med valgene og fokusskiftene i løsningsprosessen. For å kunne undersøke dette har jeg samlet inn data gjennom lyd- og videoobservasjon av to grupper à tre elevers problemløsningsprosess i konteksten av Liljedahls (2021) tenkende klasserom. Resultatene fra analysen og diskusjon av funn viser at elevene benytter elevgenererte tegninger tilknyttet symboler, i kombinasjon med muntlig språk og gester i problemløsningsprosessen på de vertikale flatene, samt velger en agent å lære av når løsningsprosessen stopper opp.

Visuelle representasjoner i form av elevgenererte tegninger, og da særlig prosesstegning, viser seg å være en kilde til forståelse og kommunikasjon, og dermed en viktig drivkraft i problemløsningsprosessen. Tegninger på de vertikale flatene bidrar til å samle fokus, og fremme en dynamisk kombinasjon av fokusskift i løsningsprosessen. Resultatene viser at tegning for selvkontroll bør få et større fokus i undervisningen, for på den måten å fremme selvstendighet i løsningsprosessen. Abstrakt matematisk visualisering, som blokktegning, må læres og øves på for å kunne bidra til en vellykket problemløsning. For å øke elevers problemløsningsevner antyder dermed resultatene at lærere bør ha fokus på nøyaktig generering av elevtegninger og presis bruk, i tillegg til overganger mellom representasjonssystem, i arbeid med problemløsning. Vellykket problemløsning viser seg å være avhengig av et valgrikt læringsmiljø som fremmer samarbeid og valg av ulike representasjoner, heuristikker og ressurser. Elever velger en agent å lære av når de møter utfordringer i overganger mellom ulike representasjonssystem, og når ressursene tar slutt. Valgrike læringsmiljø, der elever kan velge en agent å lære av, og en lærer som kan gi asynkrone hint for å bidra til å opprettholde flyten og engasjementet i løsningsprosessen, er dermed avgjørende for en vellykket problemløsning.

Stående problemløsning med bruken av vertikale flater legger til rette for bruken av varierte semiotiske representasjoner i tilknytning til gester. Dette bidrar til å skape forståelse i kommunikasjonen, fremme fokusskifter mellom ulike ressurser, og dermed drive løsningsprosessen fremover. Gester og muntlig språk i tilknytning til tegninger skaper eksplisitte og kongruente overganger, og bidrar til å løse utfordringer i overganger. I tillegg fungerer gester enkelte ganger som eksterne representasjoner og skaper selve overgangen mellom ulike representasjonssystem. Visuelle og verbale representasjoner i tilknytning til bruken av gester er dermed altavgjørende for forståelse, samarbeid og problemløsningsprosessen på de vertikale flatene, og bør dermed ha en naturlig plass i undervisningen.

Dersom kjerneelementene *utforsking og problemløsning* og *representasjon og kommunikasjon* skal fungere som bærende elementer i matematikk, er det nødvendig at elever får erfaring med dette i undervisningen (kunnskapsdepartementet, 2017). For å øve variert bruk av semiotiske representasjoner og overganger kan lærere med fordel benytte klassifiserings- og transformasjonsmodellene til Lesh (1981) og Duval (2006) i planlegging av undervisning, og i matematiske samtaler om representasjoner. Ved å benytte Liljedahls (2021) tenkende klasserom som undervisningsramme og Koichus (2018) modell for valgrikt læringsmiljø, kan lærere legge opp til variert bruk av representasjoner, utforskning og samarbeid i problemløsningen, og dermed arbeide i tråd med kjerneelementene. Prosjektet har gitt en mulighet til å se sammenheng mellom ulike teoretiske rammeverk, og jeg mener rammeverkene i fellesskap kan bidra til å øke elevers problemløsnings- og samarbeidsevner. Ved å benytte rammeverkene i undervisningen kan lærere utvikle gode problemløsere, øke elevers 21st century skills, og dermed forberede dem på et samfunn og arbeidsliv i utvikling (Kunnskapsdepartementet, 2017).

For videre forskning kan det være interessant å benytte samme rammeverk for å observere en hel klasses problemløsningsprosesser på vertikale flater. Flere elevgrupper vil gi flere agenter å lære av, og dermed vil det trolig være mindre behov for hint fra lærer. Undersøkelsen kan også belyse spørsmålet om supergrupper kan dannes av flere enn to elevgrupper, og om nøkkelløsningsideen også her kan være delt og fremkomme av flere elever. Det vil også være interessant å forske videre på dette temaet for å få mer kunnskap om bruken av hint i løsningsprosessen. Forskning her kan gi svar på når man som lærer bør legge inn hint, samt hvilke hint som er mest hensiktsmessige å gi. Dette masterprosjektet har vist at det også foreligger et behov for videre forskning på gesters bruk i matematisk aktivitet. Dette da gester viser seg å ikke bare skape bro mellom det verbale og det visuelle, slik Edwards (2005) påpeker, men viser seg i mitt prosjekt å være selve overgangen og enkelte ganger en ekstern representasjon i seg selv.

Litteraturliste

Anker, T. (2020). *Analyse i praksis – En håndbok for masterstudenter.* Cappelen Damm Akademiske.

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. Educational studies in mathematics, 52(3), 215-241. https://link.springer.com/content/pdf/10.1023/A:1024312321077.pdf

Bjuland, R., Luiza Cestari, M., & Borgersen, H. E. (2008). The interplay between gesture and discourse as mediating devices in collaborative mathematical reasoning: A multimodal approach. *Mathematical Thinking and Learning*, 10(3), 271-292. https://doi.org/10.1080/10986060802216169

Bjørnestad, Ø., Kongelf, T. R. & Myklebust, T. (2013). *Alfa: matematikk for grunnskolelærerutdanningene 1-7 og 5-10* (2. utg.). Fagbokforlaget.

Braun, V., & Clarke, V. (2006). Using thematic analysis in psychology. *Qualitative research in psychology*, *3*(2), 77-101. https://doi.org/10.1191/1478088706qp063oa

Coffey, A. & Atkinson, P. (1996). *Making sense of qualitative data: Complementary research strategies.* Sage Publications.

Cohen, L., Manion, L. & Morrison, K. (2017). Validity and reliability. I *Research methods in education* (7. utg.) (s. 245-284). Routledge

Dalland, O. (2017). *Metode og oppgaveskriving* (6. utg.). Gyldendal Norsk Forlag AS.

De nasjonale forskningsetiske komiteene (NESH) (2016). *Forskningsetiske retningslinjer for samfunnsvitenskap, humaniora, juss og teologi.* https://www.forskningsetikk.no/globalassets/dokumenter/4-publikasjoner-som-pdf/forskningsetiske-retningslinjer-for-samfunnsvitenskap-humaniora-juss-og-teologi.pdf

Derry, S. J., Pea, R. D., Barron, B., Engle, R. A., Erickson, F., Goldman, R., Hall, R., Koschmann, T., Lemke, J. L., Sherin, M. G. & Sherin, B. L. (2010). Conducting video research in the learning sciences: Guidance on selection, analysis, technology, and ethics. *The journal of the learning sciences*, *19*(1), 3-53. https://doi.org/10.1080/10508400903452884

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational studies in mathematics*, *61*(1), 103-131. https://link.springer.com/article/10.1007/s10649-006-0400-z

Edwards, L. (2005). The role of gestures in mathematical discourse: Remembering and problem solving. I *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for* *the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, s. 135-138). University of Melbourne. https://www.emis.de/proceedings/PME29/PME29CompleteProc/PME29Vol1Complete.pdf#page=203

Hana, G. M. (2014). *Matematiske tenkemåter*. Caspar Forlag.

Har, Y. B. (2007). The Singapore mathematics curriculum and mathematical communication. I *Proceeding of APEC-TSUKUBA International Conference III, Innovation of Classroom Teaching and Learning through Lesson Study, Focusing on Mathematical Communication* (s. 9-14). https://www.criced.tsukuba.ac.jp/math/apec/apec2008/papers/PDF/13.YeapBanHar_Singapore.pdf

Hornigold, J. (2021, 26. November). *Making the most of bar modelling*. Maths no problem. https://mathsnoproblem.com/blog/teaching-maths-mastery/making-the-most-of-bar-modelling/

Høgheim, S. (2020). *Masteroppgaven i GLU*. Fagbokforlaget.

Høines, M. J. (1998). *Begynneropplæringen. Fagdidaktikk for barnetrinnets matematikkundervisning* (2. utg.) Casper Forlag.

Imsen, G. (2014). *Elevenes verden – innføring i pedagogisk psykologi* (5. utg.). Universitetsforlaget.

Johnson, E. L. (2018). A New Look at the Representations for Mathematical Concepts: Expanding on Lesh's Model of Representations of Mathematical Concepts. I *Forum on Public Policy Online* (Vol. 2018, No. 1). Oxford Round Table. https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1191692.pdf

Karlsen, L. (2014). *Tenk det! Utforsking, forståelse og samarbeid – elever som tenker sjæl i matematikk: ungdomstrinnet.* Cappelen Damm AS.

Kieran, C. (2004). The core of algebra: Reflections on its main activities. I *The Future of the Teaching and Learning of Algebra The 12th ICMI Study* (s. 21-33). Springer, Dordrecht. https://link.springer.com/chapter/10.1007/1-4020-8131-6_2

Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B. (2001). The strands of mathematical proficiency. Adding it up: Helping children learn mathematics, 115-118. https://nap.nationalacademies.org/catalog/9822/adding-it-up-helping-children-learn-mathematics

Klaveness, E., Karlsen, L. & Kverndokken, K. (2019). *101 grep for å aktivisere elever i matematikk.* Fagbokforlaget.

Koichu, B. (2018). Mathematical problem solving in choice-affluent environments. I *Invited lectures from the 13th international congress on mathematical education* (s. 307-324). Springer, Cham. https://link.springer.com/content/pdf/10.1007%2F978-3-319-72170-5.pdf

Kunnskapsdepartementet. (2017). *Overordnet del – verdier og prinsipper for grunnopplæringen.* Fastsatt som forskrift ved kongelig resolusjon. Læreplanverk for kunnskapsløftet 2020. https://www.regjeringen.no/contentassets/53d21ea2bc3a4202b86b83cfe82da93e/overordnet-del---verdier-og-prinsipper-for-grunnopplaringen.pdf

Kunnskapsdepartementet. (2019). *Læreplan i matematikk (MAT01-05).* Fastsatt som forskrift. Læreplanverk for kunnskapsløftet 2020. https://www.regjeringen.no/contentassets/53d21ea2bc3a4202b86b83cfe82da93e/overordnet-del---verdier-og-prinsipper-for-grunnopplaringen.pdf

Kvarv, S. (2021). *Vitenskapsteori – tradisjoner, posisjoner og diskusjoner.* Novus AS

Lampert, M. (1990). When the problem is not the question and the solution is not the answer: Mathematical knowing and teaching. *American Educational Research Journal,* 27(1), s. 29-63. https://www.jstor.org/stable/1163068?seq=1

Lesh, R. (1981). Applied mathematical problem solving. Educational studies in mathematics, 12(2), 235-264. https://www.jstor.org/stable/3482367?seq=1

Lesh, R., Landau, M. & Hamilton, E. (1983). Conceptual models and applied mathematical problem-solving research. *Acquisition of mathematics concepts and processes* (s. 263-343).

Lesh, R., Post, T. & Behr, M. (1987). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. I C. Janvier (red.), *Problems of representations in the teaching and learning of mathematics* (s. 33-40). Lawrence Erlbaum.

Liljedahl, P. (2021, 27. september). Good problems. https://www.peterliljedahl.com/teachers/good-problem

Liljedahl. P., Santos-Trigo, M., Malaspina, U. & Bruder, R. (2016). *Problem solving in mathematics education*. Springer Nature.

Liljedahl, P. (2016). Building thinking classrooms: Conditions for problem-solving. *Posing and solving mathematical problems* (s. 361-386). https://projects.ias.edu/pcmi/hstp/sum2016/morning/rop/BuildingThinkingClassrooms.pdf

Liljedahl, P. (2021). *Building thinking classrooms in mathematics, grades K-12: 14 Teaching practices for enhancing learning*. Corwin Press.

Mason, J. (2008). Being mathematical with and in front of learners. I *The mathematics teacher educator as a developing professional* (s. 31-55). http://dipmat.math.unipa.it/~grim/YESS-5/JHM%20Chapter%20V9F.pdf

Mason, J. (2011). Noticing: Roots and branches. I *Mathematics teacher noticing* (s. 65-80). Routledge. https://www.researchgate.net/profile/John-Mason-18/publication/282207968_Noticing_Roots_and_branches/links/57ea9dd408ae91a0c8d3ea59/Noticing-Roots-and-branches.pdf

Mason, J. (2016a). Part 1 reaction: Problem posing and solving today. I *Posing and Solving Mathematical Problems* (s. 109-113). Springer, Cham.

Mason, J. (2016b). When is a problem…?"When" is actually the problem!. I *Posing and solving mathematical problems* (s. 263-285). Springer, Cham.

McNeill, D. (1992). *Hand and mind: What gestures reveal about thought.* Chicago University Press.

McNeill, D. (2005). *Gestures and thought.* Chicago University Press.

Motus Læring (2021). Oppgaver som legger til rette for utforsking og kreativitet, mellomtrinnet. https://s3.amazonaws.com/kajabi-storefronts-production/sites/122502/themes/2289225/downloads/pOmELeTqSin78nlnc8h2_Utforskende_oppgaver_mellomtrinn..pdf

Motus Læring (2021). Oppgaver som legger til rette for utforsking og kreativitet, småtrinn mellomtrinn. https://s3.amazonaws.com/kajabi-storefronts-production/sites/122502/themes/2289225/downloads/GHt9htblTZqRghI7lbow_Utforskende_oppgaver_sm_trinn_mellomtrinn.pdf

Niss, M. A. & Jensen, T. H. (2002). *Kompetencer og matematiklæring: ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark*. Undervisningsministeriets forlag.

Norsk Senter for Forskningsdata (NSD) (2021). *Fylle ut meldeskjema for personopplysninger* https://www.nsd.no/personverntjenester/fylle-ut-meldeskjema-for-personopplysninger/

Nosrati, M. & Wæge, K. (2015). *Sentrale kjennetegn på god læring og undervisning i matematikk.* Matematikksenteret. https://www.matematikksenteret.no/nettbutikk/sentrale-kjennetegn-p%C3%A5-god-l%C3%A6ring-og-undervisning-i-matematikk

NOU 2014: 7. (2014). *Elevenes læring i fremtidens skole – Et kunnskapsgrunnlag*. Kunnskapsdepartementet. https://www.regjeringen.no/no/dokumenter/NOU-2014-7/id766593/?ch=9

NOU 2015: 8. (2015). *Fremtidens skole – Fornyelse av fag og kompetanser.* Kunnskapsdepartementet. https://www.regjeringen.no/no/dokumenter/nou-2015-8/id2417001/

Osman, S., Yang, C. N. A. C., Abu, M. S., Ismail, N., Jambari, H. & Kumar, J. A. (2018). Enhancing students' mathematical problem-solving skills through bar model visualisation technique. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *13*(3), 273-279. https://doi.org/10.12973/iejme/3919

Palatnik, A. & Koichu, B. (2014). Reconstruction of One Mathematical Invention: Focus on Structures of Attention. *North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED599968.pdf

Palatnik, A., & Koichu, B. (2015). Exploring insight: Focus on shifts of attention. *For the Learning of Mathematics*, *35*(2), 9-14. https://www.jstor.org/stable/44382750?seq=1

Peper, E., & Lin, I. (2012). Increase or decrease depression: How body postures influence your energy level. *Biofeedback*, 40(3), s. 125-130

Pòlya, G. (1949). *How to solve it*. Prinston University.

Postholm, M. B. (2010). *Kvalitativ metode – En innføring med fokus på fenomenologi, etnografi og kasusstudier* (2. utg.). Universitetsforlaget.

Postholm, M. B. & Jacobsen, D. I. (2018). *Forskningsmetode – for masterstudenter i lærerutdanning*. Cappelen Damm AS

Pruner, M. & Liljedahl, P. (2021). Collaborative problem solving in a choice-affluent environment. *ZDM–Mathematics Education*, 53(4), 753-770. https://link.springer.com/article/10.1007/s11858-021-01232-7

Rellensmann, J., Schukajlow, S. & Leopold, C. (2017). Make a drawing. Effects of strategic knowledge, drawing accuracy, and type of drawing on students` mathematical modelling performance. *Educational Studies in Mathematics*, 95(1), 53-78. https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/s10649-016-9736-1.pdf

Reynolds, F. J. & Reeve, R. A. (2001). Gesture in collaborative mathematics problem-solving. I *The Journal of Mathematical Behavior*, 20(4), 477-460. https://doi.org/10.1016/S0732-3123(02)00091-3

Roth, W.-M. (2002). From action to discourse: The bridging function of gestures. *Cognitive Systems Research*, 3(3), s. 535-554. https://doi.org/10.1016/S1389-0417(02)00056-6

Røsseland, M. (2005). *Hva er matematisk kompetanse.* Matematikksenteret. https://beta.matematikksenteret.no/sites/default/files/attachments/page/rosseland_1_2005.pdf

Sälsjö, R. (2016). *Læring - en introduksjon til perspektiver og metaforer.* Cappelen Damm Akademiske

Saundry, C. & Nicol, C. (2006). Drawing as problem-solving: Young children's mathematical reasoning through pictures. I *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 5, s. 57-63). International Group for the Psychology of Mathematics Education, Prague. http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.937.2624&rep=rep1&type=pdf#page=65

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving.* Academic Press.

Schoenfeld. A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition and sense-making in mathematics. I D. Grouws (red.) Handbook for research on mathematics teaching and learning (s. 334-370). NY: Macmillan.

Skaalvik, E. M. & Skaalvik, S. (2018). *Skolen som læringsarena, Selvoppfatning, motivasjon og læring* (3. utg.). Universitetsforlaget.

Skovsmose, O. (2001). Landscapes of investigation. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 33(4), 123-132. https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/BF02652747.pdf

Solem, C. (2020). *Faglige retningslinjer for kartlegging, utredning og oppfølging av elever med spesifikke matematikkvansker.* Dysleksi Norge

Stray, J. H. & Wittek, L. (2014). Pedagogikk – en grunnbok. Cappelen Damm Akademiske.

Svendsen, L. F. H. (2022, 2. mai). *Semiotikk.* Store norske leksikon https://snl.no/semiotikk

Utdanningsdirektoratet (2021, 24. juni). *Hvorfor har vi fått nye læreplaner?* https://www.udir.no/laring-og-trivsel/lareplanverket/stotte/hvorfor-nye-lareplaner/

Van Essen, G. & Hamaker, C. (1990). Using self-generated drawings to solve arithmetic word problems. *The journal of educational research*, 83(6), 301–312. https://www.jstor.org/stable/pdf/27540404.pdf?casa_token=URsN_zLJTgkAAAAA:TjzI9LZv3C8zNXItQ1iatElzRZNnYMXbcEZMr8D833b6mspC3cz9BG70vMnA0TwDyShaibfaKELWWjz_0f1Tz8XXOb56YFGv-UrR1IY7js4FxnuYLEQ

Wæge, K. & Nosrati, M. (2018). *Motivasjon i matematikk.* Universitetsforlaget.

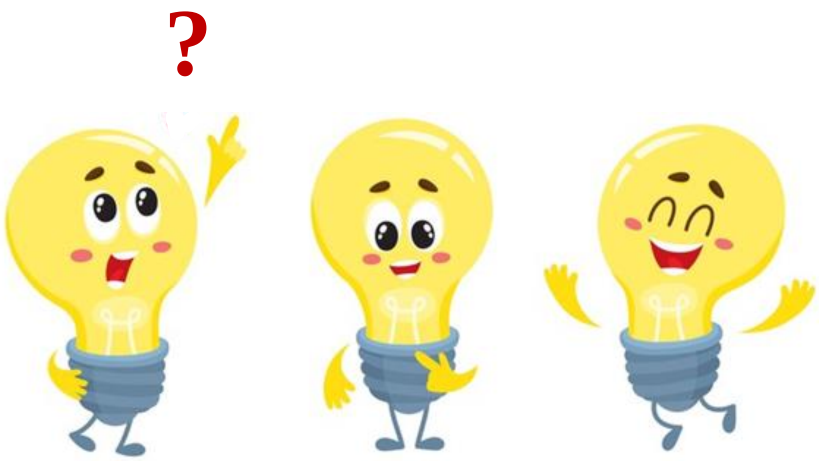
Oversikt over figurer, tabeller og bilder

Vedlegg

Vedlegg 1: Informert samtykkeskjema

Vil du delta i forskningsprosjektet
«Matematiske representasjoner og problemløsning?»

Hei! Har du lyst å være med i et forskningsprosjekt?
Jeg ønsker å undersøke hvordan du og dine klassekamerater jobber med problemløsningsoppgaver i matematikk.



Formål
I dette prosjektet ønsker jeg å undersøke hvordan dere jobber med problemløsningsoppgaver i små grupper på whiteboards. Det handler ikke om å være flinkest eller raskest, men å jobbe godt sammen om å finne løsninger. Jeg skal bli matematikklærer og har derfor veldig lyst å lære mer om hvordan dere løser oppgavene sammen og hvordan dere tenker.
Jeg håper du vil være med!
Dette prosjektet er et forskningsprosjekt fra Universitetet i Sørøst-Norge (USN).

Hvem leder forskningsprosjektet?
Jeg heter Jane Helen Veen og veilederen min heter Elise Klaveness.

Hvorfor får du spørsmål om å delta?
Jeg spør deg om å være med, fordi du har erfaring med problemløsning på whiteboards. Jeg vet enda ikke hvem du er eller hva du heter, men din matematikklærer gir deg dette brevet.

Hvis du har lyst å være med i forskningsprosjektet mitt, må du og dine foresatte skrive under på siste ark i dette brevet. Jeg kommer da til skolen din i januar for å se hvordan du og klassekameratene dine jobber.

Hvis du ikke har lyst å være med, er det helt i orden. Dette velger du selv ☺

Hva betyr det for deg å delta?
Hvis du har lyst å delta i forskningsprosjektet, vil du og 5 andre elever i klassen din bli delt inn i to grupper. Dere får noen oppgaver hver som dere skal samarbeide om å løse. Det tar ca. 45-60 minutter å være med. Vi er på et grupperom, og jeg kommer til å være i rommet mens dere jobber, og bruke videoopptak for å få med meg hvordan dere løser oppgavene sammen, og hvordan dere tenker. Kameraet står på et stativ og jeg skrur det av og på. Hvis dere synes det er greit, vil jeg også ta bilder av arbeidet deres.

Det er frivillig å delta
Det er frivillig å delta i prosjektet. Det betyr at du kan velge selv om du har lyst å være med eller ikke. Ingen andre kan velge dette for deg. Det er bare du som kan samtykke. Samtykke betyr at du sier at du synes noe er greit. Hvis du vil delta, kan du når som helst trekke samtykke tilbake uten å oppgi noen grunn. Det betyr at det er lov å ombestemme seg, og det er helt i orden. All informasjon om deg vil da bli slettet.

Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for deg hvis du ikke vil delta eller om du først sier «ja» og så «nei». Ingen vil bli sur eller lei seg, og det vil ikke ha noe å si for jobben din på skolen. Dersom du ikke har lyst til å delta følger du den vanlige undervisningen med læreren din og resten av klassen.

Ditt personvern – hvordan jeg oppbevarer og bruker dine opplysninger
Jeg vil bare bruke informasjonen om deg og gruppen din til å finne ut hvordan dere løser problemløsningsoppgavene, og vil ikke dele din informasjon med andre. Det er bare jeg og Elise (veilederen min) som kan se videoopptaket.

Jeg passer godt på at ingen kan få tak i videoopptaket av deg og gruppen din, og sletter videoopptaket når jeg er ferdig med oppgaven min. Jeg passer på at ingen kan kjenne deg igjen når jeg skriver masteroppgaven min. Dette gjør jeg for eksempel ved å finne opp et annet navn på deg når jeg skriver. Jeg følger loven om personvern.

Hva skjer med opplysningene dine når jeg avslutter forskningsprosjektet?
Jeg er ferdig med forskningsprosjektet 15. august 2022. Da vil jeg passe på at all informasjon om deg er slettet.

Dine rettigheter
Du har rett til å få vite hvilken informasjon om deg som jeg samler inn. Du kan også be om at informasjonen slettes slik at den ikke finnes lenger. Du kan også klage til Datatilsynet dersom du synes at jeg har behandlet opplysningene om deg på en uforsiktig måte eller på en måte som ikke er riktig.

Hva gir meg rett til å behandle personopplysninger om deg?
Jeg behandler informasjonen og videoopptak om deg og din gruppe bare hvis du sier at det er greit og du skriver under på samtykkeskjemaet.

Hvor kan jeg finne ut mer?
Hvis du har spørsmål om studien, kan du ta kontakt med meg på telefonnummer
959 66 954 eller på e-post: jh_veen@hotmail.com

Norsk senter for forskningsdata (NSD) har sagt at det er greit at jeg gjør dette forskningsprosjektet.
Hvis du lurer på hvorfor NSD har bestemt dette, kan du ta kontakt med:
NSD – Norsk senter for forskningsdata AS på epost (personverntjenester@nsd.no) eller på telefon: 55 58 21 17.

Håper du vil være med! 😉

Med vennlig hilsen Jane Helen Veen

Vil du delta i forskningsprosjektet «Matematiske representasjoner og problemløsning?»

Dette er en forespørsel til deg og ditt barn om å delta i forskningsprosjektet mitt, hvor formålet er å undersøke elevers bruk av matematiske representasjoner i problemløsningsoppgaver. I dette skrivet gis det informasjon om målene for prosjektet og hva deltakelse vil innebære for ditt barn.

Formål
Formålet med dette prosjektet er å undersøke hva som kjennetegner elevers bruk av matematiske representasjoner i arbeid med problemløsningsoppgaver i små grupper. Representasjoner i matematikk er måter å uttrykke matematiske begrep, sammenhenger og problem på, for eksempel gjennom tegning, tallinje, symboler, konkreter og tekst ect.

Et av målene til skolen er at matematikk skal gi elevene kompetanse innen utforskning og problemløsning, slik at de kan være forberedt på et samfunn og arbeidsliv i utvikling. Som matematikklærer er det veldig interessant for meg å undersøke hvordan elever bruker representasjoner i problemløsning, slik at jeg (og andre) kan forbedre egen undervisningspraksis, og bidra til å utvikle gode problemløsere som benytter hensiktsmessige og varierte representasjoner i løsningsprosessene.

Prosjektet danner bakgrunnen for min masteroppgave som er en del avgrunnskolelærerutdanningen grunnskolelærerutdanning 1-7. Datamaterialet vil anonymiseres og ikke brukes i annen sammenheng.

Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?
Universitetet i Sørøst-Norge er ansvarlig for prosjektet.

Hvorfor får ditt barn spørsmål om å delta?
Ditt barn får spørsmål om å delta ettersom jeg ønsker å observere elever som har erfaring med problemløsning i matematikk, og er kjent med bruken av vertikale flater/whiteboards i undervisningen. Jeg har derfor valgt et strategisk utvalg og kontaktet faglærer ved skolen til ditt barn. Det vil være 6 elever, fordelt på to grupper, som blir tilfeldig valgt ut til å delta.

Hva innebærer det for ditt barn å delta?
Om dere velger å delta i prosjektet, innebærer det at ditt barn jobber med problemløsningsoppgaver i en liten gruppe på et egnet grupperom. Dette vil ta ca. 45-60 minutter. Jeg vil observere løsningsprosessen ved bruk av videoopptak m/lyd, samt bilder av arbeidet til gruppen. Video brukes for å få en god dekning av det som skal observeres. Det er kun løsningsprosessen som filmes. Dersom elevene ønsker en pause stoppes opptaket. Kameraet er stasjonært og skrus av og på av meg. Det er kun opplysninger om bruk av representasjoner som samles inn, og data vil kun behandles av meg og min veileder. Transkripsjoner, analyse

og masteroppgave vil ikke inneholde personidentifiserende opplysninger, og behandles for øvrige etter gjeldende forskningsetiske retningslinjer. https://www.forskningsetikk.no/retningslinjer/hum-sam/forskningsetiske-retningslinjer-for-samfunnsvitenskap-humaniora-juss-og-teologi/

Det er frivillig å delta
Det er frivillig å delta i prosjektet. Hvis ditt barn velger å delta, kan dere når som helst trekke samtykket tilbake uten å oppgi noen grunn. Alle personopplysninger vil da bli slettet. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for deg eller ditt barn hvis dere ikke vil delta eller senere velger å trekke dere. Dersom dere velger å ikke delta vil ditt barn følge den ordinære undervisningen i matematikk sammen med læreren og resten av klassen.

Ditt personvern – hvordan jeg oppbevarer og bruker opplysningene
Jeg vil bare bruke opplysningene om ditt barn til formålene jeg har fortalt om i dette skrivet. Jeg behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket. Det er kun jeg og min veileder ved USN, Elise Klaveness, som vil ha tilgang til innsamlet data. Navn og opplysninger om barnet ditt anonymiseres og vil bli erstattet med en kode som lagres adskilt fra øvrige data. Dere som deltakere, eller skolen til ditt barn, vil ikke kunne gjenkjennes i publikasjon av masteroppgaven. Alt datamateriale vil lagres kryptert og innelåst.

Hva skjer med opplysningene når forskningsprosjektet avsluttes?
Opplysningene anonymiseres når prosjektet avsluttes 15.08.2022. Ved prosjektslutt slettes alle personopplysninger samt videoopptak m/lyd og bilder av elevarbeidet.

Hva gir meg rett til å behandle personopplysninger om ditt barn?
Jeg behandler opplysninger om deg og ditt barn basert på deres samtykke.

På oppdrag fra Universitetet i Sørøst-Norge har NSD – Norsk senter for forskningsdata AS vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Deres rettigheter
Så lenge ditt barn kan identifiseres i datamaterialet, har dere rett til:
- informasjon om hvilke opplysninger jeg behandler om ditt barn
- å få rettet opplysninger om ditt barn som er feil eller misvisende
- å få slettet personopplysninger om ditt barn
- å sende klage til Datatilsynet om behandlingen av ditt barns personopplysninger

Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å vite mer om eller benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:
- Universitetet ved Sørøst-Norge ved Jane Helen Veen (student) tlf 959 66 954 e-post: jh_veen@hotmail.com og Elise Klaveness (veileder)
- Vårt personvernombud: Paal Are Solberg

Hvis du har spørsmål knyttet til NSD sin vurdering av prosjektet, kan du ta kontakt med:

- NSD – Norsk senter for forskningsdata AS på epost (personverntjenester@nsd.no) eller på telefon: 55 58 21 17.

Med vennlig hilsen

Jane Helen Veen

(Forsker, masterstudent)

Samtykkeerklæring

Vi har mottatt og forstått informasjon om prosjektet «Matematiske representasjoner og problemløsning» og har fått anledning til å stille spørsmål. Vi samtykker til:

- å delta i observasjon ved videoopptak m/lyd, samt bilder av elevarbeid
- at læreren din kan gi opplysninger om meg til prosjektet – hvis aktuelt

Vi samtykker til at personopplysninger behandles frem til prosjektet er avsluttet.

(Signert av elev/prosjektdeltaker, dato)

(Signert av foresatt, dato)

Vedlegg 2: Godkjenning fra NSD

NORSK SENTER FOR FORSKNINGSDATA

Vurdering

Referansenummer

372265

Prosjekttittel

Matematiske representasjoner og problemløsning

Behandlingsansvarlig institusjon

Universitetet i Sørøst-Norge / Fakultet for humaniora, idrett- og utdanningsvitenskap / Institutt for matematikk og naturfag

Prosjektansvarlig (vitenskapelig ansatt/veileder eller stipendiat)

Elise Klaveness, elise.klaveness@usn.no, tlf: 47414388

Type prosjekt

Studentprosjekt, masterstudium

Kontaktinformasjon, student

Jane Helen Veen, jh_veen@hotmail.com, tlf: 95966954

Prosjektperiode

01.11.2021 - 15.08.2022

Vurdering (1)

25.11.2021 - Vurdert

Det er vår vurdering at behandlingen av personopplysninger i prosjektet vil være i samsvar med personvernlovgivningen så fremt den gjennomføres i tråd med det som er dokumentert i meldeskjemaet 25.11.2021 med vedlegg, samt i meldingsdialogen mellom innmelder og NSD. Behandlingen kan starte.

TYPE OPPLYSNINGER OG VARIGHET
Prosjektet vil behandle alminnelige kategorier av personopplysninger frem til 15.08.2022.

LOVLIG GRUNNLAG
Prosjektet vil innhente samtykke fra foresatte til behandlingen av personopplysninger om barna. Vår vurdering er at prosjektet legger opp til et samtykke i samsvar med kravene i art. 4 og 7, ved at det er en frivillig, spesifikk, informert og utvetydig bekreftelse som kan dokumenteres, og som den registrerte/foresatte kan trekke tilbake.

Lovlig grunnlag for behandlingen vil dermed være foresattes samtykke, jf. personvernforordningen art. 6 nr. 1 bokstav a.

PERSONVERNPRINSIPPER

NSD vurderer at den planlagte behandlingen av personopplysninger vil følge prinsippene i personvernforordningen om:

• lovlighet, rettferdighet og åpenhet (art. 5.1 a), ved at foresatte får tilfredsstillende informasjon om og samtykker til behandlingen
• formålsbegrensning (art. 5.1 b), ved at personopplysninger samles inn for spesifikke, uttrykkelig angitte og berettigede formål, og ikke viderebehandles til nye uforenlige formål
• dataminimering (art. 5.1 c), ved at det kun behandles opplysninger som er adekvate, relevante og nødvendige for formålet med prosjektet
• lagringsbegrensning (art. 5.1 e), ved at personopplysningene ikke lagres lengre enn nødvendig for å oppfylle formålet

DE REGISTRERTES RETTIGHETER
NSD vurderer at informasjonen om behandlingen som de registrerte og deres foresatte vil motta oppfyller lovens krav til form og innhold, jf. art. 12.1 og art. 13.

Så lenge de registrerte kan identifiseres i datamaterialet vil de ha følgende rettigheter: innsyn (art. 15), retting (art. 16), sletting (art. 17), begrensning (art. 18) og dataportabilitet (art. 20).

Vi minner om at hvis en registrert/foresatt tar kontakt om sine/barnets rettigheter, har behandlingsansvarlig institusjon plikt til å svare innen en måned.

FØLG DIN INSTITUSJONS RETNINGSLINJER
NSD legger til grunn at behandlingen oppfyller kravene i personvernforordningen om riktighet (art. 5.1 d), integritet og konfidensialitet (art. 5.1. f) og sikkerhet (art. 32).

Nettskjema er databehandler i prosjektet. NSD legger til grunn at behandlingen oppfyller kravene til bruk av databehandler, jf. art 28 og 29.
Ved bruk av databehandler (spørreskjemaleverandør, skylagring eller videosamtale) må behandlingen oppfylle kravene til bruk av databehandler, jf. art 28 og 29. Bruk leverandører som din institusjon har avtale med.

For å forsikre dere om at kravene oppfylles, må dere følge interne retningslinjer og eventuelt rådføre dere med behandlingsansvarlig institusjon.

MELD VESENTLIGE ENDRINGER
Dersom det skjer vesentlige endringer i behandlingen av personopplysninger, kan det være nødvendig å melde dette til NSD ved å oppdatere meldeskjemaet. Før du melder inn en endring, oppfordrer vi deg til å lese om hvilke type endringer det er nødvendig å melde:
https://www.nsd.no/personverntjenester/fylle-ut-meldeskjema-for-personopplysninger/melde-endringer-i-meldeskjema. Du må vente på svar fra NSD før endringen gjennomføres.

OPPFØLGING AV PROSJEKTET
NSD vil følge opp ved planlagt avslutning for å avklare om behandlingen av personopplysningene er avsluttet.

Kontaktperson hos NSD: Sturla Herfindal

Lykke til med prosjektet!