Universitetet i Sørøst-Norge
Fakultet for humaniora, idretts- og utdanningsvitenskap
–

Mastergradsavhandling
Studieprogram: MGLU2
**Vår 2022**

Isak Halkinrud

**Argumentasjon, bevis og utforskning i matematikkundervisning en kvalitativ studie**

En kvalitativ studie av elever på 9. trinn sin utforskning av matematikk og elevargumentasjonen som blir tatt i bruk i arbeid med et bevis.

Universitetet i Sørøst-Norge

Fakultet for Fakultet for humaniora, idretts- og utdanningsvitenskap

Institutt for matematikk og naturfag

Postboks 235

3603 Kongsberg

http://www.usn.no



Denne avhandlingen representerer 45 studiepoeng

# Forord

Innleveringen av denne mastergraden markerer slutten av en femårig lang studietid. Det har vært mange oppturer og mange nedturer igjennom studiet, men jeg har utviklet meg som person gjennom disse årene. Jeg har lært mye gjennom arbeid med masteroppgaven. Det har vært mange seine kvelder med slit. Det har vært veldig interessant og utfordrerne og skrive en mastergrad. Og skrive en mastergrad med dysleksi har gjort prosessen mere langsom en det jeg ville, men jeg kom til mål etter hvert.

Jeg vil takke medstudentene som jeg har jobbet med. Jeg takker Eirik for å ha gjort siste innspurt innholdsrik og gøy samtidig som han har alltid skaffet grupperom. Jeg takker Sara for og ha vært støttende gjennom hele prosessen. Jeg vil takke mamma som har hjulpet med korrekturlesning. Jeg vil også takke veileder Andrea som har hjulpet meg igjennom denne lange prosessen.

Nå ser jeg frem til å jobbe som lærer!

## Sammendrag

Denne masteroppgaven er en kvalitativ studie av hvordan elever jobber utforskende med bevis og argumenterer for gyldigheten av løsninger og strategier. Utforskning og problemløsning har fått en større rolle i de nye læreplanene. Bevis burde ha en sentral rolle i elevenes forståelse av matematikk. Som Stylianides (2016) påpeker kan bevis i en undervisningssammenheng få elevene til og forstå grunnen til hvorfor noe er sant i motsetning til og bare huske noen gitte fakta. Gjennom argumentasjon for gyldigheten av en matematisk påstand og utforsking av et matematisk fenomen vil elevene få mulighet til og komme nærmere matematikken. Elevene ville gjennom utforskning av noe matematiske ha mulighet til å se matematiske mønstre og lage formodninger.

Problemstilling for oppgaven er: «Hvordan arbeider elever på 9 trinn med utforskning av matematikk og hvordan type argumentasjon kommer frem når elevene jobber med bevis?» Oppgaven avgrenses med følgene tre forskningsspørsmål: 1) Hvilke bevisnivåer argumenterer elever på 9. trinn når de lager seg en formodning om det matematiske objektet ordnet utfall uten tilbakelegg? 2) I hvilken grad gir utforsking av et matematisk objekt elever tilgang til de underliggende matematiske egenskapene til det matematiske som blir utforsket? 3) Hva legitimerer elever på 9. trinn matematiske formodninger med under argumentasjon mot et bevis?

Data er hentet gjennom deltagende observasjon og skiftelige elevbesvarelser fra to 9. trinns klasser. Datainnsamlingstimen er basert på oppgaver innenfor temaet kombinatorikk nærmere ordnet utfall uten tilbakelegg.

Elever argumenterte i stor grad mellom bevisnivåene presentert i oppgaven. De fleste elevene argumenterte på nivået «på vei mot» det generiske eksempel. Det var også tilfeller av elever som havnet på nivået autoritet som legitimitet. Elevene fikk i varierende grad tilgang til de underliggende matematiske egenskapene gjennom utforskning. De fleste elevene i denne studien legitimerer argumentasjonen sin med matematiske egenskaper. Det var også tilfeller av elever som legitimerte matematikken gjennom autoritet. De nevnte funnene er studiens hovedfunn. I diskusjonskapittelet er det flere funn som belyser forskningsspørsmålene ytterligere og som danner et mere nyansert svar på problemstillingen.

## Innhold

# 1 Innledning

Det har blitt mer fokus på utforskning, problemløsning, resonnering og argumentasjon i den nye læreplanen. Mye av inspirasjonen min for denne oppgaven var å finne fra matematikkens kjerneelementer. Jeg personlig er veldig opptatt av at matematikk er et utforskende fag og ikke et puggefag. I kjerneelementet: utforsking og problemløsning så tar Utdanningsdirektoratet opp dette: *«Utforsking i matematikk handler om at elevene leter etter mønstre, finner sammenhenger og diskuterer seg fram til en felles forståelse. Elevene skal legge mer vekt på strategiene og framgangsmåtene enn på løsningene.»* (Utdanningsdirektoratet, 2020)Prosessen med å finne mønstre i matematikken og legge mere vekt på strategiene og fremgangsmåten en løsningen er noe jeg er veldig opptatt av. Jeg vil finne ut hvordan utforskning i matematikklasserommet ser ut. Jeg vil finne ut hvordan elever løser et matematisk problem. Når elever gjør utforskende arbeid i matematikken og prøver og bevise noe så danner elevene resonnementer og formodninger. Elevene vil da måtte komme med argumenterer for å forsvare gyldigheten av disse resonnementene eller formodningene. Kjerneelementene resonnering og argumentasjon

> *«Resonnering i matematikk handler om å kunne følge, vurdere og forstå matematiske tankerekker. Det innebærer at elevene skal forstå at matematiske regler og resultater ikke er tilfeldige, men har klare begrunnelser. Elevene skal utforme egne resonnementer både for å forstå og for å løse problemer. Argumentasjon i matematikk handler om at elevene begrunner framgangsmåter, resonnementer og løsninger og beviser at disse er gyldige.» (*Utdanningsdirektoratet, 2020).

Dette kjerneelementet er veldig sentralt i min oppgave det at elevene skal utforme egne resonnementer er svært relevant. Det som står i kjerneelementene i matematikk kan ses i sammenheng med det Stylianides (2016) ser på som aktiviteten å bevise.

> *«engasjere seg med de induktive utforskningene for å identifisere mønstre eller generaliseringer og komme med formodninger; arbeide med spesielle tilfeller eller eksempler for å teste formodninger eller få en bedre forståelse av hva formodningene betyr og hvordan de kan rettferdiggjøres eller tilbakevises; å bruke mindre formelle måter å tenke på (resonering ved analogi) eller måter å representere på (diagrammer*

*osv.) for å utvikle innsikt i argumenter som til slutt kan utvikles til bevis; og bruke retoriske midler (ikke nødvendigvis matematiske) for å overbevise andre om den epistemiske verdien av et utsagn (dette blir ofte referert til som argumentasjon)»* (Stylianides, 2016, s. 11-12 oversatt).

Arbeid med å finne ut bakrunden til hvordan matematikken fungerer er det jeg mener som det essensielle med utforskende undervisning. Utforskende jobbing med et bevis er en god måte og komme i kontakt med matematikken som ligger bak beviset på. Jeg støtter meg til hva Stylianides 2016 påpeker: Engasjement med å bevise kan tillate elevene å delta i matematikk som en mening å få aktivitet til å utforske hvorfor ting «fungerer» i matematikk i stedet for bare å huske gitte fakta eller prosedyrer; forsone deres uenigheter eller løse debatter om sannheten til matematikkpåstander ved hjelp av den logiske strukturen til det matematiske systemet i stedet for ved å appellere til lærerens eller lærebokens som autoritet; og totalt sett bli mer aktive deltakere i kunnskapskonstruksjon fremfor passive mottakere og ferdigpakket kunnskap formidlet av dem av læreren. (Stylianides, 2016, s. 9 oversatt).

Det at matematikk er et fag som mange ser på som et puggefag synes jeg er synd. Matematikk er et spennende fag hvis man tar et mere utforskende fremgangsmåte. Selv om den nye læreplanen har mere fokus på utforsking av matematikk så oppfattes matematikk enda som et puggefag for mange. Dette var noe jeg opplevde i alle mine praksisperioder på lærerstudiet. Hvis man hadde integrert bevisrettet undervisning der elevene for å utforske på egenhånd mener jeg at dette kunne bidra til og endre synet til mange elever på matematikkfaget. Hvorfor mangler så mange elever den intellektuelle nysgjerrigheten til og undre på hvorfor et teorem eller en formel er riktig? Harel & Snowder, (1998) mener at dette er fordi det nåværende matematikk læreplanen har fokus på sannhet istedenfor grunnen til sannhet.

Det jeg vill finne ut ved denne studien er hvordan elever resonnerer i matematikkfaget. Jeg vil kartlegge elevers argumentasjon mot et bevis. Jeg vil se på hvordan elever jobber med utforskende oppgaver. Hvordan ser elevers tankeprosess når de argumenterer for et matematisk bevis ut? Jeg vise at gjennom utforskende arbeid med bevis kan elevene selv utforske matematikken og få tilgang til en dypere forståelse på hva matematikk er.  For å svare på disse spørsmålene må jeg spisse inn spørsmålet og lage meg en problemstilling.

Problemstillingen blir som følger:

## 1.1 Problemstilling: Hvordan arbeider elever på 9 trinn med utforskning av matematikk og hvordan type argumentasjon kommer frem når elevene jobber med bevis?

Videre for og spisse problemstillingen til mine fokusområder har jeg valgt følgene tre forskningsspørsmål.

## 1.2 Forskningsspørsmål:

Hvilke bevisnivåer argumenterer elever på 9. trinn når de lager seg en formodning om det matematiske objektet ordnet utfall uten tilbakelegg?

I hvilken grad gir utforsking av et matematisk objekt elever tilgang til de underliggende matematiske egenskapene til det matematiske som blir utforsket?

Hva legitimerer elever på 9. trinn matematiske formodninger med under argumentasjon mot et bevis?

## 1.3 Oppgavens struktur

Kapittel en er oppgavens innledning jeg presenterer hvorfor det burde bli mere fokus på bevisrettet undervisning og mer fokus på utforskning i matematikkfaget. Jeg presenterer også problemstillingen og forskningsspørsmålene.

Det andre kapittelet presenterer jeg teorien jeg bruker i denne oppgaven. Jeg presenterer teori om bevisnivåer i matematikken, utforskende undervisning, pedagogisk tilnærming til matematikk, matematisk argumentasjon og argumentasjonsverktøy.

Det tredje kapittelet tar jeg for meg metoden deltagende observasjon og hva det innebærer, oppgavedesign og analyseverktøy.

I det fjerde kapittelet analyserer jeg funnene mine. Jeg bruker Toulmins argumentasjonsverktøy og bevisnivåer for å analysere elevargumentasjon.

Det femte kapittelet er diskusjonskapittelet. Her drøfter jeg funnene mine fra kapittel fire opp mot mitt teoretiske rammeverk.

I det sjette kapittelet konkluderer jeg oppgaven. Jeg ser på implikasjoner til videre forskning og oppgavens funn i relasjon til læreryrket

# 2 Teori

For å svare på problemstillingen Hvordan arbeider elever på 9 trinn med utforskning av matematikk og hvordan type argumentasjon kommer frem når elevene jobber med bevis? Bruker jeg Ballacheff og Stylianides som grunnmur for det teoretiske rammeverket i min oppgave. Ballacheff har utviklet bevisnivåer, jeg har utvidet disse bevisnivåene til og passe bedre til oppgavens formåø. Jeg har hentet bevisnivået autoritet som legitimitet fra blant annet Harel & snowder og Russel et al. Jeg har hentet mitt siste bevisnivå fra Olav mild som er: «På vei mot» Det generiske eksempelet Trengereid (2020) har vært en inspirasjon for mitt teoretiske rammeverk der hun bruker mye av det samme teoretiske rammeverket og forsker på samme tema bevis og argumentasjon. Jeg går også inn på pedagogiske aspekter ved bevis der Hanna og Knuth står i sentrum. Til slutt tar jeg for meg elevargumentasjon der jeg går inn på Knipping. Jeg bruker Toulmins argumentasjon verktøy for å fange opp argumentasjon i gruppene. Jeg skal kartlegge elevenes argumentasjon med hjelp av Toulmins argumentasjonsmodell.

## 2.1 Definisjon av bevis I klasserommet

Stylianides har en definisjon på hva å jobbe med bevis i klasserommet innebærer; «*Jobbe med induktiv utforskning og identifisere mønstre eller generaliseringer og lage formodninger»* (oversatt av meg) (Stylianides, 2016, s.12). Stylianides analyserer flere matematikktimer over en lengre periode. Ut ifra disse klassesituasjonene og analysen av dem så lager han en konkret formulering på hva bevis er og tre kriterier for hva som er godkjent bevis i en klasseromsituasjon eller ikke. Stylianides hevder at «Bevis er et matematisk argument, en sammenhengende sekvens av påstander for eller mot en matematisk påstand, med følgende egenskaper:

1. *«Den bruker utsagn akseptert av klasseromssamfunnet (sett med aksepterte utsagn) som er sanne og tilgjengelige uten ytterligere begrunnelse;»* (Stylianides, 2007, s. 290). (Oversatt av meg)
2. *«Den bruker former for resonnement (argumentasjonsmåter) som er gyldige og kjente for, Eller innenfor den konseptuelle rekkevidden av, klasseromssamfunnet;»* (Stylianides, 2007, s. 290). (Oversatt av meg)

Samme som ovenfor er klassekulturen rundt bevis sentralt her. I klasserommet så er det ikke opp til standarden til forskere og matematikere. Men elevene er på et lavere nivå de

matematiske regler som da er i spill, må være eksplisitte for elevene og en del av det innforståtte.
3. *«Det kommuniseres med uttrykksformer (måter for argument representasjon) som er passende og kjent for, eller innenfor den konseptuelle rekkevidden av, klasseromssamfunnet.»* (Stylianides 2007, s. 290). (Oversatt av meg).

Stylianides gir meg et verktøy for å gjenkjenne hva bevis er i klasserommet. Han har et viktig begrep: «proof threshold» eller på norsk bevisterskel. Hvis et argument oppfyller definisjonen av bevis på alle tre komponentene i et argument, overskrider nivået av strenghet for argumentet bevisterskelen, og derfor sies argumentet å oppfylle bevisstandarden. (Stylianides, 2007, s. 314).
For at et bevis skal være et gyldig i klasserommet så må elevene argumentere på et nivå som tilfredsstiller alle de tre kriteriene til Stylianides. Dette innebærer altså at elevene bruker sett med aksepterte utsagn i klasserommet, bruker argumentasjonsmåter som er skjent for klasseromsamfunnet og bruker argument representasjon som er skjent for klasseromsamfunnet

I min oppgave så bruker jeg Styliandies sine 3 kriterier som et rammeverk på hva jeg ser på som bevis. Det er uenighet i fagfeltet hva matematisk bevis i klasserommet er, men jeg velger og støtte meg til denne teorien der de av praktiske årsaker gir meg et godt skille mellom hva som er gyldig og ikke gyldig bevis. Mye av analysen blir å sammenligne ulike elevbesvarelser og da er det viktig å ha det klart for seg hva som er godkjent bevis.

## 2.2 Bevisnivåer og Kategorisering av matematisk argumentasjon

Det er flere teorier om kategorisering av matematisk argumentasjon i klasserommet (Russell et al, 2011) viser til 4 typiske måter som elever bruker for å rettferdiggjøre en generell påstand:

1. akseptere utsagnet basert på autoritet
2. prøver det ut med eksempler
3. anvende matematisk resonnement basert på en visuell representasjon eller historiekontekst.
4. bevise å bruke algebraisk notasjon og aritmetiske lover.

(Russell et al, 2011, s. 52-53 oversatt)

Jeg bruker Russell et al (2011) sin kategori nr. 1: Akseptere utsagn basert på autoritet dette er sammenlignbart med et av Harell & Snowder (1998) «proof scheems». Balacheff sine 4 kategorier er et bra verktøy for å kategorisere elevers argumentasjon på nyttig vis. Wathne & Brodahl utførte en «case study» og fant ut at Balacheff sine kategorier var nyttig for lærere til å identifisere elevargumentasjon. I tillegg ga kategoriene læreren god innsikt i elevenes resonnering. Det også innsikt til læreren om deres egen undervisning og nødvendighet om elevens evne til å resonnere. (Wathne & Brodahl, 2019, s. 13 oversatt)

Balacheff (1988) begrunnet at elevenes forståelse av matematisk begrunnelse sannsynligvis vil gå fra det induktive mot det deduktive og mot større generalitet. Dermed kan man se at Balacheffs nivåer danner et hierarki. Som stiger i grad av generalitet. Bevis nivåene er skrevet opp i stigende grad av generalitet og abstraktet. Beviskategoriene i hierarkisk rekkefølge:

1. akseptere utsagnet basert på autoritet (Russel et al, 2011, s. 52-53).
2. Naiv empirisme (Balacheff 1998)
3. Det avgjørende eksperimentet (Ballacheff 1998)
4. «På vei mot» Det generiske eksempelet (Mild 2020)
5. Generisk eksempel (Balacheff 1998)
6. Tankeeksperimentet (Balacheff 1998)

For å komme seg oppover i graden av bevis så må eleven bevege seg vekk fra den konkrete oppgave og ta det ut av konteksten og finne det generelle som gjelder. Ballacheff sier at hvor beviset faller på hierarkiet avhenger hvor mye generalitet og konseptualisering av kunnskap som er involvert. (Balacheff, 1988, s. 218)

### 2.2.1 Naiv empirisme

Naiv empirisme er og anta sannhet basert på empiri. Med andre ord si du skal bevise at alle primtall er oddetall unntatt 2 så konkluderer du at dette er sant på grunnlag at du vet at 7 og 13 er primtall. Som Ballacheff påpeker er dette selvfølgelig ikke godkjent bevis. Men det er en av de første formene mot generalisering. Denne formen for «bevis» er noe som er en vanlig fremgangsmåte for mange elever. *«Naive empiricism consists of asserting the truth of a result after verifying several cases. This very rudimentary (and as we know, insufficient)»*

(Balacheff, 1988, s. 218). Altså er det naiv empirisme hvis elevene argumenterer for at noe er sant når de har testet for noen få tilfeller og kan trekke en slutning om en generell løsning eller bevis på noe.

### 2.2.2 Det avgjørende eksperimentet

Ballacheff forklarer forskjellen mellom naiv empirisme og det avgjørende eksempelet. *«This type of validation is distinguishable from naive empiricism in that the pupil poses explicitly the problem of generality and resolves it by staking all on the outcome of a particular case that she recognises to be not too special»* (Balacheff, 1988, s. 218/219). I motsetning til naiv empirisme der man har fokus på testing av mange forskjellige muligheter for å verifisere noe så fokuserer det avgjørende eksempelet på et enkelttilfelle som eleven ikke oppfatter som usedvanlig for å bevise noe generelt.

Det avgjørende eksperimentet skiller seg også ut fra Balacheffs kategori det generiske eksempelet der det generiske eksempelet kan ta utgangspunkt i et bestemt tilfellet, men fokuset er på det generelle med klassen ting det omhandler. Det avgjørende eksperimentet på den andre siden tar for gitt det generelle og ser heller på det ene bestemte tilfellet som ikke spesielt. Dermed kan dette tenkes å være en bra representasjon for helheten noe som ikke stemmer. *«the example used in crucial experiment proof is often based on carefully selected extreme cases.»* (Varghese, 2011, s. 182). Det avgjørende eksempelet var ofte med på å avkrefte teoriene til elev parrene i studien til Ballacheff. Det kan bli brukt som et «våpen for å avkrefte en teori, for det trengs ikke mye for og avkrefte en teori.» (Balacheff, 1988, s. 224) Det avgjørende eksperimentet er ikke en bra fremgangsmåte for å bevise noe, men for og avkrefte en teori kan det være et bra verktøy.

### 2.2.3 Det generiske eksempelet

Det generiske eksempelet er å vise til en regneoperasjon på et spesielt tilfelle. Dette spesielle tilfellet representerer en **klasse** med tilfeller. Det eksempelet som velges må inneholde alle de karakteristiske egenskapene som er relevant for all de aktuelle tilfellende den skal representere.

> *«The generic example involves making explicit the reasons for the truth of an assertion by means of operations or transformations on an object that is not there in its own right, but as a characteristic representative of its class. The account involves the characteristic properties and structures of a class, while doing so in terms of the names and illustration of one of its representatives.»* (Balacheff, 1988, s. 219).

Kort sagt kan man forklare det generiske eksempelet slik Hinna et al (2011) gjør det «Generisk eksempler lar oss se det generelle gjennom det spesielle.» (Hinna et al, 2011, s. 660).

Det generiske eksempelet kommer ofte i sammenheng med en modell. Dermed blir det generiske eksempelet en fremgangsmåte som viser til en modell eller figur som inneholder alle de representative delene til objektet det er snakk om. *«Argumentasjonen er generell, men at et bestemt eksempel brukes for å visualisere dette. En slik figur kan også lages for alle andre valg av n»*. (Hinna et al, 2011, s. 661).

### 2.2.4 Tankeeksperimentet

Tankeeksperimentet er på et veldig abstrakt nivå det er usannsynlig at jeg møter elever som argumenterer på dette nivået, men jeg tar med denne kategorien for kontinuitetens skyld. Tankeeksperimentets fokus er på det generelle. Det generelle er noe som representerer egenskapene til det matematiske objektet eller klassen som det er snakk om. Tankeeksperimentet vil bevege seg bort fra selve handlingen i oppgaven. Videre tar Balacheff (1988) opp 3 krav som gjør et bevis av typen tankeeksperiment. Første krav er å eliminere det spesielle i argumentasjonen. Det andre kravet krever argumentasjonen til å være universell, det vil si at den alltid vil gjelde, selv om noe informasjon i argumentet endres. Det siste kravet er kravet om å fjerne alle aktører som deltar i oppgaven, argumentasjonen vil gjelde i enhver sammenheng. De tre kravene gir opphav til et bevis som er deduktiv. Tankeeksperimentet krever logisk deduktive slutninger som leder fram til en konklusjon. (Balacheff 1988)

Ballacheff har tatt opp tre viktige begreper *decontextualization, depersonalization og* detemporalisation. Disse begrepene er noe som blir tatt opp i bevegelsen fra det generiske eksempelet til tankeeksperimentet.

Dekontekstualisering, som gir opp det faktiske objektet for klassen av objekter, uavhengig av deres spesielle omstendigheter. en detemporalisering, som frigjør operasjonene fra deres faktiske tid og varighet: denne prosessen er grunnleggende for overgangen fra handlingsverdenen til relasjoner og operasjoner. Depersonalisering "en depersonalisering, løsrivende handlingen fra den som handlet og som den må være uavhengig av" "(Balacheff, 1988, s. 217 oversatt).Det som gjør bevisnivået så utfordrende er at det krever: «Å flytte fra det generiske eksemplet til tankeeksperimentet krever å gå fra handling til internalisert handling, i tillegg til å involvere en dekontekstualisering, som er ett tegn på en avgjørende endring i konstruksjonen av kunnskap.» (Balacheff, 1988, s. 218 oversatt)

I tankeeksperimentet er man ikke bundet av en bestemt representasjon eller eksempel. Her er det grunnleggende forhold som er generaliserbare. Algebra er ofte brukt innenfor denne graden av bevis. Vi beveger oss nå mot høyre kompleksitet og mere det man generelt tenker på innenfor bevis matematikk faget.

> *«The thought experiment invokes action by internalising it and detaching itself from a particular representation. It is still coloured by an anecdotal temporal development, but the operations and foundational relations of the proof are indicated in some other way than by the result of their use, something which is the case for the generic example.»* (Balacheff, 1988, s. 219).

Algebra kan bli brukt til å forklare fenomenet, men verbale kommunikasjoner fungerer også. Varghese (2011) påpeker at det er bare i det fjerde og siste nivået av bevis at elevene beveger seg vekk fra pragmatiske til det konseptuelle. (Varghese, 2011, s. 182)

Til sist vil jeg påpeke litt kritikk av Balacheffs modell: «til tross for ryddigheten til Balacheff modellen, kan man i praktisk anvendelse få noen problemer både med å skille mellom naiv empiri og avgjørende eksperiment og med å komme over forekomster av generiske eksempler. (Varghese, 2011, s. 182)

### 2.2.5 Autoritet som legitimitet.

Mange elever kan argumentere mot et bevis og henvise til autoritet som bevis. Dette faller under begrepet: Authoritarian proof scheme (Harel & Snowder, 1998, s. 247). Selv om elever forstår at matematikken de gjør må være sann, så er de ikke bekymret med spørsmålet med byrden av bevis: elevens hovedkilde for dom eller overbevisning av et utsagn er hvis det legitimeres fra lærebok eller om det er ytret av en lærer. En slik oppfatning av bevis kaller Harel & Snowder bevis som er basert på autoritet. (Harel & Snowder, 1998, s. 247).

Legitimering av bevis på basis av autoritet kan også bety som Russel et al påpeker *«Referring to an authority for justification may indicate that the student does not yet know that proving a claim is even a possibility.»* (Russel et al, 2011, s. 55). Med andre ord er ikke eleven klar over at å henvise til matematikk eller bevise et utsagn er mulig. Harrel & Snowder tar også opp eksempler på hvordan bevis basert på autoritet kan komme opp i en klassesammenheng. Den underliggende karakterirsk av denne oppførselen er et syn av matematikk som en samling av sannheter, med liten eller ingen bekymring eller verdsettelse for opprinnelse av sannhetene. (Harel & Snowder, 1998, s. 247). Harel & Snowder tar opp eksempler som demonstrerer at memorering og tar i bruk ferdiglagde «oppskrifter» som er hva elever forventer å gjøre i matematikken. Andre definisjonen av det autoritære «proof scheme» elever spør om hjelp uten å seriøst prøve å løse det selv. Ofte i sånne settinger etter en kjapp diskusjon av problemet innser eleven at de faktisk greide og løse problemet på egenhånd, men trengte nærværet og bekreftelse av en autoritetsfigur for å ankomme løsningen. (Harel & Snowder, 1998, s. 248). Det Harrel & Snowder tar opp som bevis basert på autoritet kan også ses på i sammenheng med det første kategorien til Russel et al (2011): *«1 akseptere utsagnet basert på autoritet» (Russel et al, 2011, s. 55).* Selv om Balacheffs bevisnivåer ikke har med et nivå som tar opp autoritet så nevner han autoritet under de tre kriteriene for å komme seg fra det generiske eksempelet til tankeeksperimentet. Begrepet Balacheff 1988 kalte «Depersonalisering» Elever må altså løsrive seg fra autoritet som gyldighet for at beviset skal være basert på gyldig grunn.

### 2.2.6 «På vei mot» Det generiske eksempelet.

Jeg har sett nødvendigheten av å ha en kategori mellom naiv empirisme og det generiske eksempelet. Argumentasjon som falle under denne kategorien har elementer av det generiske eksempelet. Dette innebærer å argumentere for noe generelt ved en klasse av matematematiske objekter, men argumentasjonen peker bare på noen deler eller elementer av de karakteristiske egenskapene til det matematiske objektet. Det som skiller «på vei mot» det generiske eksempelet og Balacheff 1988 sin kategori det generiske eksempelet er graden av generalitet utført på et spesielt tilfelle. Jeg har hentet «på vei mot» kategorien fra Olav mild som har sett på studenters identifisering av Balacheff sine bevisnivåer i elevarbeid. *««På vei mot» identifiseringene vil inneholde trekk av det generiske eksempel, men ikke oppfylle alle kravene.»* (Mild, 2020, s. 43).

Wathne & Brodahl (2019) tok opp nyttigheten av Balacheffs nivåer, men også vanskeligheten. Det var noen av lærerne i studien til Wathne & Brodahl (2019) som oppfattet det utfordrende og plassere elevargumentasjon innenfor Balacheffs nivåer. Dermed så jeg nyttigheten av og ha en kategori mellom naiv empirisme og Det generiske eksempel.

## 2.3 Utforskende undervisning

I min datainnsamlingsprosess skal jeg samle inn data av elever som jobber med oppgaver. Disse oppgavene er basert rundt et bevis. Elevene skal jobbe utforskende alene og sammen i grupper og danne seg formodninger om det matematiske objektet ordnet utfall uten tilbakelegg. Det finnes flere definisjoner av utforskende matematikk undervisning eller «inquiry-based learning». Utdanningsdirektoratet sier dette om utforskning i matematikk: *Utforsking i matematikk handler om at elevene leter etter mønstre, finner sammenhenger og diskuterer seg fram til en felles forståelse. Elevene skal legge mer vekt på strategiene og framgangsmåtene enn på løsningene.»* (Utdanningsdirektoratet, 2020)

Det kan også trekkes en sammenligning til problemløsing. (Artigue & Blomhøj, 2013 s. 802) har sett på (Schoenfeld 1992a) Der det har blitt sett på identifisering og utvikling av kompetansen og sinnsvanene som lar elevene bli vellykkede problem løsere. Problemløsnings kompetanse blir ofte sett på som et mål i seg selv *«Forbindelser med utforskende læring kan enkelt opprettes.»* (Artigue & Blomhøj, 2013 s. 802).

Artigue & Blomhøj (2013) sier dette om utforskende undervisning: Elever som står overfor ikke-rutinemessige problemer må utvikle sine egne strategier og teknikker; de må utforske, gjette, eksperimentere og evaluere. Dette gjør at elevene får betydelig mer matematisk ansvar og blir generelt oppmuntret til å danne spørsmål selv og se for seg mulige generaliseringer av resultatene de oppnår. Artigue & Blomhøj (2013) tar også opp at det lett kan bli sett en sammenheng mellom problemløsning og utforskende undervisning.

Videre tar Fibonacci prosjektet opp hva «inquiry-based learning» eller utforskende undervisning burde inneholde. Vi ber elevene om å stille spørsmål, å utforske, å observere, å oppdage, å anta, å forklare, å bevise. Denne listen over praksis viser grunnleggende aktiviteter for en spørrebasert tilnærming til matematikk. (Artigue & Baptist, 2012. s. 15).

Wynne Harlen har satt på nyttigheten av «inquiry-based practices» hun tar opp forskningen til Minner, Levy and Century (2009) de utførte en studie der de så på 138 studier av gjennomgått «inquiry-based science education» (30 eksperimentell; 35 kvasi-eksperimentell; 73 ikke-eksperimentell) hovedsakelig utført i USA. Det ble funnet at litt over halvparten av studiene viste positive effekter av et visst nivå av undersøkelsesvitenskapelig undervisning på læring og oppbevaring av studentinnhold. Totalt sett var det en positiv trend som favoriserte undersøkelsesbaserte praksiser. undervisningsstrategier som aktivt engasjerer studenter i læringsprosessen gjennom vitenskapelige undersøkelser er mer sannsynlig å øke konseptuell forståelse enn strategier som er avhengige av mer passive teknikker, som er ofte nødvendige i det gjeldende utdanningsmiljøet med standardisert vurdering.  (Harlen, 2013, s. 22).

Det er høyere sjanse for å øke den konseptuelle forståelsen til elevene hvis du bruker strategier som er mere basert på utforskning en andre mere passive teknikker. Altså er det nyttig med utforskende undervisning hvis man bruker undervisning strategier som aktivt aktiviserer elever i vitenskapelig utforskning. (Harlen, 2013, s. 22).

## 2.4 Pedagogisk bevis

Når elever jobber med en oppgave med bevis i fokus er det viktig å ha en pedagogisk tilnærming til bevisene. Bevis har ofte blitt sett på som formelt og ikke en sentral del av undervisningen. (Knuth, 2002, s. 487). Stylianides trekker frem at fra et pedagogisk ståsted så kan man argumentere for jobbing med bevis er nødvendig for dyp læring i matematikken. elever kan utforske hvorfor ting fungerer i matematikk i motsetning til og bare huske og memorere fakta og ulike prosedyrer. (Stylianides, 2016, s. 9).

Man kan dra en sammenligning til hva Hanna påpeker om helhetlig forståelse av matematikk. *«sann forståelse krever at studenten ser hvorfor et utsagn er sant og hvorfor dette alltid må være tilfelle, denne forståelsen er best frembrakt av et forklarende bevis»* (Knuth, 2002, s. 490 oversatt). Knuth tar hva Hersh påpekte det holder ikke bare at en formodning er riktig, men man må vite hvorfor den er riktig. Primer jobben til bevis i matematikk er å etablere sannhet, men fra et utdanningsperspektiv er det kanskje viktigere med og fostre den underliggende matematiske forståelsen man trenger for å bevise. (Knuth, 2002, s. 487)

Det at elevene kommer seg til sannheten av et bevis selv. Hanna tar opp skillet mellom bevis som beviser og et bevis som forklarer/viser. Hanna begrunner et bevis som beviser «Et bevis som beviser viser bare med det som er kjent som Rationes cognoscendi, det vil si hvorfor-vi-holder-det-å-være-så grunner.»(Hanna, 1990, s. 9 oversatt). Bevis av denne typen er bare opptatt av bevismessige årsaker for hvorfor noe er sant. «Et bevis som forklarer derimot, viser også hvorfor et teorem er sant; det gir et sett med årsaker som stammer fra selve fenomenet» (Hanna, 1990, s. 9 oversatt). Altså et bevis som forklarer beviser hvorfor noe er sant, men igjennom bevisprosessen så har beviset forklarende kraft. Knuth konkluderer med at bevis må bli et verktøy som kan bli brukt til å utvide elevenes matematiske forståelse. Det blir en vanskelig pedagogisk oppgave og integrere bevis på en bra måte inn i klasserommet. (Knuth, 2002, s. 490).

Videre så har Stylianides sett på representasjoner. Han trekker opp tema representasjonsform. Det kan ha stor påvirkning hvordan type representasjonsform beviser kommer i (Stylanides, 2016, s. 120). Visuell støtte kan være et bra hjelpemiddel brukt riktig. Knuth påpeker at visuell støtte brukt riktig i jobbing med bevis kan være veldig bra, men samtidig så må man være forsiktig så man er sikker på at det man gjør samsvarer med oppgaven. (Knuth, 2002, s. 488). Balacheff (1988) peker viktigheten av å skape klasseromsituasjoner der studenten blir klar over kompleksiteten til problemet og nødvendigheten av å produsere gyldige argumenter. (Hanna, 1990, s. 9).

## 2.5 Matematisk argumentasjon

Jeg skal i min oppgave se på hvordan elever argumenterer for bevis i matematikken. Over har jeg sett på teorier som beskriver hva bevis i klasserommet er. Og videre ulike typer for bevisnivåer som kan oppstå i en klasseromsituasjon. Det er bare en bit av oppgaven. Jeg trenger videre nå et verktøy for å analysere elevargumentasjon. Jeg bruker Toulmins argumentasjonsmodell som mange andre før meg deriblant Raid, Pedmonte, Knipping og Trengereid. Jeg benytter meg av Knippings sin tolkning av Toulmins sitt verktøy.

Knipping ser på naturen på hva bevis er. Målet med og å undervise med bevis er og gi elevene forståelse av logikken bak matematiske bevis (Knipping, 2008, s. 429). Videre påpeker Knipping at det lett kan oppnå misforståelser siden matematiske bevis er basert på logikk så kan man analysere argumentasjonen med samme logisk blikk. Dette går ikke og blir utfordrende av flere forskjellige grunner. Først så er undervisning I bevis basert på pedagogiske og praktiske grunner, ikke nødvendigvis logikk i matematisk forstand. Bevis I klasserommet er en prosess med mange ulike deler. Klasseroms dialoger med komplekse argumentasjonsstrukturer kan forekomme som kanskje kan virke ulogisk til en matematiker. Men for det så er det nødvendig å avsløre disse komplekse strukturene for å få en bedre forståelse av kompleksiteten i det og undervise og lære matematisk bevis. (Knipping, 2008, s. 429).

Det er også viktig å tenke på at elevene som jobber med bevis kan være midt under utvikling av nye logiske tenke mønstre. Dermed igjen kan en string med tanker virke ulogiske, men fremdeles være viktig for videre utvikling av elevenes tankegang. «Ettersom læring nødvendigvis avhenger av studentenes tenkning på det tidspunktet, er en analysemetode som ikke kan gå lenger enn å avfeie den som «ulogisk» ikke nyttig. Det som trengs, er en oppfatning av «rasjonelt argument» som ikke avskjærer studentenes rasjonalitet.» (Knipping, 2008, s. 429 oversatt). Oppgaven blir å kunne se å fange opp elevenes argumenter og kunne se hvordan elevene argumenterer for og mot påstander selv om de de påstår ikke nødvendigvis er helt logisk. For å forstå disse argumentasjonsdialogene så er det helt sentralt og ha tilgang til konteksten. Det er viktig og ha tilgang til konteksten når man skal analysere elevargumentasjon fordi det å argumentere og danne seg formodninger kan være ganske uvant for mange elever. Det er ikke «tradisjonelt» vanlig å jobbe med utforskende oppgaver dermed kan det bli vanskelig og fange opp formodningene til elevene helt konkret uten konteksten. Knipping tar opp et poeng Toulmin kommer med som er at og ta problemer ut av kontekst er ikke et seriøst valg lenger. (Knipping, 2008, s. 429). Detextualisjon av argumentasjon er altså ikke ønskelig.

Knipping påpeker at Toulmins sin modell er nyttig for å rekonstruere et steg av et argument. Som gjør at man kan se på veldig spesifikke deler av argumentasjonsprosessen. Dette er noe hun kaller for argumentasjon steg eller lokale argumenter. Og der hele strukturen av argumentet blir kalt for globalt argument eller argumentasjon strukturen. (knipping, 2008, s. 430).

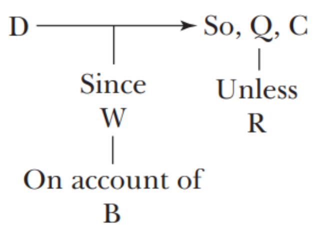
### 2.5.1 Lokale argumenter og sammenligning av argumenter

Det blir spesielt de lokale argumentene jeg er ute etter i min oppgave der jeg får liten tilgang til lærer elev interaksjon og det blir mere elev elev interaksjon. Jeg bruker de diverse Lokale argumentene og dermed kan det gi meg et godt grunnlag for å sammenligne de ulike argumentene opp mot hverandre. *«Spesielt kan sammenligningen av ulike belegg og ryggdekning i ulike argumenter avsløre hva slags argumenttyper som brukes for å bevise prosesser i matematikklasserom.»* (Knipping, 2008, s. 430). Sammenligning av hjemmelen og ryggdekningen til elevene er et godt verktøy for å avsløre hvordan type argumentasjon elevene bruker. «Toulmins modell er nyttig for å rekonstruere et trinn i et argument, den lar oss skille ut distinkte argumenter i bevisprosessen. Knipping kaller dette «argumentasjonstrinn» eller lokale argumenter. Men det er også nødvendig å legge ut strukturen til argumentet som helhet (den anatomiske strukturen), som jeg vil kalle global argumentasjon eller argumentasjonen "strukturen" av bevisprosessen.» (Knipping 2008, s. 430 oversatt).

## 2.6 Toulmins Modell

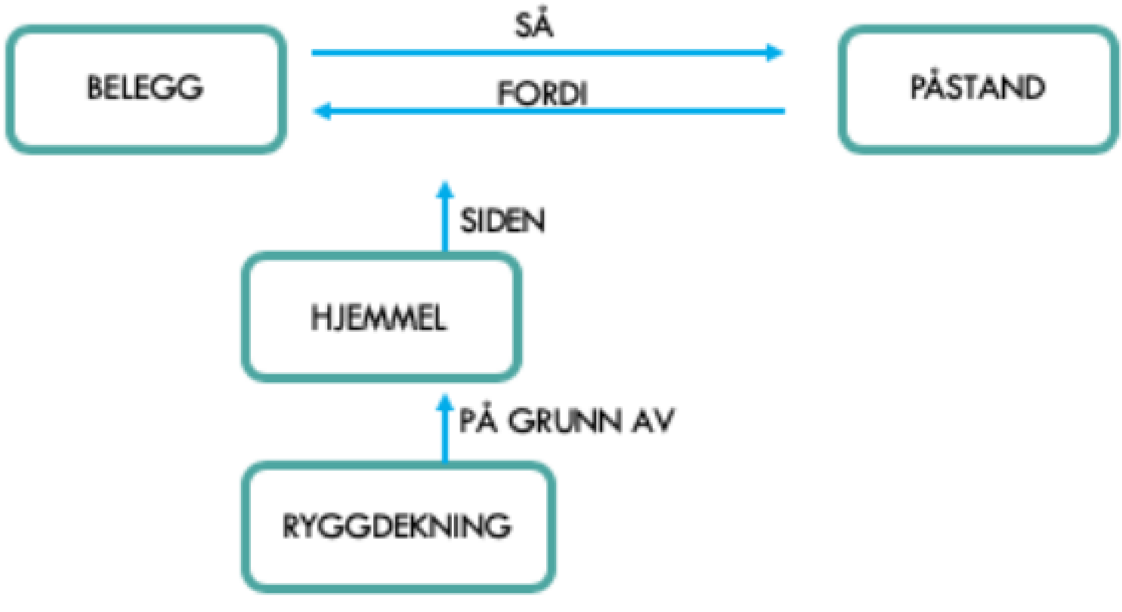
Toulmins modell er det flere andre forskere som har tatt i bruk blant annet Knipping, Pedmonte og Balacheff. De bruker det i sammenheng med å kartlegge elevargumentasjon i matematikken da gjerne i grupper eller parvis. Toulmins modell gjør det mulig å «fryse» argumentasjon stille i tiden og fange opp hva noen påstår, og hvilke data de henviser til i et argument. Toulmin modellen inneholder seks ulike komponenter; data, claim, warrant, backing, qualifier og rebuttal. I likhet med Trengreid så har jeg brukt Grepstad sin oversettelse av disse komponentene. (Grepstad 1997, s. 171) til påstand, belegg, hjemmel, ryggdekning, styrkemarkør og innvending. Jeg bruker i min analyse Påstand, belegg, hjemmel og ryggdekning.

Under kan man se Toulmins modell.




(Toulmin, 2003, s. 97)

Trengereid har lagd en modell som jeg tar utgangspunkt i med oversettelsen fra Grepstad.




(Trengereid, 2020, s. 26)

I praktisk argumentasjon er det vanlig at hjemmelen er underforstått. Derimot må påstand og belegg undertrykkes, ellers er det ikke noe argument. Argument blir brukt til å støtte konklusjoner vi er usikre på ved hjelp av opplysninger vi er sikre på. (Grepstad, 1997, s. 171).

I et argument kan det finnes tre andre elementer som ikke er obligatoriske og som alle har å gjøre med hjemmelen. For blir ikke hjemmelen akseptert faller argumentet. Igjennom styrkemarkører, som regel i form av adverb (adverb er noe som forklarer verb eksempel: jeg trente mye i går altså blir «mye» adverbet). Liknede modale utrykk kan forfatteren til å skjenne hvor sterkt han er villig til å stå innafor at påstanden er rett.

Toulmins modell har 4 hovedelementer. Påstand, belegg, hjemmel og ryggdekning. Jeg skal gi en beskrivelse av hva de ulike komponentene betyr, og hvilke oppgaver de ulike komponentene har i argumentasjon.

### 2.6.1 Påstand & Belegg

Det må både en påstand og et belegg til skal det kunne kalles et argument. Påstand er det man påstår er sant. For at påstanden skal ha noe hold så må man ha data som man kan henvise til at denne påstanden stemmer og er riktig. Belegg blir da dataen man henviser seg til for sannheten av en påstand. Altså er «data» eller belegg som jeg kaller det hva man refererer til for å vise gyldigheten av sin påstand hvis påstanden blir utfordret. *«Det er Påstand (et synspunkt som forfatteren ønsker tilslutning til), belegg. (den informasjonen som stør synspunktet).»* (Grepstad, 1997, s. 171). Man kan starte en argumentasjon fra en påstand åpenbart, men som modellen tilsier så kan man også starte argumentasjonen fra belegget. Men som Toulmin påpeker er de ikke sikkert at dataen svarer til de kravene som blir stilt eller at de ikke er overbevisende. Det kan hende at man ikke må legge til mere fakta informasjon altså ikke mere belegg eller data, men indikere betydningen for vår konklusjon av dataene som allerede er produsert. Med andre ord forklare hvorfor dataene er gyldig. *«Colloquially, the question may now be, not 'What have you got to go on?', but 'How do you get there?'.»* (Toulmin, 2003, s. 90). Dette er spesielt relevant for min oppgave der spørsmål som; hvordan kom du deg dit?, eller kan du forklare grunnen til at dette er sant? Når belegget ikke holder så må forklaringen på påstanden din ta i bruk neste komponent av Tulmins modell nemlig hjemmel. Toulmins argumentasjonsmodell er tatt i bruk i all slags argumentasjon. Et eksempel på påstand og belegg kan være som følger. Påstand skoler burde ha forbud om brus på skolen. Belegget ville da hypotetisk sett bestå av: Forbud mot brus på skolen ville beskytte helsen til elevene.

### 2.6.2 Hjemmel

Som nevnt ovenfor så er det ikke alltid at belegget er sterkt nok til å forklare og rettferdiggjøre påstanden. Da trenger man noe med forklarende kraft nemlig hjemmel. Toulmin forklarer det slik.;

> «oppgaven er ikke lenger å styrke grunnlaget vårt argument er bygget på, men er snarere å vise at med utgangspunkt i disse dataene, er steget til den opprinnelige påstanden eller konklusjonen et passende og legitimt. På dette tidspunktet er det derfor behov for generelle, hypotetiske utsagn, som kan fungere som broer og autorisere den typen skritt som vårt spesielle argument forplikter oss til» (Toulmin, 2003, s. 91 oversatt).

Med andre ord så blir oppgaven til en Hjemmel å være en begrunnende bro mellom belegg og påstand. *«hjemmel(den rettferdiggjøringa av forbindelse mellom belegg og påstand som gjør der mulig å godta påstanden).»* (Grepstad, 1997, s. 171). Toulmin tar opp at det ikke alltid er lett og skille mellom: Hva har du å gå på og hvordan kom du deg dit? Toulmin tar også opp grammatikk og hvordan den samme setningen kan bety forskjellige ting i forskjellige situasjoner. I en situasjon og formidle en del informasjon, i en annen for å autorisere et trinn i en argumentasjon, og kanskje i noen sammenhenger for å gjøre begge disse tingene samtidig. (Toulmin, 2003, s. 92).

Ser man litt kritisk på Toulmin sin modell så kan noen ganger være litt diffust hva som er belegg eller hjemmel. Man kan se på Toulmins modell går direkte tilbake fra kravet til belegget som er basert på som grunnlaget: Hjemmelen er på en måte tilfeldig og forklarende, dens oppgave er ganske enkelt å eksplisitt registrere legitimiteten til det involverte trinnet og å henvise det tilbake til den større klassen av trinn hvis legitimitet forutsettes. (Toulmin, 2003, s. 92). Det som var en omstridt påstand for hundre år siden, kan være en allmenn akseptert hjemmel i dag. Grepstad (1997) påpeker at Selv den strengeste vitenskapelige avhandlinga må forutsette noe kjent eller gitt. For at et argument skal være gyldig eller holdbart i Toulmins perspektiv, må det tilfredsstille krava til fremgangsmåten og inkludere hjemler som blir oppfatta som holdbare på det aktuelle området. (Grepstad, 1997, s. 171). Her er det viktig å legge merke til at hjemler og Toulmins modell generelt tar til hensyn hvem felt man er i.

Jeg fortsetter eksempelet med brus her også for å illustrere egenskapene til hjemmel i et argument. Hjemmel i brus argumentet ville blitt som følger: Dårlig diet fører til helseproblemer i unge barn. En annen hjemmel kunne ha vært: Det er skolens ansvar og beskytte elevenes helse

### 2.6.3 Ryggdekning

Ryggdekning kommer opp i argumentasjonen når det er tvil om det er hold
I hjemmelen. Når det er tvil om autoriteten til hjemmelen Backing. Kommer det spørsmål om hjemmelens gyldighet så er det ryggdekningen man henviser til. vi kan vi bli spurt om hvorfor denne hjemmelen generelt skal aksepteres som myndighet. Når vi forsvarer et krav, det vil si at vi kan produsere våre data, vår garanti og de relevante kvalifikasjonene og betingelsene, og likevel finne at vi fortsatt ikke har tilfredsstilt utfordreren vår. Det er da vi må henvise til ryggdekning (Toulmin, 2003, s. 96)
Hvorfor skal denne hjemmelen være gyldig? Hvilke data eller regler innenfor feltet vi argumenterer i kan støtte det hjemmelen sier mere legitimt. Dette er ryggdekning

Når det blir tvil om hjemmelen blir godtatt, kan denne få ryggdekning i form av ytterliggere dokumentasjon av det konkrete grunnlaget den generelle regelen hjemmelen bygger på. (Grepstad, 1997, s. 171). Ryggdekningen avhenger også i stor grad i hvilket felt man argumenterer i. Toulmin (2003) påpker at det øyeblikket vi begynner å spørre om støtten som en hjemmel er avhengig av på hvert felt, begynner det å dukke opp store forskjeller: hva slags støtte vi må peke på hvis vi skal etablere dens autoritet, vil endre seg sterkt etter hvert som vi beveger oss fra ett felt av argument til en annen.» (Toulmin, 2003, s. 96)

I fortsettelsen på brus argumentasjonen vil ryggdekningen til argumentet kunne sees slik ut: Skoler prøver å sørge for studentenes velvære på mange andre måter, for eksempel campussikkerhet og rådgivning for atferd og psykisk helse. Et annet eksempel på ryggdekning kunne ha hatt denne formen: Studier viser en høy korrelasjon mellom sukkerikholdige drikker og fedme.

### 2.7 Oppsummering

I teori kapittelet har jeg sett på Stylandies som tar for seg kriterier på hva gyldig bevis er i klasserommet og hva det må gjøre for å komme over en «bevis terskel». Jeg har tatt for meg ulike kategorier for å kategorisere elevargumentasjon. Jeg har presentert seks ulike bevisnivåer. Jeg har sett på pedagogisk begrunnelse bak bevis altså hvorfor bevis er gunstig i matematikkundervisning og hvordan type bevis man burde bruke i matematikk undervisningen. Jeg tar opp forskjellen på det Hanna kaller; «bevis som beviser» og «bevis som forklarer.» Jeg har tatt for meg hva begrepet utforskende undervisning innebærer. Og jeg har sett på bruk av Tulmins argumentasjonsmodell Jeg har godt igjennom de ulike komponenten av Tulmins modell. De nevnte teoriene er masteroppgavens teoretiske rammeverk. Disse teoriene gjør det mulig å kategorisere elveargumentasjon, og fange opp elevargumentasjonen.

# 3 Metode

I dette kapitelet tar jeg for meg kvalitativ forskning og hva dette innebærer i min oppgave. Jeg benytter meg av metoden deltagende observasjon. Jeg samler også inn skriftlige elevbesvarelser for å berike den deltagende observasjonen. Kapittelet går inn på hva min rolle som forsker blir, som vil bli veldig sentral, spesielt i deltagende observasjon der jeg blir til datainnsamlingsinstrumentet. Jeg begrunner hvorfor jeg tar lydopptak av datainnsamlingstimen og hvordan jeg opprettholder personvernet til elevene i en kvalitativ studie. Jeg har laget oppgavene elevene skal jobbe med i datainnsamlingstimen og kommer med begrunnelser på hvorfor jeg har valgt disse oppgavene og mere spesifikt hvordan oppgavene har en utforskende natur. Til slutt tar jeg for meg analyseverktøyet som består av: Toulmins argumentasjonsverktøy i kombinasjon med Balacheff 1988 sine fire kategorier i tillegg til kategoriene: legitimitet basert på autoritet og «på vei mot» det generiske eksempelet.

## 3.1 Kvalitative datainnsamlingsmetoder.

For å undersøke problemstillingen: «Hvordan arbeider elever på 9 trinn med utforskning av matematikk og hvordan type argumentasjon kommer frem når elevene jobber med bevis?» så trenger jeg en kvalitativ metode. En kvalitativ metode betyr metoder rettet inn mot å samle inn data først og fremst i form av ord som er rettet mot å beskrive og forstå menneskers handlinger og meningsskapingen i deres naturlige kontekst. (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 113). Dette Metode valget burde belyse og bidra til å få et valid svar på problemstillingen.

## 3.2 Observasjon

Jeg har valgt den kvalitative metoden observasjon er jeg tenker det er den metoden som egner seg best for å svare på problemstillingen.

*«Observasjon egner seg godt når forskeren ønsker direkte tilgang til det han undersøker, for eksempel samhandling mellom elever i et klasserom eller i en skolegård. I mange sammenhenger er den eneste måten og skaffe seg gyldig kunnskap på å være til stede i en setting.» (Christoffersen & Johannessen, 2012, s. 62).*

Christoffersen & Johannessen tar opp forskjellen på arrangert setting og naturell setting. I denne vil jeg observere på en arrangert setting der jeg setter elevene i gruppe og de jobber med noe spesifikt der interaksjonen mellom elevene er det jeg er ute etter. Jeg har altså bestemt settingen som elevene skal jobbe i.  I motsetning så har vi naturell setting som kan være feks. skolegården. (Christoffersen & Johannessen, 2012, s. 64). Når man som forsker observerer noe så er ikke det samme som å se på noe. *«Observasjon handler ikke bare om å se, men å bruke alle våre sanser for å oppfatte og forstå.»* (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 114).

### 3.2.1 Deltakende observasjon

Deltagende observasjon er den metoden jeg mener passer best for å samle inn de dataen jeg trenger for å svare på problemstillingen. Ved deltagende observasjon er jeg i en unik posisjon der jeg har veldig stor tilgang til konteksten. I denne studien må jeg ha tilgang til elevenes argumentasjon og formodninger. Jeg må også få tilgang til elevenes formodninger. Når jeg utfører deltagende observasjon, får jeg blant annet mulighet til å stille oppfølgingsspørsmål til elevene i selve datainnsamlingsprosessen. Det blir mulig å få en dypere forståelse av elevenes tanke gang der jeg som forsker har tilgang til konteksten. ha tilgang til konteksten som Knipping (2008) påpekte er sentralt for å kartlegge elevers argumentasjon

I deltagende observasjon er forskeren veldig i sentrum av datainnsamlingsprosessen. *«you are the research instrument in a qualitative study, and your eyes and ears are the tools you use to gather information"* (Maxwell, 2013, s. 88). Som Maxwell påpeker her så er det du som menneske som er et instrument som all informasjon og data må igjennom. Jeg påpekte innledningsvis at jeg har bestemt settingen elevene jobber i men fremdeles så kommer jeg til en viss grad inn på elevenes naturlige arbeidsmåte. *«I kvalitativ forskning gjennomføres observasjoner i naturlige situasjoner slik som de utspiller seg. Det blir i naturalistisk setting skjer ikke i laboratorium»* (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 113).

I deltagende observasjon så er graden av forarbeid redusert sammenlignet med andre typer observasjon. Deltakende observasjon faller under kategorien mindre strukturerte metoder. «Less structured methods trade generalizability and comparability for internal validity and contextual understanding» (Maxwell, 2013, s. 88). Som Maxwell påpeker, er det ulike fordeler og ulemper med en mindre strukturert metode. "Prestructuring your methods reduces the amount of data you have to deal with." (Maxwell, 2013, s. 89). Utfordringen med deltakende observasjon er at uforutsigbare typer spørsmål eller situasjoner kan komme opp. Dermed må jeg planlegge spørsmål og hva jeg skal si i klasseromsituasjonen nøye.

### 3.2.2 Lydopptak

I min oppgave skal jeg ta lydopptak og dermed redusere noen av de menneskelige feilene som hukommelse. Bjørndalen tar opp videoobservasjon som et svært viktig redskap. Han nevner også at lydopptak er en bra metode. Han hevder at videoopptak er overlegent i forhold til lydopptak og «Lydopptak kan mer betraktes som et alternativ når videoobservasjon anses som særlig problematisk.» (Bjørndalen, 2013, s. 158).

I min oppgave bruker jeg lydopptak, det er for og forenkle datainnsamlingsprosessen. Jeg tar ikke videoopptak fordi jeg ser på det som problematisk. Jeg skal gå rundt blant gruppene i klasserommet. Hvis jeg skulle ha filmet dette ville det ha krevd mye ressurser i form av kamerautstyr. Det er ikke tvil om at noe viktig data vil gå tapt fordi jeg ikke filmer, f.eks; kroppsspråk, ansiktsuttrykk og gestikulasjoner osv. Bjørndal påpeker at hovedfordelene med lydopptak er de samme som ved videoopptak. *«Man kan registrere mengder av informasjon* *som overskrider en observatør begrensede hukommelse og evne til å registrere detaljert informasjon, man kan redusere feilkilder i observasjon gjennom muligheten for å spille av utallige ganger»* (Bjørndalen, 2013, s. 159).

Jeg vil med å ta opp lyd ha mulighet til, som Bjørndalen påpeker, å kunne gå mye nærmere inn på dataene. Dette reduserer også i stor grad at dataene blir påvirket av de følelsene eller bias jeg har den dagen. Dette vil øke validiteten i analyse av arbeidet.  Det er fremdeles et menneske som skal analysere lydopptakene. Det menneskelige aspektet kommer jeg meg aldri bort ifra, men med midler som lydopptak så minsker dette menneskelige feil. Selv om jeg tar opp lyd så er det fremdeles utfordringer med deltagende observasjon. Strukturerer jeg innsamlingstimene vill disse utfordringene minskes.

Ved å bruke metoden deltakende observasjon og å samle inn skriftlig elevbesvarelser får jeg tilgang til elevenes dialog og interaksjon. I denne oppgaven er det analyse av elev argumentasjon som er i fokus dermed blir avspilling av lydopptak om og om igjen sentralt for å få nøyaktig representasjon av hva elevene prøver og argumentere for. Har jeg god tilgang på elevenes argumentasjon gjør dette det lettere å plassere elevers argumentasjon i Toulmins argumentasjonsmodell.

### 3.2.3 Validitet

Validitet Hvorfor gir metoden svaret på problemstillinga? Kvarv 2021 har dette å si om validitet:

> *«I en vurdering av validitet er en opptatt av hva som er målt, dvs. de innsamlede dataenes relevans i forhold til problemstillingen. I en sikring av dataenes validitet, er det ikke tilstrekkelig at de ulike operasjonene under innsamlingen og behandlingen av data er nøyaktig utført. I tillegg må forskeren få er bilde av den egenskapen ved respondentene vedkommende hadde til hensikt å måle.»* (Kvarv, 2021, s. 63).

Jeg sikrer validiteten i denne masteroppgaven først og fremst ved å bruke deltagende observasjon. Jeg har sannet inn de skriftlige elevbesvarelsene så disse elevbesvarelsene er tilsvarende lik som når jeg samlet dem inn fra undervisningstimen. Etter innsamlingstimene så transkriberte jeg lydopptakene av klassen. Jeg har prøvd etter beste evnen og gjengi elevenes argumentasjoner på en autentisk måte. Lydopptak bidro til at transkripsjonen ble mere nøyaktig og bidro til en mere nøyaktig representasjon av elvedialogen.  Christoffersen & Johannessen (2012) påpeker at Du som kvalitativ forsker vil oppdage at observasjonene trer frem som meningsfulle ved at du setter begreper på den og kategorisere dem for å få en bedre forståelse av forskningsfeltet. (Christoffersen & Johannessen, 2012, s. 62). I tillegg så skrev jeg observasjonsrefleksjoner dette bidro til at jeg kunne letter huske klasseromsituasjonen jeg hentet data dra. Denne refleksjonen bidro til et klarere bilde av blant annet gruppesammensetningen. *«Data er som sagt ikke selve virkeligheten, men representasjoner av den. Et sentralt spørsmål er da hvor godt, eller relevant, data representerer fenomenet.»* (Christoffersen & Johannessen, 2012, s. 24). Jeg har tatt grep i min innsamlingsprosess for å gjøre at dataen jeg samlet inn representerer virkeligheten.

### 3.3 Skriftlig elevarbeid.

I kombinasjon med deltagende observasjon så samlet jeg inn skriftlig elevarbeid. På oppgave arket jeg delte ut til elevene under innsamlingstimen var det plass til elevene og skrive ned sin besvarelse på alle oppgavene. Elevene ble bedt om å skrive ned sine tanker og formodninger på arket. Jeg bruker skriftlig elevmateriale for og støtte elevenes argumentasjon i analysen

### 3.4 Innsamlingstimene

Plan for gjennomføring av timen:

Elevene Jobber først selvstendig med oppgavene. Dette er fordi de skal få tid til å tenke selve og få tid til å danne egne resonnementer. De blir bedt om å skrive ned hva de tenker. Etter ca. 15 minutter med selvstendig jobbing så setter jeg elevene i grupper. Jeg tar en vurdering av hvor lenge elevene trenger å jobbe individuelt. Etter 15-20 min jobber elevene i grupper. Elevenes oppgave i gruppene blir å presentere løsningene til hverandre og argumentere for sin løsning av oppgaven. Under denne delen av timen går jeg rundt og utfører deltagende observasjon. Jeg tar opp lyd under gruppe diskusjonen/jobbingen. Etter timen så setter jeg med ned og skiver refleksjoner fra timen for og berike den deltagende observasjonen.

## 3.5 Deltagende observasjonsrolle

Min oppgave i klasserommet blir å observere elevers argumenter for sine egne resonnementer og argumenter for og imot andre sine. Min oppgave er ikke å veilede dem frem til noe svar, men og grave ut formodninger, jeg er ute etter hva elevene tenker *«Observasjon handler ikke bare å se, men å bruke alle våre sanser for å oppfatte og forstå.»* (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 114). Når jeg observerer elevene, blir det min jobb og bygge videre på spørsmål og dialoger de har og grave enda dypere i hva elevene prøver å si. Under innsamlingstimen er jeg i en spesiell situasjon man kan si at jeg «lever i konteksten». Dette vil si at under innsamlingstimen så må jeg være veldig konsis i hva jeg spør elevene om og holde fokuset mitt på og få elevens formodninger frem i lys.

Dette er spesielt viktig at jeg har tatt til betraktning når utfører av med deltagende observasjon under innsamlingstimen. Fibonacci prosjektet påpeker at man burde Spille rollen som en erfaren med forsker i stedet for som noen med alle svar. Videre påpeker de at man ikke burde gi for mange hint. Det blir også viktig å Gi oppmuntring til god tenkning, ikke bare for riktige svar. Ofte når du erkjenner et riktig svar, stenger du av å tenke på problemet, selv om elevene ikke forstår svaret. *«Du vil oppdage at hvis du gir svar og forklaringer for raskt, kan elevene fortsette å forvente og avhenge av svarene dine.»* (Artigue & Baptist, 2012, s. 16). Det blir med disse hensynene jeg går ut i klassen med.

Jeg skal forklare oppgavene og hva jeg ser etter i plenum for elevene for å minske misforståelser. Oppgavene kan være litt vanskelig å forstå spesielt oppgave 3. Jeg tar ting høyt i klassen i plenum om det oppstår nødvendighet for mere forklaring av oppgaven eller om det er noe som er uklart.

### 3.5.1 reliabilitet og subjektivitet

Mine erfaringer fra egen skolegang og kunnskap jeg bærer med meg er med på og farge hvordan jeg ser en skolesituasjon. (Christoffersen & Johannessen, 2012, s. 63). Jeg som forsker spiller en sentral rolle i innsamlingsprosessen alt jeg observerer og gjør i timen er preget av meg som person. *«En forsker innser også at forskningen som han eller hun gjør, aldri kan være objektiv, og at forskningen dermed alltid vil være verdiladet.»* (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 102).

Det er umulig å unngå subjektivitet og menneskelige feil. Jeg tar lydopptak som jeg tar opp senere for å minimere menneskelige feil. Det at jeg selv deltar i innsamlingsprosessen setter meg i en unik prosess til å justere ting og rette opp i misforståelser som kan oppstå.

Med metoden deltagende observatør er man som sagt en del av datainnsamlingen. Dermed har man stor innflytelse på observasjonssubjektene. *«Reliabilitet knytter seg til nøyaktigheten av undersøkelsens data som brukes; den måten de samles inn på, og hvordan de bearbeides.»* (Christoffersen & Johannessen, 2012, s. 23). Nøyaktigheten av dataene jeg samler inn kan bli svekket hvis elevene jeg observerer endrer atferd av mitt nærvær som forsker. Noe som jeg bruker en del tid på er å forsikre elevene om at det er deres tanker jeg er ute etter. Som jeg kommer inn på senere så stiller jeg ikke ledene spørsmål. Det er også nødvendig å påpeke at jeg hadde en relasjon til begge elev klassene der dataen ble innsamlet. Denne relasjonen kan ha gjort det lettere for elevene og være mere naturlig og ikke bli forstyrret av mitt nærvær.

## 3.6 Utvalg

Elevene som skal delta er de elevene som samtykket til å og være med i studien. Jeg sendte ut et samtykke skjema. (se vedlegg 1). Alle elevene fikk med undertegnelser læreren gjorde en bra jobb med å få flest elever med i oppgaven. Av praktiske grunner ble utvalget av elever 2 klasser med samme kontaktlærer på 9 trinn. Det var 2 klasser av forskjellig størrelse klasse C var mindre en klasse D. Jeg hadde også en god relasjon til elevene der jeg har undervist i begge klassene før. Dette kan ha bidratt til at jeg greide og snakke litt lettere med elevene. Om dette er positivt eller ikke er usikkert, men det gjorde det mindre smertefritt etter min mening og gå rundt og ta opp lyd uten at elevene la seg så mye opp i det. Siden jeg hadde den relasjonen jeg hadde så ble fokuset mere på faget en lydopptaket.

Det var 36 elever totalt fordelt på to klasser som deltok i denne studien

### 3.6.1 Gruppeinndeling

Gruppene blir ikke sortert etter faglig nivå der jeg mener det ikke er av hensikt. Oppgaven elevene skal jobbe med faller under utforskende oppgave. Det blir da problemløsning som er i fokus. Jeg har derfor valgt og ikke prioritere kompetanse i gruppesammensetningen. Jeg samarbeider godt med lærer og lot hen ta seg av gruppeinndelingen der læreren kjenner elevene best. Gruppene besto av 3 eller 4 elever.

## 3.7 Forsknings design

### 3.7.1 Pedagogisk hensyn

Oppgavene er laget med et pedagogisk hensyn der oppgavene stiger i vanskelighetsgrad og blir mer og mere abstrakt. Oppgavenes hensikt er å få elever til og vise tankegangen sin.

«*Elevene skal legge mer vekt på strategiene og framgangsmåtene enn på løsningene.»*(Utdanningsdirektoratet, 2020)

Det er fremgangsmåtene til elevene jeg vil kartlegge.

Jeg har laget oppgavene slik at den skal bevege seg oppover i grad av generalitet. Oppgavene og beviset elevene skal lage kan bevege seg mot det Hanna kaller *«a proof that explains»*. (Hanna, 1990, s. 9). Skal elevene få et forklarende utbytte så forutsetter dette at elevene jobber utforskende med oppgavene og kommer med formodninger. Elevene kan bruke hvilke som helst fremgangsmåte de vil og dermed så blir elevene en slags forklarer til seg selv via matematisk utforskning.

Det viktigiste med oppgaven et oppgaven gir meg tilgang til hvordan elevene resonnerte seg frem til et svar. Fakultet symbolet for eksempel er kjent for elevene. Men det kan komme til utrykk i forklaringen til elevene. Man kan se sammenlikning til hva Knuth påpekte. *«Hvis læreren lager læringsmuligheter for elever der de møter varierte typer av bevis kan elevene ikke bare få en dypere forståelse av bevis, men en dypere forståelse av de underliggende matematiske komponentene til beviset.»* (Knuth, 2002, s. 489). For at elevene skal få tilgang til disse underliggende matematiske komponentene så må elevene jobbe utforskende.

Videre i gruppeoppgaven er formålet og overbevise og samarbeide med medelever så «viser» elevene sine formodninger. Elevene er i en utforskningsprosess som forhåpentlig vis vil få elevene til og utforske og danne seg formodninger om egenskapen til matematikken. Selv om elevene kan formelen (N!) så er oppgaven og vise hvordan n! kan gi alle mulige kombinasjoner for alle antall bokstaver der det er ordnet utfall uten tilbakelegg.

### 3.7.2 Praktisk info om oppgaven

Elevene skal jobbe først med oppgavene individuelt i 15-20 minutter og så med de samme oppgavene i gruppe i 30 minutter. Elevene jobbet med de samme oppgavene individuelt som i grupper. Elevenes oppgave er å argumentere for sine formodninger og resonnementer fra den individuelle delen. Elevene skal argumentere for hvorfor demmes formodning er den beste og videre utvikle en bedre formodning sammen med de andre i gruppen. Alle elevene fikk utdelt individuelt oppgave ark. Elevene fikk også udelt et nytt oppgave ark i gruppeoppgave delen av innsamlingsstimen. Det er viktig at alle elevene skriver ned navnene sine på gruppeoppgaven og gruppe nummer. Dette er nødvendig får å få system under analysen av innsamlingstimene.

Elevene skal være opplyst om at det er mest fokus på oppgave 3 del 2 de andre oppgavene er der slik at elevene skal arbeide litt med oppgaver av lignende sort slik at de har noe og reflerre til i oppgave 3 del 2. Oppgave 1 og 2 er også med på å bekrefte i hvilken grad elevene har kjennskap til temaet de jobber med.

### 3.7.3 Begreper i oppgaveteksten

Jeg velger å ikke bruke begrepet bevis i oppgave teksten. Begrepet bevis kan bli et for abstrakt begrep i denne settingen. Dette eliminerer også tiden jeg ville ha brukt på å forklare i detalj hva det innebærer og bevise noe. Dette er jo selvfølgelig viktig at eleven vet hva er, men i og med at dette ikke er min klasse og jeg bar bare tilgang til elevene i 1 time og ikke har hatt tid til å bygge opp kompetanse rundt begrepet bevis litt som i Klassene til (Ball, 2007).

### 3.7.4 Tema for oppgaven

Elevene har kunnskap om kombinatorikk i med at de har hatt temaet sannsynlighet. Der kombinatorikk inngår i det gjennomgåtte temaet på skolen. Elevene har kjennskap til begrepene Med og uten tilbakelegg og ordnet og uordnet rekkefølge. Dette opplyste læreren til klassen jeg skulle gjennomføre datainnsamling meg om.  Dermed er elevene kjent til tema og kan til en viss grad trekke inn den første kritterien til Stylianides. Elevene har hatt en prøve og kjent med Fakultet og skjenner til formelen n!   «*Den bruker utsagn akseptert av klasseromsamfunnet (sett med aksepterte utsagn) som er sanne og tilgjengelige uten ytterligere begrunnelse*». (Stylianides, 2007, s. 290). (Oversatt av meg)

### 3.7.5 Skriftlig informasjon til elevene;

Navn på gruppemedlemmer:

Skriv navnet på hvem dere er på gruppe med og noter løsningene deres på dette arket her. Spør om ekstra ark hvis dere trenger det. Oppgaven deres blir å argumentere for hvorfor deres løsning er den beste. Diskuter oppgavene dere har gjort sammen i gruppa! **Diskjusjon**

### 3.7.6 Oppgave 1

Under er oppgave 1 slik elevene fikk den.

Argumenter for deres løsning og prøv å finne en felles løsning i gruppa.

De ulike kombinasjonene kan ikke ha gjentagende bokstaver slik som AAA. Kombinasjonene dere lager faller under det vi kaller **uten tilbakelegg og ordna rekkefølge**

Dere må kunne vise hvordan og hvorfor dere tror svaret ditt er riktig. Dere kan vise med tegning eller på den måten dere føler viser best at dere har funnet alle kombinasjonene.

Hvor mange ulike kombinasjoner kan man lage med bokstavene, A, B og C?

### 3.7.7 Oppgave 2

Argumenter for deres løsning og prøv å finne en felles løsning i gruppa.

Hvor mange ulike kombinasjoner kan man lage med bokstavene, A, B, C og D? Dere skal også vise hvordan dere har kommet frem til svaret deres

### 3.7.8 Oppgave 3

Argumenter for deres løsning og prøv å finne en felles løsning i gruppa.

Dere skal prøve å finne ut en måte slik at du kan vise hvor mange bokstavkombinasjoner det blir med alle bokstavene. Er det en måte å finne ut av hvor mange kombinasjoner det blir for 5,6,7.... bokstaver?

Dere skal kunne **vise** og **forklare** hvordan dere kom frem til svaret deres.

Jeg har presisert at oppgaven til elevene blir og vise og forklare og det er det jeg vil ha som svar. Det er ikke 1 svar jeg er ute etter, men hvordan dere kom frem til svaret.

Hvor mange kombinasjoner kan du lage med; A, B, C, D, E og F?

### 3.7.9 Oppgave 3 del 2

Oppgave 3 del 2 vil falle under utforskende undervisning. Oppgaven lyder som følger: **Er det en måte å vise alle kombinasjoner for alle antall med bokstaver?** Jeg har tatt inspirasjon av Fibonacci prosjektet der de tar opp hva «inquiry-based learning» eller utforskende undervisning burde inneholde: *«Vi ber dem om å stille spørsmål, å utforske, å observere, å oppdage, å anta, å forklare, å bevise. Denne listen over praksis viser grunnleggende aktiviteter for en utforskende tilnærming til matematikk.»* (Artigue & Baptist, 2012, s. 15).

Oppgaven har en utforskende natur, men samtidig så krever oppgaven at elevene beviser noe. Det er mange forskjellige fremgangsmåter og komme seg frem og vise svaret på. Som Hanna (1990) tar for seg er det forskjell på ulike typer bevis får at elever skal kunne bevise det oppgaven spør om så krever det at elevene utforsker de matematiske kvalitetene med ordnet utfall uten tilbakelegg. Som jeg presiserer i oppgave arket og muntlig i innsamlingstimen er det sentralt at elevene skal vise tankegangen og et svar uten begrunnelse er uviktig. Dette kan ses i sammenheng med hva Knuth påpeker er det relevant det holder ikke bare og om en formodning er riktig, men hvorfor den er riktig. (Knuth, 2002, s. 487). Selv om jeg ikke nevner begrepet bevis for elevene er det bevis elevene jobber med. Videre så håper jeg slik Hana (2013) påpeker at *«Behovet for å definere presist springer ut av kravene bevis stiller, ikke som vilkårlige definisjoner gitt utenfra.»* (Hana, 2013, s. 129). Oppgaven kan også ligne på strukturen til ett åpent problem. Pedmonte (2007) sier at åpne problemer som ber om en formodning ser ut til å være ekstremt effektive for å introdusere bevislæring.

## 3.8 Personvern og Estiske vurderinger

Som jeg nevnte tidligere så er utvalget elever de som har samtykket til og være med i prosjektet. Se vedlegg (1) for samtykkeskjema. Jeg skal ta lydopptak i klasserommet dermed kan ikke de elevene som ikke har fått samtykke være på samme klasserom. Jeg må derfor tilrettelegge for de andre elevene et annet sted og gjennomføre samme opplegget på uten å bli tatt lyd av. Dette kan være litt problematisk, men med godt samarbeid med lærer skal dette være overkommelig.

I sammenheng med at jeg skal samle inn skriftlige elevmateriale som inneholder navn og ta opp lyd i klasserommet så har jeg laget samtykkeskjema til foresatte. Jeg sendte samtykke skjema til NSD og fikk samtykkeskjemaet og opplegget godkjent. Det er viktig at foresatte og elever er klar over hva slags data som blir samlet inn slik at de kan gi et informert samtykke. Det blir også viktig at jeg har et godt samarbeid med lærer. I det tilfelle jeg ikke får samtykke av alle elevenes foresatte så kan jeg allikevel samle inn data slik at det ikke går på bekostning av faglig utbytte eller personvern til elevene som ikke skal delta.

Videre har jeg ser jeg på NESHs retsningslinjer, 1. Informantenenes rett til selvbestemmelse og autonomi: Vedkomne som deltar i en studie skal gi uttrykkelig informert og frivillig samtykke. Se Vedlegg (1) for samtykkeskjema. De skal også ha rett til under hvilket som helst tidspunkt og trekke tilbake sin besvarelse. (Christoffersen, Johannessen, 2012, s. 41). Dette ble forklart på informasjonsskrivet. Jeg delte ut til alle elevene og ingen elever fikk være med på undersøkelsen uten undertegnelse fra foreståtte der elevene var på 9 trinn og var under 16 år.

NESHs retsningslinjer, 2. «Forskerens plikt til å respektere informantenes privatliv.» (Christoffersen, Johannessen, 2012, s. 41). I min studie er det mest sensitive informasjonen jeg behandler elevbesvarelser med navn og lydopptak. Lydopptaket blir lagret på Nettskjema sine nettsider der de blir lagret kryptert, alle elevbesvarelser blir ødelagt når oppgaven er levert. Alle navn i elevbesvarelsen blir byttet ut med andre navn.

I forbindelse med lydopptak og de skriftlige elevbesvarelsene ble disse dataene behandlet etter NESH sine retningslinjer. Alle elevbesvarelser har blitt anonymisert. NESH sier følgene om anonymisering. *«Anonymisering innebærer at forbindelsen mellom personer og informasjon blir fjernet, slik at opplysningene ikke kan spores tilbake til individet.»*(NESH, 2021, s. 21).

## 3.9 Teoretisk analyseverktøy

### 3.9.1 De 4 komponentene til Toulmin i utrykk i klasserommet

De 4 komponentene jeg tar i bruk fra Toulmins analyse verktøy er: Belegg, påstand, hjemmel og ryggdekning. I og med at jeg hadde så kort tid til å høre på forklaringene til enhver gruppe så var det skriftlige elevmaterialet veldig støttene i forhold til og supplere på elevenes argumentasjon. De skriftlige besvarelsene til elevene blir Belegget. Som det sto i oppgaven elevene jobbet med i datainnsamlingstimen så var jeg ute etter elevenes tanker og de skulle skrive ned på arket det elevene innad i gruppen ble enig i som den beste løsningen. Det ble sagt til elevene implisitt at «tankene måtte ned på arket for at besvarelsen skulle telle. Det blir da naturlig og se på elevnotasjon eller den skriftlige elevbesvarelsen som belegget. Påstanden blir utrykt muntlig som et svar på oppgaven.

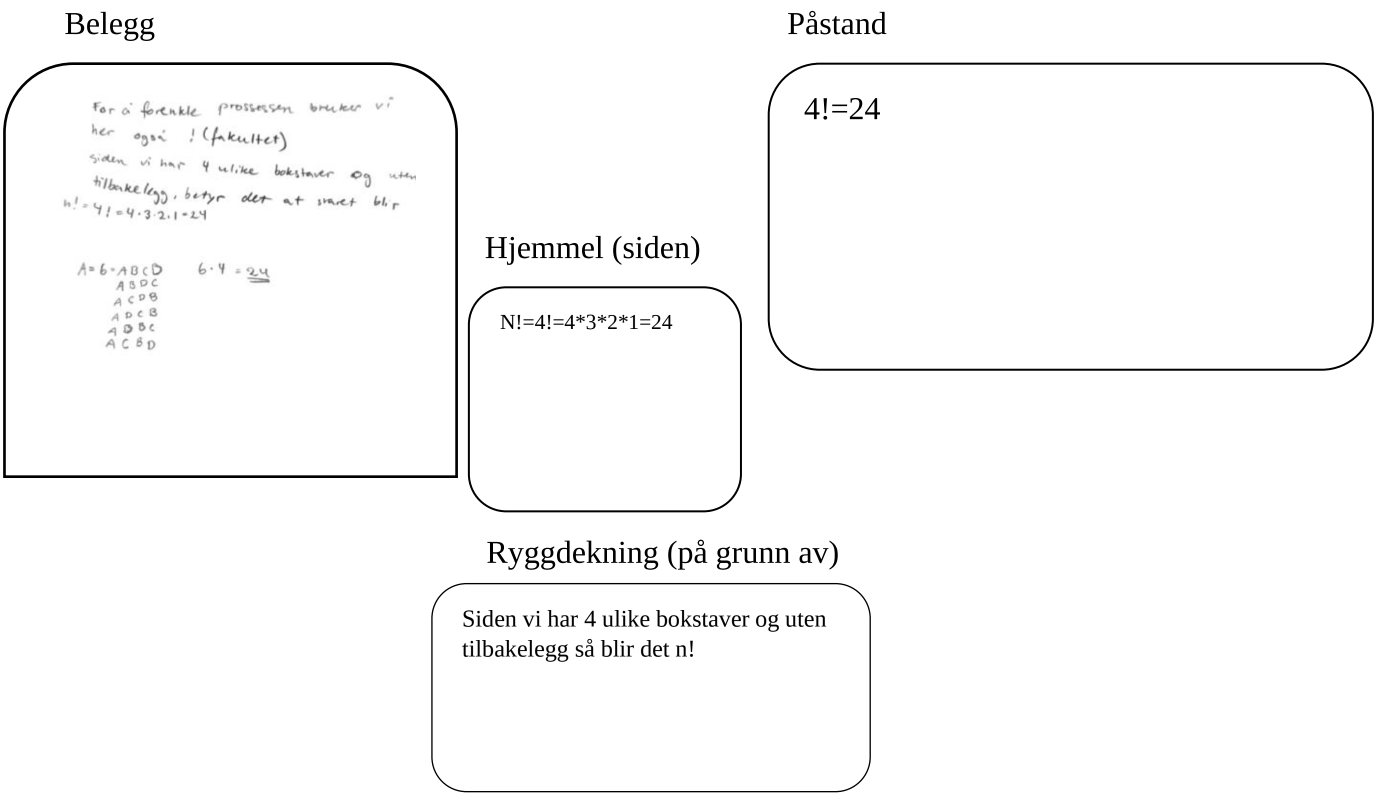
Hjemmelen vil komme til utrykk når jeg spør om forklaring på belegget og påstanden. Elevene henviser til hjemmelen når spørsmål som: hvordan har du kommet frem til det eller mere prevalent; hvordan kan du vite at dette stemmer? Ved hjelp av spørsmål av denne typen så kommer hjemmelen til utrykk. Svar på den siste oppgaven; Hvordan kan det stemme for alle mulige bokstaver? henviser elevene ofte til en modell som forsøker å representere det generelle. Dette kan også være i hjemmel området der de bruker modellen til og begrunne hvorfor påstanden er sann. Ryggdekningen kommer frem når

*«Når det blir tvil om hjemmelen blir godtatt, kan denne få ryggdekning i form av ytterligere dokumentasjon av det konkrete grunnlaget den generelle regelen hjemmelen bygger på.»* (Grepstad, 1997, s. 171). Si elevene henviser til gyldigheten av N! og som i eksempelet ovenfor blir ryggdekningen hvorfor N! stemmer og henviser dette til ordet utfall uten tilbakelegg. Dermed har eleven begrunnet valget av N! på bakgrunn av de matematiske egenskapene til en sannsynlighets rekke med orden utfall uten tilbakelegg. Derimot grunnene til hvorfor elever henviser til N! er varierende og blir blant annet mye av det jeg har fokus på i analyse delen.

### 3.9.2 Kritikk mot Toulmins modell

Selv om Toulmins modell har vært nyttig i mange forskningsarbeid kommer Pedemonte & Ballacheff  (2015) kommer med følgene kritikk:. På den ene siden de som hevder at strukturen til argumentene noen ganger ikke tar hensyn til deltakernes kunnskapsgrunnlag, på den andre siden de som hevder at hjemmelen noen ganger er tvetydig fordi den relaterte regelen ikke er klart definert.» Grepstad (1997) kommer også med litt kritikk der han påpeker at: utover det at belegget må være utrykt mens hjemmelen kan være underforstått er ikke forskjellene mellom de to elementene krystallklare.» (Grepstad, 1997, s. 171). Selv om Tulmins argumentasjonsmodell kan være uoversiktlig og det kan under noen tilfeller være vanskelig og skille mellom Belleg og Hjemmel så velger jeg å bruke denne modellen. Jeg velger å bruke modellen fordi den gjør det mulig og fange opp argumentasjon på en lettvinn måte. Rent praktisk er modellens struktur veldig gunstig for å holde orden på en gruppes argumentasjon. Der modellen får med hovedargumentasjonen og viser den på en oversiktlig måte.

### 3.9.3 Min versjon av Toulmins modell.




Min versjon av Toulmins argumentasjonsmodell. Jeg har valgt å gå for dette designet av praktiske grunner. Min bruk av modellen er begrenset der jeg foreksmepel ikke tar i bruk «Rebuttals» Altså er det jeg bruker modellen til er som jeg nevnte og presentere argumentasjonen på en oversiktlig måte. Jeg har tatt en mer helhetlig fremgangsmåte av kartlegging av argumentasjon der jeg viser argumentasjonen som et ferdig produkt.

## 3.10 bevis kategoriene i utrykk i klasserommet

### 3.10.1 Elev argumentasjon som bruker autoritet som legitimitet

Dette nivået er henter med inspirasjon fra bevisnivået nr 1 til Russel et al (2011): «1 akseptere utsagnet basert på autoritet» Hvis en lærer presenterer en matematisk regel eller sier noe i klassen om matematikk så har læreren en viss autoritet. Det er igjennom læreren at elevene har fått informasjonen og igjen skolesystemet og lærerplaner som bestemmer hva elevene skal lære. Som elev så kan man tolke dette som at det som kommer ut av læreren er sant uten noe mere baktanke om dette. Det som gjør noe legitimt i matematikken for elever som tenker slikt er ikke matematikken i seg selv, men personen som snakker om matematikken. Jeg har funnet en del eksempler på dette i dataen jeg samlet inn. En god del av gruppene og elevene legitimiteter formelen N! fordi det var læreren som sa at det var sant. Noen elever sa det må jo være sant fordi læreren ville jo ikke ha lært oss noe som ikke stemmer. Jeg kommer inn på slike elevfeil senere I analysedelen. Altså kommer dette bevisnivå til utrykk når elever argumenterer for sannheten av en påstand henviset til autoritet som legitimitet.

### 3.10.2 Elevargumentasjon under Naiv empirisme

Naiv empirisme betyr å anta at en formodning eller bevis er sann på bakgrunn av utprøvelse på noen få eksempler. (Balacheff 1988). I data materialet jeg samlet inn kommer naiv empirisme til utrykk når elevene prøver å bevise noe generelt, men de viser at formelen n! funker for eksempel for 6!. Elevene viser ofte til oppramsing av bokstaver Elevene som argumenterer på naiv empirisme nivået viser til en utregning og plasserer n! foran uten videre begrunnelse. Dermed antar elevene at noe er sant bare fordi de har prøvd det ut med en utregning. Det som kjennetegnet naiv empirisme i dataen, var at de antok at noe var sant utenom videre begrunnelse en henvendelse til noen få utregninger.

### 3.10.3 Elevargumentasjon under Det avgjørende eksperimentet

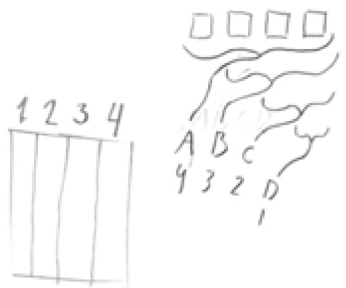
Det som kjennetegner kategorien det avgjørende eksperimentet (Balacheff 1988), er og anta at noe er sant på grunnlag av et eksempel som man ikke ser på som så spesielt og får riktig svar på dette ene eksempelet og antar at det er sant utfra dette. Gruppene som gjør dette, satser altså alt på et eksempel som ikke er noe spesielt. Et konkret eksempel er hvis elevene hadde kommet med påstanden. N! funker for alle mulige antall bokstavkombinasjoner som er ordnet utfall uten tilbakelegg. Dette kan vi se siden vi har testet med 4! og tegnet opp alle bokstavene og sett at det stemmer med 4! nemlig 24 kombinasjoner. Hvis elevene da trekker slutningen at n! fungerer for alle mulige bokstavkombinasjoner på grunnlag av denne ene utprøvningen argumenterer elevene under kategorien det avgjørende eksperimentet.

### 3.10.4 Elevargumentasjon under «på vei mot» Det generiske eksempelet

Elever som argumenterer under kategorien «på vei mot» det generiske eksempelet argumenterer for noe generelt på et spesielt tilfelle. Dette bevisnivået er relativt likt som det generiske eksempelet. Det som gjør «på vei mot» til en egen kategori er at det bare inneholder noen av elementene til i dette tilfellet ordnet utfall uten tilbakelegg. Dette bevisnivået kommer til utrykk i analysen på mange forskjellige måter. En måte nivået kommer til utrykk er at elevargumentasjonen får frem noen av egenskapene til ordnet utfall uten tilbakelegg, men ikke alle. Elevene som argumenterer på dette bevisnivået kan få med egenskapene til det matematiske, men argumentasjonen som helhet er ikke på det generiske eksempelet sitt nivå. Et eksempel fra dataen er hvordan elevene henviser til ulike modeller disse modellene representerer egenskapene til ordnet utfall uten tilbakelegg, men forklaringen av modellen kan være utilstrekkelig.

### 3.10.5 Elevargumentasjon under Det generiske eksempelet

Det generiske eksempelet innebærer at elevene tar et spesielt eksempel og finner det generelle som gjelder for den klassen av matematiske objekt det er snakk om i dette tilfellet antall kombinasjoner med ordnet utfall uten tilbakelegg.  Elevene må argumentere for hvorfor noe er kjennetegn på den matematiske klassen. Det generiske eksempelet kommer ofte kombinert med visuell støtte som skal gi forklarende støtte for generaliteten av objektet. Denne visuelle støtten er ofte representert i ulike modeller som viser til de ulike mønstrene elevene plukker opp som kjennetegner kombinasjoner med ordnet utfall uten tilbakelegg. Det som kjennetegner at elever argumenterer på nivået det generiske eksempelet er at de tar opp et spesifikt eksempel og påpeker det generelle med matematikken det er snakk om. Det er for eksempel noen elever som har laget en modell som viser til at vær bokstav har en viss plass og når du «bruker» en bokstav til en kombinasjon så blir det en plass mindre.




Her kan vi se et forsøk på modellering på de generelle egenskapene til den matematiske klassen ordnet utfall uten tilbake legging. Det er mange måter og representere noe for å få frem det generelle ved den matematiske klassen. Men elevene må kunne forklare hvorfor noe er generelt og i denne oppgavekonteksten hvordan noe kan gjelde for alle mulige bokstavkombinasjoner. Har elevene igjennom oppgavejobbingen klart og vise noe noe generelt via noe spesielt så

### 3.10.6 Elevargumentasjon under Tankeeksperimentet

Som jeg nevnte tidligere, er det svært krevende og argumentere under bevisnivået Tanke eksperimentet. Som Ballacheff (1988) er bevisnivået Tankeeksperimentet innunder det konseptuelle nivået. Alle elevbesvarelsene befant seg i det pragmatiske domene.

# 4 Analyse

I innledningen viste jeg til min Problemstilling: Hvordan arbeider elever på 9 trinn med utforskning av matematikk og hvordan type argumentasjon kommer frem når elevene jobber med bevis? Jeg har fokusert analysen igjennom disse forskningsspørsmålene.

## 4.1 Forskningsspørsmål:

> Hvilke bevisnivåer argumenterer elever på 9 trinn på når de lager seg en formodning om det matematiske objektet ordnet utfall uten tilbake legging.
>
> I hvilken grad gir utforsking av et matematisk objekt elever tilgang til de underliggende matematiske egenskapene til det matematiske som blir utforsket?
>
> Hva legitimerer elever på 9 trinn matematiske formodninger med under argumentasjon mot et bevis?

Jeg undersøker disse forskningsspørsmålene med utgangspunkt i 9 trinns elevers utforskning, argumentasjoner og formodninger av det matematiske objektet Ordnet utfall uten tilbakelegg eller kombinatorikk.

## 4.2 Teori og fokus i analysen

Mine briller består av Toulmins argumentasjonsmodell for å kartlegge påstanden og begrunnelsen til argumentasjonen til elevene på gruppen. Denne modellen lar meg kartlegge argumentasjon. Videre bruker jeg Ballacheff sine kategorier pluss kategoriene autoritet som legitimitet og «på vei mot» det generiske eksempelet.  for å kartlegge graden av bevis og resonerings nivå. Jeg bruker også Stylianides for å rettferdiggjøre matematiske utsagn i klassen hvilke typer med argumentasjon representasjon elevene bruker i sine formodninger og gyldigheten av disse pluss elevenes sett med almen aksepterte utsagn. Klassens viktigste sett med aksepterte utsagn vil være de matematiske begrepene; N!, ordnet utfall uten tilbakelegg. Og ukjent variabel» (Stylandies 2007)

### 4.2.1 Argumentasjon Toulmin

Som jeg nevnte tidligere består argumentasjonsmodellen til Toulmin av 4 deler oversatt av Grepstad til: Belegg, påstand, hjemmel og ryggdekning. Belegget til nesten alle gruppene besto av skriftlig svar på oppgave 3 (del 2). Påstanden besto av den muntlige eller skriftlige argumentasjonen for hvorfor dataen var sann eller kunne stemme. Hjemmelen til elevene besto av begrunnelse av påstanden denne begrunnelsen varierte veldig fra gruppe til gruppe. Ryggdekningen varierte i lik stand som hjemmelen. Det er vært å nevne at det var ikke mye uenigheter innad i gruppen det var veldig få ganger at enkelt elever på gruppen argumenterte imot hele gruppens konsensus. Dette kan være skyldig i mange ting gruppe sammensetningen, for liten tid, uvant og jobbe utforskende. Jeg velger å ha fokus på gruppas argumentasjon som en ferdig formodning eller produkt det som står i belegget og forklaringen av det er det jeg ser på som argumentets helhet. Enkelte innvielser underveis der jeg ikke ser det som hensiktsmessig. Argumentasjonen slik den er presentert av meg i analyse delen er gruppens argument og svar på oppgaven. Toulmins verktøy har gjort det mulig å fange opp belegg og påstander og sammenligne de ulike hjemlene og ryggdekningene. Argumenter elevene utover Belegg og Påstand

### 4.2.2 Hva analyserer jeg?

I analysen retter jeg fokuset mitt mest på oppgave 3: «Er det en måte å vise alle kombinasjoner for alle antall med bokstaver? Og Hvor mange kombinasjoner kan du lage med; A, B, C, D, E og F?» Jeg har mest fokus på oppgave 3 og da del 2 av oppgave 3; «Er det en måte å vise alle kombinasjoner for alle antall med bokstaver?». Jeg har analysert denne oppgaven mest fordi det er den oppgaven som er designet med formålet at elevene jobber utforskende. Elevene ble bedt om å vise sine tanker under alle oppgavene dette har ført til at noen interessante formodninger har kommet opp på andre oppgaver en den siste. Dermed har jeg under noen tilfeller analysert andre oppgaver en oppgave 3 del 2. Noen grupper har begynt å danne formodninger om en generell løsning fra oppgave 1 og bygger videre fra en oppgave til en annen. Dermed blir hjemmelen (Toulmin, 2006) i noen tilfeller basert på tidligere oppgaver.

Som sagt er det skrevet i oppgave teksten: Dere skal kunne **vise** og **forklare** hvordan dere kom frem til svaret deres. Jeg presisert flere ganger under timen til elevene at elevenes oppgave er å vise tankene sine og hvordan de kom frem til svaret. Det å få riktig svar er ikke viktig, men strategiene og fremgangsmåtene frem til svaret er det jeg er ute etter. Fokuset jeg hadde under analysen og i design av oppgaven kan ses i sammenheng med LK20 sitt kjerneelement om utforskning og problemløsning og mine forskningsspørsmål.

I dette kapittelet skal jeg analysere skriftlig elevbesvarelser og muntlig argumentasjon i grupper i to forskjellige 9. klasser. Jeg analyserer transkriberingen fra innsamlingstimen og de skriftlige elevbesvarelsene.

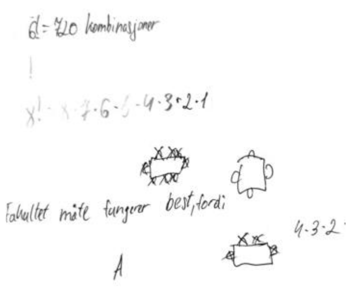
Viktig terminologi i analysen når det står semikolon; så er det jeg som bryter inn og stiller spørsmål.

### 4.3 Klasse D

#### 4.3.1 Gruppe 5d oppgave 3

Gruppe 5d løsningen på oppgave 3 og mere spesifikt resonnementene og argumentasjonen rundt del 2 av oppgave 3 *«Er det en måte å vise alle kombinasjoner for alle antall med bokstaver?»*

Belegg




Påstand

Fakultet fungerer best; fordi det <u>ordnet utvalg uten tilbakelegging.</u>

Hjemmel

er på en måte fordi det <u>ordnet utvalg uten tilbake legging.</u>

Ryggdekning

Liksom hvis vi tar ett bord med 4 stoler også tar vi 1 da blir det 4 ganger 3 også tar vi den andre ganger 2 også blir det ganger 1 til slutt. (elev 2) fordi det bare er så så mange plasser så er det bare 3 mulige valg igjen også blir det bare mindre og mindre.

Som vi kan se har elev 1 og elev 2 på gruppen svart på det første spørsmålet. Elevene kommer med begrunnelse på hvorfor man kan bruke fakultet altså blir hjemmelen: Man kan bruke fakultet på grunn av at det er ordnet utvalg uten tilbake legging. Stian prøver og representere hvorfor fakultet fungerer hen lager en representasjon av bord og stoler og poengterer at hvis man har et bord med 4 stoler og tar bort 1 så sitter vi igjen med 4*3 også går det nedover. Karl påpeker at *«siden det bare er så så mange plasser igjen så er det bare 3 mulige valg igjen også blir det bare mindre og mindre»*. Dette resonnementet kan falle under «på vei mot» det generiske eksempelet. Det har blitt gjort et forsøk på transformasjon av objektet og bord og stol modellen/representasjonen kan være en representasjon av klassen som inneholder de karakteristiske egenskapene og strukturen til klassen. Ordlyden; «også blir det bare mindre og mindre» kan gi utrykk for at de er på vei mot å forstå hva som kjennetegner klassen objekter det er snakk om, men de ligger fremdeles innenfor kategorien «på vei mot» Det generiske eksempelet. Der elevene bare har testet med 4 forskjellige bokstaver. Et argument for at «bord stol representasjonen» har tatt elevene ut av naiv empirisme domene kan være valid, men de har ikke eksplisitt bevist for alle mulige bokstavkombinasjoner. Eller med andre ord Forklart generaliteten ved representasjonen eller modellen.  Elevene har derimot vist hvor mange kombinasjoner man kan lage med 6 og 4 kombinasjoner med bokstaver.

Elevene har også misforstått litt hva x! står for der de skriver x! = x*6*5*4*3*2*1. om dette er noe mere en skrivefeil er vanskelig å si, men som vi ser senere på andre grupper som har brukt N eller X som en representasjon av alle tall så nevner ikke denne gruppen at X er en ukjent variabel. Men i å med at de bruker både N og X så kan de tolkes til at de forsår at N representerer alle mulig tall.  På elevenes skriftlige svar så skrev elevene «fakultet fungerer best fordi: (og henviser til modellen). I ordlyden: «fungerer best fordi:» så kan det som en hjemmel for legitimering av bruk av N! på grunnlag av ordnet utfall uten tilbakelegg. Det kan ligne på formen *«på grunn av Belleg som D så kan man dra slutningen C»* (Toulmin, 2003, s. 91). Hadde elevene koblet opp N! eller X! med modellen så hadde denne elevargumentasjonen vært enda nærmere det generiske eksempelet. *«Den skal uttrykke hvorfor det spesielle tilfelle gjelder for alle tilfeller.»* (Balacheff, 1988, s. 219). Elevene argumenterte bare for noen deler av det matematiske objektet. Dette tokk elevene vekk fra bevis nivået generisk eksempel.

### 4.3.2 Gruppe 4d oppgave 3

Belegg

$10! = 10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1$

$6! = 6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1$

n! = antall bokstaver!

Påstand

Vi er ferdig N!

Hjemmel

Hva legger dere i bokstaven N? ; N representerer tallene.

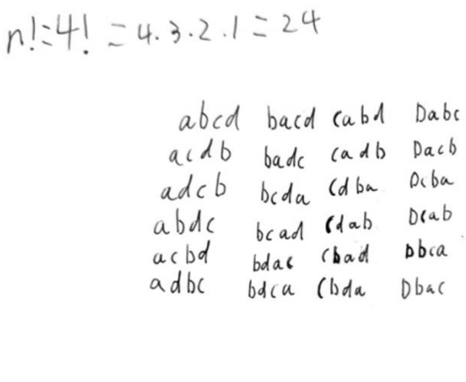
Ryggdekning

*«Det er som sån vi lærte da at det skal være n fakultet.»*

Silje sier at 10! ikke stemmer Kari retter opp og sier at det må være 6!. Denne forklaringen svarer på første del av oppgave 3 der de kan vise til at 6! stemmer. I andre del der de skal vise for alle antall kombinasjoner for alle antall med bokstaver så skriver de n! =antall bokstaver. Formelen n! som er en del av klassens *«sett med aksepterte utsagn.»* (Stylianides, 2007, s. 290). Som sagt har elevene hatt prøve og gjennomgang om tema og kjenner til formelen n! godt fra før. Eleven har vist til riktig formel og indirekte vist at n står for en ukjent variabel. Elevene har lært formelen, men det var klart for elevene at de måtte kunne vise hvorfor dette kunne stemme. Det kom til utrykk når jeg intervjuet elevene at de hadde skjønt at de skulle bruke formelen, men ikke hvorfor. *«Det er som sån vi lærte da at det skal være n fakultet.»*

Elevene er ikke kjent med å bevise eller argumentere for hvorfor en matematisk påstand er sann dermed kan det kanskje være naturlig for elevene at noe er sant bare fordi de lærte det. Altså blir hovedargumentet til elevene på gruppe 4d at n! er riktig formel å bruke siden de lærte det. Elevene greier ikke å løsrive seg fra skolen eller læreren som gyldighet.

Gruppe 4d hadde en interessant utvikling fra oppgave 2. de startet med å sette opp en fin oversikt med alle kombinasjonene. Begrunnelsen elevene ga til oppgave 2 er på et mye høyere nivå enn på oppgave 3 der de faller tilbake til Autoritet som legitimitet Russel et al (2011)

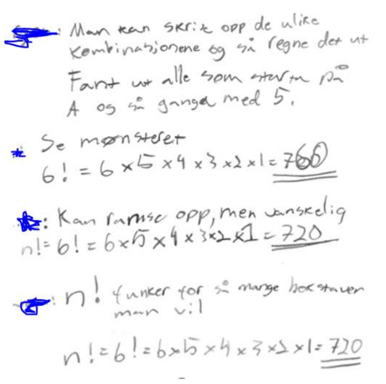



De begrunner bra og kobler opp med at de testet for mange kombinasjoner. «fordi vi testet her ved å se hvor mange kombinasjoner vi kunne skrive opp». Svaret fra gruppe 4d på oppgave 2 kan begynne å nærme seg det generiske eksempelet Balacheff (1998). Det som er interessant her er at elevene beveger seg ned i grad av generalisering og faller tilbake til begrunnelse som baserer seg på autoritet etter at de har laget en god formodning på oppgave 2. Det er mange grunner til at dette kan skje, mest sannsynlig er det å vise eller begrunne noe for alle mulig tilfellet er så nytt for elevene at de ikke hadde noe konsept om hvordan begynne på dette, i oppgave 2 så var oppgaven av mindre utforskende grad og med klare rammer, elevene skulle bare vise for 4 kombinasjoner og formelen n! var kjent. De forsto også at det å sette dem opp i grupper på 6 var en lur løsning. Elevene så ikke sammenhengen fra oppgave 2 til oppgave 3. De skriver jo riktig svar «n! = antall bokstaver!). Bellegget er riktig, men hjemmelen til elevene går fra i oppgave 2: «fordi vi testet her ved å se hvor mange kombinasjoner vi kunne skrive opp» . Elevene kunne altså vertifisere at 4! stemte med antall bokstavkombinasjoner. Elevene kunne ikke verifisere på sammen måte på alle antall bokstaver altså n bokstaver. Dermed ble ryggdekningen til hjemmelen: *«Det er som sån vi lærte da at det skal være n fakultet.»*

### 4.3.3 Gruppe 2d oppgave 3

Her har elevene regnet ut 6! og prøvd og koble oppgave del 1 med oppgave del 2. En elev på denne gruppen forlot timen midt under oppgave jobbingen.

Belegg




Påstand

n!=6!

Hjemmel

Se mønster

6!=6*5*4*3*2*1=720

Ryggdekning

n! funker for så mange bokstaver man vil /Se mønster: 6!=6*5*4*3*2*1

Her kan man se at belegget består av alle elevene på gruppen sin formodning samlet som en besvarelse.  Elevene svarer på del 1 av oppgaven og får som svar 6!. Elevene forsøker og bygge videre fra del en av oppgaven og bruke svaret for å forklare videre. Nils kommer med følgene formodning; *«N! funker for så mange bokstaver som man vil»* Det kan mulighengs tolke hjemmelen til elevene slik; siden 6! = 6*5*4*3*2*1 så er det et mønster siden N! står for alle mulige bokstaver så må N! være løsningen for å vise for alle mulige kombinasjoner med bokstaver. Denne gruppens forklaring kan nærme seg det generiske eksempelet (Balacheff, 1998). Svaret nærmer seg siden de henviser til 6! og egenskapene til regnerekefølgen den tilsier flere ganger, men begrunnelsen er ikke forklarende nok og havner heller innenfor det avgjørende eksempelet (Balacheff, 1998). Elevene tar opp n! og de forstår at n star for så mange bokstaver man vil. Men elevene har ingen modell eller struktur de henviser til som kan forklare det spesielle med den matematiske klassen objekter «ordnet utfall uten tilbakelegg» annet en 6!. Dermed satser de alt på 6! de tenker at dette er en bra representasjon som ikke er så spesiell. Det som kan vise at gruppen er «på vei mot» det generisk eksempel territoriet er utsagnet til Vetle: «se mønster» der han refferer til 6!=6*5*4*3*2*1. Her har eleven vist til egenskapene med klassen og eleven kommer med argumentet implisitt. Det er mulig å tolke seg frem til hva eleven mente, men forklaringen blir ikke generell nok for kategorien «på vei mot». Han bruker bare 6! = 6*5*4*3*2*1 for å forklare mønsteret sitt dette blir ikke utdypende nok for det generiske eksempelet Balacheff (1988).

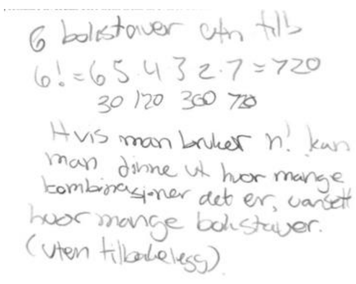
Det er vært å nevne at Gruppe 2d i løsningen av oppgave 2 så legitimiteter gruppen svaret med *at «Lærer har alltid rett derfor er formelen rett og svaret rett»* Når elevene ble spurt om hvordan svaret demmes kan stemme på oppgave 2 så kommer de med denne forklaringen:

> *«Fordi det er 24. <u>fordi alle fikk 24</u> så derfor må den være sammen. ;Men kan du vise hvorfor det kan stemme.? fordi <u>Formelen funker.</u> Formelen funker; prøv og begrunn hvorfor formelen stemmer. Fordi vi har lært <u>om formelen som funker</u>»*

De sliter med depersonalisering av det matematiske objektet. De beveger seg derimot bort fra denne typen legitimasjon formodningen til oppgave 3.

### 4.3.4 Gruppe 1d oppgave 3

Belegg




Hjemmel

Det er N! På alle

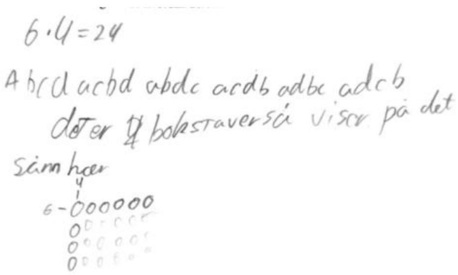
Påstand

N! funker for alle tall og alle kombinasjoner uavhengig av hvor mange bokstaver det er.

Ryggdekning

Fordi det er ordnet utvalg uten tilbake valg.
Det funker fordi vi hadde prøve om dette.

Denne gruppen har skrevet opp forklaring av N! og gjort et forsøk på å lage en modell som representerer generaliteten på oppgave 2.




Jeg ser først på elevens løsning på oppgave 2. Jeg tar opp elevenes løsning på oppgave 2 fordi de har hatt en interessant fremgangsmåte og de har laget en modell. Elevene har derimot ikke prøvd og bygge videre på denne modellen til oppgave 3. Elevene på gruppe 1d lagd en modell som kan ses på som et forsøk og vise systematisk forholdet mellom antall bokstaver og antall muligheter.  Denne modellen kan begynne å nærme seg Ballacheff generiske eksempel. Det generiske eksempelet innebærer å transformere til en karakteristisk representasjon av klassen. Det må inneholde klassens karakteristiske egenskaper og strukturer. (Balacheff, 1988, s. 219).

Elevene kommer med følgene begrunnelse av modellen: «*Det er 6 muligheter det er 6 kombinasjoner man kunne sette på en bokstaver og det er 4 bokstaver. Det er 4 bokstaver ABCD ja det blir 4 det er liksom CBDA det er da 4 bokstaver ned*». Elevene henviser til at det er 6 muligheter per bokstav og det må være 4 ned siden det er 4 bokstaver det er snakk om i dette tilfellet. Selv om modellen viser at elevene har på et vis skjønt egenskapen til klassen ordnet utfall uten tilbakelegg så er det lite grad av henvisning til generalitet.

Belegget til elevene på oppgave 3 bygger på kunnskapen elevenes tidligere kunnskaper der n! er et kjent matematisk objekt (Stylandies, 2007). Gruppe 1d begrunner gyldigheten av N! siden det er «uten tilbakelegg». Elevene greier og koble n! med uten tilbakelegg, men når de blir spurt om begrunnelse faller forklaringen litt kort. Gruppe 1d sin forklaring av oppgave 3, jeg spør elevene om; *«så når dere ordnet utvalg uten tilbakelegg så tenker dere på n! Hvorfor funker det da Har dere noen teorier?»* gruppe 1d svarer: *«Det bare funker ass ja vi hadde prøve om det her i går om kombinatorikk og sannsynlighet.»*. Her har elevene godt bort fra forsøk på modellering og visning av hvorfor det stemmer og sluttet seg til autoritet som validitet Russel et al (2011). Det var ikke læreren denne gangen, men hjemmelen til elevene på siste oppgave ble til; *«hadde det i en prøve»* Man kan da si at elevene ser på skolesystemet som legitimiteten de henviser til. Det kan være mange grunner til dette en grunn kan kanskje være at det blir for abstrakt. Elevene på gruppe 1d har altså sett sammenhengen mellom N! og kombinatorikk, men når spurt om hvordan det fungerer eller kan stemme så slutter resoneringen og de slutter seg til at det er: «riktig siden vi lærte det.»

### 4.3.5 Gruppe 3d oppgave 2 og 1

Gruppe 3d starter med forklaring på oppgave 1 og fortsetter og bygge på forklaringen på oppgave 2. Gruppen har derimot ikke gjort noe forsøk på forklaring på oppgave 3.

Belegg

Vi har samme tankerekke

4! = 4·3·2·1 = 24

Fordi nå er det 4 bokstaver

tallene går neddover

Påstand

Fordi 4! er 24. tallene går nedover

Hjemmel

Vi kom fram til at man kan

Dette kan vi vise ved oppga

ABC
BCA
ACB
CBA

vi bruker taller
3 bokstaver.

3! = 3·2·1 = 6

Ryggdekning

hvorfor funker det det er jo uten tilbakkelegging da og da tenker jeg at dette var det fordi det går <u>jo nedover da</u>

Gruppe 3d har en unik argumentasjonsstruktur der de bruker besvarelsen på oppgave 1 som hjemmel for belegget på oppgave 2. På oppgave 1 så begrunner elevene svaret med at de kan bruke fakultet. Dette kan kanskje ses i sammenheng med at de refererer til at «det går nedover» når elevene prøver og gi en forklaring på hvorfor formodningen demmes om fakultet kan stemme. Gruppen viser også til hvorfor man bruker 3! på oppgave 1 elevene kobler dette med at det er 3 bokstaver. Alle de fleste gruppene har forstått dette, men denne gruppen velger å påpeke det. På oppgave en forklarer de at *«man kan bruke fakultet fordi det er ordnet utvalg uten tilbake legging»*. Noe som er litt «rart» med denne gruppen er fokuset demmes på fakultet symbolet. Men uavhengig av det så i begrunnelsen på oppgave 2 så lager de en pil som man kan se i belegget og viser til at det er 4! fordi det er 4 bokstaver. Gruppen bygger videre og danner et mønster. Denne elevargumentasjonen vil fremdeles falle under naiv empirisme.

Jeg tar med denne elevgruppen svar selv om de ikke svarte på oppgave 3 fordi fremgangsmåten hadde hint av det generiske eksempelet. Elevene forklarte egenskapene til 3 og 4 bokstaver med ordnet utfall uten tilbakelegg. Det at gruppen viser til sammenhengen mellom n! og antall bokstaver. Gruppen har også som noen andre grupper beskrevet egenskapene til fakultet. Som man kan se på forklaringen på oppgave 2 kom de med et interessant resonnement. *«<u>Det går nedover</u> ; hva skjer hvis det hadde vært 5! forklarer 5! da går det også nedover. ; hvorfor går det nedover da trur du? Ser du noe samenheng? Hmmm fordi det slutter det har en slutt hvis det går oppover så hadde det gått oppover mot mange 1000»*. Dette kan ses på som et forsøk på å representere noe generelt ved ordna utfall uten tilbake legging. Elevene kommer også med mot eksempelet at hadde det gått oppover så hadde det blitt mange. Det kan bli litt vanskelig og tyde akkurat hva elevene mener med at det går nedover, men jeg kan anta at de refererer til regnerekkefølgen som oppstår når man bruker fakultet.

## 4.4 Klasse B

### 4.4.1Gruppe 4b oppgave 2

Jeg velger å ha fokus på argumentasjonen på oppgave 2 på denne gruppen. Gruppen bygger videre på argumentasjonen fra oppgave 2 i oppgave 3, men det er i oppgave 2 at hovedargumentet ligger.

Belegg

For å forenkle prossessen bruker vi her også ! (fakultet)
Siden vi har 4 ulike bokstaver og uten tilbakelegg, betyr det at svaret blir
n! = 4! = 4·3·2·1 = 24

A = 6 = ABCD    6·4 = 24
ABDC
ACDB
ADCB
ADBC
ACBD

Påstand

4!=24

Hjemmel

N!=4!=4*3*2*1=24

Ryggdekning

Siden vi har 4 ulike bokstaver og uten tilbakelegg så blir det n! Vi kan bare bruke vær bokstav 1 gang

*«vi kan bruke n som ukjent variabel. Den kan brukes til* *alle* *mengder av bokstaver i alle alfabet.»*

Gruppens belegg er at det er at det er 4 ulike bokstaver og at det er uten tilbakelegg. Har også tegnet opp og vist at det er 6 mulig kombinasjoner per bokstav når det er 4 bokstaver. Dermed har elevene vist det på grunnlaget 4! men også ved 6 *4. Elevene på gruppen forklarer også at fakultet forenkler prosessen. Dette kan virke som en liten detalj, men det er flere grupper som legger mye vekt på fakultet. Det at gruppen tar opp i argumentasjon at det er bare en skrivemåte kan utrykke at de forstår det på et høyere nivå elevene løsriver seg litt fra begrepet fakultet og tenker heller på hva det representerer. Gruppe 4b er eneste gruppe som nevner eksplisitt at fakultet bare er en enkel skrivemåte.

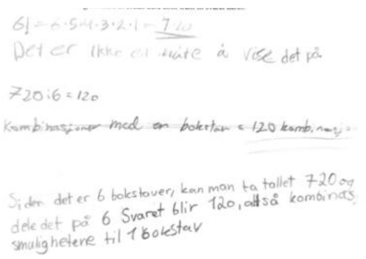
Gruppe 4d sin forklaring kan falle under det generiske eksempelet. Balacheff (1988). Elevene på gruppa bytter ut ABCD for en klasse med ting der eleven argumenterer for at det er fordi de har 4 ulike bokstaver og uten tilbakelegg. Dermed bruker de fra klassens sett med aksepterte utsagn (Stylandies 2007). uten tilbake legging.  Gruppen legitimiteter også videre med at de tegner opp en kolonne med bokstaver og ganger med seks dermed kan man se at elevene viser til et mønster.

Begrunnelsen på hvorfor de kan bruke N! Gruppe 4b sa også noe interessant på oppgave 1 De sier også at det er 3! fordi det er 3 bokstaver. Elevene kommenterer med ordlyden *«Det er 3 bokstaver og derfor er det 3! siden vi bare kan bruke vær bokstav en gang.»* (9b, s. 3). Enda en forklaring som prøver og dra beviset til elevene opp mot en generell forklaring på klassen ordnet utfall uten tilbakelegg. På oppgave 3 så understreker gruppen at man kan bruke n! eller x! Gruppen kaller dette en ukjent variabel. De har hatt undervisning om dette og ordet «ukjent variabel» burde være i klassens sett med aksepterte utsagn (Stylanides 2006). Elevene kommer med denne forklaringen på hvorfor de bruker n.  *«vi kan bruke n som ukjent variabel. Den kan brukes til <u>alle</u> mengder av bokstaver i alle alfabet.»*. Denne gruppen argumenterer bra for generalitet og hjemmelen er basert på flere ting som nevnt ovenfor som gir ryggdekning til hvorfor N! kan være legitimt å bruke. Denne gruppen kan kanskje være oppimot generisk eksempel Balacheff (1988). Der elevene på gruppen bruker oppgave 1 og 2 for å vise egenskapene til det matematiske objektet det er snakk om. Og i oppgave 3 forklare at man kan bruke en ukjent variabel fordi den kan brukes til alle mulige bokstaver. Belegget i denne oppgaven blir fra alle tre oppgavene. Noe som er litt spesielt her er og som elevene tokk opp er at det kan være flere bokstaver i andre alfabet. Denne gruppen tokk opp det at skal man vise for alle mulige bokstaver så er jo det langt flere enn 28 som i det norske alfabetet. Dette satte tankegangen til elevene litt på avveie. Det var uten tvil gruppe 4b som hadde de mest abstrakte formodningene. At elevene tenkte på dette, er dårlig oppgave presisering. der jeg ikke presiserte at det er snakk om evig mengder med bokstaver.  Det var spesielt den ene eleven som argumenterte på et høyre nivå og begynte å tenke på forholdet mellom forskjellige alfabeter. Jeg kunne tolke ved å være i konteksten at denne eleven argumenterte på et høyt nivå. Eleven hadde

*«kanskje den fôrmelene her funker siden <u>fakultet er med her nå</u> siden det her på en måte er variabelen til et alfabet, derfor kan vi bruke de samme variabelen minus de fra et annet alfabet ikke har; oi <u>men det gir ikke like mye mening som n!</u> Kanskje gir; Elev deler på alfabetet minus er annet alfabet.»*. Denne elevformodningen er det nærmeste noen av elevgruppene har vært på og komme seg ut av det pragmatiske domene.

### 4.4.2 Gruppe 1b oppgave 3

Belegg




Hjemmel

Siden det er 6 bokstaver, kan man ta tallet 720 og dele det på 6

Påstand

6! = 6*5*4*3*2*1

720/6= 120

120= antall muligheter for 1 bokstav

Ryggdekning

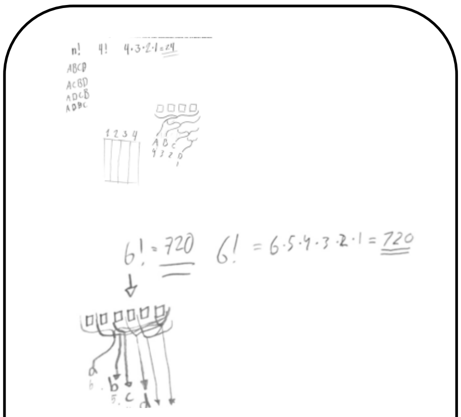
Svaret blir 120 altså kombinasjonsmulighetene til 1 bokstav.

*«Fordi formelen til kombinatorikk er N! det blir mindre muligheter for vær kombinasjon.»*

Her har elevene på gruppe 1b kommet til konklusjonen at man kan bruke 6! de har vist for seks Bokstaver. Gruppens påstand blir for det meste bare på del en av oppgaven. De har også prøvd en interessant strategi for forklaring på del to (for alle mulige kombinasjoner). Elevene hadde først en formodning om at det «er ingen måte å vise det på». Elevene kom med denne formodningen før de prøvde å utforske og se nærmere på det spesielle med det matematiske objektet de arbeidet med. Etter litt utforsking så kom de med tankegangen om deling. Elevene har delt 720 på 6 da får man 120. Elevene var på veien til og se et mønster der at hvis man deler resultatet av N! med antall bokstaver så får man n-1 bokstaver. «Svaret blir 120 altså kombinasjonsmulighetene til 1 bokstav.». Dette kan tolkes som et forsøk på et generisk eksempel Balacheff (1988) der de er inne på noe som kjennetegner klassen ordnet utfall uten tilbake legging. Men det faller heller kort der de ikke fikk nokk tid til å resonnere. I belegget til oppgave 3 så nevner ikke elevene n! gruppen nevner det derimot i besvarelsen på oppgave 1. *«Fordi formelen til kombinatorikk er N! det blir mindre muligheter for vær kombinasjon.»*. Her legitimerer elevene svaret i oppgave 1 med n! fordi det er formelen til kombinatorikk. De bygger ikke videre med n! men i oppgave 2 så har elevene skrevet opp bokstavene systematisk. Denne gruppen tar opp mange ting om kan falle under det generiske eksempelet, men de greier ikke helt å sy de ulike formodningene sammen til en generell forklaring på oppgaven. Denne gruppen slet veldig med og komme i gang. Det var først når læreren hintet litt til elevene at de burde sette det opp systematiske at elevene satt i gang. Dette er den eneste gruppen som fikk hjelp av læreren på i å med at jeg sa til læreren at elevene må komme frem til formodninger selv.

### 4.4.3 Gruppe 2b oppgave 2 og 3

Belegg fra oppgave 2og3




Påstand

4! 4*3*2*1=24 6! = 6*5*4*3*2*1=720

.

Hjemmel

4! 4*3*2*1

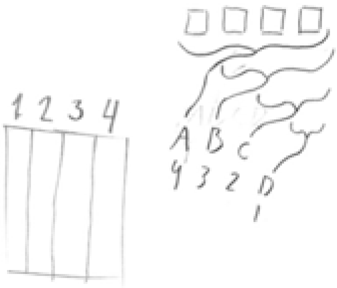
Alle bokstavene tar opp 1 plass. Så derfor blir det en mindre plass for vær antall med

Ryggdekning

N!

*«Jeg prøvde å vise hvordan vi tenker den første bokstaven har alltid 4 muligheter eller hvor mange bokstaver det har er gir oss hvor mange muligheter det er. her har vi 4 og her har vi 3 siden det er ikke med tilbakelegging.».*

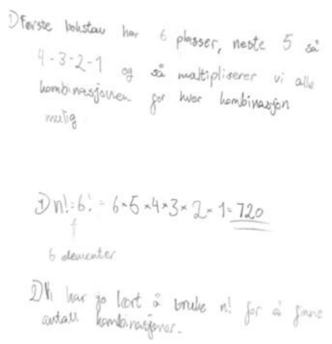
Elevene på gruppe 2b har lagd en modell som inneholder generelle kjennetegn til kombinasjoner med ordnet utfall uten tilbake legging. Elevene hjemler sitt svar med sammenhengen med modellen under som skal vise at alle bokstavene har en plassverdi.




Denne modellen faller under et forsøk på Ballacheff 1988 generisk eksempel. Modellen er bra, men elevene sliter med å begrunne modellen, men de er på god vei der de kobler modellen opp mot egenskapene til ordnet utfall uten tilbakelegg. Gruppens forklaring/ryggdkning; *«Jeg prøvde å vise hvordan vi tenker den første bokstaven har alltid 4 muligheter eller hvor mange bokstaver det har er gir oss hvor mange muligheter det er. her har vi 4 og her har vi 3 siden det er ikke med tilbakelegging.»*. Et forsøk her på og vise en egenskap via et generisk eksempel. Det kan komme til utrykk at denne modellen kan være en representasjon for alle mulige plasser og viser egenskapene til ordnet utfall uten tilbakelegg. Det som mangler her, er at de refererer til en ukjentvariabel N! eller X! noe som elevene kjenner til eller at forklarer at modellen viser for alle mulige utfall. Man kan tolke utefra modellen at elevene er på vei til og skjønne egenskapene til den matematiske klassen ordnet utfall uten tilbake legging. Elevene nevner n! men knytter dette ikke eksplisitt opp mot modellen. Gruppen argumenterer derimot med at det blir 1 mindre plass siden det er uten tilbake legging. Denne gruppen argumenterer da på nivået «på vei mot» det generiske eksempelet.

### 4.4.4 Gruppe 3b oppgave 3 med begrunnelse fra oppgave 1 og 2

Belegg




Hjemmel

N!-6!= 6elementer

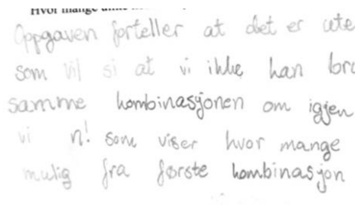
Påstand

Vi har jo lært å bruke n!

N! 6 elementer

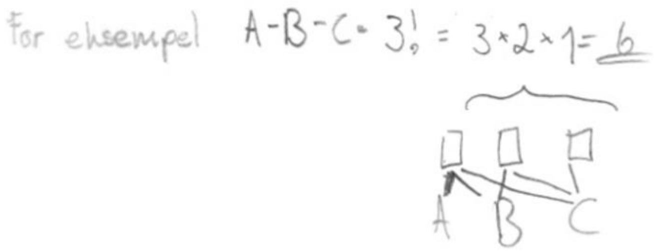
Ryggdekning

N!= 6!= 6*5*4*3*2*1 Henviser også til 6 som 6 elementer. Henviser til gruppens forklaring på oppgave 1




Gruppe 3b henviser eksplisitt til at det er ulike plasser. Elevene bygger videre fra begrunnelsen på oppgave 1 til oppgave 3.

*«Oppgaven forteller oss at det er uten tilbake legging, som vil si at vi ikke kan bruke den samme kombinasjonen om igjen. Derfor bruker vi n! som viser hvor mange kombinasjoner mulig fra første kombinasjon til siste».*

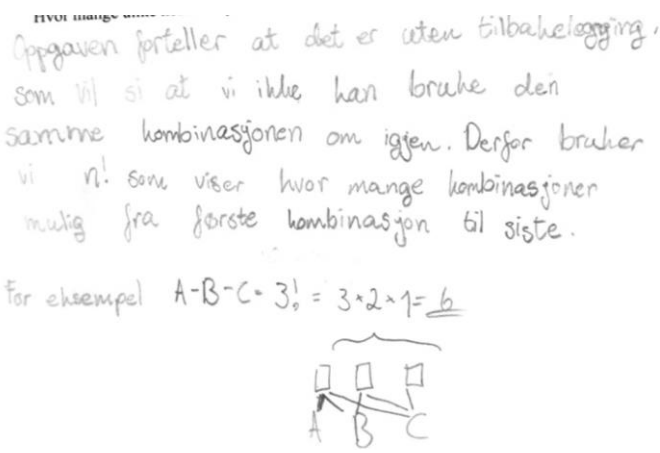


Her kan vi se elevene begrunner begrepet «uten tilbake legging». De begrunner «uten tilbakelegg». Med; «som vil si at vi ikke kan bruke den samme kombinasjonen om igjen.». Denne gruppen har vist forståelse for begrepet n! de bruker også ordlyden *«hvor mange kombinasjoner mulig fra første kombinasjon til siste.»* i begrunnelsen på n!

Videre på oppgave 3 så svarer de på del 1 av spørsmålet og identifiserer at de må bruke 6! på grunn av at det er 6 «elementer». Andre del på oppgave 3 derimot der denne gruppen var flinke til å resonnere ente de opp som mange av de andre gruppene og henvise til legitimiteten av n! til læreren. De konkluderer med *«vi har lært å bruke n! for å finne antall kombinasjoner.»* Også denne gruppen begrunner fakultet når jeg spurte

> *«Fakultet betyr at man regner* <u>*nedover.*</u> *;men hvorfor funker fakultet? Akkurat det har jeg ikke svar på du får spørre han som fant ut formelen. Eller spør læreren.; meningen er at dere skal tenke ut hvorfor dette funker. Det var vel en smart mann som tenkte ut noe lurt.»*

Her også faller elevenes argumentasjon på at ja de ser et mønster som peker på at man regner nedover, men *«man må spørre han som fant ut formelen»*. Elevene prøver altså ikke å komme med noe konkret løsning på hvorfor det akkurat er n! Dette var det også enighet på gruppen om.  Sammenligning og klare trekk på argument representasjon og visnede bevis osv. Elevene




jeg viser her til ryggdekningen igjen som også er svaret på oppgave 1. I svaret på oppgave 1 legitimerer elevene bruk av ordnet utfall uten tilbake legg kan ikke bruke den samme kombinasjonen om igjen. De viser til at vær bokstav har en plass noe som viser at elevene har skjønt egenskapene til ordnet utfall uten tilbakelegg. Selv om de legitimerer for n! basert på gr. Så er formodningene elevene på gruppe 3b kommer med oppe på generisk eksempel nivå (Balacheff 1988).

# 5 Diskusjon

## 5.1 Problemstilling: Hvordan arbeider elever på 9 trinn med utforskning av matematikk og hvordan type argumentasjon kommer frem når elevene jobber med bevis?

I denne delen av oppgaven skal jeg drøfte funnene i analysen opp mot

### 5.1.1 Forskningsspørsmål:

Hvilke bevisnivåer argumenterer elever på 9 trinn på når de lager seg en formodning om det matematiske objektet ordnet utfall uten tilbakelegg?

I hvilken grad gir utforsking av et matematisk objekt elever tilgang til de underliggende matematiske egenskapene?

Hva legitimerer elever på 9 trinn matematiske formodninger med under argumentasjon mot et bevis?

## 5.2 Bevisnivåer

Hvilke bevisnivåer argumenterer elever på 9. trinn på når de lager seg en formodning om det matematiske objektet ordnet utfall uten tilbakelegg?  For å svare på dette forskningsspørsmålet må jeg først og fremst ha noen nivåer å plassere elevargumentasjon innunder. Det kom frem i analysen at de fleste elever argumenterte på et nivå over naiv empirisme, men under det generiske eksempelet. Slik argumentasjon er det jeg har kalt: «på vei mot» det generiske eksempelet. Denne kategorien var nyttig å ha med for som Varghese påpeker kan Balacheff sin modell være utfordrende og bruke. *«Til tross for ryddigheten til Balacheff-modellen, kan man i praktisk anvendelse ha noen problemer både med å skille mellom naiv empirisme og avgjørende eksperimentet og med å komme over tilfeller av generiske eksempler.»* (Varghese, 2011, s. 182 oversatt). Noen elevargumentasjoner fant altså plassen mellom Ballacheffs nivåer. Vi kan se dette i sammenheng med hva Wathne & Brodahl påpekte som utfordringer med Balacheffs nivåer. *«å skille nivåene og bestemme elevenes ferdigheter, å plassere elevenes dialog på rett nivå og å overføre teori til praksis»* (Wathne & Brodahl, 2019, s. 13). Det å plassere elevargumentasjon under riktig bevisnivå kan være utfordrende, men med kategorien «på vei mot» det generiske eksempelet ble dette en enklere prosess. I tillegg var det noen elever som argumenterte helt utenfor Balacheff (1988) sine bevisnivåer. Elevargumentasjon som henviser til autoritet for begrunnelse av et bevis faller imidlertid under bevisnivået til Russel et al (2011): Akseptere utsagnet basert på autoritet og lignende hva Harel & snowder kaller «Authoritarian proof scheme». Dermed får vi som jeg presenterte i teorien disse seks bevisnivåene i hierarkisk rekkefølge: Akseptere utsagnet basert på autoritet (Russel et al, 2011, s. 52-53), Naiv empirisme (Balacheff 1998), Det avgjørende eksperimentet (Ballacheff 1998), «På vei mot» Det generiske eksempelet (Olav Mild), Det Generisk eksempel (Balacheff 1998) og Tankeeksperimentet (Balacheff 1998).

Gruppe 3b og 4b var de eneste elevene som argumenterte på bevisnivået det generiske eksempelet. Gruppenes formodninger inkluderte alt innenfor bevisnivået det generiske eksempel. Gjennom forklaring av modeller og formodningen så har disse to gruppene vist til alle de karakteristiske trekkene til den matematiske klassen ordnet utfall uten tilbakelegg

Balacheff (1988) påpeker at de to første nivåene (naiv empirisme og avgjørende eksperimentet) er viktige byggesteiner for å kunne mestre generalisering. Generalisering er viktig i de høyeste av Balacheff (1988) sine kategorier. Videre må elevene komme seg bort fra autoritet som legitimitet for å komme seg nærmere generalitet.

Varghese tar opp hva Balacheff ser på som forskjellen på pragmatisk berettigelse og konseptuell berettigelse. Balacheff kalte alle begrunnelser pragmatiske når de fokuserte på bruk av eksempler, handlinger eller fremvisninger. Han kalte begrunnelser konseptuelle når de demonstrerte abstrakte formuleringer av egenskaper og relasjoner mellom de matematiske egenskapene (Varghese, 2011, s. 181-182 oversatt ). Funnene i analysen tilsier at ingen av elevbesvarelsene har beveget seg inn det konseptuelle argumentasjonsområdet. Elevbesvarelsene som argumenterer på nivåene det generiske eksempelet og «på vei mot» er i det «pragmatiske domene». Varghese påpeker at dette innebærer bruk av eksempler, aksjoner og visninger. Argumentasjon innenfor bevisnivået «på vei mot» og det generiske eksempelet bruker ofte modeller eller viser til regneoperasjoner i sine formodninger. Dette kan sees i sammenheng med blant annet gruppe 5d som argumenterte «på vei mot» det generiske eksempelet. Denne gruppen henviser til en modell som skal vise frem de matematiske egenskapene og påpeker noen generelle trekk ved ordnet utfall uten tilbakelegg.

Jeg har analysert flest svar på oppgave 3 del 2 der det er denne oppgaven elevene skulle bevise noe, men noen grupper har startet argumentasjonen sin på oppgave 1 eller 2 og bygd videre på en formodning om kjennetegnene til ordnet utfall uten tilbakelegg.

Selve poenget med oppgavene var å få elevene til å vise sin tankegang. Det kom til utrykk igjennom funnene i analysen at det var naturlig at elevene bygget formodningene sine fra oppgave 1 og fortsatte med formodningene ut i de neste oppgavene. En gruppe som prøvde å vise til noe generelt var Gruppe 4d. Denne gruppen legitimerer svaret sitt gjennom formodningen; «Det var sånn vi lærte det.» Gruppen havner dermed på bevisnivået legitimitet basert på autoritet. Gruppens besvarelse på oppgave 2 derimot, hadde elementer som man kunne knytte opp mot en generell forklaring. Dette er et eksempel på at gruppene beveger seg mellom bevisnivåer i løpet av argumentasjonsprosessen.

Gruppe 2d havner under bevisnivået det avgjørende eksperiment. Gruppen viser til noen matematiske egenskaper som representerer ordnet utfall uten tilbakelegg. Gruppen argumenterer derimot ikke generelt nok. De viser ikke til noen egenskaper annet enn at de henviser til fakultetsutregningsmønster. De prøver også bare en utregning for å vise til noe generelt dermed havner denne gruppen på nivået det avgjørende eksperimentet. Likt som gruppe 4d beveger gruppe 4b seg mellom ulike bevisnivå i formodningen sin. Gruppen refererte til autoritet i besvarelsen sin i oppgave 2. De beveget seg bort fra dette i besvarelsen på oppgave 3 del 2.

Gruppe 1d er også en gruppe som beveger seg mellom bevisnivåer.  I gruppe 1d sin løsning av oppgave 2 argumenterer de under kategorien: «på vei mot» det generiske eksempel. Gruppen henviser til en modell de lagde og forklarer sammenhengen mellom antall bokstaver og antall kombinasjoner gjennom forklaringen av modellen. På oppgave 3 derimot faller argumentasjonen ned på nivået autoritet som gyldighet fordi finn hva denne gruppen refererer til. En måte man kan tolke dette på er at: I oppgave 2 er det bare 4 bokstaver og elevene argumenterte ubevisst om det generelle ved ordnet utfall uten tilbakelegg. I oppgave 3 så blir elevene bedt om å vise hvor mange kombinasjoner det er mulig å få for alle antall med bokstaver. Elevene kan oppfatte dette som utfordrerne og abstrakt dermed når de skal argumentere greier de ikke å se sammenhengen slik de gjorde i oppgave 2. og dermed faller gruppens argumentasjon ned på kategorien legitimering basert på autoritet.

Gruppe 3d løser bare oppgave 1 og 2 løsningen faller under naiv empirisme selv om det er et hint av det generiske eksemplet. Gruppen påpeker at det blir 4! på besvarelsen av oppgave 2 siden det er 4 fire bokstaver. Gruppens argumentasjon forklarer i liten grad om de matematiske egenskapene til ordnet utfall uten tilbakelegg. Funnene tilsier at elevene bare utfører regneoperasjoner. Denne elevgruppen kan tolkes til å ha en instrumentell løsning. *«Den underliggende karaktestikken av denne oppførselen er et syn av matematikk som en samling av sannheter, med liten eller ingen bekymring eller verdsettelse for opprinnelse av* *sannhetene.*» (Harel & Snowder, 1998, s. 247 oversatt). Denne gruppen refererer ikke til autoritet, men gruppen presenterte heller ikke noe generelt om det matematiske. Gruppen henviser bare til matematikken de allerede kjenner fra før. Gruppen prøver ikke på transformasjon eller beskrivelse av de matematiske egenskapene.

Gruppe 2b lagde en veldig bra modell for det generiske eksempelet, men forklaringen ble litt manglende for dette bevisnivået. Denne gruppen argumenterte på nivået «på vei mot» det generiske eksempelet. Modellen elevene lagde viste de matematiske egenskapene klart, men forklaringen av modellen ble ikke generell nok for det generiske eksempelet. Gruppe 1b argumenterte likt som gruppe 2b for mange av de matematiske komponentene mot det generiske eksempelet, men ikke helt tilstrekkelig. 1b argumenterte i området «på vei mot» det generiske eksempelet. Det oppsto ofte situasjoner der elevene var nesten innenfor bevisnivået.

Elevene som argumenterer på bevisnivået «på vei mot» greier ikke å representere generaliteten som en helhet. Elevene på dette nivået greier derimot å bruke et spesielt tilfelle for å vise noen av egenskapene. Det som skiller gruppe 3b og 4b som argumenterte på nivået det generiske eksempelet fra gruppene som argumenterte «på vei mot» er at gruppene velger et eksempel som representerer den matematiske klassen. I tillegg utfører de operasjoner og transformasjoner på eksemplet for å komme frem til en begrunnelse. Deretter bruker elevene disse operasjonene og transformasjonene til hele den matematiske klassen. (Varghese, 2011, s. 182). Gruppe 3b argumenterer under bevisnivået det generiske eksempel. Deler av argumentasjonen har hjemmel i autoritet, men argumentasjonen som helhet havner under det generiske eksempelet. Denne gruppens formodning er på et høyt nivå gjennom alle tre oppgavene. De henviser til en modell som representerer plassverdien til bokstavene. Gjennom analysen kom det fram at gruppen brukte en argumentasjonsmåte i hele oppgavebesvarelsen som utrykker at elevene har forstått og vist til alle de karakteristiske egenskapene til ordnet utfall uten tilbakelegg. Denne gruppen kobler også opp n som en ukjent variabel.

Gruppe 4b generisk eksempel basert på alle oppgavene. Elevene på 4b argumenterte seg videre fra oppgave 1 til 2 til 3. Gruppen kobler opp med forklaring ved å systematisere bokstavene slik at de fikk frem egenskapene til ordnet utfall uten tilbakelegg. Denne gruppen argumenterer også hele tiden for at x eller n representerer en ukjent variabel.

Det kom til utrykk gjennom analysen at elever argumenterer på forskjellige bevisnivåer der «på vei mot» det generiske eksempelet var den mest fremtredende. Elevene har mange forskjellige fremgangsmåter for å bevise og utforske noe matematisk. Klarer elevene å løsrive seg fra autoritet kommer elevene opp fra bevisnivået: Legitimitet basert på autoritet. Hvis elevene kommer seg vekk fra en instrumentell fremgangsmåte i matematikk kan elevene komme forbi nivåene naiv empirisme og det avgjørende eksperimentet. Elevene som havner under bevisnivået «på vei mot» det generiske eksemplet har dette til felles; elevargumentasjonen trenger noe og vise til, noe pragmatisk og knytte argumentasjonen sin opp mot. Elevene som argumenterte på nivået «på vei mot» hadde bare argumentert for deler av egenskapene eller ikke tatt med forklaringen av at det skal gjelde for alle. Det var bare to elevgrupper som argumenterte fullstendig på nivået det generiske eksempelet. Disse gruppene skilte seg ikke mye ut fra nivået «på vei mot», men de klarte å vise alle egenskapene til ordnet utfall uten tilbakelegg og argumentere for at disse egenskapene gjelder for alle mengder med bokstaver. Det kom også fram i funnene at noen av elevgruppene beveget seg opp og ned i bevisnivåene gjennom elevargumentasjonen. Et interessant funn er at ingen av elevene benyttet seg av det avgjørende eksempelet Balacheff (1988) til å avkrefte en formodning.

## 5.3 Tilgang til de underliggende matematiske egenskapene

Forskningsspørsmålet: «I hvilken grad gir utforsking av et matematisk objekt elever tilgang til de underliggende matematiske egenskapene til det matematiske som blir utforsket?

For å svare på dette forskningsspørsmålet må jeg forklare hva underliggende matematiske egenskaper innebærer. I denne oppgaven må de underliggende matematiske egenskapene sees i sammenheng med Balacheff (1988) sitt bevisnivå det generiske eksempelet. Argumentasjon på dette bevisnivået har visse krav. Bevisnivået krever at man får frem de karakteristiske egenskapene og strukturene til et matematisk objekt gjennom en representasjon av det generelle på et spesielt tilfelle. (Balacheff, 1988, s. 219). Funnene fra analysen tilsier at grupper som representerer noe generelt via et spesielt tilfelle ofte benytter seg av en modell. Et eksempel på dette er Gruppe 5d sin argumentasjon. Denne gruppen lager en firkant som ligner på et bord og plasser rundt bordet som skal tilsvare stoler. Dermed når en bokstav har tatt en stol er det bare en viss mengde plasser igjen.

Gruppe 1d er også en gruppe som benyttet seg av en modell som representerer egenskapene til ordnet utfall uten tilbakelegg. Det er verdt å nevne at denne gruppen legitimerer gyldigheten av formodningen sin senere i argumentasjonen med autoritet. I Gruppe 1d sin løsning av oppgave 2 så representerer elevene bokstavene med figurer som ligner baller. Gruppen representerer antall kombinasjonsmuligheter med baller som representerer bokstavene. Gruppe 1d viser bare kombinasjoner med fire bokstaver, men gjennom å vise til egenskapene til det spesielle tilfelle med fire bokstaver har elevene til en viss grad vist egenskapene til den matematiske klassen. Gruppe 1d og 5d sin løsning kan sees i sammenheng med Hinna et al (2011) sin generiske mangekant. «*Den generiske mangekant må få frem hva som er typisk for en mangekant, uten å inkludere egenskaper som bare gjelder for noen mangekanter.*» (Hinna et al, 2011, s. 660). Elevargumentasjon som blir plassert på nivået det generiske eksempel må altså ha tilgang til de underliggende matematiske egenskapene for å kunne representere dette. Elevargumentasjon under bevisnivået «på vei mot» det generiske eksempelet inneholder bare elementer av egenskapene til det matematiske objektet. Jeg vil dermed si at elever som argumenterte innenfor «på vei mot» får tilgang til de underliggende matematiske egenskapene via utforskning, men ikke like stor grad som det generiske eksempelet.

Hanna (1990) tok opp forskjellen på bevis som beviser og bevis som forklarer. Et bevis som bare beviser er ikke nyttig å bruke i undervisningskontekst. Et bevis som beviser gir oss nødvendigvis ikke kjennskap til de matematiske egenskapene som ligger bak matematikken.

*«et bevis som forklarer, må gi en begrunnelse basert på de matematiske ideene som er involvert og de matematiske egenskapene som gjør at det påståtte teoremet er sant.»* (Hanna, 1990, s. 9 oversatt). Det er viktig å påpeke at både bevis som beviser og bevis som forklarer er like gyldig bevis, men bevis som forklarer gir større tilgang til matematikken. Noen av elevbesvarelsene kan falle under hva Hanna (1990) kaller et bevis som forklarer, men dette er ikke en selvfølge. Funnene i analysen peker på at grupper som 5d, 1d, 4b,1b, 2b og 3b har argumentert for noe generelt ved egenskapene til ordnet utfall uten tilbakelegg. Disse gruppene da i varierende grad har undersøkt noen underliggende matematiske egenskaper for å komme med sin formodning. Gruppe 1d sin argumentasjon havner under bevisnivået legitimitet basert på autoritet russel et al (2011). Fremdeles har denne gruppen vist til underliggende matematiske egenskaper i deler av argumentasjonen sin der gruppen henviser til en forklarende modell. Gruppene 4d ,2d og 3d har argumentert, men det har kommet frem i analysen at grad av utforskning er mye lavere enn de andre gruppene. Gruppene som har argumentert under kategoriene: akseptere utsagnet basert på autoritet, naiv empirisme og det avgjørende eksperimentet kan sammenlignes med en instrumentell måte å arbeide med matematikk på. Balacheff mener elevene må skjønne kompleksiteten av problemet og de må være klar over nødvendigheten av å produsere valide argumenter. (Hanna, 1990, s. 9). Utforsking av et matematisk bevis kan gi elevene tilgang til de underliggende matematiske egenskapene. Denne tilgangen er ikke bare betinget av at elevene lager valide argumenter, men også elevenes evne til utforskning.

Funnene fra analysen får frem at elever som argumenterte på samme måte som gruppe 1d forklarer utenfor den instrumentelle metoden de har blitt lært. De beveger seg bort fra den instrumentelle metoden og viser sammenhengen mellom bokstaver og antall kombinasjoner ved en modell. Gruppene som argumenterte på denne måten, kan sees i sammenheng med representasjonsbasert bevis Russel et al. (2011) *«Et matematisk bevis eller argument gir innsikt i de matematiske relasjonene som ligger til grunn for generaliseringen; det avslører logikken og hvorfor påstanden må være sann. Representasjoner er verktøyene elever bruker for å utvikle argumenter.»* (Russell et al, 2011, s. 55 oversatt). Gruppene benyttet seg av ulike representasjoner for å vise egenskapene til ordnet utfall uten tilbakelegg. Et funn fra analysen var at visuelle modeller ofte var tatt i bruk. En annen representasjonsform som kom frem fra dataene var forskjellig former for systematisering av bokstavkombinasjoner. Denne systematiseringen var ofte i sammenheng med en muntlig forklaring av det matematiske mønsteret som kom frem etter utforskningen. Utdanningsdirektoratet sier dette om utforskning i matematikk: «*Utforsking i matematikk handler om at elevene leter etter mønstre, finner sammenhenger og diskuterer seg fram til en felles forståelse. Elevene skal legge mer vekt på strategiene og framgangsmåtene enn på løsningene.*» *(*Utdanningsdirektoratet, 2020 kjerne). En gjentagende frase i analysen er: «Se mønster». Mange av elevgruppene har pekt på ulike mønstre som de ser på som viktige. Oppgaven elevene fikk individuelt og i gruppejobbing var og vise tangegangen sin i vei mot et bevis. Elevene har jobbet med og vise sin tanker og presentere sine formodninger dette kan ses i sammenheng med Harlen (2013) som påpeker at undervisningsstrategier som aktivt engasjerer studentene i læringsprosessen gjennom vitenskapelige undersøkelse er mer sannsynlig å øke konseptuell forståelse enn strategier som er avhengige av mer passive teknikker (Harlen, 2013, s. 22). Gjennom utforskning av et bevis har noen av gruppene fått tilgang til grunnen til hvorfor noe er sant i motsetning til og å bare påstå at noe er sant. Et funn som viser til at utforskning av matematikk bidrar til å få elevene til å tenke på hvorfor nye matematisk er sant er blant annet besvarelsen til gruppe 4b. Denne gruppen forklarer egenskapene til fakultet og forklarer at dette er en forenklet regnemåte noe de skjønte gjennom utforskning. dette er bare et av flere eksempler på at elever har selv kommet frem til matematiske egenskaper gjennom utforskning. Dette kan sees i sammenheng med Knuth (2002) han poengentreer at det holder ikke bare og om en formodning er riktig, men hvorfor den er riktig.

Ett av funnene mine fra refleksjonene etter timen var at utforskende undervisning var relativt ukjent for elevene. Det var vanskelig for elevene å komme seg ut av de «instrumentelle» rutinene de kjente fra før. Man kan tolke det slik at elevene som argumenterer på nivået «på vei mot» og det generiske eksempelet hadde bedre utforskningsegenskaper og en mere kreativ fremgangsmåte. Det er interessant at selv om utforskende undervisning var uvant for mange av elevene ble det fremdeles produsert diverse formodninger av elevgruppene. Over halvparten av elevgruppene klarte å produsere formodninger som ga dem tilgang til noen av de underliggende matematiske egenskapene til ordnet utfall uten tilbakelegg.

Harel & Snowder (1998) påpeker at *«Formalitet blir lært for tidlig og elever bare følger ritualer og rutiner for å rettferdiggjøre påstander. Dermed blir det viktigere å ha gode memoreringsegenskaper istedenfor utforskning og kreativitet for suksess»* (Harel & Snowder, 1998, s. 245 oversatt). Med andre ord det har tradisjonelt vært fokus på memorering istedenfor utforskning og kreativitet for suksess. Noen av elevene har dermed klart å løsrive seg fra en instrumentell tankegang og begynt å utforske matematikken. Utforskning av matematikk kan også ses i sammenheng med LK20 sine kjerneelementer i matematikk. I kjerneelementet «utforsking og problemløsning» står det at «e*levene skal utforme egne resonnementer både for å forstå og for å løse problemer. Argumentasjon i matematikk handler om at elevene begrunner framgangsmåter, resonnementer og løsninger og beviser at disse er gyldige.»* (Utdanningsdirektoratet, 2020). Som jeg nevnte tidligere så må elevene kunne argumentere for hvorfor deres utforskningsresultater kan ses på som gyldige forsøk på å bevise noe generelt. Analysen tilsier at i gruppenes hjemler og ryggdekning har elevene argumentert for hvorfor deres svar er legitime. Artigue & Blomhøj (2013) påpeker at det kan sees en sammenheng mellom utforskende undervisning og problemløsning. Utforskende undervisning kan dermed ikke bare bidra til at elever får tilgang til de underliggende matematiske egenskapene, men også øke elevenes evne til problemløsning. Selve undervisningsopplegget krever en viss problemløsningskompetanse for å komme i mål. Det som skilte gruppene som argumenterte på bevisnivåene «på vei mot» og det generiske eksempelet fra de andre gruppene var at de løste problemet på en måte som var kreativ og «utenfor boksen». Knuth (2002) påpeker at jobben til bevis i matematikk er å etablere sannhet, men fra et utdanningsperspektiv er det kanskje viktigere med og fostre den underliggende matematiske forståelsen man trenger for å bevise. (Knuth, 2002, s. 487 oversatt). Funnene i analysen fremhever at det er ulike typer av elevargumentasjon som faller under det generiske eksempelet og «på vei mot» det generiske eksempelet. Argumentasjonen og uttrykksformene til disse gruppene har stor variasjon, men til felles har gruppene fått mere tilgang til de underliggende egenskapene til ordnet utfall uten tilbakelegg. Denne tilgangen har elevgruppene fått gjennom utforskning og konstruksjon av formodninger mot et bevis.

## 5.4 Legitimering av argumentasjon

Funnene fra analysen tilsier at alle påstandene til elevene svarer på belegget. Belegget på gruppene besto av det skriftlige svaret på oppgave 3 og noen tilfeller oppgave 2. Generelt så var påstandene til elevene kortfattet og i form av n!. Toulmin (2003) påpeker at om dataene ikke svarer til de kravene som blir stilt eller om påstanden ikke er overbevisende så trenger man en hjemmel. Hjemmelen til elevgruppene besto av forklaringen og legitimeringen av påstanden og belegget. I analysen ble hjemmelen den overbevisende delen av argumentet, da ofte i muntlige forklaringer.

Videre har vi ryggdekning. Elevene viste til ryggdekning når hjemmelen eller forklaringen til formodningen elevene kom med ikke ble akseptert. Ryggdekning kommer i form av ytterligere dokumentasjon av det konkrete grunnlaget den generelle regelen hjemmelen bygger på. (Grepstad, 1997, s. 171). Et eksempel på dette er gruppe 4d sin hjemmel som er en forklaring på at N representerer tallene. Videre trengte hjemmelen mer begrunnelse. Ryggdekningen kom i form av: det er sånn vi lærte det. Dette er ikke et godkjent bevis, men i en annen setting en i matematikk kunne autoritet vært naturlig å henvise til.

Et annet eksempel der hjemmelen trengte mere forklarende kraft er gruppe 4b. Gruppe 4b sin hjemmel består av N! = 4!. I gruppens ryggdekning forklarer de at n kan bli brukt som en ukjent variabel og den kan representere alle mengder av bokstaver. Gruppe 4b henviser til klassens sett med aksepterte utsagn og begrunner egenskapene til utsagnene i ryggdekningen. Klasse 9b og 9d sine sett med aksepterte utsagn Stylianides (2007) kan bli sett på som meningsfullt og henvise til i ryggdekningen. Alle elevgruppene argumenterte på forskjellig vis et funn er at argumentasjonen nødvendigvis ikke var så formell. Dette kan ses i sammenheng med Knipping (2008) som påpeker at argumentasjon ikke trenger å være så formell, men det må være basert på noe som er delt i klasseromsamfunnet.

Det er forklaringen av de ulike bevisene som har gitt tilgang til elevenes tanker om gyldighet av forklaring av noe matematisk. Det er flere måter å bevise oppgave 3 del 2: «*Er det en måte å vise alle kombinasjoner for alle antall med bokstaver?*» Elevene skal være kjent med formelen n!. N! kan ses på som det riktige «svaret», men uten begrunnelse er ikke svaret meningsfullt.

Jeg nevnte i innledningen til oppgaven at det er essensielt at elevene jobber med å finne ut hvordan matematikken fungerer gjennom utforsking. Elevene skal utforske noe i grupper Stylianides (2016) påpeker viktigheten av utforskning og bruk av det logiske matematiske systemet i stedet for ved å appellere til lærerens eller læreboken som autoritet (Stylianides, 2016, s. 9 oversatt). Gjennom analysen kom det frem at noen av gruppene ikke greier å løsrive seg fra autoritet som legitimitet. Når elevene ikke greier å løsrive seg fra læreren eller læreboken som legitimitet kan dette sette en stopper for bevisprosessen. Disse elevgruppene legitimerer besvarelsen med kun n!. Forklaringen til elevene er basert på henvisning til autoritet. Som jeg nevnte tidligere er gruppe 4d er en gruppe som gjør dette. Gruppe 4d sitt belegg: n! = antall bokstaver! Gruppens påstand består av begrepet n!. De forklarer videre at n! representerer tallene. Når jeg stilte spørsmål ved hjemmelen til gruppen, legitimerte elevene med det er sånn vi lærte det. Denne gruppens ryggdekning baseres på gyldighet gjennom autoritet. Det kan sees en sammenheng med *«Referring to an authority for justification may indicate that the student does not yet know that proving a claim is even a possibility.»* (Russel et al, 2011, s. 55). Når gruppen refererer til autoritet som legitimitet setter det en stopper for videre utforskning av problemet. Funnene fra analysen viser til at legitimering i autoritet kan komme i flere former, blant annet «det var sånn vi lærte det», «det funker fordi vi hadde en prøve om det» og «vi har lært og bruke n!»

En annen gruppe som legitimerte beviset sitt gjennom autoritet er gruppe 1d. Gruppe 1d sitt belegg er den skriftlige besvarelsen av oppgave 3. De skriver: «Hvis man bruker n! kan man finne ut hvor mange kombinasjoner det er». Påstanden til elevene er at n! fungerer for alle tall og kombinasjoner uavhengig av hvor mange bokstaver det er. Hjemmelen til gruppen er basert på egenskapene til n!. Videre er ryggdekningen todelt. Gruppen henviser til gyldigheten av n!. Først viser gruppen til ordnet utfall uten tilbakelegg. På den andre delen av ryggdekningen henviser elevene til at påstanden er sann på grunnlag av at de har hatt en prøve om det. Dermed vil gruppens hovedkilde for dom eller overbevisning om et utsagn, avhenge av legitimering fra lærebok eller ytringer fra lærer. En slik oppfatning av bevis kaller Harel & Snowder bevis som er basert på autoritet. (Harel & Snowder, 1998, s. 247 oversatt).

Gruppe 3b argumenterer blant annet med «vi har lært å bruke n!». Det er mulig å se på dette som bevis basert på autoritet. Derimot skiller denne argumentasjonen seg fra autoritet som legitimitet fordi hovedargumentet til elevene er ikke avhengig av påstanden: «vi har lært å bruke n!». Elevene på gruppen viser til matematiske egenskaper som de har oppdaget under utforskning. Dette blir da hva elevene vektlegger mest i sitt argument.

Gruppene under legitimerte sin besvarelse på ulike måter enten ved henvisning til en modell som representerte noe generelt eller en formodning at n! stemmer fordi det er ordnet utfall uten tilbakelegg. Ett fellestrekk for de neste gruppene jeg tar opp er at de utforsker det matematiske og prøver å danne seg et bevis via formodninger. Elevene prøver å forklare selv om de ikke helt skjønner. Knipping (2008) påpeker at det er viktig å tenke på at elevene som jobber med bevis kan være midt under utvikling av nye logiske tenkemønstre. Dermed kan man ikke sette for strenge formelle krav til hva elevene legitimerer sitt svar med.

Gruppe 2d sitt belegg er basert på alle elevene på gruppen sine tidligere besvarelser på oppgaven (Gruppe 2d sitt belegg er basert på den individuelle oppgaven gjort tidligere). Gruppens påstand er n!=6!. Gruppen argumenterer for at n! fungerer for alle mulige antall bokstaver. Hjemmelen til gruppen er henvisning til det elevene kalte: «se mønster». Mønsteret elevene påpekte er multiplikasjonstykket man får ved utregning av fakultet. Gruppe 3d sitt belegg er et skriftlig svar på oppgave 2. Påstanden til elevene er: «Fordi 4! er 24 og tallene går nedover». Hjemmelen til denne gruppen er unik fordi de bygger videre fra oppgave 1 og henviser til oppgavens argumentasjon som hjemmel. Ryggdekningen til gruppen ligner andre gruppers argumentasjon der de legitimerer hvorfor 4! fungerer med grunnlag i ordnet utfall uten tilbakelegg. De legitimerer også til den egenskapen eller det matematiske mønsteret «det går nedover». Gruppe 5d, 2d og 3d legitimer sitt argument med «se mønster». Dette kan sees i sammenheng med mønstergeneralisering. *«interaksjon med de induktive utforskningen for å identifisere mønstre eller generaliseringer og komme med formodninger»* (Stylianides, 2016, s. 11-12). Elevargumentasjonen til gruppene legitimerer altså gyldigheten av en påstand med henvisning til et matematisk mønster eller en sammenheng. Elevene som argumenterte på bevisnivåene «på vei mot» og det generiske eksempelet er blant gruppene som legitimerer formodninger på denne måten. Gruppe 5d sitt belegg består av forsøk på modellering av egenskapene til ordnet utfall uten tilbakelegg. Når det ble stilt spørsmål til belegget legitimerte elevene det med fordi det er ordnet utvalg uten tilbakelegg. Videre henviste elevene til en forklaring av modellen på gruppens ryggdekning. Ryggdekning er en videre utvikling av hjemmelen. Ryggdekningen til gruppen blir: N! fungerer for så mange bokstaver man vil og videre mønsteret elevene fant i multiplikasjonstykket til fakultet.

Gruppe 4b sitt belegg består av den skriftlige besvarelsen til oppgave 2. Denne gruppens belegg består også av argumentasjoner fra alle oppgavene, men det er oppgave 2 som illustrerer gruppens argumentasjon klarest. Påstanden til elevene er: 4! = 24. Gruppens hjemmel refererer til regnestykket n!=4!=4*3*2*1. Elevenes hjemmel er et utrykk for at de forstår egenskapene til n!. Gruppens ryggdekning viser til at: «man kan bare bruke en bokstav en gang». Videre argumenterer gruppen for at man kan bruke n som en ukjent variabel som kan brukes til alle mengder av bokstaver.

Gruppe 1b sitt belegg er svaret på oppgave 3 der elevene viser til en delingsstrategi. Elevenes påstand blir først at 6! = 6*5*4*3*2*1 =720 og videre 720/6= 120. Dermed påstår elevene at 120 kombinasjoner= antall muligheter med kombinasjoner som begynner med en bestemt bokstav. De bygger ikke noe videre på denne påstanden, men det var en interessant strategi og formodning. Hjemmelen til gruppen er en begrunnelse for at det er 6 bokstaver dermed kan man dele dette på total mengde kombinasjoner; 720 og dermed få noe nyttig informasjon ut av dette. Denne gruppen hadde ikke mer tid og dermed var formodningen under konstruksjon og ble ikke ferdig. Ryggdekningen til gruppen henviser til 120 kombinasjonsmuligheter for 1 bokstav med 6 bokstaver i kombinasjoner med ordnet utfall uten tilbakelegg. En annen viktig del av ryggdekningen er at de legitimerer besvarelsen av oppgave 1 med; *«fordi formelen til kombinatorikk er n! så blir det mindre muligheter for* hver *kombinasjon.»* Gruppe 1b er en gruppe som kan kan ses i sammenheng med Lk20 *«Elevene skal legge mer vekt på strategiene og framgangsmåtene enn på løsningene.»* (Utdanningsdirektoratet, 2020) denne gruppen har brukt mye tid utforskning av en fremgangsmåte.

Gruppe 2b sitt belegg er elevenes besvarelse på oppgave 2 og 3 kombinert. Elevene har laget en modell som viser til de matematiske egenskapene til ordnet utfall uten tilbakelegg. Gruppens påstand er forklaring og utregning av oppgavene. Hjemmelen til gruppen er en formodning om at alle bokstaver tar opp en plass, derfor blir det en mindre plass for hver bokstav man tar med antall med bokstaver. Denne formodningen er en forklaring av modellen som blir presentert i belegget. Ryggdekningen til gruppen er en forklaring av en elev på gruppen av modellen som følger: *«den første bokstaven har alltid 4 muligheter eller hvor mange bokstaver det har er gir oss hvor mange muligheter det er. her har vi 4 og her har vi 3 siden det er ikke med tilbakelegg.»*. her blir ryggdekningen koblingen av den elevlagde modellen som skal representere de matematiske egenskapene til ordnet utfall uten tilbakelegg med som eleven påpeker at det ikke er med tilbake legging. Dette kan sees i sammenheng med Hinna et al (2011) som påpeker at selv om argumentasjonen er generell brukes det et spesielt eksempel brukes for å visualisere dette. En slik figur kan også lages for alle andre valg av n. Her legitimerer elevene gyldigheten av påstanden sin gjennom forklaring av en visuell modell som hjelper elevene med å forklare de matematiske egenskapene som representerer ordnet utfall uten tilbakelegg.

Belegget andre grupper har legitimert påstander og formodninger basert på funn via matetematiske utforskning. Gruppe 3b er en sånn gruppe. Gruppe 3b sitt belegg er det skriftlige svaret på oppgave 3. Gruppen påpeker flere av de matematiske kjennetegnene til ordnet utfall uten tilbake legging. Elevene viser til at der er 6 plasser så 5 plasser og forklarer at man multiplisere alle kombinasjoner med vær mulig bokstav. Her tar elevene opp eksempelet med 6! og forklarer hvorfor det blir slik. Påstanden her kan bli oppfattet litt diffus. Dette er fordi gruppen henviser at de har lært å bruke n! derfor er det sant, samtidig argumenter elevene i påstanden for at det er 6 elementer og n!. I hjemmelen påpeker elevene at det er 6 elementer når det er 6! og henviser til n! som en variabel. I ryggdekningen henviser gruppen til sin forklaring på oppgave 1 der de viser til en modell og kommer med følgene formodning*: «når man bruker ordnet utfall uten tilbakelegg så kan man ikke bruke den samme kombinasjonen om igjen som viser hvor mange kombinasjoner mulig fra første kombinasjon til siste.»* Ryggdekningen til gruppe 3b er kanskje den mest matematisk solide ryggdekningen. De har vist til en rekke forklaringer av egenskapene til ordnet utfall uten tilbakelegg. De har en konsis argumentasjonsstruktur igjennom hele argumentasjonen. *«Argumentasjonen er generell, men et bestemt eksempel brukes for å visualisere dette. En slik figur kan også lages for alle andre valg av n»*. (Hinna et al, 2011, s. 661). Gruppe 3b har benyttet seg av en modell, men det er forklaringen av denne modellen som gjør at gruppens argumentasjon. Dermed legitimerer denne gruppen gyldigheten av påstanden sin via forklaring av de matematiske konseptene i tillegg til å vise til en visuell figur som representerer generalitet.

Jeg har sammenlignet de ulike hjemlene og ryggdekningen i de forskjellige gruppene i som knipping (2008) påpeker at man kan sammenligne de forskjellige hjemlene og ryggdekningene i de ulike elev argumentasjonene så kan man avsløre hvilke typer argumentasjon som er blitt tatt i bruk i bevisprosessen i matematikklasserommet. (Knipping, 2008, s. 430 oversatt). Likt som Knipping har jeg sammenlignet hva elevene legitimerer som forklaringen av påstandene sine. Disse forklaringene kommer i form av hjemmel og ryggdekning. Funnene fra analysene har vist at elevene legitimerer på forskjellige måter der det er to legitimeringer som skiller seg ut. Den største forskjellen i elevenes legitimering av en påstand er legitimering på bakrund av autoritet og legitimering på bakrund av matematiske egenskaper. De matematiske egenskapene som elevene brukte for og legitimere påstandene sine kom i varierende form. Noen grupper benyttet seg av en visuell modell for å representere de matematiske egenskapene. Andre grupper legitimerte på en mer skriftlig måte. Til felles for alle gruppene er at de så nødvendigheten av å legitimere påstanden sin.

## 5.5 Gjennomføring av innsamlingstimene og refleksjoner

I etterkant av datainnsamlingstimen så er noen av mine handlinger kritikkverdige. Jeg hadde muligheten til å bryte inn ved første gang elever legitimerte sitt svar med autoritet i datainnsamlingstimen. Dette kunne ha bidratt elevene til og danne mere matematiske formodninger. Jeg kunne tatt det i plenum og presisert at legitimering av oppgaven basert på autoritet ikke er akseptabelt forsøk på bevis. Hadde jeg påpekt dette derimot så kunne dette ha påvirket dataen og påvirket elevens naturlige arbeidsprosess. I etterkant av datainnsamlingen og analysen så ser jeg at jeg burde ha hatt en baktanke om at elevene ville legitimere sitt svar i autoritet. Jeg er fremdeles fornøyd over at jeg ikke hadde presiserte det fordi hadde jeg gjort det så hadde jeg godt glipp av nyttig funn. Funnene som kom fram var at når elevene blir spurt om hvorfor noe i matematikken så refererer de til autoritet istedenfor og prøve og utforske selv i en utforskende setting.

Som jeg skrev i metodedelen så er jeg som forsker i en unik posisjon til å endre fremgangsmåter eller ordbruk underveis i datainnsamlingstimen. Jeg brøt sjelden inn med unntak av når jeg påpekte underveis ved flere anledninger at det er bra å gjøre feil. Jeg gjentok også i plenum at det å vise tankene sine var det jeg er ute etter. En gang brøt jeg inn i den ene klassen. Dette var fordi læreren brøt inn og hjalp siden gruppen ikke kom i gang med å jobbe. Dette er jo naturlig for en lærer å gjøre. Læreren hjalp altså gruppe 1b med å sette i gang. Denne hendelsen kan ses i sammenheng med at elevene trengte nærværet og bekreftelse av en autoritetsfigur for komme frem til løsningen. (Harel & Snowder, 1998, s. 248). Dette var den eneste gangen læreren «hjalp» elevene frem til en løsning.

Under innsamlingstimen fikk jeg inntrykk av at utforskende undervisning var veldig nytt for elevene. Jeg presiserte ofte i løpet av timen, felles i klasserommet og til enkeltelever, at det ikke er noe problem om de svarte feil. Jeg poengterte at det å gjøre feil var bra og jo mere de testet ut og viste på oppgavearket jo bedre. Jeg spurte mange ganger under innsamlingstimene: «kan dere vise hvordan dere har kommet fram til dette svaret?» Fokus lå på ordet vise.

Jeg sa flere ganger**:** «Dere skal vise» og «jeg er ute etter tankene deres.» Som nevnt tidligere brukte jeg ikke begrepet «bevise». Jeg sa i stedet: «Kan du forklare for meg» eller «kan du vise hvordan du tenker?» Utrykkene «vis at» og «bevis at» brukes ikke i elevenes dagligtale.

Jeg hadde forventet at de var uvant med utforskende oppgaver. Jeg passet derfor på å bruke et språk som elevene kunne forstå når jeg presenterte oppgaven.

Som nevnt tidligere kan det være problematisk og bruke utrykkene «vis at» og «forklar». Disse begrepene tilfredsstiller nødvendigvis ikke kravene til matematiske bevis. Det er imidlertid et enda større problem at elevene kanskje aldri har hørt om eller har noen forståelse for hva det vil si å bevise. Jeg hadde ikke tid eller ressurser til å forklare hva det vil si og bevise noe til elevene. Fokuset mitt i innsamlingstimen ble derfor å se hva som kom til utrykk ut fra elevenes «naturlige» utforskning av et matematisk problem. Det ble mer fokus på å utforske et matematisk objekt enn å bevise noe. Elevenes grad av bevis kom til utrykk i formodningene de laget i svarene på oppgavene.

# 6 Avslutning

I slutten av oppgaven tar jeg for meg mine fokusområder. Jeg går igjennom mine funn i analyse delen og drøfte delen. fokuset mitt under denne studien har vært hvordan elever argumenterer og danner påstander og formodninger under utforsking av matematikk. Altså hva innebærer elev argumentasjon når elevene skal prøve å bevise noe matematisk. Elevene har kjennskap til tema og kan de matematiske reglene og utsagnene i kombinatorikk. Greier elevene via utforskning av ordnet utfall uten tilbakelegg og få tilgang til de matematiske egenskapene? Hva legitimerer elevene formodningene sine med når de danner en påstand og hvordan ser denne legitimasjonen ut? Hvilke nivå argumenterer elevene på? Dette har vært hva jeg har ønsket å belyse igjennom denne masteroppgaven.

Formålet til denne studien har vært å se Hvordan arbeider elever på 9 trinn med utforskning av matematikk og hvordan type argumentasjon kommer frem når elevene jobber med bevis?

Jeg har spisset denne problemstillingen i tre forskningsspørsmål: 1: Hvilke bevisnivåer argumenterer elever på 9 trinn på når de lager seg en formodning om det matematiske objektet ordnet utfall uten tilbakelegg? 2: I hvilken grad gir utforsking av et matematisk objekt elever tilgang til de underliggende matematiske egenskapene? 3: Hva legitimerer elever på 9 trinn matematiske formodninger med under argumentasjon mot et bevis? Disse forskningsspørsmålene har jeg undersøkt med en kvalitativ metode. Elever på 9. trinn har jobbet med en oppgave inspirert av utforskende undervisning med tema ordnet utfall uten tilbakelegg, Jeg har samlet inn mine data via deltagende observasjon og skriftlige elevbesvarelser. Videre har jeg analysert dataen med Toulmins argumentasjonsverktøy og bevis nivåer med inspirasjon fra Balacheff 1988.

Hvilke bevisnivåer argumenterer elever på 9 trinn på når de lager seg en formodning om det matematiske objektet ordnet utfall uten tilbakelegg? Et funn er at de fleste elevene argumenterte på nivået «på vei mot» Det generiske eksempelet. Det var derimot bare 2 elevgrupper som argumenterte på nivået generisk eksempel. Det som kom til lys gjennom analysen, var at det var utfordrerne for elevene og ha en helhetlig generell argumentasjon. Det var også tilfeller av bevegelse mellom de ulike bevis nivåene i elevsvarene. Noen av gruppene greide ikke å komme seg opp fra den første beviskategorien legitimitet basert på autoritet. Jeg har også funnet igjennom prosessen av å plassere elevargumentasjon i nivåer at og bruke Balacheff 4 kategorier er utfordrende da spesielt når elevene jobber utforskende og bevisføring er ukjent for elevene.

I hvilken grad gir utforsking av et matematisk objekt elever tilgang til de underliggende matematiske egenskapene? Som jeg påpekte innledningsvis i lk20 sine kjerneelementer i matematikk så er utforskning sentralt og det er veien frem til et svar som er interessant og nødvendigvis ikke svaret. Jeg så i diskusjons delen at for å argumentere på nivået «på vei mot» det generiske eksempelet og det generiske eksempelet så må man vise til strukturen av matematikken bak. Det varierte altså i gruppene om de fikk tilgang eller ikke til de underliggende matematiske egenskapene. Om elevene fikk tilgang eller ikke var avhengig av visse betingelser som blant annet at elevene må kunne argumentere over bevisnivået naiv empirisme. Gjennomgang av oppgavene ble heller ikke gjort i plenum noe jeg mener er nødvendig for at elevene skal få videre faglig utbytte av den utforskende undervisningen. Men konkluderende så vil jeg si at funnene jeg gjorde kan tilsi at å jobbe utforskende med matematikk bidrar at elevene kommer nærmere de underliggende egenskapene til de matematiske som blir undersøkt.

Hva legitimerer elever på 9 trinn matematiske formodninger med under argumentasjon mot et bevis? Noen av elevgruppene legitimerer formodningene sine med: Det er sånn vi lærte det, eller læreren sa det derfor må det være sant. Dette vil falle under beviskategorien autoritet som legitimitet. Noen av gruppene henviste til en selvlagd modell for og vise legitimiteten av en matematisk påstand. En del elever legitimerer en formodning med henvisning til et matematisk mønster da ofte utregningen til fakultet til ordnet utfall uten tilbakelegg. Funne tilsier at alle elevgruppene legitimerte sine formodninger på et vis der matematiske egenskaper var det vanligste å henvise til. Graden av matematisk gyldighet derimot i disse legitimeringene varierte i stor grad. Toulmins argumentasjonsmodell har vært sentral for og svare på dette forskningsspørsmålet. Denne modellen har gjort det mulig og se hva elevene legitimerer påstandene sine med. Denne legitimeringen kommer i form av hjemmel og ryggdekning.

## 6.1 Avsluttende refleksjon

Jeg hadde bare elevene i en time og de jobbet med noe ukjent, nemlig utforskning. Hadde jeg hatt flere timer, ville jeg anta at elevene etter hvert kunne argumentere på et høyere nivå. Hadde jeg hatt muligheten til å følge en klasse over en lengre periode så kunne jeg ha etablert høyre argumentasjonsnivå og forventninger for formodninger.

Grunnen til at det ikke er så mange forskjellige elev svar innad i gruppen kan være grunnet at elevene jobbet sammen om å komme til ett svar sammen og da ble det enighet. Tidsmessige grunner kan også ha satt en demper på diskusjons delen. Dermed når jeg analyserer gruppedialogen og tar opp noen elever sier er det en forlengelse av gruppens tanker det er sjeldent at en enkelt elev bryter inn i større grad. Det var eksempler av dette, men stort sett er det enighet om løsningen av gruppa. Metoden for innsamling av data har fungert tilstrekkelig. Derimot skulle jeg ha utført en lignende studie igjen ville jeg ha hatt fokus på færre elevgrupper der bakgrunnsstøy og forstyrelser fra klasserommet kan ha limitert argumentasjonsevnen til noen av gruppene. I tillegg var det under noen omstendigheter utfordrerne og tyde lydopptaket med bakgrunnsstøy.

## 6.2 videre forskning

Det hadde vært interessant og gå nærmere inn på hva som gjorde at noen av elevgruppene klarte og argumentere på argumentasjons nivået det generiske eksempelet og «på vei mot» det generiske eksempelet. Hva var så spesielt med akkurat disse elevene er det noen strategier eller fremgangsmåter som er mere gunstig. Det kunne også ha vært gunstig og brukt lignende teoretisk rammeverk som denne masteroppgaven og hatt mere fokus på problemløsning.

Alt i alt er bevis i klasserommet noe som jeg ser på som nødvendig for at elever skal kunne forstå matematikk for hva det faktisk er. Funnene fra denne masteroppgaven har vist at gjennom utforskning av et matematisk bevis så får elever tilgang til de underliggende matematiske egenskapene til matematematikken. Mer Empirisk forskning på utforskning av bevis hadde vært nyttig.

## 6.3 Relevans for læreryrket

Som fremtidig matematikklærer har jeg selv sett nyttigheten av utforskning av bevis. Måten jeg har analysert elevargumentasjon på kan sees på som svært nyttig informasjon om elevenes tankegang og argumentasjonsevne. Generelt mere fokus på argumentasjon og utforskning i matematikk klasserommet tenker jeg ville bidra positivt til elevers læring, motivasjon og oppfatting av matematikk som fag i skolen.

## 7 Kilder


Artigue, M. & Blomhøj, M. (2013) Conceptualizing inquiry-based education in mathematics Accepted: 22 April 2013 / Published online: 25 October 2013 FIZ Karlsruhe 2013

Artigue, M. & Baptist, P. (2012). Inquiry in Mathematics Education*: Background Resources For Implementing Inquiry in Science and Mathematics at School.* The Fibonacci Project

Balacheff, N. (1988): Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics, En Pimm, D. (ed.), Mathematics, teachers and children (Hodder & Stoughton: Londres), 216-235.

Bjørndalen, C. R. P.(2013). Videoobservasjon som forsknings- og utviklingsredskap i skolen. I M. Brekke, T. Tiller, M. Brekke, & T. Tiller. (Red.), Læreren som forsker: innføring i forskningsarbeid i skolen (s. 152-172). Universitetsforlaget.

Christoffersen, L. & Johannessen, A. (2012). *Forskningsmetode for lærerutdanningene*. Abstrakt Forlag AS

Grepstad, O. (1997). Det litterære skattkammer: sakprosaens teori og retorikk. Oslo: Det Norske Samlaget.

Harlen, W, (2013). Inquiry-based learning in science and mathematics REVIEW OF SCIENCE, MATHEMATICS and EDUCATION, 7(2), 9-33,

Harel, G. & Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. I A. Schoenfeld, J. Kaput, & E. Dubinsky (Red.), Research in collegiate mathematics education III, 234-283. American Mathematical Society: Washington DC.

Hanna, Gila. (1990). *Some pedagogical aspects of proof.* Interchange, Vol. 21, No. 1 (Spring, 1990), 6-13

Hana, G. M, (2013). *Matematiske byggesteiner: Matematikk for lærerutdanningen*. Caspar Forlag.

Hinna, K. R. C., Rinvold, R. A., Gustavsen, T. S. (2011) QED 5-10: matematikk for grunnskolelærerutdanningen høyskoleforlaget

Knipping, Christine. (2008) A method for revealing structures of argumentations in classroom proving processes. ZDM Mathematics Education (2008) 40:427–441 DOI 10.1007/s11858-008-0095-y

Knuth, Eric, J.(2002). *Proof as a Tool for Learning Mathematics.* National council of Teachers of Mathematics.

Kvarv, S. (2021). *Vitenskapsteori – tradisjoner, posisjoner og diskusjoner* (2.utg). Novus AS:

Maxwell Joseph A.(2013). Qualitative Research Design: *An interactive Approach (utg. 3).* SAGE Publications.

Mild, M. (2020). *Bevisnivåer i skolematematikken: En kvalitativ casestudie av lærerens identifikasjon av bevisnivåer i 10. trinns elevers skriftlige argumentasjon.* [Mastergradavhandling, Universitetet i Agder] https://uia.brage.unit.no/uia-xmlui/bitstream/handle/11250/2680714/Olav%20Omlid.pdf?sequence=1

NESH. (2021). *Forskningsetiske retningslinjer for samfunnsvitenskap og humaniora.* Den nasjonale forskningsetiske komité for samfunnsfag, humaniora, juss og teologi. https://www.forskningsetikk.no/globalassets/dokumenter/4-publikasjoner-som-pdf/forskningsetiske-retningslinjer-for-samfunnsvitenskap-og-humaniora.pdf

Pedemonte, B. (2007). *How can the relationship between argumentation and proof be analysed?* Article in Educational Studies in Mathematics

Pedemonte & Balacheff. (2015). Establishing links between conceptions, argumentation and proof through the ck¢-enriched Toulmin model. The journal of mathematical behavior

Postholm, M. B. & Jacobsen, D. I. (2018). *Forskningsmetode for master studenter i lærerutdaningen.* Cappelen damm

Russell, S. J., Schifter, D. & Bastable, V. (2011) Connecting Arithmetic to Algebra. Strategies for Building Algebraic Thinking in the Elementary Grades. Portsmouth: Heinemann.

Stylianides A. J. (May, 2007), Proof and Proving in School Mathematics Author(s): Source: Journal for Research in Mathematics Education , Vol. 38, No. 3 pp. 289-321 Published by: National Council of Teachers of Mathematics Stable URL: https://www.jstor.org/stable/30034869

Stylanides, A, J. (2016). *Proving in the elementary mathematics classroom.* Oxford university press

Toulmin, S, E. (2003). The Uses of Argument: Updated Edition Cambridge University Press

Trengereid, T. K. (2020). *En undersøkelse av elevargumentasjon -Elever på 7.trinn argumenter parvis for sammenhenger mellom areal og omkrets.* [Master i undervisningsvitenskap med fordypning i matematikk, Høgskolen på Vestlandet/Bergen]. https://hdl.handle.net/11250/2671282

Utdanningsdirektoratet. (2020). Kjerneelement, Matematikk 1–10 (MAT01-05). Fastsatt som forskrift læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020.

Varghese T. (2011). Considerations Concerning Balacheff's 1988 Taxonomy of Mathematical Proofs. Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education, 2011, 7(3), 181-192

Wathne U., & Brodahl, C. (2019). Engaging mathematical reasoning-andproving: A task, a method, and a taxonomy. Journal of the International Society for Teacher Education, 23(1), 6–17. Published online: 1 August 2019

# Vedlegg

## Vedlegg 1

# Forskningsprosjekt

# Argumentasjon i matematiske bevis i ungdomskolen, en kvalitativ studie.

Dette er et spørsmål til dere som foresatte, på vegne av deres barn i ungdomsskolen, om deres barn kan være med i et forskningsprosjekt hvor formålet er å studere hvordan elever argumenterer i forhold til ulike matematiske bevis. I dette skrivet gir vi deg informasjon om målene for prosjektet og hva deltakelse vil innebære for ditt barn.

**Formål**

Formålet med denne studien er å observere og samle inn data om bevis og argumentasjon i matematikken på ungdomstrinnet. Videre håper jeg at denne studien kan bidra til forståelsen av argumentasjon som ungdomsskoleelever tar i bruk. Dataene jeg samler inn her vil være dataene jeg bruker i min masteroppgave i forbindelse med lærerutdanning.

**Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?**

Universitetet i Sør Øst Norge (USN).

**Hvorfor får du spørsmål om å delta?**

Dere blir spurt om å delta fordi du er i en klasse der skolen har godkjent at jeg kan gjennomføre forskning. Dere får spørsmål om og bli med i et undervisningsopplegg som gjør at jeg kan få data som bidrar i min studie.   Denne forskningen krever godkjennelse av foresatte. Det er ansvarlig mattematikklærer for klassen som finner elever som ønsker og delta i prosjektet.

**Hva innebærer det for ditt barn å delta?**

Prosjektet innebærer at jeg observerer en til to timer på 45-60 min. Under timen(e) er det lagt opp til gruppearbeid. Da vil jeg gå rundt og ha deltagende observasjon. Deltagende observasjon innebærer at jeg går rundt og har dialog med elevene samtidig som jeg samler inn data. Jeg vil benytte meg av lydopptak av samtalene. Disse lydopptakene vil bli lagret kryptert.

**Det er frivillig å delta**

Det er frivillig å delta i prosjektet. Hvis du velger at ditt barn kan delta, kan du når som helst trekke samtykket tilbake uten å oppgi noen grunn. Alle personopplysninger vil da bli slettet. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser hvis du ikke vil delta eller senere velger å trekke deg.

.

Hvis du ikke vil at barnet ditt skal delta i prosjektet så er dette helt greit. Det blir gruppevis inndeling av klassen når dataene samles inn via lydopptak. Hvis du ikke vil delta vil barnet ditt bli plassert på en gruppe som ikke blir tatt lydopptak av og elevarbeid blir ikke innsamlet.

**Personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker opplysningene**

Vi vil bare bruke opplysningene om deg til formålene vi har fortalt om i dette skrivet. Vi behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket. Jeg samler inn lydopptak og elevbesvarelser. Jeg oppbevarer dataene, altså lydopptak og elevbesvarelser, selv. Lydopptaket blir tatt opp på appen diktafon der opptaket blir lagret på en sikker måte med kryptering. I elevbesvarelsene står elevenes navn. Jeg vil bytte ut alle navnene til elevene med andre tilfeldige navn etter at jeg er ferdig med å sortere dataene fra elevbesvarelsene. Skolens navn og kommune kommer heller ikke frem i denne studien. Det er bare jeg (student) pluss veileder som har tilgang på dataene som blir samlet inn.

**Hva skjer med opplysningene dine når vi avslutter forskningsprosjektet?**

Opplysningene anonymiseres når prosjektet avsluttes/oppgaven er godkjent, noe som etter planen er 01.06.2022. Alle lydoptak og elevbesvarelser vil også bli slettet.

**Dine rettigheter**

Så lenge du kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:

- innsyn i hvilke personopplysninger som er registrert om deg, og å få utlevert en kopi av opplysningene,
- å få rettet personopplysninger om deg,
- å få slettet personopplysninger om deg, og
- å sende klage til Datatilsynet om behandlingen av dine personopplysninger.

**Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om deg?**

Vi behandler opplysninger om deg basert på ditt samtykke.

På oppdrag fra USN  har NSD – Norsk senter for forskningsdata AS vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

**Hvor kan jeg finne ut mer?**

Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med: Universitetet i Sørøst-Norge ved Andrea Hofmann, andrea.hofmann@usn.no , Isak Halkinrud, isak_nei@hotmail.com eller vårt personvernombud Paal Are Solberg, personvernombud@usn.no. Hvis du har spørsmål knyttet til NSD sin vurdering av prosjektet, kan du ta kontakt med:  NSD – Norsk senter for forskningsdata AS på epost (personverntjenester@nsd.no)

eller på telefon: 55 58 21 17.

Med vennlig hilsen

| | |
|---|---|
| Andrea Hofmann | Isak Halkinrud |
| Veileder | Student |

Elevens navn:

------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

## Samtykkeerklæring

Jeg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet *Argumentasjon i matematisk bevis i ungdomskolen en kvalitativ studie*, og har fått anledning til å stille spørsmål. Jeg samtykker til at mitt barn kan:

- ☐ delta i deltagende observasjon (lydopptak)
- ☐ levere skriftlige besvarelser

Jeg samtykker til at opplysninger om mitt barn behandles frem til prosjektet er avsluttet. NB er du 16 år så kan du samtykke selv.

--------------------------------------------------------------------------------------------------------------

(Signering av foresatte, dato)

Vedlegg 2

# Gruppe oppgave

Navn på gruppemedlemmer:

Skriv navnet på hvem dere er på gruppe med og noter løsningene deres på dette arket her. Spør om ekstra ark hvis dere trenger det.

Oppgaven deres blir å argumentere for hvorfor deres løsning er den beste.

Diskuter oppgavene dere har gjort sammen i gruppa!

**Diskjusjon oppgave 1**

Argumenter for deres løsning og prøv å finne en felles løsning i gruppa.

De ulike kombinasjonene kan ikke ha gjentagene bokstaver slik som AAA. Kombinasjonene dere lager faller under det vi kaller **uten tilbakelegg og ordna rekkefølge**

Dere må kunne vise <u>hvordan</u> og <u>hvorfor</u> dere tror svaret ditt er riktig. Dere kan vise med tegning eller på den måten dere føler viser best at dere har funnet alle kombinasjonene.

Hvor mange ulike kombinasjoner kan man lage med bokstavene, A, B og C?

**Diskusjon oppgave 2**

Argumenter for deres løsning og prøv å finne en felles løsning i gruppa.

**Hvor mange ulike kombinasjoner kan man lage med bokstavene, A, B, C og D?** Dere skal også vise hvordan dere har kommet frem til svaret deres.

## Diskusjon oppgave 3

Argumenter for deres løsning og prøv å finne en felles løsning i gruppa.

Dere skal prøve å finne ut en måte slik at du kan vise hvor mange bokstavkombinasjoner det blir med alle bokstavene. Er det en måte å finne ut av hvor mange kombinasjoner det blir for 5,6,7.... bokstaver?

**Hvor mange kombinasjoner kan du lage med; A, B, C, D, E og F?**

**Er det en måte å vise alle kombinasjoner for alle antall med bokstaver?**

Dere skal kunne vise og forklare hvordan dere kom frem til svaret deres.