Universitetet i Sørøst-Norge
Fakultet for humaniora idretts- og utdanningsvitenskap

Mastergradsavhandling
Studieprogram: GMPELMA
Vår 2021

Henrik Fjeldavlie Gudmundsen og Qendrim Alija

Matematiske bevis på 7. trinn

En kvalitativ studie om elevers forståelse og utvikling av matematiske bevis

Universitetet i Sørøst-Norge
Fakultet for humaniora idretts- og utdanningsvitenskap
Institutt for pedagogikk
Postboks 235
3603 Kongsberg

http://www.usn.no

Denne avhandlingen representerer 30 studiepoeng

Sammendrag

Matematiske bevis innehar en sentral rolle i den matematiske modningsprosessen der elevene gradvis utvikler, etablerer og kommuniserer matematisk kunnskap. Denne studien undersøker elevers arbeid og utvikling av forståelse for matematiske bevis, gjennom en seks-ukers periode med proof-based teaching. Den primære hensikten til oppgaven er å få innsikt om et opplegg som baserer seg rundt proof-based teaching kan gi elevene en reell utvikling av matematisk forståelse. Studiens problemstilling er: På hvilken måte endres elevenes forståelse av matematiske bevis gjennom en seks ukers periode med proof-based teaching?

Studien har en kvalitativ tilnærming med videoobservasjon og intervju av to grupper, der gruppene bestod av fire elever i hver gruppe. Gruppene fikk utdelt en formodning om tallteori som de skulle samarbeide for å bevise. Elevene gjorde oppgavene uten støtte fra observatører. Videoobservasjonen bestod av to sekvenser, en før proof-based teaching og en etter, for å observere elevenes utvikling av forståelse for matematiske bevis. Datamaterialet ble videre analysert via deduktiv analyse med lukket koding, med utgangspunkt i allerede eksisterende teori fra Harel og Sowder (1998), og Balacheff (1988). Denne studien inntar et sosiokulturelt perspektiv på å forstå matematiske bevis og oppgaver i bevisføring, med utgangspunkt i det teoretiske rammeverket utviklet av Stylianides (2007). Vi definerer et matematisk bevis, på samme måte som Stylianides (2007), som en sosial prosess der klassefellesskapet aktivt deltar for å akseptere et matematisk bevis.

Studien tar sikte på å undersøke om proof-based teaching kan øke den matematiske forståelsen til elevene. Det er også et sentralt aspekt ved oppgaven å undersøke om elevenes forståelse kan overføres fra et matematisk domene til et annet. Oppgavene elevene arbeidet med under opplegget inspirert av proof-based teaching tok utgangspunkt i å bevise geometriske formodninger, mens oppgavene fikk utdelt under observasjon var sentrert rundt tallteori. På denne kunne vi observere om elevene faktisk kan overføre kunnskap fra et domene til et annet.

Studien undersøker altså hvordan elevene endrer sin forståelse om matematiske bevis, og hvordan de både kan produsere dem og forstå dem i en sosial kontekst, noe som etterlater refleksjon for undervisningspraksis. Resultatene viser at elevene i stor grad endrer bevisskjema etter endt undervisningsopplegg med proof-based teaching.

Abstract

Mathematical proof plays a central role in the mathematical maturation process where students gradually develop, establish and communicate mathematical knowledge. This study examines students' work and the development of understanding of mathematical proofs, through six weeks of proof-based teaching. The primary purpose of the assignment is to gain insight into whether a scheme based on proof-based teaching can give students a real development of mathematical understanding. The study's problem is: In what way does the students' understanding of mathematical proof change during six weeks of proof-based teaching?

The study has a qualitative approach with video observation and interview of two groups, where the groups consisted of four students in each group. The groups were given a conjecture about number theory which they were to work together to prove. The students did the tasks without the support of observers. The video observation consisted of two sequences, one before proof-based teaching and one after, to observe the students' development of understanding of mathematical proofs. The data material was further analyzed via deductive analysis with closed coding, based on already existing theory from Harel and Sowder (1998), and Balacheff (1988). This study takes a socio-cultural perspective on understanding mathematical proofs and tasks in proving, based on the theoretical framework developed by Stylianides (2007). We define a mathematical proof, in the same way as Stylianides (2007), as a social process in which the class community actively participates to accept a mathematical proof.

The study aims to investigate whether proof-based teaching can increase students' mathematical understanding. It is also a key aspect of the assignment to investigate whether the students' understanding can be transferred from one mathematical domain to another. The tasks the students worked on during the program inspired by proof-based teaching were based on proving geometric conjectures, while the tasks given during observation were centered around number theory. On this we could observe whether the students can transfer knowledge from one domain to another.

The study thus examines how students change their understanding of mathematical proofs, and how they can both produce them and understand them in a social context, which leaves reflection for teaching practice. The results show that the students largely change their proof-scheme after completing the teaching program with proof-based teaching.

Innholdsfortegnelse

Forord

Denne studien er gjennomført våren 2021, og med det avslutter vi en toårig masterutdanning ved Universitetet i Sørøst-Norge. Denne studien setter et punktum for en seksårig lang utdanning for Henrik (NTNU og USN) og femårig utdannelse for Qendrim (USN). Denne masterutdanningen har gitt oss en dypere innsikt i matematiske emner som ble lite dekket i den opprinnelige matematikkutdanningen ved grunnskolelærerstudiet. Gjennom arbeidet med studiet har vi fått mulighet til å dykke dypere i et matematisk emne som engasjerte oss begge to.

Vi vil rette en stor takk til våre veiledere, Sigurd Hals og Andrea Hofmann, for jevnlige veiledningsmøter med gode faglige diskusjoner. Deres engasjement har virkelig gitt oss troen på et krevende prosjekt. Takk for at dere også har fått oss til å holde bakkekontakten da vi har blitt i overkant ambisiøse på prosjektets vegne. Vi vil også takke for at dere har inkludert oss i et faglig miljø på USN, der vi har lært veldig mye. Vi er takknemlige for dette, og for mulighetene dere har gitt oss, vi vet at vi er heldige.

En stor takk vil også rettes til de fantastiske elevene som har vært deltagende i prosjektet vårt, dere gjorde virkelig en god innsats de seks ukene vi var og hadde undervisning med dere. Takk også til skolen som la til rette for at vi kunne ta over klassen over en så lang tidsperiode, vi hadde virkelig ikke fått dette til uten den gode tilretteleggingen.

Til slutt vil vi også takke hverandre for å støtte hverandre gjennom hele prosjektperioden. Vi har funnet det veldig givende å være to som skriver sammen, der vi har stilt opp for hverandre gjennom hele oppgaven.

Skien, mai 2021

Qendrim Alija og Henrik Fjeldavlie Gudmundsen

1 Innledning

Bevis er fundamentalt viktig for matematikken. Siden 1800-tallet har matematiske bevis blitt ansett som en av matematikkens nøkkelementer (David & Hersh, 1981). Grabiner (2012) peker på at matematiske bevis i stor grad samhandler med den fysiske verden, og at en dyp og relasjonell forståelse på matematiske bevis kan gjøre mennesket mer rasjonelt i den grad at man skiller mellom den absolutte sannheten og *bare sannsynlig.* Fordi man ved å forstå den matematiske argumentasjonen da skiller mellom den empiriske vitenskapen og den matematiske deduksjon.

Aktuell forskning fra samtiden tar utgangspunkt i at matematikkundervisning bør ha sin rot i kognitivt krevende aktiviteter der elevene samarbeider (Strayer & Brown, 2012; Nosrati & Wæge, 2015; Valenta, 2016), noe som dermed kan relateres til sosiokulturell læringsteori (Vygotsky, 1978). Videre bør undervisningen bygge på åpne problemer der elevene eksponeres for viktige matematiske ideer som kan fungere som brobyggere mot diskusjon i klassefellesskapet (Stein, Engle, Smith og Hughes, 2008).

Å bevise matematiske påstander er en viktig del av den matematiske diskusjonen, og derav flere læringsmål som manifesteres i Kunnskapsløftet 2020 (Utdanningsdirektoratet, 2019). Masteroppgavens primære motivasjon er å undersøke hvordan elever kan utvikle sin forståelse av bevisføring i matematikken. Begrunnelsen for våres valg av tema har rot i vår tro på at matematiske bevis er hjertet til all matematikk. Det å kunne produsere og forstå dem er essensielt for å nå høyere bevissthet og forståelse for matematikken. Grunnlagsdokumenter for opplæring i flere land (eksempelvis Colombia, USA og Mexico) poengterer viktigheten av bevisets plass i skolen fra de første årene på skolebenken, og at det finnes tydelige indikasjoner på at dette er en aktivitet som er verdt å utvikle (Cervantes-Barazza, Moreno & Rumsey, 2019). Ved NCTMs (2000) grunnlagsdokumenter for opplæring i USAs grunnskoler, ser vi den samme holdningen til bevisets plass i matematikkopplæringen i det følgende sitatet; «...from pre-kindergarten through grade twelve should enable all students to: «Recognize reasoning and proof as fundamental aspects of mathematics»» (NCTM, 2000, s. 56). I den norske skolen har derimot tonen vært en annen ved de frem til dagens nye læreplan (Utdanningsdirektoratet 2006; Utdanningsdirektoratet 1998), hvor bevis, argumentasjon og resonnering hatt en marginal plass i norske elevers utdanningsløp som er manifestert i fagets opplæringsplan. På den andre siden, med kunnskapsløftet 2020 i ryggen, ser vi at tanken om matematiske bevis i opplæringen har endret seg, og har nå fått en plass i fagets kjerneelementer på følgende måte:

> Resonnering i matematikk handler om å kunne **følge, vurdere og forstå matematiske** tankerekker. Det innebærer at elevene skal forstå at matematiske regler og resultater ikke er **tilfeldige, men har klare begrunnelser**. Elevene skal utforme egne resonnementer både for å forstå og for å løse problemer. Argumentasjon i matematikk handler om at **elevene begrunner** framgangsmåter, resonnementer og løsninger og beviser at disse er gyldige. (Utdanningsdirektoratet, 2019b, egen utheving).

Sitatet tolkes dithen at elevene skal forstå hvorfor for eksempel matematiske formler og algoritmer fungerer til å løse matematiske problemer. Da må de resonnere, vurdere og analysere for å så argumentere om hvorfor det fungerer eller eventuelt motargumentere om hvorfor det ikke alltid vil fungere. Siden det står "egne resonnementer", vil det si de skal resonnere ut ifra deres egen forståelse. Når dette er gjort, skal de klare å begrunne hvorfor deres svar stemmer for å så bevise eller motbevise. Hva som menes med "klare begrunnelser" kan tolkes ulikt. Vi tar utgangspunkt i Stylianides (2007), vil et matematisk bevis godtas når det er en felles enighet i klassefellesskapet om hva som anses som et matematisk bevis for dem. En klar begrunnelse kan derfor være når det er en felles enighet i klassefellesskapet om hvilke begrunnelser som til resten av klassen og ikke.

Det er grunn for å tro at en bred konsensus innad i forskermiljøet, når det kommer til hvilken plass matematiske bevis bør ha i skolen (eks; Stylianides, 2019; Stylianides & Stylianides, 2018; Stylianides, 2007; Ball & Bass, 2003; Carpenter, Franke & Levi, 2003), har påvirket den nye utformingen av læreplanene i matematikk. Hofmann og Kaufmann (2014, s. 229), argumenterer i tillegg for at å arbeide med bevis i skolen knyttes sterkt til minst fire av de grunnleggende ferdighetene i matematikkfaget (Utdanningsdirektoratet, 2019c); å kunne regne, å kunne uttrykke seg skriftlig (dersom det skal bevises skriftlig), muntlige ferdigheter (dersom beviset skal argumenteres for eller imot), eller bruk av digitale ferdigheter, dersom eksempelvis Geogebra skal brukes i undervisningsøyemed.

I forbindelse med masteroppgaven gjorde vi en gjennomgang av nyere eksempeloppgaver i nasjonale prøver i matematikk ved årene 2020, 2018 og 2017 (Utdanningsdirektoratet, 2020, 2018, 2017). Disse eksempeloppgavene viser at fokuset på oppgavene, strømlinjet med tidligere opplæringsplaner, ikke inneholder oppgaver der eleven må argumentere eller begrunne sine svar. Dersom man ser på standardprøver fra blant annet USA (eksempelvis Louisiana Department of Education, 2013), må elevene til stadighet argumentere for sine påstander for å tilegne seg full uttelling på oppgavene.

Dersom man spør en matematiker om hva et matematisk bevis er vil de fleste innenfor feltet støtte seg på tanken om at bevis er sluttproduktet av en sekvens med utsagn som er valide. Disse utsagnene kommer enten fra det foregående utsagnet eller stammer fra et aksiom, og det siste utsagnet i rekken er sannheten, altså et bevis (Borwein, 2012). På en annen side peker flere forskere innenfor matematikkdidaktikken på at et bevis, da spesifikt grunnskolen, ikke bare er en kjede med deduktive argumenter, men at det finnes åpenbare sosiale aspekter ved bevis som dreier som om å overbevise andre (Stylianides, 2007). Stylianides (2007, oversatt i Hana, 2013, s. 84) peker på at et bevis i skolen må inneholde disse sekvensielle holdepunktene for å betraktes som et bevis:

> i) Den benytter seg av påstander som er aksepterte av klassefellesskapet
> ii) Den benytter seg av resonnementsformer som er gyldige og blir forstått av klassefellesskapet
> iii) Den benytter seg av uttrykksformer som er hensiktsmessige og som blir forstått av klassefellesskapet

Det finnes, i motsetning til Stylianides (2007) og ulike oppfatninger av hva som faktisk kan kalles et matematisk bevis, uavhengig at det utføres i grunnskolen eller ikke. Reid og Knipping (2010) viser til at begrepene bevis og bevisføring (eng: *proof* og *proving*) brukes på fundamentalt ulike distinktive måter, og skaper implikasjoner for forskning, da det sjeldent beskrives hva ordene faktisk betyr. Med referanse til det antikke Hellas, med Euclid i spissen, antas det at et matematisk bevis medfører absolutt strenghet, og kan vanskelig realiseres i grunnskolen, da et bevis skal inneholde: «... an unbroken sequence of steps that establish a necessary conclusion, in which every step is an application of truth-preserving rules of logic. ... synonymous with formal derivation» (Hanna & de Villiers, 2012, s. 3). Det kan tolkes dithen at enkelte forskere innen feltet støtter seg på absolutt strenghet, og avviser alle forsøk som inneholder det sosiale aspektet som Stylianides (2007) peker på, da det kun sentreres rundt det formelle sluttproduktet. I denne masteroppgaven velger vi derimot å ta utgangspunkt i Stylianides (2007) sine sekvensielle holdepunkter for matematisk bevis i skolen, for hva som kan betegnes som et bevis.

Det eksisterer en rekke studier som undersøker elevenes forståelse av matematiske bevis, hvorav majoriteten av dem omhandler elever på ungdomstrinn eller videregående opplæring, men som nevnt er ikke disse gjort i Norge. Konklusjoner fra disse studiene viser et generelt mønster som går igjen, nemlig at elevene synes at å bevise matematiske påstander er vanskelig, og at de har liten forståelse for nytteverdien av å bevise dem (Cabassut et al. 2012; Chazan, 1993; Harel & Sowder, 1998; Healy & Hoyles, 2000).

Resultater av en litteraturgjennomgang av empirisk forskning fra klasserom i feltet gjort av Stylianides og Stylianides (2018, s. 103) viser at flere studier har nådd målet med å utvikle elevenes forståelse av matematiske bevis og bevisføring, og poengterer i særlig stor grad at studier som får til dette har tre ting til felles:

1) Studien har et godt forklarende teoretisk rammeverk.

2) Studien besitter et smalt og godt definert omfang over hva som skal studeres

3) En tilpasset tilnærming som støtter konseptuell forandring

Som en forlengelse av Stylianides og Stylianides (2018) sine holdepunkter for en vellykket studie som tar for seg utvikling av matematisk forståelse av bevis, ønsket vi å benytte oss av tilpasset *didactical design research* (Prediger, 2019, s. 6) som utgangspunkt for studien. Metoden baserer seg på å systematisk kombinere to mål for forskningen; 1) forbedre klasseromspraksis ved å designe undervisningsopplegg for et bestemt emne og 2) generere teoretiske bidrag ved empirisk forskning for å forstå det initierte undervisningsopplegget.

Det primære formålet for denne masterstudien, er å utforske om en intensiv opplæring med proof-based teaching (Reid & Vargas, 2018a, 2019) kan påvirke elevers forståelse av matematiske bevis. Samtidig vil forskningen gi pekepinner på om empirisk datainnsamling viser konsensus med tidligere forskning på feltet (Prediger, 2019), slik at logiske slutninger kan trekkes mellom proof-based teaching og dens plass i matematikkopplæringen. Som et ambisiøst mål ved forskningen ønsker vi at vår masteroppgave skal vise hvordan det kan arbeides med matematiske bevis i 7. klasse, og deretter utvikle et undervisningsopplegg sterkt forankret i forskning. Som et kjerneelement ved fagfornyelsen i matematikk (Utdanningsdirektoratet, 2019b) tolkes det dithen at å bevise matematiske påstander via å resonnere og argumentere, gir elevene rike muligheter for å tilegne seg en dyp forståelse av den matematikken det arbeides med, som i tråd med kunnskapsgrunnlaget (NOU, 2015:8; NOU 2014:7) for Kunnskapsløftet 2020. Problemstillingen i forskningen er utarbeidet med bakgrunn i av et helhetlig forskningsdesign og er følgende;

«På hvilken måte endres elevenes forståelse av matematiske bevis gjennom en seks ukers periode med proof-based teaching?»

For å besvare problemstillingen, ble det gjort to omganger med videoobservasjoner av tre ulike elevgrupper, der de skulle bevise matematiske formodninger, og et gruppeintervju av elevgruppene ved undersøkelsens ende. Videoobservasjonene ble gjennomført før og etter den seks ukers lange perioden med undervisningsopplegg inspirert av proof-based teaching (Reid & Vargas, 2017, 2018a) og Cervantes, Sánchez og Reid (2019) sitt oppgavedesign. Datamaterialet består av transkribering av videoobservasjoner og gruppeintervjuer, og utvalgt elevarbeid som elevene leverte inn i løpet av disse seks ukene. Oppgavene ved videoobservasjon som elevene skulle svare på er inspirert av Arbaugh, et al. (2019) sin formodning om aritmetiske påstander som skulle bevises i grupper.

Oppgavens struktur består av seks hovedkapitler med overskriftene innledning, teori, metode, resultat av analysearbeid, diskusjon og konklusjon og perspektivering. I oppgavens påfølgende kapittel redegjøres det begreper som således relateres til matematiske bevis i skolen, deretter vil det foreligge tidligere forskning for å belyse masterstudiens forankring. Metodedelen belyser og diskuterer hvilke tilnærminger som har blitt gjort og hvorfor disse er valgt. I tillegg vil relabilitet, validitet og etiske vurderinger bli drøftet. I den fjerde delen skal transkriberingen og elevoppgaver analyseres, med utgangspunkt i deduktiv analyse. Beskrivelsen av datamaterialet har sin rot i åpen koding, der mønstre og kategorier om elevenes forståelse av matematiske bevis blir utdypet, og videre analysert av og *proof-schemes* (Harel & Sowder, 1998) og Balacheffs (1988) fire nivåer. Deretter påfaller diskusjonsdelen der linjer vil trekkes mellom teori og faktiske funn utarbeidet av analysen. Avslutningsvis vil konklusjoner trekkes mellom elevenes forståelse av matematiske bevis, utvikling av matematisk forståelse, og hvilken rolle proof-based teaching kan bidra med i matematikkundervisningen i den norske skolen.

2 Teori

Denne studien tar sikte på å undersøke hvilke endringer som oppstår i elevers forståelse av matematiske bevis. Et godt forklarende teoretisk rammeverk er et av nøkkelpunktene til Stylianides og Stylianides (2018), for et vellykket prosjekt, og dette kapittelet har som hensikt å redegjøre for begreper knyttet til arbeid med matematiske bevis generelt, og hvordan dette kan se ut i grunnskolen. Kapittelet ser på tidligere forskning som undersøker elevenes utvikling av matematisk kunnskap og bevisføring i grunnskolen, for å danne et teoretisk grunnlag for beskrivelser som skal bidra i analysearbeidet av innsamlet datamateriale. Utvikling av kunnskap og læring i matematikkfaget vil deretter bli presentert, før *proof-schemes* modellen til Harel og Sowder (1998) vil fungere som et rammeverk for analysen i kapittel 4, blir presentert og forklart i dybden i dette kapittelet.

2.1 Matematiske bevis sin hensikt og formål i skolen

Dette delkapittelet har som hensikt å bidra med kunnskap om de matematiske bevisenes hensikt og formål for opplæringen i grunnskolen. Som tidligere nevnt er et matematisk bevis et essensielt aspekt for all matematisk aktivitet, og besitter et bredt spekter med muligheter for å skape læring og forståelse i skolematematikken. Det kan på en side diskuteres hvorvidt et fokus på matematiske bevis bør ha en sentral rolle i opplæringen, ettersom det er lite nevnt i fagfornyelsen (Utdanningsdirektoratet, 2019a). På en annen side ligger det gode muligheter i et kontinuerlig arbeid med å bevise matematiske påstander, i den grad at det gir en dypere forståelse av matematikken.

Det hevdes fra flere at matematiske forklaringer, kan fungere som matematiske bevis, som gir elever en annen type innsikt i hvorfor ting er som de er (eksempelvis Reid & Knipping, 2010; Hanna, 2012; Balacheff, 1988). Hanna (2012), mener at det finnes to distinktivt forskjellige måter å definere matematiske forklaringer, som et grunnlag for å identifisere hva som kan betegnes som forklarende bevis (eng: explanatory proofs). Den første måten å forstå en matematisk forklaring på som et bevis stammer fra matematikkens filosofi, der et bevis er forklarende når det oppklarer en matematiske fakta, altså at det gir en grundig forklaring på hvorfor en slutning kan trekkes ut fra bestemte premisser. På den andre siden finnes det åpenbare pedagogiske formål som en matematisk forklaring kan føre med seg. Et pedagogisk mål ved å lære matematiske bevis er å generere en forståelse for behovet av å bevise, dens strategier, teknikker, deduktive resonnementer og trekning av logiske slutninger (Hanna, 2012). I lys av masteroppgaven vil det pedagogiske synspunktet på å lære om matematiske bevis styre oppgaven. Med det formål for å lære elevene deduktiv resonnering og logiske slutninger, som en basis for kunnskapsproduksjon i matematikk generelt. Vi definerer matematisk resonnering som enten deduktiv, abduktiv, eller induktiv resonnering.

2.1.1 Definisjoner i matematikken

I lys av Hannas (2012) pedagogiske formål for å undervise matematiske bevis til elevene er å finne, undersøke og forstå matematiske strukturer, som gir grunnlag for en dypere innsikt i matematikken i seg selv. En matematisk definisjon har dype røtter i matematikkens historie, der Euclids elementer, første bok, innledes med å definere ulike matematiske begreper og fungerer som et grunnlag for alle matematiske bevis. Til tross de dype røttene Euclid og hans definisjoner har hatt for matematikken, er heller ikke denne ufeilbarlig. Moderne matematikere som Hilbert (1862-1943), påpekte feil i Euclids bevis, noe som viser til de menneskelige dimensjonene om et matematisk bevis sin forestilling (Sriraman, 2013).

Dawkins og Weber (2016) mener bevis i grunnskolen bør bygges på en ufeilbarlig matematisk definisjon som elevene i klassefellesskapet forstår. På denne måten kan ulike teoremer eller formodninger etableres med utgangspunkt i definisjonene. Uten denne grunnmuren som matematiske definisjoner gir elevene, vil det være vanskelig å lære elever om matematiske sannheter. Stylianides (2007) legger vekt på at påstandene må aksepteres av klassefellesskapet, og definisjoner blir dermed en essensiell barriere å avklare når elevene skal bevise matematiske formodninger. Reid og Vargas (2018a) på sin side introduserer begrepet *the toolbox*, som grunnleggende prinsipper for å drive med proof-based teaching. Deres første punkt handler om at elevene må dele et sett med generelt aksepterte teoremer og teknikker, og vil videre utdypes i delkapittel 2.3.

Hana (2013, s. 58-63) trekker frem ulike roller som definisjoner har som formål i matematikkundervisningen, *den økonomiske*, *den logiske* og den *strukturelle rollen* som alle gir et sammensatt svar på hvorfor definisjoner blir, og bør bli benyttet i matematikkundervisningen. Den *økonomiske rollen* en definisjon innehar er tid- og plassbesparende. Eksempelvis kan begrepet *sirkel* brukes i stedet for å måtte tegne, skrive eller si hele definisjonen hver gang begrepet brukes. I tillegg er det mer tidsbesparende å ha et spesifikt vannfast begrep for begrepet sirkel, i stedet for å samtale om definisjonen hver gang det nevnes. Alle definisjoner innehar en *logisk rolle*, i den grad av at definisjoner sikrer en presisjon i språket, og hjelper elevene med at termen blir brukt på samme måte av elevene. Den logiske rollen krever samtaler fra lærer for å sikre forståelse for betydningen blant elevene som skal benytte begrepet. Den siste rollen, *den strukturelle rollen*, har som formål å beskrive begrep som elever har behov for i skolematematikken eller senere matematisk virksomhet. Eksempelvis virker det uhensiktsmessig å definere symbolske notasjoner som ikke brukes før R2 matematikk på videregående i barneskolen. Den strukturelle rollen skal derfor bidra til å beskrive og definere begrep som elevene har som hensikt å faktisk bruke.

2.1.2 Deduktive argumenter som kjerne i matematiske bevis

Deduktive argumenter og deduktiv resonnering blir ansett av flere som grunnlaget for et matematisk bevis, spesielt innenfor skolematematikken (eksempelvis Reid & Vargas, 2018a; Hanna, 2012; Reid & Knipping, 2010; Balacheff, 1988). Et deduktivt argument blir ansett som den eneste resonneringsformen som gir absolutt sannhet (Reid & Knipping, 2010). Den enkleste formen for et deduktivt argument involverer et premiss som vi logisk gir en konklusjon, hvis A, så B. De logiske slutningene må følge bestemte slutningsregler (Hanna & Barbeau, 2010). Et klassisk eksempel på en slik deduktiv struktur kan være; Alle menn er dødelig, Sokrates er en mann, så Sokrates er dødelig (Reid & Knipping, 2010, s. 85). Enkle deduksjoner som dette er derimot ikke særlig interessant for lærere og skolematematikken i seg selv. Mer komplekse kjeder av deduksjoner er av interesse for å bevise innenfor matematikken, der et premiss følger aksepterte slutningsregler gjennom deduktive argumenter for å utlede en konklusjon. Dersom konklusjonene som utledes via korrekte steg hele veien fra premiss til konklusjon, må konklusjonen aksepteres som sann. For at et argument skal ha en fullkommen deduktiv struktur må ingenting gis til tilfeldighetene.

Et eksempel kan ta utgangspunkt i oppgaven *et kvadrattall vil alltid ha rest på 1 eller 0 når det divideres med 4.* En fullkommen deduktiv struktur starter med å sjekke for alle kvadrattall som er partall, så et partall kan alltid skrives som $2k$, som utledes fra en definisjon. Et kvadrattall med partall blir dermed $n^2 = 4k^2$, et kvadrattall med partall delt på 4 blir derfor $\frac{n^2}{4} = \frac{4k^2}{4} = k^2$. k^2 vil alltid være et helt tall. Derfor vil et kvadrattall som er et partall alltid få et helt tall som svar når det deles på 4, og ha 0 i rest. Dernest må en sjekke for alle kvadrattall som er oddetall. Igjen trekkes det ut fra en definisjon at alle oddetall kan skrives på måten $2k + 1$. Et kvadrattall med oddetall blir dermed $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$. Dermed gjenstår det å sjekke hva som skjer med oddetallet når det deles på fire som er premisset i oppgaven, og sjekke om det vil ende med 0 eller 1 i rest. Et kvadrattall med oddetall delt på 4 blir derfor $\frac{n^2}{4} = \frac{4k^2+4k+1}{4} = \frac{4(k^2+k)}{4} + \frac{1}{4} = (k^2 + k) + \frac{1}{4}$. $k^2 + k + \frac{1}{4}$ vil alltid være et helt tall pluss 0,25. Et kvadrattall med oddetall vil dermed alltid få 1 i rest $(\frac{1}{4})$. Som premissene i oppgavene viser utledes det en konklusjon via presise og aksepterte slutningsregler som gis en ufeilbarlig konklusjon. På en annen side vil det sosiale aspektet til en slik deduktiv struktur påvirkes av mottageren av beviset. Et slikt bevis, med referanse til Harel & Sowders (1998) proof-scheme modell, vil vanskelig være forståelig eller oppnåelig å produsere for elever på et lavere alderstrinn, det er heller ikke forventet i forhold til fagfornyelsen eller tidligere læreplaner. Deduktive argumenter på et lavere årstrinn bør likevel forventes å inneholde strukturer der veien fra premiss til konklusjon begrunnes, steg for steg (Stylianou, Blanton & Knuth, 2006).

Weber, Ingles og Mejia-Ramos (2014) peker likevel på at matematikere selv ikke bare tar nytte av deduktive resonneringsprosesser for å overbevise en selv, og at empirisk evidens eller en autoritær overbevisning alltid kan være en del av å bevise noe matematisk i startfasen, uansett utdanning og matematisk kunnskap. Dette kan fungere som et springbrett for *abduktive* resonneringsprosesser for elever. En abduktiv argumentasjonsstruktur inneholder elementer fra både induktiv og deduktiv resonnering, men kan enkelt sees på som en «baklengs deduktiv resonnering» (Reid & Knipping, 2010, s. 99-100). Det skilles primært mellom to typer abduktiv resonnering, som er spesielt fruktbare for matematikkundervisning (Antonini & Mariotti, 2009).

1) Et premiss trekkes fra en slutning og en regel. Eksempelvis; Regel: Alle menn er dødelige, Slutning: Sokrates er dødelig, Premiss: Sokrates er derfor en mann. Altså hvis B, så A. I denne typen abduktiv resonnering peker Baccaglini-Frank (2010), på at elevene lærer å velge en hypotese blant flere mulige hypoteser. På denne måten kan elevene lære å velge den mest logiske hypotesen for hvorfor B er et resultat av A.
2) Abduktiv resonnering kan fungere som en prosess for å forme en forklarende hypotese (Arzarello, et al., 2012). I motsetning til den første typen abduktiv resonnering relateres dette punktet til den logiske avgjørelsen elevene må gjøre for å konstruere en formodning som gjør B til et logisk resultat av A.

Bakgrunnen for at disse to er fruktbare for matematikkundervisningen, sammenfaller med Weber, Ingles og Mejia-Ramos (2014) sitt perspektiv på at det alltid vil være et naturlig startpunkt for å bevise en matematisk påstand, å selv være empirisk overbevist om formodningens sannhet, eller ikke, før den bevises. Dersom man vet at B er en logisk slutning av A, gir det mening å abduktivt resonnere seg tilbake for å finne ut hva som blir premiss for slutning B. Douek (2009) sin studie viser på sin side at abduksjon er svært nyttig for å bevise ukorrekte formodninger, i den grad at det viser seg konklusjon B ikke er en korrekt slutning av opprinnelige premiss A. Dersom den viser seg ukorrekt kan formodningen endres slik at den gjøres korrekt. På en annen side kan abduksjon ha som formål å lage «one-shot errorless conjectures», der en tar utgangspunkt i konklusjon B for å finne premiss A som gjør konklusjonen gyldig (Douek, 2009). Pedemonte og Reid (2011), viser til resultater som viser at elever synes det er vanskelig å overføre funn i abduktive resonneringsprosesser til et deduktivt bevis. Studien viser at kun fem av fjorten læringspar klarer å omgjøre funn i det abduktive til et deduktivt bevis. Det finnes en bred enighet om at bevis i all matematikk både bør og må være deduktivt (eksempelvis Grabiner, 2012; Reid & Vargas, 2018b), og med referanse til funn i Pedemonte og Reid (2011), kan rollen abduktive bevis diskuteres, da en ser at så få av elevene klarer å omgjøre det til et deduktivt bevis.

For å bevise påstander vil vi i denne oppgaven bruke begrepet *formodning.* Mange ulike ting mennesker sier er, i beste fall, en formodning. Ofte antar man hvordan ting vil utarte, med det formål om å overbevise enten seg selv eller andre, om at den opprinnelige formodningen gir en sannhet (Mason & Johnston-Wilder, 2006). Før en påstand er bevist, vil vi i denne oppgaven bruke begrepet formodning på samme måte som kildene våre bruker det engelske ordet *conjecture.*

2.1.3 Induktive argumenter

Induktive argumenter blir til stadighet brukt i skolen, og betegnes av NCTM (2000, s. 143) som «...generalizing from a pattern of observations made in particular cases". Det nevnes fra flere hold at induktive argumenter, i motsetning til deduktive argumenter, leder til en konklusjon uten sikkerhet (eks Reid & Knipping, 2010; NCTM, 2000; Hsieh et al. 2012). Et induktivt argument kan matematisk eksemplifiseres ved å trekke en slutning fra spesifikke utfall. Dersom en induktivt skal bevise formodningen om oddetall addert med et partall vil alltid bli et partall, tar en induktiv argumentasjon utgangspunkt i empirisk innsamlet data. Eksempelvis vil elevene argumenterer for at formodningen alltid stemmer, grunnet at $4 + 5 = 9$ og $11 + 6 = 17$, der både summen 9 og 17 er oddetall, formodningen vil derfor være sann i alle tilfeller.

Reid & Knipping (2010, s. 88) viser til tre karakteristikker ved et induktivt argument. For det første, likhet med deduktiv resonnering, starter en med å ta utgangspunkt i premisset A, og gjør en slutning basert på empiriske eksempler som gir B. For det andre dreier induktiv resonnering seg om å bruke noe som er kjent, for å konkludere noe som tidligere var ukjent. Eksempelvis brukes premiss A for å gjøre eksempelvis kalkuleringer for å konkludere at B er en konsekvens av A. For det tredje er induktiv resonnering *sannsynlig,* ikke *sikkert* (Reid & Knipping, 2010, s. 88).

2.2 Matematiske bevis i matematikk og utdanning

Tidligere studier gjort av TIMMS (1999) viser at kun Japan viser å ha et substansielt søkelys på å bevise matematiske formodninger i klassefellesskapet, med ca 26% av tiden brukt på slike aktiviteter, og 39% av alle matematikktimer inneholdt minst et bevis. Sammenligner man dette med resultater med testresultatene fra TIMMS, viser det at et klart mindretall av europeiske elever klarer å produsere korrekte valide bevis (Reid & Knipping, s. 68-69). Lite forskning er gjort rundt hvor mye matematikkundervisning som er sentrert rundt matematiske bevis i Norge. Det kan derimot se ut til at fokuset har spilt en liten rolle basert på tidligere opplæringsplaner (Utdanningsdirektoratet, 2013).

Reid og Knipping (2010) mener at matematiske bevis på grunnskolen fører med seg ulike aspekter av læring både i og av matematikk. Det første punktet til Reid og Knipping (2010) knyttes til verifisering av en matematisk formodning, som har vært det primære formålet til bevis, der en enten skal overbevise en selv eller noen andre. For å overbevise seg selv kreves det en form for epistemisk overbevisning av formodningen, som Duval (1991) definerer som den indre troen subjektet har for at en formodning er sann. Det andre punktet knyttes til forklaring, noe som i stor grad sammenfaller med viktige prinsipper i matematikkens kjerneelementer (Utdanningsdirektoratet, 2019b). Det tredje punktet relateres til oppdagelse av ny matematikk, eller underliggende strukturer til allerede kjent matematikk. Dette sammenfaller med Stylianides (2009) sitt punkt *generation of new knowledge,* som skal bidra til å beskrive produkter som elevene innad i et klassefelleskap tilegner seg i sin matematiske kunnskap når de konstruerer et bevis. Det fjerde punktet Reid og Knipping (2010) viser til handler om å systematisere kunnskap inn i deduktive systemer av aksiomer og teoremer.

Disse punktene beskriver primært hvilken rolle bevis spiller fra lærernes perspektiv, men det kan på en annen side diskuteres hvilken rolle matematiske bevis har for elevene. Som nevnt i innledningen viser ulike forskningsresultater til at elever har en liten forståelse for hvilken nytteverdi det skal ha å bevise matematiske formodninger (Cabassut et al. 2012; Chazan, 1993; Harel & Sowder, 1998; Healy & Hoyles, 2000). Særlig Healy og Hoyles (2000) viser til at 50% av elevene som deltok, i en omfattende studie om elevers erfaringer om bevis, viser til at verifisering er det eneste formålet matematiske bevis har. Dernest viser 35% av elevene viser til at kommunikasjon og formidling er det eneste bevis fører med seg. Mens kun 1% av deltakerne (26 elever) viser til oppdagelse og systematisering som det viktigste formålet til matematiske bevis. De resterende elevene ga ingen respons.

2.3 Proof-based teaching

Målet med *proof-based teaching* er å gi elever som er deltakende i undervisningen, muligheten til å tilegne seg forståelse gjennom å bevise (Reid & Vargas, 2018a, 2019; Reid, 2011). I matematikkopplæringen er det to fokusområder, forklaring og forståelse. Disse går sammen og er vanskelig å skille da en ofte trenger en form for forklaring for å kunne forstå. Matematikkopplæringen har som mål å kunne skape forståelse ved at enhver forklaring skal kunne få noen til å forstå hvorfor et matematisk krav er sant (Reid & Vargas, 2018a). Det vil derfor være naturlig at bevis har en plass i matematikken. Det matematiske beviset bør inneholde en forklaring for å ikke kun vise at et resultat er sant, men også kunne forklare hvorfor det er sant. Det er dette proof-based teaching handler om, å lære matematikk gjennom forklarende bevis som bygger på en felles kunnskap, som gir en mulighet for å utvikle relasjonell forståelse av matematikken (Reid & Vargas, 2018a). Proof-based teaching er ikke et emne eller et tema i matematikken, men her brukes bevisføringsaktivitet som en arena til å lære matematikk.

Proof-based teaching er en spesifikk undervisningsmetode som baserer seg på at elevene skal bevise formodninger som er viktige, enten for elevene selv eller, for det aktuelle matematikk temaet. Reid og Vargas (2018a, 2019) mener at for å bevise må enkelte verktøy være på plass, og betegner disse som *the toolbox*. Disse verktøyene kan sees, i bred forstand, i sammenheng med Stylianides (2007) sine holdepunkter og krever at elevene 1) deler et sett med generelt aksepterte teoremer og teknikker, 2) det finnes en forventning om å forklare, og 3) deduktive forklaringer (Reid & Vargas, 2018a, s. 236-237). For at et bevis i grunnskolen skal være et bevis må det, i likhet med Stylianides (2007) sine holdepunkter, være forklarende: «An explanatory proof makes reference to a characterizing property of an entity or structure mentioned" (Steiner, 1978, s. 143).

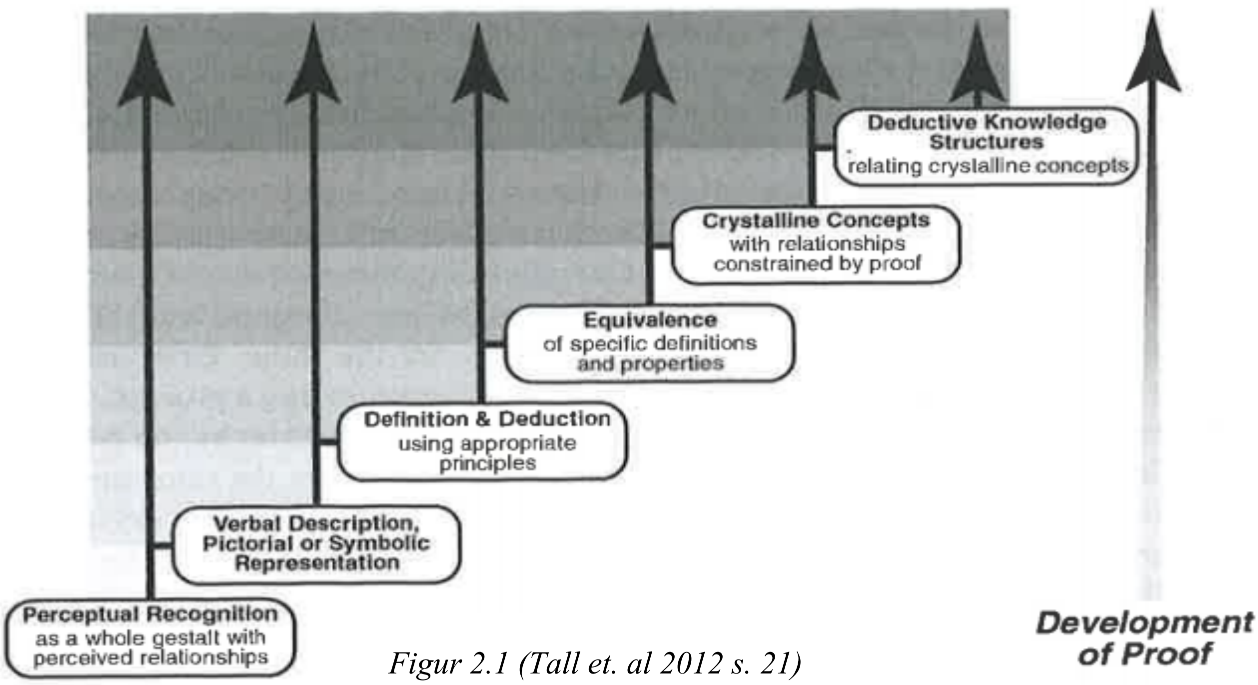
2.4 Utvikling av matematisk kunnskap i bevisprosesser

For å utvikle kunnskaper som støtter en reell utvikling av matematisk forståelse peker flere forskere på at en bevissthet for underliggende matematiske strukturer er essensielt (eks: Reid & Knipping, s. 80; Zaslavsky et al., 2012). Hiebert et al. (1997, s. 4) definerer matematisk forståelse som noe vi kan se hvordan er relatert til andre matematiske kunnskaper som vi allerede kan. Å arbeide med å bevise matematiske påstander kan, ifølge Zaslavsky et al. (2012), engasjere elever i autentiske matematiske aktiviteter, som vil kunne gi elevene forståelse av matematikkens aksiomatiske strukturer og viktige konsepter i matematikkens natur. Samtidig vil påstandene konstruere matematiske argumenter som elevene må forstå for å overbevise både seg selv og andre om dens sannhet eller dens ukorrekthet.

Til tross for perspektiver som besitter optimistiske syn på utvikling av ferdigheter og forståelse innenfor matematiske bevis, påpeker Anna Sfard (1991) at det er et dypt ontologisk gap mellom elevers forståelse av matematikken når det beveger seg fra det operasjonelle (det konkrete) til det strukturelle (det abstrakte), og manifesteres i tre ulike stadier ved *interiorization*, *condensation* og *reification.* Dette er i tråd med Balacheffs (1988) empiriske forskning som konkluderer med at overgangen mellom pragmatiske og konseptuelle bevis er ikke noe som skjer «her og nå», men er en del av en lengre prosess, der elevenes forståelse for bevis beveger seg fra å trekke det spesifikke i en klasse med objekter til det generelle, som gjelder for alle objekter innad i klassen med objekter. Interiorization dreier seg om et lavt nivå av kognitiv utvikling når det kommer til å abstrahere matematikken det arbeides med. Elevene på dette nivået har primært forståelse for matematikken når den er konkret og gjøres via mentale representasjoner (Sfard, 1991). Piaget & Inhelder (1967) sin forskning peker videre på at enkelte elever har vansker med å forestille seg resultatet av en handling uten å gjøre handlingen selv. Det neste steget (condensation) dreier seg om at elevene her klarer å redusere innholdet i de matematiske oppgavene ned i små mengder, uten å gå inn i detalj, der elevene kan generalisere fra noe som gjelder for et tilfelle til noe som gjelder for alle tilfeller. Det siste stadiet, som er fullt strukturelt, *reification,* beskrives som et kvantesteg fra tidligere forståelse, der objektet løsrives totalt fra den settingen den har oppstått fra.

Crystalline-concepts (Tall et al. 2012) er en universell matematisk modningsprosess der individet går fra tidlige persepsjoner og handlinger, til ulike former for bevisføring av Euclids teoremer, algebraiske og aksiomatiske bevis. Dette delkapittelet vil argumentere for at proof-schemes modellen til Harel og Sowder (1998) ikke viser til endringer av forståelse innad i den lærende, og det vil være totalt avhengig av forskernes tolkning å avgjøre hvilke endringer som finnes i elevenes matematiske kunnskap, som oppstår mellom videoobservasjonene og det matematisk pedagogiske opplegget. En kognitiv modell for matematiske modningsprosesser vil bidra til å øke forståelsen for hva som oppstår innad i subjektene gjennom det matematisk pedagogiske opplegget inspirert av proof-based teaching.

Modningsprosessen i crystalline concepts er illustrert i figur 2.2. Der overgangen til det mørkere fargede feltene representerer en økende sofistikert tilnærming til matematiske bevis. Prosessen i crystalline concepts kan eksemplifiseres gjennom matematisk argumentasjon. I den



Figur 2.1 (Tall et. al 2012 s. 21)

tidligste modningsprosessen kalt "perceptual recognition" vil barnet forstå at en lekebil addert med en annen lekebil gir to lekebiler, og argumenterer ved å vise at to biler er «mer» enn en bil, kun basert på perseptuelle opplevelser. Dette er ikke relevant i oppgavens sammenheng og vil ikke bli videre utdypet, ettersom elevene i målgruppen er langt over dette stadiet. Når barnet klarer å gi mening til forhold som er koherente i perceptual recognition, videreutvikles den tilegnede kunnskapsstrukturen av opplevelser som viser at det perseptuelle og handlinger relateres til hverandre, dette stadiet kalles "verbal description, pictorial or symbolic representation" (Tall et al. 2012). I matematisk argumentasjon kan dette vises når eleven argumenterer for at eksempelvis tallet 10 kan representeres på ulike måter, eksempelvis ti tellestreker er en annen måte å representere ti forbipasserende personer.

Etter enkle kunnskapsstruktur har blitt utviklet gjennom stadie 2 av veien mot crystalline-concepts, blir subjektet mer bevisst over matematikkens strukturer og egenskaper, blir enkelte kunnskaper så innarbeidet at de blir brukt som definisjoner for spesifikke konsepter, i stadiet "definition & deduction". Disse innarbeidede forståelsene for et konsept gjør det mulig å se forhold mellom egenskapene og bruke viktige og relevante prinsipper for å trekke logiske konklusjoner fra disse prinsippene, som kan brukes for alle objekter i klassen. Eksempelvis vil subjektet forstå og argumentere for at $97 + 24 = 100 + 21$, ettersom subjektet forstår at en kan bruke anvendelse av den assosiative loven for å forenkle et regnestykke.

Stadie 4, kalt "equivalence", dreier seg i stor grad om egenskaper som bruker samme teknikker for deduksjon. Subjektet forstår i dette stadiet at det finnes flere ulike teknikker som gir samme resultat av en handling. Teknikkene er derfor ekvivalente. En av disse teknikkene, vanligvis den enkleste å gjennomføre, blir derfor herfra brukt som den primære kilden for deduksjon innad i subjektet (Tall et al. 2012).

Forestillingen av matematikkens additive egenskaper utvikler seg til et fullt utviklet når mange additive egenskaper relateres sammen i et nettverk av forhold basert på deduksjoner. Dette kalles "crystalline concepts" og er illustrert i figur 2.3. Et crystalline concept betegnes som «a concept that has an internal structure of constrained relationships that cause it to have necessary properties as part of its context." (Tall et al. 2012, s. 20).

Den langsiktige modningsprosessen fra "perceptual recognition" til et "crystalline concept", kan beskrives på denne måten; Subjektet gjenkjenner et fenomen der objekter har like egenskaper, før verbale beskrivelser, ofte relatert til visuelle eller symbolske representasjoner, der de begynner å reflektere over spesifikke egenskaper og forhold. Elevene begynner deretter å definere og gjør deduksjoner. På denne måten kan elevene definere hvilke forestillinger som gir mening til definisjonen og utvikler egnede prinsipper for å bevise matematiske formodninger. Det neste steget oppnår eleven når den innser at enkelte matematiske egenskaper er ekvivalente, slik at begrepet dannes rundt strukturer av ekvivalente egenskaper som er relatert til deduktive matematiske bevis. Når elevene forstår at alle de ulike egenskapene, er ulike måter å uttrykke et konsept oppnår de et crystalline concept der egenskapene brukes til å produsere deduktive bevis (Tall, 2011; Tall et al. 2012).

2.5 Elevers forståelse av matematiske bevis

Hva elevene ser på som matematiske bevis tar utgangspunkt i deres forkunnskaper og erfaringer med matematikken. Elevenes matematiske erfaringer kan bestå av strikte beregningsalgoritmer som de måtte følge eller så kan de ha hatt mer frihet ved å velge selv hva de vil bruke for å komme fram til svaret. Uansett hvilken fortid de har med matematikken, så sitter de igjen med noen såkalte matematiske verktøy de kan bruke for å komme fram til en løsning. Elevenes forståelse av deres forkunnskaper vil bestemme deres forståelse av matematiske bevis.

I følge Balacheff (1988) kan en bruke fire nivåer for å kartlegge elevenes forståelse av matematiske bevis. De fire nivåene består av naiv empirisme, avgjørende eksperiment, generisk eksempel og generelt bevis. De tre første nivåene faller under det Balacheff (1988) kaller for pragmatiske bevis og den sistnevnte går under konseptuelle bevis. Tegninger, gjenstander og analogier er eksempler på pragmatiske bevis, mens konseptuelle bevis bygger på deduksjon og viser til noe som er ubestridt sant, som for eksempel formler for utregning av arealer. Rekkefølgen nivåene er presentert på, er den hierarkiske plasseringen Balacheff (1998) mener passer til elevenes forståelse av bevis da nivåene har en privilegert posisjon hos elevenes utvikling av matematisk kunnskap om matematiske bevis.

2.5.1 Pragmatiske bevis

Pragmatiske bevis består først og fremst i form av direkte visning som igjen kan bestå av handlinger eller eksempler. Det deles inn i to underkategorier naiv empirisme og avgjørende eksperiment. Språket er ikke et fraværende element, men det brukes ikke som et grunnleggende middel for å videreføre deres begrunnelse. Man bruker med andre ord eksempelet eller eksemplene som det konkrete beviset, men med lite forklaring eller ingen forklaring på hvorfor det er sånn. Reid & Knipping (2010) viser til flere tilfeller der flertallet av elevene aksepterer pragmatiske bevis og mener det er nok for å bestemme om noe stemmer eller ikke. Pragmatiske bevis kan også kobles til det Harel & Sowder (1998) kaller for eksternt overbevisningsskjema og empirisk bevisskjema ettersom bruk av eksempler og utforskning av numeriske eksempler kan ses igjen i naiv empirismen og avgjørende eksperiment. Harel & Sowders (1998) empiriske bevisskjema går både under pragmatiske og konseptuelle bevis, men elevene må klare å utforske de numeriske egenskapene før deres argumenter kan ses på som konseptuelle. Utdypelse av Harel & Sowders (1998) bevisskjemaer vil det komme mer om i delkapittel 2.6.

2.5.1.1 Naiv empirisme

Naiv empirisme består av en sannhet som kun består av noen bekreftede tilfeller som resultat. Det kan være eksempler som viser til at summen av partall addert med partall alltid blir et partall. Det vil med andre ord bety at ved å eksempelvis velge fem til seks tilfeldige partall og finne summen av disse, vil det holde for å kunne si noe om det påstanden stemmer eller ikke. Selv om dette ikke godtas som et matematisk bevis, kan det fortsatt være det første steget i en prosess mot et generaliserbart bevis (Balacheff, 1988).

2.5.1.2 Avgjørende eksperiment

Ved et avgjørende eksperiment lager man en hypotese ved å velge ett eller et fåtall av spesielle eksempler (bruk av negative tall) for å bevise en påstand. Om det viser seg at påstanden gjelder for disse eksemplene, så vil det gjelde for alle andre eksempler også (Balacheff, 1988). Det som skiller avgjørende eksperiment med naiv empirisme er at en tar utgangspunkt i noen konkrete eksempler som skal gjelde for alle eksempler, mens naiv empirismen består av tilfeldige valg.

2.5.2 Konseptuelle bevis

I motsetning til pragmatiske bevis, er handling eller visning ikke et grunnleggende middel for konseptuelle bevis. Her skal det begrunnes med formuleringer av de aktuelle egenskapene og forholdet mellom egenskapene. Når elever blir spurt av læreren om "hvorfor", svarer elever ofte med å gjenta hvilken operasjon de har brukt for å løse en oppgave eller for å bevise om en påstand er sann eller ikke. For konseptuelle bevis holder det ikke med en gjentagelse av hva en har gjort, en skal få fram en generaliserbar formulering som svarer på hvorfor noe gjelder for alle tilfeller eller hvorfor det eventuelt ikke gjelder for alle tilfeller. Som nevnt tidligere går deler av Harel & Sowders (1998) empiriske bevisskjema under konseptuelle bevis og det de kaller for deduktivt bevisskjema. Alt fra å *utforske numeriske egenskaper* i empirisk bevisskjema frem til *deduktiv bevis* i deduktivt bevisskjema henger i tråd med det som blir sett på som konseptuelle bevis.

2.5.2.1 Generisk eksempel

Det finnes en rekke forskning som tilsier at arbeid mot generiske eksempler er av stor nytte i elevers prosess for å rettferdiggjøre sannheten til en formodning (eks; Dogan & Williams-Pierce, 2020;

Reid & Vargas, 2018b; Balacheff, 1988). Et generisk eksempel ansees som et spesifikt objekt som representerer den generelle årsaken som viser til formodningens generalitet (Pedemonte & Buchbinder, 2011). Funn fra Dogan og Williams-Pierce (2020) viser til at generiske eksempler hjelper elevene med å redusere abstraksjonen som eksempelvis et generelt bevis fører med seg. På en annen side viser resultater fra samme studie til at bruk av generiske eksempler fort blir dypt internalisert i eleven og er vanskelig å endre (Dogan & Williams-Pierce, 2020).

På en annen side argumenterer blant annet Movshovitz-Hadar (1988) at et generisk eksempel på ingen måte kan beskrives som et matematisk bevis.

> *The proof of a generic example should not be confused with a fully general proof. It only suggests the full proof through a generalizable concrete example. From the purely logical point of view there is no replacement for the formal proof. (p. 18)*

Det tolkes dithen at Movshovitz-Hadar (1988) mener at generaliserbarheten kun gjelder for det konkrete eksemplet da det er basert på det ene eksempelet, og kan derfor ikke ses på som et generelt bevis som gjelder for absolutt alle eksempler.

Det finnes en rekke forskning som tilsier at arbeid mot generiske eksempler er av stor nytte i elevers prosess for å rettferdiggjøre sannheten til en formodning, fordi den viser noe konkret og hvorfor det er slik. Dette sitatet støtter denne tankegangen.

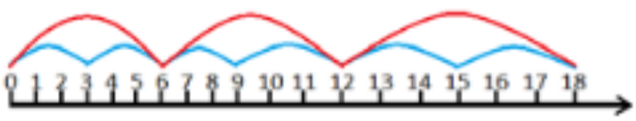
> *If mathematics were formally true, but in no way enlightening, this mathematics would be a curious game played by weird people (Rota, 1997, s. 132).*

Vi tolker at Rota (1997) mener matematikk ikke vil gi mening om det formelle ikke er opplysende. Ved å da ta veien om et generisk eksempel istedenfor generelle formler, vil det være mer forstående for noen. Weber og Mejia Ramos (2020) bekrefter det samme hos studenter på universitetsnivå, der studenter forstår bevis bedre dersom det er generisk, sammenlignet med generelle bevis.

Om et generisk eksempel skal godtas som et matematisk bevis, avhenger det av hvordan det blir fremstilt og hvem den fremstilles til. Reid & Vargas (2018b) mener det er to aspekter som er med på å bestemme om det generiske kan være et bevis, det kognitive og det sosiale. For at et generisk eksempel skal være et bevis fra et kognitivt ståsted, må det fremstilles i en generell deduktiv resonnementprosess som forekommer i lesernes tanker. Fra et kognitivt ståsted, menes det at leseren trenger å overbevise seg selv med sine egne tanker. Tankene til eleven overbeviser seg selv om at det eksisterer en fullt deduktiv slutningsstruktur bak argumentet (Reid & Vargas, 2018b). Fra et sosialt perspektiv, avhenger det av de sosiale konvensjonene som gjelder under ulike kontekster om et generisk eksempel godtas som et bevis eller ikke. I motsetning til et kognitivt ståsted, skal man fra et sosialt ståsted ta høyde for at argumentene skal godtas av fellesskapet. Stylianides (2007) forklarer at et overbevisende argument for seg selv, vil ikke alltid være godtatt i alle sosiale aspekter i et klasserom. Dette henger sammen med det vi innledningsvis i kapitelet forklarte om hvordan elevenes erfaringer og forkunnskaper påvirker deres forståelse av bevis som igjen påvirker hva de vil godta som et matematisk bevis.

Matematikksenteret (2015) viser hvordan et generisk eksempel kan se ut.

> *Alle tall som er delelig med 6 er også delelig med 3. Det vet jeg fordi vi kan se på* 48 *som* 8×6*. Det blir* $6+6+6+6+6+6+6+6$*. Vi kan dele hver 6-er i to 3-ere. Da blir* $48 = 3 + 3 + \ldots + 3$ 16 *ganger. Da er* $48 = 16 \times 3$ *og altså delelig med 3. Det kan vi gjøre uansett hvilket tall som er delelig med* 6*. Vi starter med å dele opp hver 6-er i to 3-ere, og ser da at tallet er delelig med* 3 *også. Tallet* 48 *er brukt som et generisk eksempel her.*



2.5.2.2 Generelt bevis

I motsetning til de tre andre nivåene, vil et generelt bevis ikke ta utgangspunkt i et eksempel. Argumentene tar utgangspunkt fra et generelt ståsted og har som hensikt å bevise at en påstand eller en egenskap gjelder for alle tilfeller (Knuth, Chopping & Bieda, 2009). Balacheff (1988) kaller dette nivået for *The thought experiment.* Det poengteres at argumentene på dette nivået forholder seg til egenskapene om objektene det spørres om, og det gjøres ved å bruke en generell formulering og ikke ved bruk av konkrete tilfeller (Balacheff, 1988).

> *The truth of a mathematical claim rests on the existence of a proof. Stated this way, such a criterion is absolute, abstract and independent of human awareness. This criterion is conceptually important, but practically useless. (Bass, 2009, s. 3)*

I delkapitlet om generiske eksempler, ble det brukt konkrete tall på å forklare hva et generisk eksempel er, det trengs ikke med generelle bevis. For å bevise hva trekanttall n er, kan man begrunne det uten å ta utgangspunkt fra et spesifikt trekanttall. Trekanttall viser hvor mange punkter det er i sidene til en likesidet trekant. For å finne trekanttall n kan en bruke den generelle formelen

T(n)=T(n-1) + n. Dette beviset er absolutt, abstrakt og uavhengig av det sosiale aspektet Stylianides (2007) viser til.

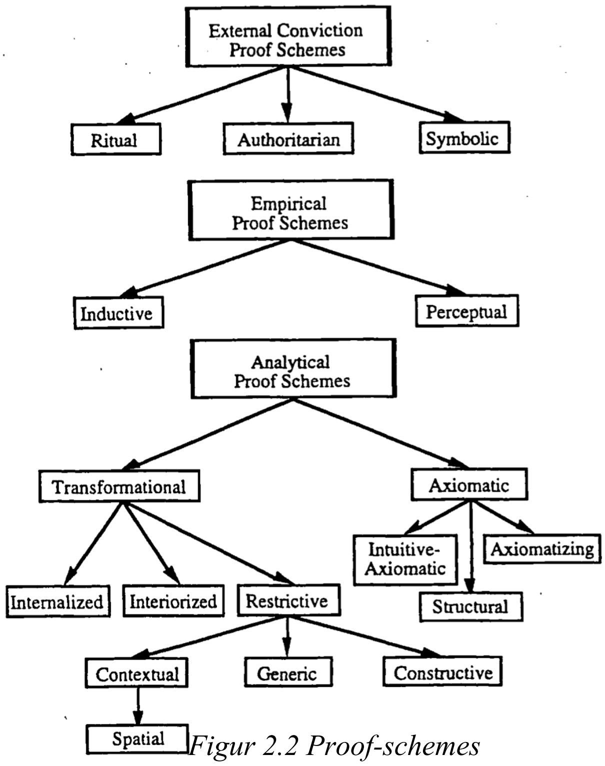
2.6 Rammeverk for analyse

Denne oppgaven søker etter å besvare hvilke endringer som oppstår hos 7. trinns elevers forståelse av matematiske bevis over en periode på seks uker med proof-based teaching. For å besvare denne problemstillingen ble det først observert elever som skulle bevise matematiske oppgaver i grupper, før et seks-ukers undervisningsopplegg ble gjennomført. I lys av åpen koding vil datamaterialet analyseres i kapittel 4 ved hjelp av Harel og Sowders (1998) sitt rammeverk for matematiske bevisskjema og Balacheffs (1988) sine fire nivåer.. Dette delkapittelet søker etter å gi leseren forståelse av analyseverktøyet, og hvorfor nettopp dette er valgt.

Både bevisskjemaene til Harel og Sowder (1998) og de fire nivåene til Balacheff (1988) som går under pragmatiske og konseptuelle bevis, inneholder punkter som kan brukes til å både analysere og sette ord på elevenes fremgangsmåter og bevis. Harel og Sowders (1998) bevisskjemaer skal hovedsakelig brukes for å analysere og kategorisere dataene fra observasjonene, men skal også brukes i diskusjonskapittelet. Balacheffs (1988) fire nivåer skal brukes i diskusjonskapitelet for å belyse hvilke typer bevis elevene bruker og hvilken forståelse av matematiske bevis de har, men vil også brukes i deler av analysekapittelet. Siden Balacheff (1988) sine nivåer belyser hvordan elever spesifikt i grunnskolen kan begrunne, og elevene vi har observert også går i grunnskolen, vil det være mulig å sammenligne informantenes løsninger på bevis med Balacheffs (1988) måter å bevise på. Harel og Sowder (1998) derimot går mer i dybden om tankeprosessen hos elevene og deler bevis opp i flere punkter. Siden informantene i Harel og Sowder (1998) sin forskning gikk på videregående og universitet, kan det bli lite sammenlignbart med våre informanter, men deres oppdeling og kategorisering av ulike bevisformer vil fortsatt være nyttige for å analysere elevenes prosess mot et bevis. En sammenkobling av Balacheff (1988) og Harel og Sowder (1998) vil derfor øke forskningens validitet og reliabilitet da de fire nivåene tar utgangspunkt fra grunnskole matematikk, mens bevisskjemaene vil kunne gi oss muligheten til en mer presis kategorisering av elevenes bevisføring. Ved å bruke flere teorier for å belyse en atferd eller en situasjon, vil resultatenes validitet øke og oppgaven vil bli mer troverdig (Johnson & Christensen, 2014).

2.6.1 Proof-schemes

Harel og Sowder (1998, 2005) argumenterer for at å bevise eller rettferdiggjøre en matematisk formodning handler om å overbevise seg selv (eng: ascertaining) og å overbevise andre (eng: persuading). Deres forskningsprosjekt undersøkte elevers kognitive skjemaer av matematiske bevis, og utviklet et rammeverk for elevers rettferdiggjøring av en matematisk formodning. De foreslår følgende tre bevisskjemaer; 1) eksternt overbevisningsskjema (eng: external conviction proof schemes), 2) empirisk bevisskjema (eng: empirical proof schemes) og 3) analytisk bevisskjema (eng: analytical proof schemes). Et bevisskjema kan beskrives som relativt stabile kognitive konfigurasjoner for hva som både overbeviser en selv, og hva som overbeviser andre om sannheten til en matematisk formodning. Elever befinner seg i et bevisskjema på et gitt sted, til en gitt tid i en matematisk modningsprosess (Harel & Sowder, 1998, 2005; Tall et al. 2012), mens Harel (2007) manifesterer sin opprinnelige tro i begrepet *proof-scheme* som «a way of thinking». Oppgaven undersøker, i motsetning til Harel & Sowders (1998) forskning, elever i 7. klasse. For å virkeliggjøre vil tenkte eksempler fra grunnskolen vises til gjennomgående i delkapittelet.



Figur 2.2 Proof-schemes

I det *eksterne overbevisningsskjema* skiller Harel og Sowder (1998, 2005) mellom tre underkategorier; rituell, autoritær og symbolsk. Det *rituelle bevisskjema* viser til at elever godtar bevis som ser deduktivt korrekt ut, fremfor argumentets riktighet. Elever med dette bevisskjema vil derfor godta et matematisk bevis som ser deduktivt korrekt ut, fremfor å vurdere deres egenskaper og definisjoner som utgjør et matematisk korrekt bevis. Det *autoritære bevisskjema* tar utgangspunkt i at elevene leter etter overbevisning om en matematisk formodning gjennom en autoritær kilde, eksempelvis oppgaveteksten, boken, læreren eller medeleven (Harel & Sowder, 1998; Housman & Porter, 2003; Flores, 2006; Harel 2007; Fried & Amit, 2008; Cabassut et al. 2012; Sen & Guler, 2015). Videre argumenterer Stylianou, Chae og Blanton (2006), for at elever med dette bevisskjema løser formodningen ved uten å diskutere eller forstå oppgavens definisjoner og egenskaper. Når elevene innehar et *symbolsk bevisskjema* (Harel & Sowder, 1998, s. 250.), manipuleres symboler som ikke gir mer mening til formodningen som bevises. Eksempelvis har elevene lært at boken sier at en finner arealet av en sirkel ved å ta $A = \pi r^2$. Dersom elevene har ikke forståelse om hvorfor π er 3,14 og har heller ikke hatt om potenser, vil de heller ikke ha noen matematisk forståelse om hvorfor svaret blir rett.

Neste hovedkategori er det empiriske bevisskjema kan enten være induktive eller perseptuelle. Eleven innehar det *induktive bevisskjema* når et, eller et begrenset antall med eksempler brukes som evidens for sannheten til alle innenfor klassen. I et *perseptuelt bevisskjema* gjør eleven slutninger basert på grunnleggende (eng: rudimentary) bilder og ikke er fullt ut støttet av deduktive argumenter. «The important characteristics of rudimentary mental images is that they ignore transformations on objects or are incapable of anticipating results of transformations completely or accurately" (Harel & Sowder, 1998, s. 255). Således kan det perseptuelle bevisskjema tolkes som et mellomsteg mellom Sfards (1991) interiorization og condensation, der elevene prøver å redusere innholdet i en matematisk påstand, men klarer ikke fullt ut å abstrahere til noe som gjelder for absolutt alle tilfeller innenfor klassen med objekter.

Det siste bevisskjema *deduktiv bevisskjema* kan enten være transformasjonelt eller aksiomatisk. I det transformasjonelle bevisskjema hevdes det at eleven overbeviser andre, eller er selv overbevist av en logisk deduktiv prosess (Harel & Sowder, 1998, 2005; Cabassut et al. 2012). Vi velger bevisst å bruke begrepet deduktivt bevissskjema, fremfor analytisk bevisskjema, i tråd med Harel, (2007), som mener deduktivt bevisskjema er mer passende enn analytisk bevisskjema. Transformasjonelle observasjoner skaper rom for en deduktiv prosess og kjennetegnes av a) vurdering av hva som er generelt i formodningen, b) mentale operasjoner av hva som er forventet resultat, og c) transformasjonelle operasjoner som en del i en deduktiv prosess (Harel & Sowder, 1998 s. 261). Inn under det transformasjonelle bevisskjema finner vi generiske eksempler som tidligere er drøftet i oppgaven (Reid & Knipping 2010; Balacheff, 1988). Det siste bevisskjema *aksiomatisk bevisskjema,* dreier seg rundt tanken om at elever på mange måter snakker om matematiske bevis slik en matematiker ville gjort det (eksempelvis Borwein, 2012; Bass, 2009), der slutninger trekkes ut fra aksiomer som aksepteres uten bevis.

2.6.2 Proof-schemes og dens relevans til Balacheffs fire nivåer

Som analytiske rammeverk beskriver Harel & Sowders (1998) proof-schemes godt hvordan man kan klassifisere elevenes bevis, mens Balacheff (1988) fokuserer på hvordan bevis kan se ut for elever i grunnskolen. Vi tolker at Harel og Sowders (2018) modell viser til en indre overbevisning, om hvordan bevis gir en form for epistemisk overbevisning, som Harel (2007, s. 65) selv nevner så er proof-schemes «... a way of thinking.», altså en indre prosess hos eleven. På den andre siden tolker vi Balacheffs (1988) taksonomimodell som mer fokusert på sluttresultatet, altså selve begrunnelsen, som står i kontrast til Harel og Sowder (1998) som har mer fokus på selve forståelsen og tankeprosessen frem til sluttresultatet. Vi velger derfor å argumentere for at det vil være hensiktsmessig å se de ulike bevisskjemaene til Harel og Sowders (1998) i lys av Balacheffs (1988) fire nivåer for matematiske bevis. På denne måten kan vi enklere forstå hvilke interne tankeprosesser, i form av bevisskjemaer som får sitt utspring eksternt fra subjektene som studeres.

Tabell 2.3. Egen tolkning av overganger mellom Balacheffs (1988) nivåer og dens sammenheng med Harel og Sowders (1998) bevisskjemaer

Balacheff (1988)	Harel & Sowder (1998)	Bevisets struktur
Naiv empirisme	Eksternt eller empirisk overbevisningsskjema	Induktiv resonnering
Avgjørende eksperiment	Empirisk overbevisningsskjema	Induktiv resonnering
Generisk eksempel	Empirisk eller deduktivt bevisskjema	Perspetuell forståelse induktivt, eller deduktiv/abduktiv resonnering
Generelt bevis	Deduktivt bevisskjema	Deduktiv/abduktiv resonnering

3 Metode

I dette kapitelet skal vi redegjøre for metoden vi har benyttet. Innledningsvis presenteres masteroppgavens rammebetingelser, hensikt, valg av forskningsperspektiv, tilnærming til teori og empiri, og valg av vitenskapelig metoder. Deretter vil det redegjøres for vurderingene som ligger til grunn for metodevalget. Videre skal det beskrives hvordan innsamlingen av data har foregått, hvilke typer oppgaver elevene har jobbet med, hvordan det matematisk pedagogiske opplegget ser ut og hvordan analysen av dataen har foregått. Til slutt vil etiske hensyn, reliabilitet og validitet vurderes.

For å kunne undersøke hvilken påvirkning proof-based teaching har hos elevenes matematiske forståelse, er det elevene som blir aktørene i studien. Det er gjort to runder med videoobservasjon, én før og én etter proof-based teaching. Målet med observasjonene var å undersøke forandringer hos elevenes fremgangsmåter når de løste bevisføringsoppgaver, altså hvordan elevene resonnerer rundt om de matematiske formodningene er sanne eller ikke. Vi hadde fokus på hva elevene sa og gjorde under arbeidet med oppgavene. Datamaterialet er analysert med bruk av Balacheffs (1988) sitt rammeverk for elevers forståelse av matematiske bevis og Harel og Sowders (1998) proof-schemes. Det finnes noen åpenbare metodiske utfordringer ved bruken av disse rammeverkene som vil bli belyst i starten av dette delkapittelet. Deretter vil metode for datainnsamling redegjøres for, før oppgavene elevene skulle løse blir presentert. Et utvalg av elevarbeid som er tatt fra undervisningene vil også bli lagt frem som et delkapittel under «oppgavene til elevene».

3.1 Metode for datainnsamling – videoobservasjon og gruppeintervju

Studiens rammebetingelser avgjør hvordan masteroppgaven vil ta form over tid. Med en tidsfrist på fem måneder og en begrensning på antall ord, er det viktig å kunne finne ut av hva som er gjennomførbart og ikke. Rammebetingelsene er derfor essensielle da de avgjør hva som faktisk er mulig å forske på og hvordan forskningsdesignet vil se ut (Halvorsen, 2008). I vårt tilfelle begrenset vi antall elever vi kunne observere og tidsperioden med proof based teaching. Studien kunne blitt mer generaliserbar om vi hadde hatt tid og mulighet til å gjennomføre studien på flere skoler. Fra et annet perspektiv er det en fordel å ha færre aktører å forholde seg til. Med færre aktører vil en kunne bruke mer tid på hver enkelt og har mer tid til å analysere ulike fenomener eller hendelser som oppstår (Larsen, 2012).

Hensikten med denne studien er å undersøke elevers endring i matematisk forståelse og bevisføring gjennom en seks ukers periode med et matematisk pedagogisk opplegg som bygger på proof-based teaching. På bakgrunn av dette vil neste steg være å finne ut av vårt databehov. Med databehov menes det hvilken type data vi trenger for å kunne svare på vår problemstilling. Da vi er ute etter elevenes utvikling av sin matematiske forståelse, er det viktig for oss å kunne ha en sosial interaksjon med dem for å muligheten til å avklare eventuelle mistolkninger og uklarheter. Samtidig er det gunstig å kunne observere og analysere elevenes metoder på å løse matematiske utfordringer flere ganger for datainnholdets validitet og relabilitet (Halvorsen, 2008). Larsen (2012) sier at det er forskerens ansvar at dataen er presis nok til at en annen forsker hadde fått nøyaktig samme resultater om gjennomføringen av studien blir gjort på nøyaktig samme måte. Studiens forskningsdel vil derfor ta utgangspunkt i et hermeneutisk forskningsperspektiv. Det vil si at fortolkning og forståelse gjennom refleksjon blir brukt når en skal analysere datainnholdet (Kvarv, 2014). Med andre ord, betyr det at en er ute etter det subjektive hos aktørene, som for eksempel indre mening og helhetlig forståelse (Halvorsen, 2008). Har man valgt et hermeneutisk forskningsperspektiv, vil det ofte passe med en induktiv tilnærming da en ikke har konkrete situasjoner eller fenomener en er ute etter. Ved en induktiv tilnærming tar man ikke utgangspunkt fra teorier eller hypoteser ved undersøkelser, men bruker empirien man har innhenta for å eventuelt konstruere ny teori (Grønmo, 2016). Studien vår derimot baserer seg først og fremst på proof-based teaching, noe som har blitt gjennomført i tidligere studier. På bakgrunn av dette, er studiet vårt basert på en deduktiv tilnærming, da det går ut på at en tar utgangspunkt fra en teori eller hypotese, og finner ut om det er holdbart ved en undersøkelse (Grønmo, 2016; Halvorsen, 2008). Etter å ha fastsatt disse punktene, ser en hvilken vitenskapelig metode eller metoder som passer til de øvrige punktene.

Vitenskapelige metoder er tilnærminger en tar til bruk for innhenting av empiri. Hvilken vitenskapelig metode som blir brukt avhenger av problemstillingen og forskningsprosjektets mål (Maxwell, 2013; Larsen, 2012; Grønmo, 2016). Fra et overordnet perspektiv, er vitenskapelige metoder delt i to deler, der kvantitative metoder inneholder tilnærminger som henter inn empiri fra en større mengde med aktører, der hensikten for eksempel kan være å kartlegge hvor mange nordmenn som drar til utlandet hver sommer ved å bruke en spørreundersøkelse. Kvalitative metoder derimot, innhenter empiri fra færre aktører. Bruker vi samme eksempel, vil en med en kvalitativ tilnærming eksempelvis velge ut 10 personer fra spørreundersøkelsen og be dem gi en detaljert forklaring på hva de gjør på ferie (Johannessen, Tufte og Christoffersen, 2016). Med færre aktører vil en kunne gå i dybden og få mer nyansert informasjon. Dette kan eksempelvis gjøres ved å stille følgespørsmål i intervjuer eller avklare eventuelle uklarheter med aktørene som er med i undersøkelsen (Larsen, 2012). I et av målene til for en vellykket forskning, peker Maxwell (2013) på at en skal forstå hvordan hendelser, handlinger og betydninger er formet av de unike omstendighetene som er til stede. Dette kan en finne ut av ved å undersøke et mindre antall med personer og situasjoner. Et annet punkt handler om uventede fenomener der kvalitative tilnærminger kan tilpasse forskningsdesignet etter spesifikke situasjoner eller fenomener som oppstår og som ses på som viktig (Maxwell, 2013). Dette punktet var viktig for studien vår da vi ikke visste hva elevene ville gjøre eller si under observasjonene. Maxwell (2013) hevder også at en tydelig og ryddig planlegging er viktig for forskningen før man setter i gang, da forarbeidet former sammenhengen i studien.

Tar vi punktene fra første avsnitt og sammenligner det med Maxwells (2013), Grønmos (2016), Larsens (2012) og Johannessens et.al (2016) definisjoner og utdypninger om kvalitative metoder, så passer det til vår hensikt og vårt mål om å se etter utvikling i elevenes matematiske forståelse, og derfor gjennomførte vi to kvalitative metoder som innebærer videoobservasjon og gruppeintervju med videoopptak til stede. Ved å bruke to metoder vil en kompensere hverandres svakheter med hverandres styrker som kalles for metodetriangulering (Larsen, 2012; Johnson & Christensen, 2014). Målet med å kombinere flere metoder er å få inn sikker og troverdig data ved å bruke metodenes egenskaper for å styrke hverandres svakheter (Johnson & Christensen, 2014). Johnson og Christensen (2014) mener med andre ord at det gir mer validitet å kombinere metoder, enn å bruke de hver for seg. Videre i teksten skal det utdypes om observasjon og gruppeintervju som vitenskapelige metoder.

3.1.1 Observasjon

Kvalitative metoder bærer med seg både fordeler og ulemper gjennom prosessen. Ved videoobservasjon kan man gå igjennom dataen en har innhenta gjentatte ganger for å kvalitetssjekke at alle viktige deler er tatt med og eventuelt se situasjoner en ikke har fått med seg ved første observasjon (Johannessen, Tufte og Christoffersen, 2016; Larsen, 2012). Den største ulempen med observasjon generelt er det Larsen (2012) kaller for kontrolleffekten. Aktører som observeres kan ha det vanskelig å ha en naturlig atferd, noe man er ute etter som regel. I vårt tilfelle kunne det påvirke elevene ved at de ble nervøse og eventuelt ikke turte å diskutere som de ellers ville ha gjort i en vanlig undervisning. For å forebygge dette, tok vi til oss Larsens (2012) råd om å gjennomføre noen korte testsekvenser med de for å ufarliggjøre videoobservasjonen.

Man skiller som regel mellom strukturerte- og ustrukturerte observasjoner. I strukturerte observasjoner har man forhåndsbestemte kategorier som observatøren skal se etter (Kleven & Hjardemal, 2018). De forhåndsbestemte kategoriene skal være i tråd med det man vil ha svar på. Kleven & Hjardemal (2018) påpeker at det er ofte to årsaker til hvorfor en tar i bruk strukturerte observasjoner. Først og fremst er punktene man skal se etter basert på problemstillingen og de teoretiske analysene man har brukt. I tillegg til det, skal hvem som helst kunne observere aktørene uten at det skal påvirke observasjonsresultatene (Kleven & Hjardemaal, 2018). Ulempene er at viktig data som kunne vært interessant å analysere kan gå tapt. Derfor skal man være sikker på om de kategoriene som er satt, får med seg den dataen som er nyttig. Ustrukturerte observasjoner derimot, kan ses på som det motsatte av strukturerte observasjoner. Her er det ikke alltid spesifikke ting en ser etter. Problemstillingen retter deg mot hva du er ute etter, men det er ingen klare regler for hva du skal se etter. Alt som kan virke viktig og interessant under observasjonen kan tas med (Kleven & Hjardemaal, 2018). Selv om ustrukturerte observasjoner er åpne i motsetning til strukturerte observasjoner, skal fortsatt dataen man innhenter gi oss nok informasjon for å kunne bruke det i forhold til problemstillingen (Larsen, 2012).

I studien vår er vi ute etter elevenes matematiske språk under videoobservasjonene. Da vi ser etter deres fremgangsmåter, argumenter og bevis, ble det gjennomført en strukturert observasjon. Selv om vi tok utgangspunkt i en strukturert observasjon, utelukket vi ikke å ta med uventa fenomener som kunne oppstå under observasjonene. Det at vi var to som gjennomførte prosjektet, kunne vi fordele på hvem som så etter hva. Vi brukte dette som en fordel for å kunne dekke for svakhetene ved strukturerte observasjoner.

3.1.2 Gruppeintervju

Elevene som ble observert gikk også igjennom ett intervju for å få en dypere innsikt på kognitivt nivå. Istedenfor én til én intervjuer, ble det gjennomført gruppeintervjuer. Ifølge Kvale og Brinkmann (2015) har gruppeintervjuer som hensikt å få fram flere synspunkter rundt samme tema og spontane utsagn som gruppen kan komme frem til ved åpen samtale blant aktørene. Som ulempe kan intervjuerens kontroll over intervjuforløpet blir redusert, og det kan føre til et kaotisk preg i dataen en får inn (Kvale og Brinkmann, 2015). Skulle vi hatt individuelle intervjuer med alle informantene, ville vi ha fått betraktelig mye mer data å håndtere, noe som hadde være mye mer tidskrevende og blitt utfordrende i forhold til rammebetingelsene. På bakgrunn av dette vil ulempen med det kaotiske preget med gruppeintervjuer, ikke være en konkret ulempe da utfordringer blir den samme uansett type intervju vi velger å gjennomføre. For å minke slike utfordringer, vil vi være tydelige på at elevene skal holde seg innenfor temaet og spørsmålene vi stiller dem.

Som nevnt tidligere er det hensiktsmessig å ta i bruk flere metoder for å forebygge hverandres svakheter (Johnson & Christensen, 2014). Videoobservasjoner gir oss muligheten til å faktisk se elevenes kroppsspråk og hvordan de eventuelt samarbeider. Det vi ikke får med oss, er hva de faktisk mener med det de gjør eller sier, som kan føre til mistolkninger av situasjoner eller utsagn.

For å unngå eventuelle mistolkninger, får vi da muligheten til å avklare eventuelle hendelser som har oppstått under observasjonen. Det er en slik metodetriangulering Johnson & Christensen (2014) mener kan være med på å forsterke forskningens troverdighet.

3.2 Matematisk pedagogisk opplegg

Som et design for oppgavene elevene skulle arbeide med i seks ukene undervisningstimene vi hadde til rådighet, var det essensielt å gi elevene rike muligheter til å utvikle dype nivåer av forståelse (Kieran, Doorman & Ohtani, 2015). En dyp forståelse for matematikken det arbeides med er lettere sagt enn gjort, og for å utvikle disse dype forståelsene valgte vi å ta utgangspunkt i Cervantes, Sánchez og Reid (2019) sitt oppgavedesign. Designet bygger på følgende fem prinsipper, og er tolket basert på originallitteraturen;

> (P1) *High cognitive-demand level*: krever kompleks og ikke-algoritmisk tenkning, en forutsigbar, velkjent tilnærming for elevene og er ikke eksplisitt foreslått av oppgaven, instruksjonen fra læreren eller et eksempel som er fremvist for elevene (Smith & Stein, 1998).
>
> (P2) *Open tasks*: inneholder ingen eksplisitt informasjon om hvordan oppgaven kan løses, og preges av usikkerhet i den opprinnelige oppgaveinformasjonen som er presentert for elevene i oppgaven (Ponte, 2005). På denne måten legger oppgaven opp til en lav inngangsterskel og et høyt tak som elevene kan jobbe i, inspirert av LIST-oppgaver som blant annet Matematikksenteret (2018) snakker varmt om.
>
> (P3) *Introduce false conclusions*: Ved å la elevene arbeide med falske formodninger angående et matematisk utsagn, gis elevene rike muligheter til å utvikle sine egne ideer og gi egne konklusjoner basert på erfaringer og arbeid ved å bevise matematiske påstander (Rumsey & Langrall, 2016).
>
> (P4) *Generate cognitive conflict*: Gi elevene oppgaver som baserer seg på motsettende informasjon (Limón, 2001).
>
> (P5) *Management of the confrontation of positions*: Formodninger som gis til elevene som er bygget på falsk informasjon (P3), skaper forvirring. Lærer og medelever stiller spørsmål for å få gjøre den falske formodningen til en korrekt formodning (Solar & Deulofeu, 2016).

Tabell 3.1 Matematisk pedagogisk opplegg - oppgaver

Areal figurer	Omkrets figurer	Volum figurer
F1: Areal av alle trekanter vil være $A = \frac{gh}{2}$ Bevis påstanden.	**F5:** Det er mulig å lage en visualisering som beviser forholdet mellom π og omkretsen Bevis påstanden.	**F9:** Man må vite areal av firkant for å finne volum av kube. $V = lbh$ Bevis påstanden.
F2: Arealet i alle parallellogram finnes dersom man bruker samme formel som for alle firkanter $A = lh$ Bevis påstanden.	**F6:** Omkretsen i mangekanter finnes ved samme formel som kvadrat $O = 4s$ Bevis påstanden.	**F10:** Det er irrelevant å vite areal av sirkel for å finne volum i prisme $V = \pi r^2 h$ Bevis påstanden.
F3: Arealet i sirkel finnes ikke dersom radiusen er mindre enn 0,5. $A = \pi r^2$ Bevis påstanden.	**F7:** Omkrets for alle figurer vil være å addere alle sidene med hverandre. Bevis påstanden.	**F11:** Volum av alle kjegler kan finnes ved å bruke formelen $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ Bevis påstanden.
F4: Arealet i alle sirkler finnes dersom du vet diameteren. Bevis påstanden.	**F8:** Omkretsen av oktogon vil være $8s$ Bevis påstanden.	**F12:** Man kan bruke samme formel som for kjegle for å finne ut volum av en pyramide Bevis påstanden.

Oppgavene i dette designet er utformet etter prinsipper (P1) og (P2): elevene skal løse oppgavene som ikke krever store ferdigheter i algoritmiske prosedyrer, oppgavene i seg selv legger heller ikke opp til algoritmisk løsning. Med hensikt er oppgavene stort sett sentrert rundt tankene om at (P1) og (P2), skal gi elevene rike muligheter til å bevise matematiske påstander i grupper, mens F3, F6 og F8 er basert rundt (P3) som er falske påstander som legger opp til en kognitiv konflikt, som beskrevet i (P4), som igjen gir elevene mulighet i fellesskap å presentere formodninger som gjør disse formodningene sanne, med støtte fra medelever eller lærere i (P5).

3.3 Oppgavene til elevene

Hva som er et godt nok bevis for grunnskoleelever avhenger av elevenes bakgrunnskunnskaper og de nasjonale lærerplanene. På grunnskolen har ikke elevene algebra som et læringsmål, og det vil derfor ikke være forutsetninger for elevene og lære om analytiske bevis.
For å studere elevenes forståelse av matematiske bevis, må elevene eksponeres for oppgaver som legger til rette deltagelse i å bevise matematiske formodninger. Med bakgrunn i det matematisk-pedagogiske opplegget ble oppgavene valgt med bakgrunn i (P2), at oppgaven skulle være åpen. I tillegg til at elevene skulle arbeide med en åpen oppgave måtte oppgaven også inneholde kjente operasjoner, som elevene hadde forutsetninger for å kunne løse. I henhold til den norske læreplanen (Utdanningsdirektoratet, 2013) som elevene har mottatt sin matematiske opplæring gjennom, vises det at «...bruke problemløysing og modellering til å analysere og omforme eit problem til matematisk form, løyse det og vurdere kor gyldig løysinga er.», er et av fagets formål og kan relateres til de valgte oppgavene. Således forventes det at elevene har hatt noe opplæring i å se sammenhenger, uttrykke dette, og vurdere hvor gyldig denne løsningen er.

Oppgavene elevene skulle bevise i grupper er inspirert av Arbaugh et al. (2019, s. 16), og handler i stor grad om å bevise formodninger sentrert rundt tallteori. I selve det matematisk pedagogiske opplegget ligger søkelyset på å bevise geometriske formodninger. Ved å undersøke arbeid med elevens forståelse av geometriske bevis, sett opp mot bevise tallteori, forteller datamaterialet noe om hvor overførbart arbeid med proof-based teaching innenfor et spesifikt domene i matematikken er til et annet domene av matematikken. Dette kan til en viss grad klassifiseres som *ekstern gyldighet* (Jacobsen, 2005, s. 237-238) i forskningen, der slutninger kan trekkes for å se om proof-based teaching er relevant og kan overføres til andre situasjoner.

Oppgave 1 Summen av tre påfølgende heltall vil alltid være delelig på tre. Bevis påstanden. Oppgave 2 Summen av fem påfølgende heltall vil alltid være delelig på fem. Bevis påstanden.

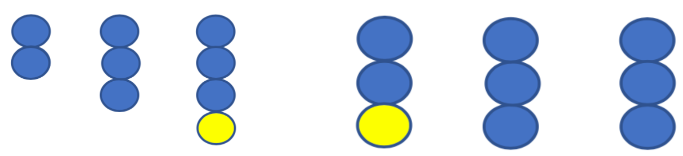
Figur 3.2: Oppgavene til elevene

I neste delkapittel vises det til løsningsforslag inspirert av Balacheffs (1988) taksonomi-modell for matematiske bevis i skolen.

3.3.1.1 Oppgave ved første videoobservasjon – før proof-based teaching

Den første oppgaven gir rom for å velge ut tre vilkårlige påfølgende heltall, for dernest å undersøke om summen av disse påfølgende heltallene alltid vil bli et nytt heltall når summen divideres på tre. Denne formodningen bevises deduktivt gjennom å vise til at $(n-1)+n+(n+1)=3n$. Deretter sier formodningen at dette resultatet alltid vil være delelig på tre. Altså $\frac{3n}{3}$, vil alltid danne et nytt heltall. Et bevis av denne typen vil i følge Balacheffs (1988) taksonomi modell klassifiseres som et generelt bevis av den grunn ved at beviset løser seg fra konteksten og en konkret representasjon, som gjøres i det generiske eksempelet.

Formodningen kan også bevises for alle påfølgende heltall generisk ved å representere tallene med eksempelvis kuler. Med utgangspunkt i eksempelet $2+3+4$ vist i figur 3.2, kan de vise at summen alltid vil være delelig på tre dersom man flytter et tall, representert ved en kule, fra det største over til det minste tallet, der nye like grupper blir dannet. Derav vil det største tallet, fire, flyttes over til gruppen med opprinnelige to kuler, derav tre like grupper med tre i hver. Tre like grupper av tre vil alltid være delelig på tre. Så i dette eksempelet vil $2 + 3 + 4 = 9$ kunne skrives om til $3 + 3 + 3 = 9$ og $\frac{9}{3} = 3$. Dette vil være mulig å gjøre med alle tre påfølgende heltall som deles på tre. Derfor er påstanden sann.



Figur 3.3 – løsning av oppgave 1 – generisk eksempel $2+3+4=3+3+3$

Elever som løser denne oppgaven med bakgrunn i Balacheffs (1998) velger ut noen «uvanlige» tall for å dernest undersøke om formodningen holder vann ved disse eksemplene. Dersom eksemplene stemmer vil det være et bevis for at det gjelder alle tall. Eksempelvis kan elevene ta utgangspunkt i de tilfeldige «uvanlige» tallene $111 + 112 + 113$, deretter summere og dividere på tre. Summen av disse tallene vil bli 336, og denne summen dividert med tre vil bli et nytt heltall, 112. Altså er påstanden alltid sann.

Dersom formodningen løses med utgangspunkt i naiv empirisme (Balacheff, 1988) ved at elevene bekrefter verifiserer påstandens sannhet med bakgrunn i et fåtall eksempler. $4 + 5 + 6 = 15$ og $\frac{15}{3}$ vil være et nytt heltall 5, det samme viser seg for de tre påfølgende heltallene $10 + 11 + 12 = 33$, divideres summen med tre, altså $\frac{33}{3} = 11$ som er et nytt heltall. Altså er påstanden alltid sann.

3.3.1.2 Oppgave ved andre videoobservasjon – etter proof-based teaching

Oppgaven elevene skulle bevise i etterkant av det matematisk-pedagogiske opplegget inspirert av proof-based teaching, skulle elevene, i likhet med oppgaven før opplegget, bevise at fem påfølgende heltall dividert med fem alltid gir et nytt heltall. Denne oppgaven samsvarer med oppgaven elevene fikk tildelt før det matematisk-pedagogiske opplegget, og påfølgende løsningsforslag basert på Balacheffs (1988) taksonomimodell for matematiske bevis i skolen vil ikke være ytterligere relevant for oppgaven.

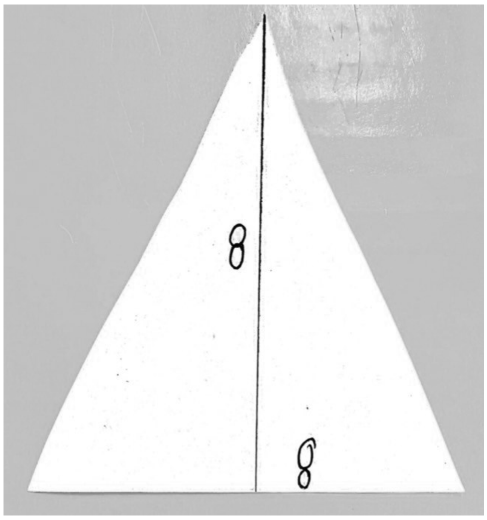
Denne oppgaven ble valgt for å tydelig se endringer i elevenes forståelse av å bevise matematiske påstander. Som senere vist i datamaterialet viser elevene ingen av elevene viser noe større forståelse for oppgaveteksten enn ved første videoobservasjon, og ingen løsningsforslag eller hint om hvordan den første oppgaven kunne løses ble gitt.

3.3.2 Utvalgt elevarbeid

Innen arbeidet i selve det matematisk pedagogiske opplegget som fremlagt i 3.2, hadde vi en økt der vi gikk gjennom prinsipper i Reid & Vargas (2018a) the toolbox*,* som dannet en felles enighet innad i klassefellesskapet for hvordan vi skal arbeide med å bevise matematiske formodninger. Som nevnt i teorikapittelet inneholder disse punktene at elevene må dele et sett med generelt aksepterte teknikker, forventning om å forklare, og at disse forklaringene må være deduktive. For at elevene skulle forstå hva som menes med disse vanskelige begrepene, med barns øyne, ble det i stedet illustrert med en matematisk oppgave som alle elevene kunne forstå og være aktivt deltagende. Oppgaven handlet om å bevise at summen av partall addert med oddetall alltid vil være et oddetall, og ble vist gjennom Balacheffs (1988) taksonomimodell for hvordan bevis kan se ut i grunnskolen. Elevene ble etter hvert nivå, naiv empirisme til generelt bevis, spurt om dette var et godt nok bevis for å si noe om det gjelder for hver gang. En generelt akseptert teknikk for å bevise matematiske formodninger var å visualisere, noe som både er forklarende og viser til at formodningens premiss gir en gyldig konklusjon med medfølgende deduktive argumenter. Det generelle beviset for formodningen som deduktivt vises ved $2n + (2p + 1) = 2(n + p) + 1$, der n og p er vilkårlige hele tall, som trekkes ut fra aksiomer. Dette derimot ikke akseptert av klassefellesskapet, av den årsak at elevene ikke forstod de algebraiske uttrykkene som formelen innehar.

3.3.2.1 F1 – areal av trekant

Det første utvalgte elevarbeidet er innsamlet med bakgrunn i F1: «Areal av alle trekanter vil være $A = \frac{gh}{2}$. Bevis påstanden.». Denne undervisningsøkten var den først i det matematisk pedagogiske opplegget med proof-based teaching. Elevene ble presentert med formodningen om at formelen skal gjelde for absolutt alle trekanter. Etter dette gikk elevene i selvvalgte grupper og skulle gi sitt beste forsøk på å bevise hvorfor denne formelen alltid er sann/noen ganger sann/alltid usann. Etter ca 40 minutters arbeid i grupper skulle elevene tilbake i klassefellesskapet for å argumentere for deres løsninger, samt være kritiske ovenfor de andre gruppenes løsningsforslag. Elevene ble oppfordret til å vise hvorfor påstanden alltid vil være sann/noen ganger sann/alltid sann basert på de aksepterte teknikkene som ble godtatt i klassefellesskapet, der en visualisering av et konkret eksempel viser til generaliteten til alle trekanter ved hjelp av en deduktiv forklaring. Denne elevgruppen som til la frem sitt løsningsforslag i figur 3.2, argumenterte deduktivt for at formelen har særegne likhetstrekk med formel for areal av kvadrater, altså $A = ss$, og dersom man deler denne på to, vil man da ende opp med et areal av likesidet trekant. Det samme vil gjelde for alle likesidede trekanter. Formodningen blir av denne elevgruppen ikke bevist gjeldende for likebente og rettvinklede trekanter, da formodningen kun bevises for likesidede trekanter.



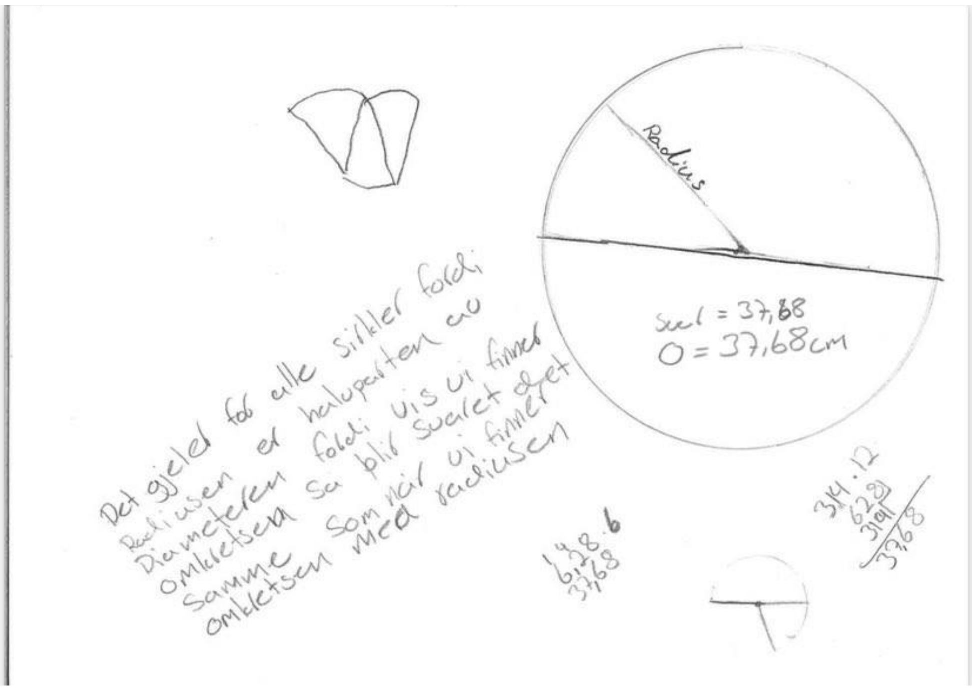
Figur 3.2

I forlengelse av oppgavedesignet ble (P5) brukt for å konfrontere konflikter mellom elevene for å finne ut om den samme deduktive forklaringen for alle likesidede trekanter også kan gjelde for alle andre trekanter. I samsvar med Reid & Vargas (2018a) sitt punkt om en forventning om deduktive forklaringer innad i klassefellesskapet fremkom mange konfirmerende forklaringer på at samme tankemåte er gjeldende for alle trekanter. Det ble dannet en felles konsensus om at rettvinklede trekanter samsvarer med formel for areal av rektangler ($A = lb$) dividert med 2, og likebente trekanter samsvarer med areal for kvadrater dividert med 2.

3.3.2.2 F4 – omkrets av sirkel

I det andre utvalgte elevarbeidet skulle elevene bevise formodningen som tar utgangspunkt i «Omkretsen i alle sirkler finnes dersom du vet diameteren. Bevis påstanden». Elevene ble i denne formodningsoppgaven påminnet formel for areal av sirkel $O = 2\pi r$. Elevgruppen ble oppfordret til å visualisere tankene, for deretter å bevise påstanden generisk. Klassen delte seg opp i fem grupper og arbeidet i cirka 40 minutter før elevene skulle legge frem sine bevis i klassefellesskapet.

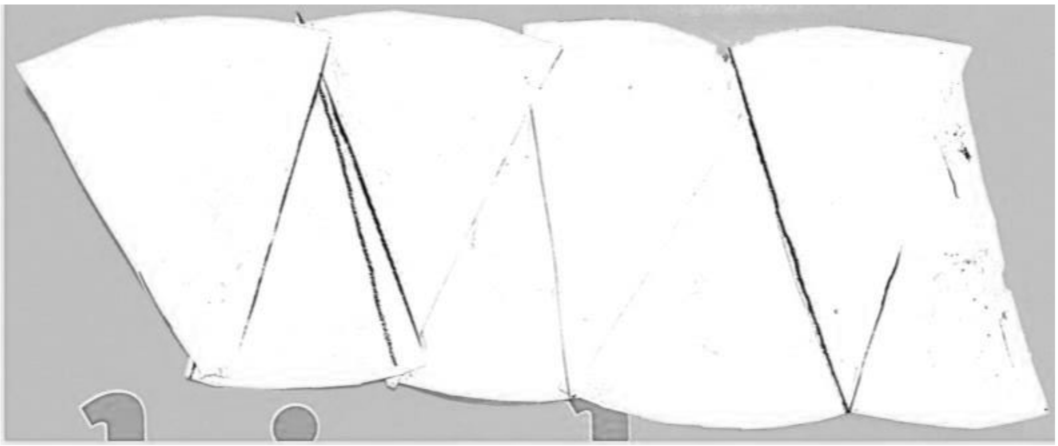
Fire grupper hadde la frem et naivt empiristisk bevis der de forklarte ved gjentatte eksempler at areal i sirkler finnes dersom du vet diameter. En gruppe viste derimot frem en generisk forklaring med en tilhørende visualisering på hvorfor dette alltid vil være en sann formodning dersom premissene er sanne. Elevgruppen argumenterer deduktivt for formodningens sannhet ettersom r er $\frac{d}{2}$, der disse fungerer som ekvivalente formler ettersom forholdet mellom r og d er totalt avhengige av hverandre. Derfor kan elevene benytte formelen $O = 2\pi r$ eller $O = \pi d$, der utfallet av O vil være ekvivalent.



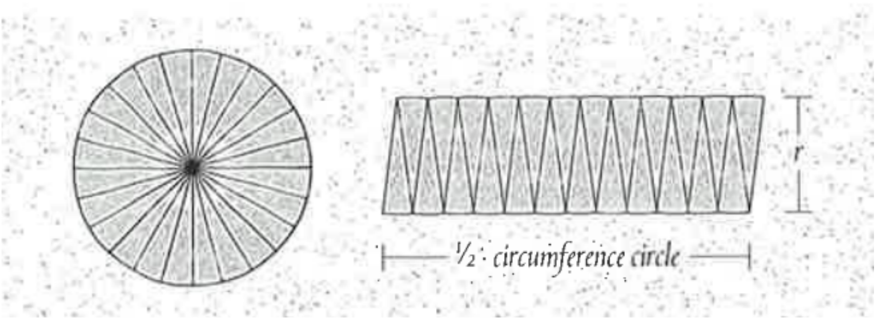
Figur 3.3 Løsningsforslag F4.

I forlengelse av dette har elevene gjentatte ganger i proof-based teaching opplevd suksess i å dele opp figurerer for å se hvordan disse kan tolkes på ulike måter, der man igjen får samme resultat (se 3.4.1.1) Elevene delte sirkelen opp og satt dem sammen i en figur lignende et parallellogram, og argumenterte for at sidene $A + D$ vil være lik sirkelens diameter, eller hvilken av disse er radius.

Elevene anerkjente at denne visualiseringen ikke kan gi et godt nok bevis for at både omkretsen kan regnes ut ved å addere $B + C$, i og med at visualiseringen ikke innehar rette linjer, men en hypotese ble at dette kunne være et godt nok bevis for å utforske mange av sirkelens egenskaper. Dersom bitene er delt små nok kan eksempelvis arealet regnes ut ved formel for areal av parallellogram $A = lh$ eller omkretsen ved å addere sidene B og C, som vist illustrert av Polster (2008, s. 1).



Figur 3.4 – Forlengelse av F4.



Figur 3.5 – Visualisering av bevis for omkrets av sirkel (Polster, 2008, s. 1)

3.4 Metode for analyse

For å analysere det empiriske datamaterialet har vi benytte en deduktiv tilnærmingsmetode for analyse av dataen fordi analysen er basert på allerede eksisterende teori. Dette delkapittelet søker etter å kort redegjøre for deduktiv analyse, dernest å begrunne og beskrive arbeidet med analysen av datamaterialet.

3.4.1 Deduktiv analyse

Som tidligere nevnt baserer kvalitativ forskning seg rundt ideer om at fenomener kan utforskes i det mennesker sier, handlinger og skriftlige produksjoner. Deduktive analyser av datamateriale, i motsetning til induktive analyser, baserer seg rundt tanken om at det dannes en hypotese basert på teorier, der data blir innsamlet for å teste denne hypotesen (Morales Pedraza, 2017). Cresswell (2017, s.213) beskriver denne formen for analyse som "…are summarized, interpreted according to predetermined themes, a cause-effect relation is established between them, and if necessary, comparisons are made between the cases". Som forhåndsvalgte temaer tar vi utgangspunkt i Harel og Sowders (1998) bevisskjemaer, og vist i tabell 3.1. På denne måten kan vi klassifisere elevenes fremleggelser av argumenter med utgangspunkt i forhåndsbestemte temaer og koder.

3.4.2 Analyse av datamateriale fra observasjon og intervju

Bakgrunnen for valg av analysemetode har sin rot i oppgavens problemstilling. Oppgaven søker etter å belyse hvilke endringer som skjer i elevenes forståelse av matematiske bevis gjennom et opplegg inspirert av proof-based teaching. For å nå målet med dette valgte vi å ta utgangspunkt i Harel og Sowders (1998) bevisskjemaer. De forhåndsbestemte kodene vises i tabell 3.1

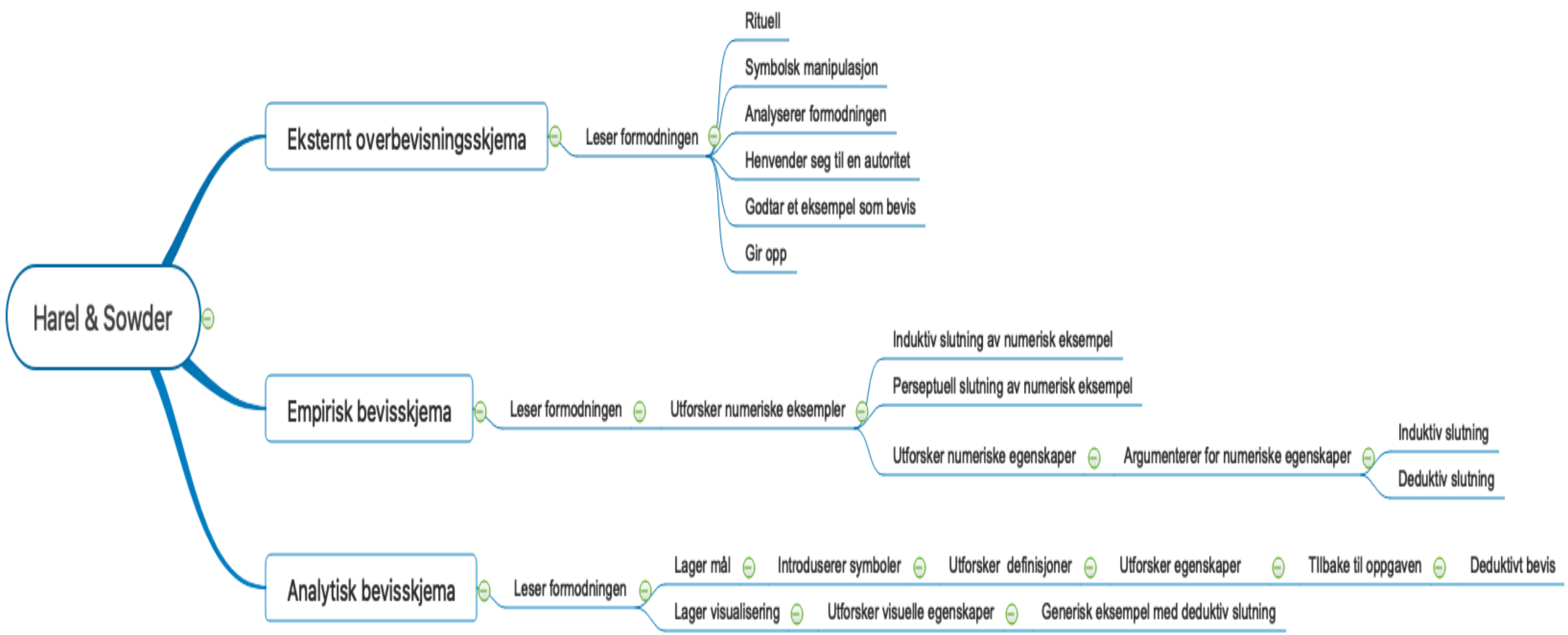
Gjennom analyseprosessen begynte vi å se gjennom videoopptakene for å danne oss en formening om hvilke bevisskjemaer elevene kan falle inn under. Deretter begynte vi å transkribere elevenes dialoger, og skrev ned ting vi observerte, eksempelvis usikkerhet, frustrasjon eller gestikulering. Harel og Sowder (1998) poengterer at elevenes bevisskjema er relativt stabile, derfor så vi det som en nødvendighet å se opptakene flere ganger, for å sikre korrekt transkripsjon av innsamlet data.

Ved å forhåndsdefinere koder basert på eksisterende teori, gjorde dette analysearbeidet enklere, i den grad at kodene bestemmer hvilket bevisskjema elevenes argumenter, fremgangsmåter og tanker under intervju. På en annen side er Balacheffs. (1998) taksonomimodell en viktig del av analysen, som vist i tabell 2.3. Vi argumenterte tidligere for at vi tolker Harel og Sowders (1998) modell for en måte å tenke på, altså en intern prosess, mens Balacheff (1998) viser hvordan grunnskoleelevers bevis faktisk kan se ut. På denne måten kunne vi enklere klassifisere elevenes faktiske bevis. Elevenes faktiske fremgangsmåter er illustrert i figur 3.6.

For å få oversikt over det store datamaterialet vi endte opp med, valgte vi å opprette koder i NVivo, der vi klassifiserte elevenes argumenter, med fargekoder. Der hvor det var usikkerhet over hvilket bevisskjema de ulike argumentene tilhørte valgte vi å klassifisere dem under begge, da et betydelig fåtall av elevenes argumenter var vanskelig å tolke inn under Harel og Sowders (1998) bevisskjema.

Tabell 3.1 – forhåndsbestemte temaer og koder.

Bevisskjema	Underkategori	Koder
Eksternt overbevisningsskjema	Autoritær	Hovedkilden for overbevisning er utsagn som gjengis i lærebøker, kommunisert av lærer. Instrumentell forståelse, memorering av regler.
	Symbolsk	Bruk av symboler som ikke innehar funksjonalitet eller innehar noen form for logisk mening i henhold til oppgaven
	Rituell	Godtar bevis som ser deduktivt korrekte ut.
Empirisk bevisskjema	Bevis ved eksempel	Beviser en matematisk påstand basert på et eksempel. Motsier ikke induktive argumenter.
	Induktivt	Evaluerer og trekker slutninger basert på et eller et fåtall eksempler.
Deduktivt bevisskjema	Transformasjonell	Viser til det generelle og gir logiske slutninger, gjerne basert på det spesifikke.
	Aksiomatisk	Bevis trekkes ut fra aksepterte aksiomer, og aksepteres uten bevis.


Harel & Sowder
Eksternt overbevisningsskjema
Leser formodningen
Rituell
Symbolsk manipulasjon
Analyserer formodningen
Henvender seg til en autoritet
Godtar et eksempel som bevis
Gir opp
Empirisk bevisskjema
Leser formodningen
Utforsker numeriske eksempler
Induktiv slutning av numerisk eksempel
Perseptuell slutning av numerisk eksempel
Utforsker numeriske egenskaper
Argumenterer for numeriske egenskaper
Induktiv slutning
Deduktiv slutning
Analytisk bevisskjema
Leser formodningen
Lager mål
Introduserer symboler
Utforsker definisjoner
Utforsker egenskaper
Tilbake til oppgaven
Deduktivt bevis
Lager visualisering
Utforsker visuelle egenskaper
Generisk eksempel med deduktiv slutning

Figur 3.6

3.5 Validitet og researcher bias

Prosessen med å minimere antall validitetstrusler, ble gjort ved å ta i bruk en tilpasset tilnærming til *multiple validities* (Johnson & Christensen, 2014). Det har vært vanskelig å finne sammenligningsgrunnlag når man skal prate om «hvor lang en feltstudie bør vare». Dersom man ser denne studien i lys av andre studier på feltet (eks Balacheff, 1988; Sfard, 2008; Cabassut et al. 2012; Chazan, 1993; Healy & Hoyles, 2000) tolker vi det dithen at studien har *extended fieldwork validity* (Johnson & Christensen, 2014), der datainnsamling over en lengre periode gir forskeren mulighet til å se mønstre og forhold i studiens definerte omfang, som gir rom for slutninger som er nærmere den proksimale sannhet (Johnson & Christensen, 2014; Kleven, 2008). Vi har samtidig brukt veileder i stor grad for å få tilbakemeldinger, altså *external audit*, der veileder har vært en god støtte i designutformingen (Høgheim, 2020; Johnson & Christensen, 2014). *Multiple data sources* ble brukt, hvor forskningen har til sammen elleve deltakende 7. klassinger, og som også tidligere nevnt *multiple methods* og *metodetriangluering* er en viktig del av oppgavedesignet (Johnson & Christensen, 2014). Det vil også være hensiktsmessig å drøfte *multiple theoretical perspectives* som en validitetstrussel. I kunnskapsbasen til denne oppgaven har jeg tatt for meg flere teoretiske perspektiver og tidligere studier på feltet. Enkelte evidensbaserte studier (Reid & Vargas, 2018a, 2019; Balacheff, 1988), viser til at noen «enkle grep» kan føre til en høyere forståelse, mens Sfard (1991) peker blant annet på at dette er en lang og krevende prosess, der overgangen mellom condensation og reification klassifiseres som et kvantesteg, vil disse ulike perspektivene danne en base, som vi som forskere må navigere mellom, for å finne den proksimale sannheten.

Researcher bias dreier seg om to spesifikke validitetstrusler som kan beskrives som dype fallgruver for forskeren dersom man ikke tar hensyn til dem, og dreier seg om 1) seleksjon av data som passer til forskerens eksisterende teori, mål og forforståelse og 2) valg av data som *utpeker* seg i datamaterialet (Maxwell, 2013, s. 124). Vi har tiltro til at de overnevnte valgene for å minimere validitetstrusler, er med på å styrke oppgavens validitet. Fra et personlig ståsted mener vi at å gjennomføre det matematisk pedagogiske opplegget med en forskningspartner reduserer risikoen for researcher bias. En nøkkelstrategi for å forstå researcher bias blir kalt *refleksivitet*, der forskeren engasjeres i å overvåke, og forsøker å kontrollere, deres forforståelse om temaet som undersøkes. (Johnson & Christiansen, 2014; s. 411).

Det vil også være hensiktsmessig å diskutere prosjektets påfallende *begrepsvaliditet.* Gjennom besøk på skolen og ved første økt med elevene under opplegget ble det diskutert hva et bevis er, og påfallende hva et matematisk bevis er, samt kontinuerlig arbeid med å bevise matematiske påstander, ble det dannet en felles forståelse i klassefellesskapet over hva det vil si å bevise noe i matematikken. Gjennom *det matematiske pedagogiske opplegget* etterfulgt av *gruppeintervju,* kom det til uttrykk om vi hadde den samme forståelsen om temaet, også kalt *member checking* (Maxwell, 2013, s. 126 & Johnson & Christensen, 2014, s. 380)

3.6 Forskningsetikk og behandling av personopplysninger

I Forskningsetikkloven § 4 (NESH, 2016) står det at «Forskere skal opptre med aktsomhet for å sikre at all forskning skjer i henhold til anerkjente forskningsetiske normer. Dette gjelder også under forberedelser til forskning, rapportering av forskning og andre forskningsrelaterte aktiviteter». Når en skal gjennomføre et forskningsprosjekt, er det ikke spørsmål om en skal ta stilling til etiske normer eller ikke, men heller hvilke. Gjennom hele forskningsprosjektet har vi stilt kritiske spørsmål om hvilke etiske utfordringer man skal forholde seg til. I denne delen av kapittelet skal det drøftes over hvilke utfordringer en må ta stilling til i en kvalitativ tilnærming med observasjon og intervju som metode. Som Forskningsetikkloven tar for seg, skal forskere opptre med aktsomhet for å ikke bryte anerkjente forskningsetiske normer, men hvilke etiske utfordringer skal man ta stilling til i de ulike metodene? Dette er et spørsmål som skal gjentas kontinuerlig gjennom forskningsperioden. Å ta hensyn til etiske utfordringer er en prosess en skal forholde seg til konstant for å skape trygghet og validitet i forskningen (Hummelvoll, Andvig & Lyberg, 2010).

De Nasjonale Forskningsetiske Komiteene (NESH, 2016), er en komité som skal bidra til at forskning skjer i henhold til anerkjente etiske normer. Vi har brukt deres nettsider for å få en oversikt over hvilke etiske tiltak som må gjøres. Universitetet har også gitt oss mulighet til å tilegne oss kunnskap om etiske retningslinjer og utfordringer via forelesninger og henvisninger til litteratur som skal leses og jobbes med. Ved bruk av videoobservasjon og intervju for datainnsamling følger det med noen konkrete etiske utfordringer. Velger man å ha en kvalitativ tilnærming fremfor en kvantitativ tilnærming for datainnsamlingen, er man som regel ute etter en dypere forklaring på hvorfor ting er som de er (Larsen, 2012). En essensiell etisk utfordring en må ta stilling til tidlig i forskningsprosjektet er samtykkeskjemaet. NESH (2016) forklarer det slik «Kravet om samtykke er forankret i personopplysningsloven, og all behandling av personopplysninger i forskning må meldes til et personvernombud. Når forskeren behandler personopplysninger, kreves det konsesjon fra Datatilsynet eller tilråding fra et personvernombud». Med andre ord vil det si at man er pålagt å dele samtykkeskjema før man skal innsamle og analysere data om ulike personer. Siden våre informanter er elever fra barneskolen, var det nødvendig å ha samtykke fra foreldre/foresatte og eleven selv. Kontinuerlig informerte vi elevene om at samtykket ikke er et engangssamtykke, men kan når som helst avsluttes, uten å oppgi årsak (De Nasjonale Forskningsetiske Komiteene, 2018).

Største utfordringen med å dele samtykkeskjemaer, er om foresatte eller barna ikke samtykker for å være med på undersøkelsen. Dette vil føre til usikkerhet for fremtidig planlegging og eventuelt ekstra tid om man må finne nye å få samtykke av, hvis en ikke får nok samtykkeskjemaer tilbake (Kleven & Hjardemaal, 2018). I vårt tilfelle påminnet vi elevene ofte om samtykkeskjema for å unngå lang ventetid og fikk det vi trengte for å sette i gang observasjonen..

Åpenheten rundt forskningen kan skape tillit og trygghet hos informantene som kan føre til en mer naturlig atferd under observasjoner da nervøsitet og stress minskes (Hummelvoll, Andvig & Lyberg, 2010). Med åpenhet menes det at informantene får full oversikt over det som er nyttig for dem og at ingenting holdes skjult for dem (Hummelvoll et al., 2010). Ifølge Kvale & Brinkmann (2015) er det fire etiske retningslinjer en skal forholde seg til i kvalitative metoder. Informert samtykke, fortrolighet, konsekvenser og forskerens rolle diskuteres ofte i forskningsetiske etiske diskusjoner. Disse fire etiske retningslinjene har vært viktige for planlegging av metode, gjennomføring av metode og behandling av dataen. Med informert samtykke, menes den informasjonen informanten tildeles, som for eksempel informasjon om deres frivillighet gjennom hele prosessen og all nødvendig informasjon de informantene fikk via samtykkeskjemaet. Dette henger i tråd med både NESH (2016) sine retningslinjer og det Kleven & Hjardemaal (2018) mener er viktige punkter å forholde seg til. Med fortroligheten, menes konfidensialiteten og enigheten mellom forsker og informanter om hva som kan gjøres med dataen som blir innsamla (Kvale & Brinkmann, 2015). Et interessant punkt ved dette er prinsippet om forskningsdeltakeres rett til privatliv. All informasjon som identifiserer informanten skal anonymiseres hvis ikke annet er godkjent på forhånd, som nevnt tidligere. Våre informanter er anonymisert ved at navnene blir forandret, skolen de går på og skolens lokalisasjon blir aldri nevnt. Det vi vet om informantene er at de går i 7. trinn og bosatt i Norge. Et vitenskapelig etisk dilemma med slik anonymisering blir da om hvor sterk validitet har undersøkelsen? Anonymitet beskytter deltakeren, men på den andre siden vil det kunne gi forskeren mulighet til å tolke dataen som en selv vil uten at en blir motsagt om hva som er riktig eller galt med tolkningen (Kvale & Brinkmann, 2015). I slike situasjoner har man som forsker en etisk plikt å holde seg til det som er sant og ikke pynte på sannheten (De Nasjonale Forskningsetiske Komiteene, 2018). Da vi har videoobservasjoner av elevene, er det viktig at disse blir behandlet varsomt og lagret data blir kryptert.

Forskerens rolle har stor påvirkning hvordan forskningens gang vil se ut gjennom hele prosessen. Kvale & Brinkmann (2015) snakker om at forskerens integritet har en avgjørende effekt da den påvirker hvilke avgjørelser en tar som forsker, hvordan en blir påvirket av ulik informasjon og hvor ærlig en er under hele forskningsprosessen for validitetens skyld. Fangen & Sellerberg (2011) nevner at en viktig del av forskerrollen er å kunne forholde seg til etiske krav om hensyn og respekt. Det er derfor viktig å vite hva man er ute etter for å holde seg til data som er nyttig og ha nok kunnskap om ulike etiske utfordringer for å kunne forebygge mot ulike konsekvenser en helst ikke vil møte på. Ved å ta hensyn til alle disse punktene, føler vi oss trygge på vårt forskningsetiske ståsted og vår behandling av informantenes data.

4 Resultat av analysearbeid

Studiens forskningsspørsmål er: På hvilken måte endres elevenes forståelse av matematiske bevis i løpet av en seks-ukers periode med proof-based teaching? Dette kapittelet vil vise analysen av de to gruppenes arbeid med å bevise matematiske formodninger i aritmetikk både før og etter seks-ukers programmet med proof-based teaching.

Vi har benyttet en deduktiv tilnærming til datamaterialet for å beskrive elevenes arbeid med å bevise de matematiske formodningene, hvor vi at vi har tatt utgangspunkt i Harel og Sowders (1998, 2007) bevisskjemaer. Analysen er strukturert etter de tre hovedkategoriene; eksternt overbevisningsskjema, empirisk bevisskjema og deduktivt bevisskjema. I hvert delkapittel vil det vises utdrag fra datamaterialet som tilhører før arbeidet med proof-based teaching og datamaterialet i etterkant av undervisningen. Intervjuene som ble gjennomført etter den seks-ukers perioden med undervisning vil brukes for å underbygge elevenes forståelse av matematiske bevis. For å tydeliggjøre Harel og Sowders (1998) underkategorier ved de ulike bevisskjemaene, vil disse bli markert i kursiv for å gjøre det tydelig hvordan elevenes diskurs viser til de ulike bevisskjemaene. Elevenes navn er fiktive og betegnelsen *R* står for researchers, altså oss som forskere.

4.1 Eksternt overbevisningsskjema

Den første hovedkategorien, eksternt overbevisningsskjema, dreier seg om at elevene ikke kommer med ny evidens for formodningens sannhet eller ukorrekthet, men baserer bevisene sine på en ekstern kilde.

4.1.1 Før arbeid med proof-based teaching

De som kategoriseres innenfor eksternt er de som er passive og sier seg lett enige med andres elevers løsningsforslag. De leser formodningen, retter seg kjapt til *autoritær* hjelp og godtar de *første eksemplene* som sanne. Et eksempel der alle retter seg mot *autoritær* hjelp, som i dette tilfellet er oss, er helt i starten av observasjon da Eirik spør:

E1.02	Emma:	Hva er påfølgende hele tall?
E1.03	R:	Noen som vet? (ristes på hodet)
E1.04	R:	Ok, så påfølgende hele tall er tall som naturlig kommer etter hverandre. Kan noen ta noen eksempler?
E1.05	Anna:	1,2,3?
E1.06	Emma:	567, 568 og 569 for eksempel

E1.07	R:	Det er helt riktig, så skal dere summere disse, og dividere dem på tre. Oppgaven sier da at det alltid blir et nytt heltall.

Etter dette starter Eirik å bruke kalkulatoren for å teste ut eksempler:

E1.17	Eirik:	Summen av tre påfølgende heltall vil alltid være delelig på tre. La oss se. (Tar opp kalkulator). Da tar vi åtte… (pause)
E1.18	Emma:	(Sier et tall mens E tenker) Ni
E1.19 Kan	Eirik:	ja, pluss ti da. Åtte pluss ni pluss ti og det blir 27. Så tar vi 27, hmmm, det blir 9 så det går. ta fem da og neste og neste. Det blir atten. Atten dele på tre blir jo seks. Atten er jo… igjeennnnnn. Ja, det blir, det er, det blir alltid blir, det blir alltid et delelig på tre. Ja, det blir alltid et delelig på tre. Det eeer, det er veldig lett. Det var veldig lett å finne ut av.
E1.20	Anna:	(Tar blyanten for å skrive ned svaret)
E1.21	Eirik:	Du kan skrive det der da
E1.22	Anna:	Ja, jeg vet det.
E1.23	Eirik:	Igjen, det er kjempelett.

I dette tilfellet er det Eirik som styrer samtalen og tar seg av løsningsforslaget, mens Emma og Anna sier seg enig og skriver det han ber dem om å skrive. Eirik faller innenfor empirisk bevisskjema da han *utforsker numeriske eksempler* og kommer til en *induktiv slutning med numerisk eksempel*. Emma og Anna derimot går under eksternt overbevisningsskjema da de enten vender seg mot *autoriteten*, som i dette tilfellet er Eirik, eller at hun godtar hans løsningsforslag fordi den er induktiv korrekt. Som regel er det lærere eller voksne generelt som har den autoritære rollen, men i denne situasjonen får Eirik en autoritær rolle da han tar styringen og fordeler arbeidsoppgavene. Det er vanskelig å vite hvilken årsak som påvirker Emmas og Annas enighet, men det vil ikke påvirke hvilket bevisskjema de går under, da både det å *vende seg til en autoritet* og det å bare si seg enig etter *et eksempel* uten å komme med nye innspill, går under eksternt overbevisningsskjema.

Senere kommer Anna med sine egne eksempler, der de andre sier seg enige etter å ha hørt hennes løsningsforslag som vi kan se her:

E1.35	Anna:	Eeh, tre tall som kommer etter hverandre plusset sammen blir alltid et annet heltall. Eksempel, 7+8+9=24 og 24 delt på tre er lik 9. 9+10+11=30 og 30 delt på 3 er 10.
E1.36	R:	Ja er dere andre enige i det
E1.37	Alle:	Ja
E1.38	R:	For det er noe av det dere diskuterte. Eeh, så det vil dere si at alle tre påfølgende tall summert sammen alltid vil være delelig på tre?
E1.39	Anna:	Ja
E1.40	Emma:	Enig

Ut ifra Harel & Sowders (1998) bevisskjemaer vil Anna gå fra et eksternt overbevisningsskjema til et empirisk bevisskjema. Etter vår tolkning kommer hun med dette løsningsforslaget etter hun har forstått Eirik sin forklaring. Dette er en av de positive sidene med gruppearbeid da informasjon og kunnskap kan deles med hverandre.

4.1.2 Etter arbeid med proof-based teaching

Ved siste videoobservasjon i etterkant av proof-based teaching begynte begge gruppene å utforske numeriske eksempler for formodningens validitet. Det finnes derimot en stor endring i Eiriks fremgangsmåte sammenlignet med første videoobservasjon.

E3.45	Anna:	Ja fordi at uansett hvor store gruppene blir, så kommer alltid tallene etter hverandre. Så kan man bare flytte to derifra til dit (peker på fra største tallet til det minste) og en derifra til dit (peker fra nest største til nest minste). Så fem like store grupper delt på fem personer blir jo alltid en av gruppene til hver. (Eirik ser ikke overbevist ut)
E3.46	Eirik:	Ja.
E3.47	Eirik:	Hvor mange er det i hver gruppe? 5?
(...)		
E3.55	Eirik:	Men for å være helt sikre, så kan vi jo prøve en gang til med andre tall.
(...)		
E3.56	Eirik:	Så, hvis vi tar disse 2 her og legger de oppå her. Så tar vi denne og setter den der. 12345, 12345, 12345, 12345, 12345.
E3.57	R:	Så du trenger alltid å ta 2 fra det største over på det første?
E3.58	Eirik:	Ja! Og en fra den nest største over til den nest minste.

Eirik viser at han ikke er overbevist av Annas forklaring for formodningens sannhet. I henhold til Reid og Vargas (2018a, 2019) sine tre punkter for proof-based teaching må det finnes en forventning om deduktive forklaringer. Annas forklaring oppleves ikke deduktivt korrekt for Eirik, og han virker tvilende i hans bekreftelse av Annas forklaring i E3.45. Eirik har her beveget seg bort fra å være gruppens *autoritet*. Et generelt mønster i denne gruppen ved første videoobservasjon var at et valid utsagn, ble til "gruppens valide utsagn", sett i E1.19, der Eiriks forslag ble det riktige utsagnet. I denne sekvensen godtas ikke Annes forklaring, og Eirik vil ikke falle inn under *det eksterne overbevisningskjemaet* ettersom han hverken *godtar et eksempel som bevis*, eller lener seg på *en autoritet*, som det kan tolkes at Anna ville hatt dersom samme mønster hadde gjentatt seg som ved første videoobservasjon.

4.1.3 Intervju

Intervjuet i etterkant av proof-based teaching og den andre videoobservasjonen brukes til å supplementere mønstre og løsningsforslag

E4.96	Vilde:	Når vi har lært det her, så kan vi tenke på denne måten istedenfor å spørre læreren hele tiden. Nå har vi en måte å finne det ut på selv kanskje.
E4.97	R:	Mer selvstendig?

E4.98 Vilde: Ja, men vi må selvfølgelig spørre læreren om vi lurer på noe.

Det Vilde sier under intervjuet, støtter det vi ser i observasjonene. Elevene spør observatørene om de lurer på noe, men de jobber mer selvstendig gjennom arbeidsprosessen. Eirik viser selvstendighet ved å være kritisk på eget initiativ. De har gått fra å vise observatørene om det er riktig eller ikke, til å vise det til hverandre som vi kan se i samtalen mellom Eirik og Anna over. Ut ifra observasjonene og intervjuene, kan vi si at elevene har gått bort fra å vende seg til en autoritet for svar, til å bli mer selvstendige og samarbeidsvillige.

I intervjudelen blir elevene spurt om det var noe spesielt de husker å ha lært fra perioden med proof-based teaching, peker Emma på en forandring som har skjedd med den faglige forståelsen av matematikken som arbeides med i E3.91.

E3.91 Emma: Ja. Før så jeg på det som noe å pugge på. Nå vet jeg hvorfor det er sånn da.

Dette sitatet peker på en viktig endring i elevenes arbeid i bevisføring, og matematisk forståelse generelt. Emma peker her på at før arbeidet med proof-based teaching at elevene har hatt en mer instrumentell forståelse av matematikkfaget, der faget skulle pugges, og i mindre grad forstås. Emma peker nå at hun vet hvorfor, noe som er et av proof-based teaching sitt hovedmål. Som Reid og Vargas (2018a) eksplisitt nevner er et av målene for proof-based teaching at elevene skal tilegne seg forståelse gjennom å bevise, noe som sammenfaller med elevenes egne opplevelser av arbeidsmetoden.

4.1.4 Oppsummering eksternt overbevisningsskjema

Under første videoobservasjon tolkes det dithen at Emma og Anna faller inn under eksternt overbevisningsskjema, der de støtter seg til den fungerende autoriteten i gruppen, som her blir Eirik. De fleste elevene ønsker selv å komme med egne løsningsforslag, og faller dermed ikke under det eksterne overbevisningsskjema. Elevene bekrefter i intervjuet at matematikkopplæringen deres har skapt endringer som

4.2 Empirisk bevisskjema

Den andre hovedkategorien, empirisk bevisskjema, bruker elevene deres intuisjon for å argumentere for deres bevis på en induktiv måte. I dette bevisskjemaet prøver elevene å både overbevise seg selv og andre basert på eksempler, eventuelt moteksempler, for å bevise påstanden. Etter gitte eksempler generaliserer elevene de gitte eksemplene for at de gjelder i alle tilfeller.

4.2.1 Før arbeid med proof-based teaching

Observasjonene som ble gjort før opplegget med proof-based teaching, viser tydelig at elevenes bruk av matematiske begreper som divisjon, subtraksjon, heltall etc., er manglende, og at løsningsforslagene deres er for det meste under kategorien empirisk bevisskjema. Det er også tydelig at elevene ikke er vandt til å jobbe med slike oppgaver der de må bevise eller motbevise formodninger.

Både i gruppe 1 og gruppe 2 er det elever som kommer inn under empirisk bevisskjema. I gruppe 1 er det Eirik som viser til det først, og senere gjør Anna det samme. Da dette er forklart i forrige delkapittel, så tas ikke det med her. Gruppe 2 viser til samme tendenser som gruppe 1, men har noen tydelige forskjeller også. Gruppe 2 hadde samme form for løsningsforslag, men her var samarbeidet mer synlig og samkjørt. Alle bidro med å skrive ned løsningene sine. Samtidig delte de til informasjon med hverandre for å komme frem til svare sammen. Fra E2.09 til E2.13 kan vi se at alle bidrar:

E2.09 Celine: Da skal vi jo bevise det. Hvordan skal vi gjøre det?
E2.10 Abdi og Brede: eeeeh
(Blir stille i noen sekunder)
E2.11 Celine: Da må vi teste.
E2.12 Brede: Skal vi prøve $3 + 4 + 5$?
(Blir stille i 10 sekunder)
E2.13 Abdi: Ja, det blir jo 4..

Celine starter med å stille spørsmål om hvordan de skal løse oppgaven. Hun selv kommer deretter med forslaget om at de må teste seg fram til svaret. Brede kommer med et eksempel "3+4+5" og bruker ordet "vi". Med dette åpner han opp til samarbeid. Abdi kommer noen sekunder senere fram til svaret på eksempelet. Etter dette tilføyer Abdi med:

E2.14 Abdi: Men hvis vi gjør det med mange, så vil det jo alltid bli et nytt helt tall
E2.16 Brede: Skal vi kanskje prøve 13+14+15?
E2.17 Brede: 13+14+15 er 42
E2.18 Celine: Skal jeg skrive regnestykkene?
(Abdi og Brede nikker)
E2.19 Brede: Kan ta…
E2.20 Abdi: 9+10+11
(Celine skriver)
E2.21 Celine: ok så da, kan jeg ta to..
E2.22 Brede: +3+4

E2.23 Celine: Ja! Skriver..

E2.24 Celine: Sånn.

E2.15 Observatør 2: Da mener dere at et tre påfølgende heltall alltid vil kunne deles på tre fordi…
(Abdi, Brede og Celine tenker..)

E2.26 Celine: eee

E2.27 Brede: Fordi vi har finni ganske mange regnestykker som blir det.

E2.28 R: ok, så da vil det alltid stemme? Enig alle sammen?

(Alle nikker)

E2.29 Abdi: mhm.

Både Celine, Abdi og Brede utforsker numeriske eksempler for å sjekke formodningens validitet. De kommer med fire eksempler og sier seg fornøyd med det. Ifølge Harel & Sowders (1998) bevisskjemaer, er en induktiv slutning av numerisk eksempel begrunnelsen elevene kommer med etter utforskningen av numeriske eksempler. I motsetning til gruppe 2, så har Eirik og Anna fra gruppe 1 en detaljert forklaring på hvorfor de har gjort det de har gjort. Gruppe 2 har derimot ikke en begrunnelse på sine løsningsforslag og har derfor ikke en induktiv slutning av numeriske eksempler. Deres løsningsforslag kommer derfor ikke noe lenger enn kategorien utforsker numeriske eksempler i Harel & Sowders (1998) bevisskjemaer.

Et annet interessant perspektiv fra denne gruppen er at Brian ønsker å motbevise påstanden, dersom han ikke klarer å motbevise påstanden vil den være sann, som sett i følgende dialog.

E2.15 Brian: Vi må finne noe som kanskje ikke blir et helt tall.
(Abdi kikker med et spørrende ansikt på Brian).
(15 sek pause.)

Ut ifra bevisskjemaene (Harel & Sowder, 1998), befinner Brian seg på et empirisk bevisskjema, der han ønsker å teste ut eksempler, dersom han ikke finner et motbevis for formodninger vil påstanden være sann. Hans forslag om å finne et motbevis blir derimot ikke godt tatt imot av gruppen, der den eneste formen for kommunikasjon som oppstår er at Abdi ser spørrende ut på Brian.

4.2.2 Etter arbeid med proof-based teaching

Observasjonene etter arbeidet med proof-based teaching, viste at elevene ikke kun godtok et eksempel, men startet fortsatt med å utforske numeriske eksempler, men dette ble gjort mer effektivt.

E3.15	Eirik:	(Hvisker lavt) Dere må bidra dere og
E3.16	Emma:	40.. Blir svaret på det du sa istad
E3.17	Eirik:	40/5 er..
E3.18	Emma:	8
E3.19	Eirik:	Så det gikk an. Da kan vi prøve $10 + 11 + 12 + 13 + 14$ (Regner ut med kalkulator)
E3.20	Emma:	60
E3.21	Eirik:	Og $\frac{60}{5} = 12$
E3.22	Eirik:	Det gikk. Så det burde gå med alle andre tall.

Eirik og Emma er de to som er aktive i gruppa fra start og begynner å bevise ved å *utforske numeriske eksempler*. De to andre i gruppen meldte seg ikke på her, men hadde allerede startet å bruke tegning for å komme seg fram til et bevis. Det var felles for alle elever å starte med å teste ut flere *numeriske eksempler* før de gikk noe videre. Det eneste vi finner under empirisk bevisskjema, er starten av observasjonen hos begge gruppene. Etter noen minutter gikk alle over til å *lage visualiseringer*, som går under deduktivt bevisskjema.

4.2.3 Intervju

Etter det matematisk pedagogiske opplegget som baserer seg på proof-based teaching viser elevene til at de ikke godtar det empiriske bevisskjemaet som et matematisk bevis. Dette eksempelet er fra ulike elevers løsningsforslag der de skal bevise påstanden *partall addert med partall vil alltid bli et partall.*

E4.48	R:	Da går vi videre til Bonnie. 2+2 er 4, 2+4 er 6, 2+6 er 8, 4+2 er 6, 4+4 er 8 og 4+6 er 10. Bonnie sier det er sant.
E4.49	Abdi:	Jeg syns ikke det.
E4.50	R:	Hvorfor ikke?
E4.51	Celine:	Ikke jeg heller. Det er litt godt, men ikke nok. Hvis hu forklarer mer, så kan det kanskje bli god nok grunn. Men hun forteller ikke hvorfor.

Det finnes enighet mellom Abdi og Celine at dette ikke er et godt nok bevis for påstandens sannhet. Eksemplene Bonnie kommer med aksepteres ikke som et generelt bevis for at det gjelder *hver gang*, selv om Bonnie har kommet med ganske mange eksempler som blir det. Celine peker på at det trengs en dypere forklaring for hvorfor disse eksemplene bekrefter påstandens sannhet, og sammenfaller med Reid og Vargas (2018a) sin toolbox for hva som forventes i et klasserom som praktiserer proof-based teaching. Et krav om deduktive argumenter er en av grunnpilarene i arbeid med læring i bevisføring, noe som Bonnie ikke legger frem for elevene. Dermed blir ikke løsningsforslaget godtatt.

Basert på første videoobservasjon sier elevene eksplisitt at de godtar at flere eksempler som bekrefter flere ulike numeriske eksempler som et bevis i følgende dialog;

E2.25	R:	Da mener dere at et tre påfølgende heltall alltid vil kunne deles på tre fordi...
		(A, B og C tenker..)
E2.26	Celine:	eee
E2.27	Brian:	Fordi vi har funnet ganske mange regnestykker som blir det.

Dette viser til en tydelig endring der elevene på mange måter nekter å godta sitt eget løsningsforslag ved første videoobservasjon som et bevis etter perioden med proof-based teaching.

4.2.4 Oppsummering empirisk bevisskjema

Et generelt mønster i elevenes løsninger er å teste ut numeriske eksempler for å overbevise seg selv om at påstanden er korrekt ved starten av oppgaven. Tydelige eksempler fra begge gruppene under første videoobservasjon viser til at, gruppene aksepterer formodningens sannhet basert på en, eller fler av elevenes, *utforsknings av numeriske eksempler* med tilhørende *induktive slutninger,* for å overbevise seg selv. Samme mønster kan sees igjen i gruppe 1 sitt første initiativ på å løse formodning 2 (summen av fem partall er delelig på fem), der de *utforsker numeriske eksempler* og *gir en induktiv slutning*. Det vil vises i neste delkapittel at dette ikke aksepteres videre som et endelig bevis på formodningen av gruppe 1. Det kan likevel fastslås at det empiriske bevisskjema er et foretrukket bevisskjema for å overbevise seg selv for formodningens sannhet, før de eventuelt beveger seg over mot det deduktive bevisskjema.

4.3 Deduktivt bevisskjema

Ved den tredje hovedkategorien, deduktivt bevisskjema, overbeviser elevene seg selv, og overbeviser/prøver å overbevise andre ved logiske deduktive argumenter for påstandens ubestridte sannhet. Den transformasjonelle underkategorien brukes av elevene for å nå en generalisering med bakgrunn i et bestemt eksempel, mens den aksiomatiske underkategorien defineres som når elevene bruker definisjoner, antagelser og teoremer.

4.3.1 Før proof-based teaching

Under denne kategorien er det ikke mye data å komme med fra observasjonene før proof-based teaching. Som nevnt tidligere, har ikke elevene jobbet med å bevise eller motbevise formodninger tidligere, og derfor forventes det ikke at elevene er på det deduktive stadiet. Det er likevel noe interessant som kommer opp fra gruppe 2.

E2.15	Brian:	Vi må finne noe som kanskje ikke blir et helt tall. (Abdi kikker med et spørrende ansikt på Brian). (15 sek pause.)

Ut ifra bevisskjemaene (Harel & Sowder, 1998), kan dette tolkes under to kategorier. Enten under eksternt overbevisningsskjema, der han anbefaler å analysere formodninger. Eller at han prøver å lage et mål, som går under deduktivt bevisskjema, der Brian ønsker å bevise påstanden ved et motbevis.

4.3.2 Etter proof-based teaching

Ved siste videoobservasjon kom begge gruppene frem til en generisk løsning på oppgaven. Et gjentakende mønster under den videoobservasjonen etter proof-based teaching er at elevene er mer engasjert i de andre elevenes argumenter for påstandens validitet.

E3.23	Eirik:	Hva gjør du på den tegningen der?
E3.24	Andrea:	eeeh. Å sette de sammen.. (17 sekunder pause) Jeg kan prøve nå
E3.25	Eirik:	Kan du forklare hva du mener der?
E3.26	Andrea:	Se her. Hvis du plusser de sammen, så blir det fem. Så tar du de, så blir det fem. Også har du fem bortover her, fem bortover her, også blir det som et rektangel. Også deler du rektangelet i tre deler, også får du en som er fem, en som er fem og en som er fem.
E3.27	Emma:	Er dette et bevis? (ser veldig spørrende på Andrea)

Andrea sin forklaring viser til et generisk ukorrekt eksempel. Hun har en logisk fremgangsmåte, men det virker som at hun har misforstått det å dividere med 5. Istedenfor å sortere 5 like grupper og så dele på fem, så har hu sortert 3 grupper som består av 5 i hver gruppe. Her forklarer hun enda en gang hva hun har gjort.

E3.31	R:	Kan dere prøve å forklare en gang til?
E3.32	Anna:	Okei. Hvis du tar.. endrer litt på rekka. Så tar du 2+3 er fem. 1+4 er fem. Så har du fem der. Så får du fem pluss fem pluss fem. Så deler du de klossene i 3 like store deler. (Peker og gestikulerer til tegningen sin der hun mener at man kan flytte to fra den største til den minste, og en fra den nest største til den nest minste)
E3.33	R:	Det var en god forklaring

Etter vår tolkning så er dette en misoppfatning av divisjon eller en misforståelse av oppgaven. Å dividere med fem, vil si å fordele mellom fem. Anna sin fordeling består av tre deler med fem i hver del. Anna *utforsker visuelle egenskaper* og kommer frem til et ukorrekt generisk eksempel på grunn av hennes misoppfatning eller misforståelse.
Etter hvert kommer alle i gruppen frem til samme konklusjon med sine egne eksempler som de deler med hverandre og med oss.

E3.40	Andrea:	Også deler vi her. Og da får vi en der, der, der, der og der. Så er det en del, det er 3 stk. Det er en del, det er 3 stk. Det er en del, det er 3 stk. det er en del, og det er 3 stk. Og det er en del og er 3 stk. Og da får vi fem hver. (A kommer fram til at det blir 5 like store deler.)
E3.45:	Eirik:	Ja fordi at uansett hvor store gruppene blir, så kommer alltid tallene etter hverandre. Så kan man bare flytte to derifra til dit (peker på fra største tallet til det minste) og en derifra til dit (peker fra nest største til nest minste). Så fem like store grupper delt på fem personer blir jo alltid en av gruppene til hver
E3.48	Emma:	Jeg tror jeg vet det nå! Hvis vi tar disse to setter de her, 4. Så tar vi en derfra og setter der, får vi 4.
E3.49	Andrea:	Der ja, 4, 4, 4, 4, 4.
E3.56	Eirik:	Så, hvis vi tar disse 2 her og legger de oppå her. Så tar vi denne og setter den der. 12345, 12345, 12345, 12345, 12345.
E3.57	R:	Så du trenger alltid å ta 2 fra det største over på det første?
E3.58	Eirik:	Ja! Og en fra den nest største over til den nest minste.
E3.59	R:	Så hva vil dere si om påstanden?
E3.60	Alle:	Det er sant.

Ut ifra disse konklusjonene, er alle i gruppen på et deduktivt bevisskjema. De *leser formodningen, lager en visualisering,* de *utforsker visuelle egenskaper* og kommer frem til et *generisk eksempel.* De viser til det generelle i formodningen, og viser via visualisering at formodningen alltid vil være sann. De faller derfor inn under det transformasjonelle bevisskjema i henhold til Harel og Sowder (1998, 2007)

I den andre gruppen kommer Brede med interessante poenger som kan minne om et deduktivt bevisskjema i følgende dialog;

E4.18	Brede:	Det går alltid. Prøvde med mange nå. Det er jo fem tall og det blir alltid i 5 gangen. Så det går alltid.
E4.19	Abdi:	Jeg vil tegne eksempler, kan jeg det?
E4.20	R:	Jaja dere bestemmer, gjør hva dere vil.
		(De bruker tid på å tegne)
		(...)

Brede kommer her med et interessant utsagn i E4.18. Han utforsker at summen av fem påfølgende heltall også vil være i fem-gangen. Det tolkes at Brede kommer frem til aksiomet at alle tall i fem-gangen også vil være delelig på fem, noe som sier at hans løsning faller inn under det *aksiomatiske bevisskjema*. Dette blir bare en tolkning ettersom han ikke eksplisitt sier det, men implisitt kan det tolkes den veien.

En ønsker her å løse formodningen ved å tegne eksempler, som kan gi en basis for å løse oppgaven generisk.

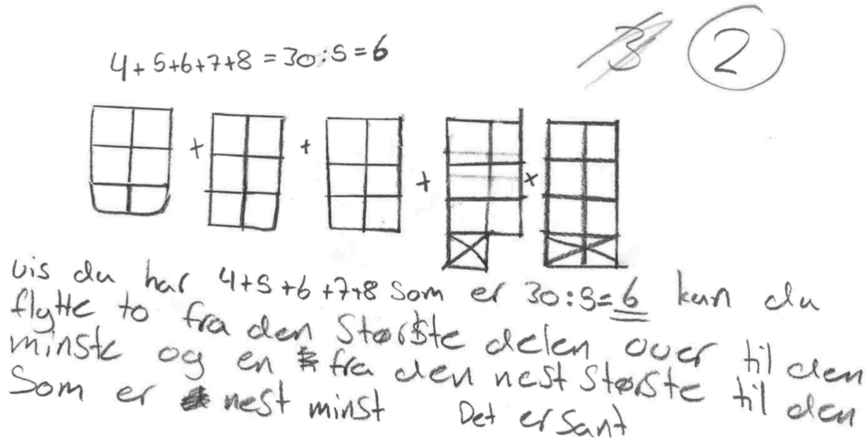
E4.25	Celine:	Vi må kanskje dele så det blir like mange på hver.
E4.26	Brede:	Ja, er noe sånt.
E4.27	Brian:	Enig.
(...)		
E4.31	Celine:	ÅH! Nå har jeg det! Hvis jeg flytter den, og den her, så har jeg fortsatt fem grupper. Og de er helt like! (peker på to fra den største gruppen til den minste, og en fra den nest største til nest minste)
E4.32	Brede:	De er helt like, men den siste er to mer.
E4.33	Celine:	Nå er de alle like. Hmm, det blir 6.
E4.34	R:	Tror du det du har gjort gjelder for alle?
E4.35	Alle:	Ja

E4.36 R: Skriv ned med egne ord om hvorfor. Ta utgangspunkt i det dere har gjort.

(alle skriver)

E4.37 Brian: Jeg gjorde det med 3,4,5,6,7. Tok 2, la til de der, og tok 1 og la til der.

E4.38 Celine: jeg kan prøve å forklare nå. Hvis 4+5+6+7+8 som blir 30 i sum. Så skal du dele det på 5 som blir 6, kan du flytte 2 fra den største over til den minste, også 1 fra den nest største til den nest minste, så blir det likt.



Elevene resonnerer seg frem til et generisk løsningsforslag som tar utgangspunkt i et spesifikt eksempel, og viser til at dette er noe som vil gjelde for alle tall som passer premissene til oppgaven. Løsningsforslaget fra Celine viser til det generelle i formodningen i linje E4.31, der hun tar utgangspunktet i alle tallene. Et interessant poeng fra denne gruppen er at elevene kommer relativt fort frem til et generisk løsningsforslag.

4.3.3 Intervju

Da elevene, under intervjudelen ble spurt om hva som regnes som et matematisk bevis, med bakgrunn i andre elevers besvarelser på oppgaven "partall addert med partall vil alltid være et partall", understrekes elevenes epistemiske tro på hva som betraktes som et matematisk bevis. Elevene ble presentert med seks ulike elevbesvarelser, som alle kan klassifiserer innenfor Harel & Sowders (1998) bevisskjemaer.

Det første eksempelet klassifiseres som et *induktivt slutning med numerisk eksempel,* og ble ikke godtatt av elevgruppen, som vises i følgende dialog (E4.48-E.4.51).

E4.48 R: (...) videre til Bonnie. 2+2 er 4, 2+4 er 6, 2+6 er 8, 4+2 er 6, 4+4 er 8 og 4+6 er 10. Bonnie sier det er sant.

E4.49 Abdi: Jeg syns ikke det.

E4.50 R: Hvorfor ikke?

E4.51 Celine: Ikke jeg heller. Det er litt godt, men ikke nok. Hvis hu forklarer mer, så kan det kanskje bli ' god nok grunn. Men hun forteller ikke hvorfor.

Elevene viser at Bonnies eksempler ikke gir en god nok begrunnelse for påstandens validitet. Et sentralt aspekt ved proof-based teaching (Reid & Vargas, 2018a, 2019) er at det må finnes en forventning om deduktive forklaringer for formodningens sannhet, noe Bonnie ikke viser til. Dermed blir ikke Bonnies løsningsforslag godtatt av fellesskapet.

Dunkens løsningsforslag blir derimot bedre mottatt av gruppen med elever og viser til viktige endringer i løpet av den seks-ukers lange perioden med proof-based teaching;

E4.58 R: (...) Partall slutter på 0, 2, 4, 6 eller 8. Når du summerer to av disse, vil svaret fortsatt slutte med 0, 2, 4, 6, 8. Så Dunken, sier det er sant.

E4.59 Brede: Den tror jeg.

E4.60 Celine: Ja, den tror jeg også på.

E4.61 Abdi: Jeg skjønte egentlig ikke så mye.

E4.63 Brede: plusser du partall, så starter du med de talla der, og slutter på de. Altså, nå du plusser det og får svaret, hvis du plusser partall og partall, er det også et av de talla der. Når du har plussa de, får du også partall, altså et av de talla der.

Denne dialogen viser til viktige prinsipper i endringen som har skjedd gjennom seks-ukers perioden der elevene arbeidet med oppgaver inspirert av proof-based teaching. I linje E4.61 godtar ikke Abdi Dunkens forsøk på bevis ettersom det ikke er forklarende og overbevisende nok for han. Brede legger til en deduktiv forklaring som på mange måter bygger på partallenes egenskaper som et aksiom der partall addert med partall alltid vil summeres til et annet partall, og vises ved det generelle beviset; $2n + 2p = 4np$. På eget initiativ legger Brede til et deduktivt resonnement til Dunkens opprinnelige utsagn der han behandler det som et aksiom. Dersom Brede på egenhånd hadde kommet frem til Dunkens utsagn i tillegg til hans egen utdypning av resonnementet hadde Brede falt inn under bevisskjemaet *deduktivt bevisskjema* i henhold til Harel og Sowders (1998) bevisskjemaer. Som nevnt i rammeverket for analyse har elevene i 7. trinn ikke erfaringer eller forutsetninger til å behandle bevis algebraisk grunnet læreplanens begrensninger, derfor er det heller ikke forventet at Brede produserer beviset $2n + 2p = 4np$ på egenhånd.

Et interessant skifte i gruppen skjer i det elevene blir presentert med Yvonnes løsningsforslag som viser til illustrasjon på hvorfor partall addert med partall alltid vil summeres til et partall, og vises i dialog E4.72-E4.78.

E4.72 R: Hva med Yvonne da. Den siste. Her er det forklart med tegning. $2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2 = 12$. Så Yvonne sier det er sant.

E4.73 Abdi: Den er bra.

E4.74 Celine: Jeg syns også det er bra, men jeg syns Dunkens forklaring er kanskje best.

E4.75 Brian: Den her mangler forklaring.

E4.76 R: Så Yvonne mangler forklaring?

E4.77 Brede: Ja

E4.78 Celine: Ja. Det her er bare en type bevis på at det på en måte blir det, men forklarer ikke.

Et mønster som går igjen, er at elevene ønsker forklaringer for bevis som illustreres som tegning. Illustrativt er dette forklarende for Abdi i linje E4.73, der han bekrefter sin tro på beviset til Yvonne, men hans medelever syntes at den ikke er forklarende nok (E4.76 og E4.78). Dette viser til en stor endring sammenlignet ved elevenes første oppgave der de skulle vise bevise at summen av tre påfølgende heltall alltid kan divideres på tre for å få et nytt heltall. Her godtok elevene ett eller et fåtall med *numeriske eksempler med induktiv slutning* som et bevis, men nå beveger samtlige elever seg mot tanken at et bevis må både være forklarende og ha visuelle vedlegg som argumenterer deduktivt for de numeriske eksemplene som vises i dialogen nedenfor:

E4.80 R: Ja. Så hvis dere skal velge hvilket som helst av alle disse svarene, hva mener dere er det beste beviset.

E4.81 Alle: Dunkens og Yvonne.

E4.82 Celine: hvis de hadde blitt satt sammen, så hadde det vært et perfekt bevis.

Elevene beskriver her forholdet mellom hva de betrakter som et matematisk bevis sett i sammenheng med ulike løsningsforslag. De viser til en bred enighet om at et deduktivt forklarende argument for oppgavens gyldighet sammen med en visualisering gir det beste beviset for elevene.

4.3.4 Oppsummering deduktivt bevisskjema

Det finnes tydelige markører som viser til at elevene beveger seg mot et mer deduktivt bevisskjema, som vises ved både oppgaveløsning og intervjuer. Ved første videoobservasjon viser elevene til at eksempler aksepteres som bevis, men dette endres fra første til andre videoobservasjon. Elevene ønsker å lage bevis som både er visuelt forklarende med tilhørende deduktive argumenter for å bevise den oppgitte påstanden. Alle de deltakende elevene ved andre videoobservasjon viser til generiske eksempler som bevis, og uttrykker disse med tilhørende argumenter. Elevenes bevis trekkes ut fra en spesifikk kontekst, i denne oppgaven ut ifra numeriske eksempler, der det generelle trekkes ut fra det spesifikke. Under intervjuene vises det eksplisitt at elevene trekker mot denne formen for bevis når de skal bevise matematiske påstander.

5 Diskusjon

Dette kapittelet er delt opp i tre delkapitler; diskusjoner om resonneringsform, elevenes utvikling av matematisk kunnskap gjennom proof-based teaching og elevenes forståelse av matematiske bevis. Delkapitlene består av tre underkapitler; før arbeid med proof-based teaching, etter arbeid med proof-based teaching og en oppsummering. Først og fremst skal det diskuteres om elevenes resonneringsformer har forandret seg fra før og etter proof-based teaching. Deretter skal vi ta for oss elevenes utvikling av matematisk kunnskap gjennom proof-based teaching og diskutere hva som kan ha vært årsaken til en slik utvikling. Til slutt vil vi diskutere om det er noen tydelige forandringer hos elevenes matematiske forståelse og hvilken rolle proof-based teaching kan ha hatt under denne prosessen.

5.1 Overganger i bevisskjemaer

Resonneringsformen til elevene vil kunne fortelle oss om hvilke forandringer vi ser hos elevenes samtaler og bevisføringer fra før til etter proof-based teaching. I dette delkapittelet skal det diskuteres rundt elevenes resonneringsformer og deres utvikling/overganger i Harel og Sowders (1998) bevisskjemaer.

5.1.1 Før arbeid med proof-based teaching

Analysen viser hvor elevene havner i bevisskjemaene til Harel og Sowder (1998). Før proof-based teaching er det tydelig at elevene kommer med enkle slutninger som er induktive. I starten leser de formodningen og sjekker om formodningen stemmer ved å ta utgangspunkt i et tilfeldig eksempel. Etter det første eksempelet sier de seg først enige i at formodningen stemmer, men bestemmer seg etter hvert med å teste noen flere tilfeldige eksempler før de tar en endelig slutning på at det fortsatt stemmer. I Harel og Sowders (1998) bevisskjemaer havner de fleste i elevene under empirisk bevisskjema der de utforsker numeriske eksempler. I tillegg til det kommer to av elevene i gruppe 1 fram til en induktiv slutning av numeriske eksempler da de forklarer hva de har gjort for å overbevise dem at formodningen stemmer. I NCTM (2000, s. 143) står det at induktive argumenter ofte brukes i skolen og betegnes som “...generalizing from a pattern of observations made in particular cases”. Elevene tar da utgangspunkt i en spesifikk situasjon og generaliserer basert på eksemplene de har kommet fram til.

I gruppe 1 har vi analysert oss fram til at noen av elevene retter seg mot en autoritet, noe som går under et eksternt overbevisningsskjema. De henvender seg til observatørene, men henvender seg også til en medelev som tar en autoritær rolle ved å ta styring i gruppen og fordeler arbeidsoppgaver innad i gruppa. Dette er interessant da det ikke står noe om dette i verken Harel og Sowders (1998) bevisskjemaer eller i de andre teoriene vi har tatt utgangspunkt fra i denne studien. Det kan være flere årsaker til hvorfor Eirik fikk den autoritære rollen, men siden elevene jobber i grupper, kan det være en konsekvens av gruppeinndelingen som har ført til at Eirik tok eller fikk den rollen. Hvis de andre elevene har erfaring med eller en mening om at Eirik er faglig sterk i matematikk, vil det kanskje falle naturlig å la han ta styringen og sier seg derfor lett enig med hans konklusjoner. Etter Eiriks eksempler og begrunnelser på det han har gjort, viser Anna forståelse om det Eirik har presentert ved å komme med et eget tilfeldig numerisk eksempel og kommer fram til en induktiv slutning.

For at et bevis i grunnskolen skal ses på som et bevis av de andre elevene, må det i likhet med Stylianides (2007) sine holdepunkter, være forklarende nok for at elevene skal godta det. Selv om begrunnelsene til elevene her er gjentagelser av hva de har gjort, så holder det for at de kan gjennomføre samme bevisføring. Ut ifra Stylianides (2007) sine holdepunkter og Reid og Vargas (2018a) sine aspekter om hva som kan godtas som et bevis i grunnskolen, vil ikke elevenes begrunnelser holde for å ses på som et bevis da de ikke har med deduktive forklaringer i begrunnelsene sine. Deres resonneringsformer før proof-based teaching holder derfor ikke for å komme fram til en godtatt form av matematiske bevis i grunnskolen.

5.1.2 Etter arbeid med proof-based teaching

Etter den seks-ukers lange perioden med proof-based teaching viser resultatene fra analysen at elevene i stor grad endrer bevisskjema. Det er viktig å poengtere at våre tolkninger av bevisskjemaene må sees i sammenheng med Balacheffs (1988) nivåer for ulike bevis i skolematematikken, ettersom Harel og Sowders (1998) bevisskjemaer tar utgangspunkt i matematiske oppgaver som ikke kan forventes at 7. trinnselever behersker å løse jamfør nåværende og tidligere læreplaner (Utdanningsdirektoratet, 2013, 2019a).

Det finnes tydeligere markører der elevene ønsker å produsere et matematisk bevis med utgangspunkt i deduktive strukturer. Elevene, i likhet med første videoobservasjon, ønsker en epistemisk overbevisning om formodningens sannhet (Duval, 1991), basert på empiriske eksempler. Det tyder på at en epistemisk overbevisning er sentralt for elevenes prosess i å bevise matematiske påstander empirisk i starten, noe som er en naturlig prosess uansett matematisk nivå (Weber, Ingles og Mejia-Ramos, 2014). Dersom elevene hadde avsluttet arbeidet her ville elevene falt under det empiriske bevisskjema, men det finnes en konsensus blant begge gruppene at dette ikke lengre er nok for å være et vannfast bevis. For at et bevis skal være vannfast for elevene viser resultatene fra analysen at det må være forklarende, i liket med perspektiver fra ulike forskere (Reid & Knipping;

Hanna 2012; Balacheff, 1988) sine perspektiver, der et bevis i skolen viser til grundige forklaringer på hvorfor en slutning kan trekkes ut fra bestemte premisser.

Det kan derimot diskuteres i hvilken grad de logiske slutningene sammenhenger med blant annet Hanna og de Villiers (2012) perspektiv på et matematisk bevis der et bevis skal være en kjede ubrutte steg som gir en nødvendig konklusjon, der alle steg følger en absolutt logikk. I analysen viser elevene til deduktive kjeder som ender i en logisk konklusjon, men likevel finnes det enkelte brister i elevenes deduktive argumenter etter arbeidet med proof-based teaching. Elevene utleder at alle fem påfølgende partall basert på oppgavens startpunkter, og benytter seg av den *økonomiske rollen* (Hana, 2013 s. 58-59), da en felles forståelse om hva fem påfølgende heltall er, og er da tidsbesparende. Det vises tydelig i analysen at elevene bruker definisjoners logiske rolle (Hana, 2013, s. 59-61) i større grad, da en ser tydeligere markører på et logisk presist matematisk språk, utledet av definisjonene, gjennom en deduktiv resonneringsprosess.

Når elevene til stadighet bruker et mer effektivt og logisk presist matematisk språk, tolkes det dithen at elevene opplever en større epistemisk overbevisning av formodningen internt i subjektet, og deretter begynner å overbevise andre om formodningens sannhet, slik Harel og Sowder (1998, 2007) mener er et mål for å bevise matematiske formodninger. Analysen viser at elevene i stor grad befinner seg under det deduktive bevisskjema, i den grad at de generaliserer en påstand for alle tilfeller, ikke bare et (Harel og Sowder, 1998), og gjør dette via et generisk eksempel (Balacheff, 1988). Resonneringsprosessene som elevene i stor grad benytter seg av under andre videoobservasjon er deduktivt, i den grad at resonnementet tar utgangspunkt i definisjonene og ender i en logisk konklusjon for alle tilfeller. En ser få indikasjoner på at elevene ønsker å benytte abduktive resonneringsprosesser, slik Baccaglini-Frank (2010) og Arzarello et al. (2012), viser til. Det kan tenkes at Andreas ukorrekte generiske eksempel (E3.23-E3.27) kunne ha vært et springbrett for en abduktiv resonneringsprosess, der elevene oppdager en feil i slutning B, for å resonnere seg bakover til en eventuell feil i Andreas resonnement. Det finnes derimot mulighet for å lære elevene abduktiv resonnering for å avdekke feil i deduktive resonneringsprosesser.

Det finnes tydelige indikasjoner i analysen at elevene har hatt et reelt læringsutbytte av undervisningsopplegget inspirert av proof-based teaching (Reid & Vargas, 2018a). Elevene ønsker tydelig å bevise formodningen slik at det generaliteten viser til alle eksempler og ikke et eller et fåtall med konkrete eksempler. Når elever ikke forstår hva de andre elevene i gruppen mener, er de aktive til å bruke Stylianides (2007) første og andre punkt som handler om å benytte aksepterte påstander og gyldige resonnementer som blir forstått. En kan diskutere i hvilken grad elevenes resonnementer faktisk ville vært gyldige i andre klasser, skoler eller land, men tar man utgangspunkt i Stylianides (2007) sine holdepunkter for et vannfast bevis i skolen, så ser man en reell endring fra før proof-based teaching.

5.1.3 Oppsummering overganger i bevisskjemaer

Ved å sammenligne resultatene fra før og etter proof-based teaching, kan vi se at samtlige elever har vist fremgang i deres resonneringsformer. Elevene har forandret sine forventinger til hverandre om hva som godtas som matematiske bevis, de har gått bort fra å bare gjenta hva de har gjort og gått over til mer detaljerte begrunnelser om hvorfor formodningen stemmer, og har begynt å være kritisk til hverandres forklaringer. Disse forandringene samsvarer med Stylianides (2007), Reid og Vargas (2018a) og Balacheff (1988) sine meninger om prosessen frem mot matematisk bevis.

Analyse viser tydelig at elevene beveger seg mot et deduktivt bevisskjema, både ved oppgaveløsningene og intervjuet. Det kan tolkes som at elevene har fått en annen forståelse av hva de ser på som matematiske bevis ved å nærme seg til en deduktiv slutning. Det nevnes fra flere hold at induktive argumenter, i motsetning til deduktive argumenter, leder til en konklusjon uten sikkerhet (eks Reid & Knipping, 2010; NCTM, 2000; Hsieh et al. 2012), som elevene ikke lenger godtar. Samtidig ser man tydelige indikasjoner på et mer presist matematisk språk og bruk av definisjoner (Hana, 2013) som er en basis for både proof-based teaching (2018a) og Stylianides (2007) holdepunkter for hva et vannfast bevis i grunnskolen bør inneholde. Det tolkes dithen at dette sier at elevene har hatt et reelt læringsutbytte av opplegget inspirert av proof-based teaching.

5.2 Elevenes utvikling av matematisk kunnskap og forståelse

Vi argumenterer for at det finnes muligheter for å diskutere hvilke endringer matematisk kunnskap som har oppstått gjennom arbeidet med proof-based teaching hos elevene som har blitt studert. Vi velger å ta utgangspunktet i elevenes tilnærminger for å resonnere rundt oppgavenes gyldighet, og hvordan de bruker sin matematiske forståelse for å bevise gitte formodninger. I dette kapittelet tar vi utgangspunkt i hvordan elevene diskuterer, hva de skriver og deres tilnærming til ulike problemstillinger. Resultatene fra analysearbeidet viser at elevene har økt sin matematiske forståelse når de går i dybden på de oppgavenes egenskaper, for å forstå hvorfor ulike påstander kan generaliseres for alle objekter innad i klassen. Vi ønsker her å diskutere hvordan elevenes bruk av fremgangsmåter, deres forståelse av å gå i dybden på egenskaper og ulike representasjonsmåter og forståelse av disse kan si noe om den matematiske modningsprosessen de har tatt del igjennom den seks-ukers perioden med proof-based teaching.

5.2.1 Før arbeid med proof-based teaching

Ved den første videoobservasjonen viser elevene få tegn til å ville gå i dybden på de matematiske formodningene. Våre funn viser at de ikke gjør systematiske forsøk på å finne ut hvorfor A er en logisk konsekvens av B, ved å se på egenskapene til de ulike matematiske komponentene som formodningen inneholder, der begge elevgruppene produserer empiriske eksempler. Weber, Ingles og Mejia-Ramos (2014) beskriver at selv matematikere i stor grad belager seg på empirisk overbevisning i det innledende arbeidet for å bevise matematiske påstander, noe som sammenfaller med elevene i første videoobservasjon. Etter at elevene opplever en epistemisk overbevisning (Duval, 1991) av formodningens sannhet går de ikke videre til å undersøke hvilke underliggende egenskaper som finnes for å gjøre slutning B til en logisk konsekvens av A.

Som nevnt i dette delkapittelets innledning velger vi å se på utviklingen av matematisk kunnskap i lys av hvordan elevene kommuniserer og skriver rundt formodninger når de beviser matematiske påstander. Resultatene fra analysen viser at elevene befinner seg inn under bevisskjemaene ekstern overbevisning eller empirisk bevisskjema ved første videoobservasjon. Ser man dette bevisskjema sammen med Sfards (1991) tre ulike steg for matematisk forståelse og kunnskap gjennom stegene interiorization, condensation og reification, som beskrevet i 2.5. Funn i analysen ved første videoobservasjon viser til at elevene i liten grad klarer å abstrahere matematikken de undersøker. De vil derfor vise seg i kategorien interiorization, da de kun konstruerer naiv empiristiske eller avgjørende eksperiment (Balacheff, 1988). Elevene tar kun i bruk det konkrete i oppgaven, og utforsker deretter enkle numeriske eksempler som gir en verifisering av formodningen, som igjen kan relateres til Piaget og Inhelders (1967) forskning der enkelte elever ikke klarer å se for seg resultatet av en handling uten å faktisk gjøre den selv.

Det kan på den andre siden diskuteres hvorvidt de faktisk beveger seg mot det andre steget hos Sfard (1991), ettersom analysen viser at elevene mener at de kan generalisere formodningen, summen av tre påfølgende heltall vil alltid kunne divideres med tre, basert på numerisk fremlagte empiriske eksempler. Deres egen epistemiske tro (Duval, 1991) på formodningens generalitet, sammenfaller i en viss grad sammen med Stylianides (2007) sitt første punkt som beskriver at det er et bevis dersom argumentet sammenfaller med påstander som er aksepterte av klassefellesskapet. Et viktig poeng her er at elevene ikke tidligere har erfaringer med å bevise matematiske formodninger basert på deduktive argumenter, så at elevene ikke forventer noe annet av seg selv, eller noen andre kan tolkes som et produkt av manglende opplæring og forventning om deduktive argumenter. Vi tolker derimot at Sfard (1991) mener at det andre steget, condensation, må ta utgangspunkt i deduksjon og at elevene ikke faller inn under denne kategorien selv om elevene tolker sine oppgaveløsninger under første videoobservasjon som et bevis.

Elevenes handlinger og kommunikasjon i sammenheng med Tall et al. (2012), sin modell i en matematisk modningsprosess vil en kunne se igjen mye av det en ser hos Sfard (1991). Elevene baserer sine bevis på numeriske eksempler, noe som tilsier at de ikke benytter annet enn enkle verbale beskrivelser, som blir symbolsk representert i form av enkle utregninger, som elevene godtar som bevis. Det kan tolkes at elevene likevel tar i bruk en høy forståelse av det første nivået, perceptual recognition», der de forstår at de ulike numeriske eksemplene de legger frem er ekvivalente og alle gir et induktivt bevis på formodningen, noe som er absolutt forventet av 7. trinnselever. Det neste nivået, «definition and deduction» blir ikke oppnådd av noen av elevene i noen grad, ettersom elevene ikke viser forståelse eller argumenterer for de egenskapene som finnes i oppgaven, der de finner ut av om tre påfølgende heltall kan divideres med tre for et nytt heltall. Å undersøke egenskaper på måten Tall et al. (2012) ønsker for å oppnå dette nivået vil være å undersøke hvorfor tre påfølgende heltall alltid vil være mulig å dividere med tre. Elevene tar ikke utgangspunkt i å undersøke disse egenskapene, og vil dermed befinne seg på nivå 2, «verbal description, pictoral or symbolic representation».

5.2.2 Etter arbeid med proof-based teaching

Våre funn i etterkant av seks-ukers perioden viser til at elevene i en svært større grad ønsker å forklare fremgangsmåter, noe som sammenfaller med et av startpunktene i proof-based teaching, der det beskrives av Reid og Vargas (2017, 2018a) at det må finnes en forventning om deduktive forklaringer. Sfard (1991) beskriver et høyere nivå av matematisk forståelse der et matematisk objekt blir brutt ned i små mengder, der elevene generaliserer fra et tilfelle til noe som gjelder for alle objekter innad i klassen. Studien viser at i etterkant av det matematisk pedagogiske opplegget, reduserer elevene innholdet i de matematiske formodningene, for å undersøke hvilke underliggende egenskaper som finnes, for å finne en logisk slutning B. Elevene forstår ved oppgaveløsningen av de må finne ut hvilke additive egenskaper fem påfølgende heltall har, for å kunne gi et logisk bevis på oppgaven. Etter en stund viser elevene forståelse for at fem påfølgende heltall kan omgrupperes i fem like grupper, og at fem like grupper delt på fem vil alltid gi en gruppe. På samme måte som ved første videoobservasjon ønsker elevene en epistemisk overbevisning av formodningen ved å empirisk overbevise seg selv om formodningen er sann eller ikke (Duval, 1991). Etter de selv er epistemisk overbevist forstår de at dette ikke er nok for å si om det gjelder for alle tilfeller. De viser tydelige interaksjoner om at de må finne underliggende egenskaper som generisk kan bevise formodningens generalitet. Ettersom de bryter ned innholdet i den matematiske oppgaven, og generaliserer fra noe som gjelder for et tilfelle, til alle tilfeller, vil elevene, i følge Sfard (1991) befinne seg ved kunnskapsnivået *condensation.* Det er derimot vanskelig å se at elevene beveger seg mot nivået *reification,* der Sfard (1991) mener at elevene må løsrive seg totalt fra en bestemt kontekst. Elevene er avhengig av numeriske eksempler for å bevise den gitte formodningen, og løsriver seg dermed ikke fra den konteksten beviset oppsto fra, ettersom de trenger et eksempel som utgangspunkt. Det er på en annen side viktig å påpeke at algebraiske bevis ikke er forventet av 7. klassinger i henhold til både ny og gammel læreplan i matematikkfaget (Utdanningsdirektoratet, 2019a, 2013)

Våre funn peker på at elevene i større grad beveger seg mot et crystalline-concept, i den grad at de har dypere og en større relasjonell forståelse der en tydelig kognitiv endring har skjedd. Den tydeligste indikasjonen på dette vises i intervjudelen av analysen der Emma, sier at før opplegget var matematikk bare noe å pugge på, men nå vet hun hvorfor ting er som de er i etterkant av et bevis. Elevene viser til en større matematisk forståelse da de bruker deduksjon for å overbevise de andre om formodningens generalitet, da de går i dybden på egenskaper, som relateres til Tall et al. (2012) sitt nivå «definition & deduction». Elevene viser forståelse ved å bruke relevante prinsipper for formodningen, der de undersøker ulike egenskaper som gir en logisk konklusjon. Det dukker opp flere interessante perspektiver da man ser elevenes kognitive utvikling i perspektiv med Tall et al. (2012) sin modell for universelle matematiske modningsprosesser. Elevene har en god forståelse for å deduktivt argumentere for hvorfor B er en logisk konsekvens av A, og bruker en illustrasjon for å støtte deres argumenter. I henhold til Tall et al. (2012) sin modell, bruker de dermed kunnskap de besitter i det første stadiet «perceptual recognition», og det andre stadiet «pictoral representation», for å både overbevise seg selv, og andre om formodningens generalitet. Det kan derfor tolkes at i motsetning til Tall et al (2012) sin opprinnelige modell, behøver elevene en kombinasjon av både nåværende, og tidligere nivåer for å gi et deduktivt bevis, basert på persepsjonelle erfaringer og verbale beskrivelser av illustrasjoner.

5.2.3 Oppsummering av elevens kognitive utvikling

Elevene viser en endring i matematisk forståelse gjennom det matematisk pedagogiske opplegget som tar utgangspunkt i proof-based teaching. Opplæringen tok utgangspunkt i geometriske oppgaver, mens oppgavene ved videoobservasjon tok utgangspunkt i å bevise påstander om tallteori, kan en se en overføringsverdi mellom domenene av opplegget. Ved både Sfards (1991) modell for kognitive kunnskapsteori i matematikk og Tall et al (2012) vises det en klar kognitiv utvikling i elevenes arbeid med bevisføring fra første til andre videoobservasjon. Fra første videoobservasjon tolkes elevene inn i det kunnskapsnivået *interiorization,* mens ved andre ser man tydelige indikasjoner på at elevene beveger seg mot en mer sofistikert matematisk kunnskapsstruktur der de reduserer det matematiske innholdet for å se hvilke underliggende strukturer som gjør B til en logisk konsekvens av A, ved kunnskapsnivået *condensation*. På samme måte kan man se de endringer i elevenes kognitive aktivitet ved Tall et al. (2012) sitt crystalline-concepts der elevene kun bruker symbolske representasjoner for å oppnå en epistemisk overbevisning av formodningen, mens etter opplegget viser elevene til dypere kunnskapsstrukturer. Der de reduserer innholdet til illustrasjoner, overbeviser både en selv og andre for formodningens logiske konklusjon, og deduktivt resonnerer seg frem til et bevis.

5.3 Elevenes forståelse av matematiske bevis og resonnering

Det er viktig å spesifisere at vi fra starten av studiet har forventet at elevene vil nok vise forbedringer rundt det å bevise en formodning fra før til etter proof-based teaching. Elevenes forståelse av matematiske bevis kommer til syne via deres metoder for bevisføring og deres begrunnelser om hvorfor en formodning er sann eller ikke. Her vil vi derfor ikke kun diskutere om hvordan de beviser formodninger, men om hvordan de videreformidler det de har kommet fram til og om de klarer å komme fram til en generell begrunnelse som medelevene forstår og aksepterer. Først skal det diskuteres hvordan elevene videreformidler sin forståelse før proof-based teaching, og deretter diskutere hvordan det synliggjøres etter proof-based teaching. Oppsummeringen har lik struktur som de to forrige delkapitlene der vi diskuterer forskjellene på før og etter proof-based teaching og hvilken utvikling vi kan se hos elevenes forståelse av matematiske bevis.

5.3.1 Før arbeid med proof-based teaching

Analysen viser at elevene ikke har kjennskap til matematiske bevis fra før av. Som en konsekvens av dette, er det utfordrende for elevene å vite hvilke tilnærminger de kan bruke for å bevise om formodningen er sann eller ikke. Dette kan henge sammen med det Reid og Vargas (2018) kaller for *the toolbox*. Begrepet *the toolbox* innebærer at elevene deler et sett med teoremer og teknikker som godtas av alle i klassefellesskapet. Da disse ikke fantes hos elevene før proof-based teaching, har de ikke felles utgangspunkt seg imellom, noe som blir synlig i resultatene. De er usikre om hvordan de skal gå fram og stiller observatørene spørsmål for å få en pekepinn om hvor de skal starte. Elevene tar utgangspunkt i det eksempelet som er gitt i formodningen og sjekker om den stemmer. De fortsetter med å bruke eksempler som en tilnærming og kommer fram til at formodningen stemmer etter at noen eksempler har vist det. Når de skal argumentere for hvorfor det stemmer, baserer de seg på de numeriske eksemplene ved å forklare det de har gjort. I følge Balacheff (1988) sine fire nivåer, vil elevenes forståelse av matematiske bevis gå under naiv empirismen. Det kan være oppgavens formulering som førte elevene denne veien, men samtidig så er det ingen begrensninger som ble oppført og observatørene forklarte at de kunne bruke alle hjelpemidler, eksempler eller metoder som de kunne komme på.

I analysen kan vi se at eleven Eirik skiller seg ut i gruppene ved å ta ansvar og tar for seg en autoritativ rolle. Eirik fordeler arbeidsoppgaver og bestemmer hvordan de skal tilnærme seg oppgaven. Etter at Eirik har kommet med noen eksempler, bidrar en annen elev med et eget eksempel ved å bruke samme tilnærming som Eirik som kan tolkes som at eleven har akseptert og forstått Eirik tilnærming. Reid og Knipping (2010) har vist til flere eksempler der elever aksepterer enkle eksempler for å bevise om noe stemmer eller ikke.

Brian som er i en annen gruppe, kommer inn på noe som hadde vært interessant å sett på om det hadde blitt diskutert blant elevene og brukt som en tilnærming. Brian kommer med et forslag om at de kan finne et eksempel som ikke blir et helt tall. De andre elevene svarer ikke på dette og går videre med å teste tilfeldige eksempler istedenfor. Brians forslag hadde gått under det Balacheff (1988) kaller for avgjørende eksperiment om de hadde gjennomført denne tilnærmingen da et avgjørende eksperiment tar utgangspunkt i et spesifikt eksempel og ikke et tilfeldig et.
Alle elevenes forsøk på å bevise om formodningen stemmer går under pragmatiske bevis da pragmatiske bevis består av enkelttilfeller (Balacheff, 1988). Det de kommer med er direkte visning ved bruk av eksempler. Språket de bruker for å videreføre deres begrunnelse er ikke generaliserbar, det er heller en muntlig gjentagelse av hva de har gjort. Med andre ord er det her deres forståelse av matematiske bevis stopper.

5.3.2 Etter arbeid med proof-based teaching

Resultatene fra observasjonene etter viser at elevene har forandret hva de godtar som bevis etter proof-based teaching. Vi kan se at noen fortsatt starter med å teste noen numeriske eksempler i starten, men selv om de noen starter med det, så vil det ikke bety at de går under kategorien naiv empirisme. I følge Balacheff (1988) kan det være det første steget i en prosess mot et generaliserbart bevis. Og det kan vi se da de etterpå fortsetter med å tegne og visualisere eksemplene sine. Det er to som skiller seg ut og ikke starter med eksempler, men går rett på visualiseringen. De bruker eksempelet som de har fått oppgitt i formodningen og starter å tegne mens de andre holdt på med eksemplene. En slik tilnærming er en måte å få fram et generisk eksempel. Et generisk eksempel anses som en spesifikk representasjon av et eksempel som viser formodningens generalitet (Pedemonte & Buchbinder, 2011). De har da brukt et numerisk eksempel for å skape et bilde av hvordan de forstår det visuelt.

Movshovits-Hadar (1988) mener at et generisk eksempel ikke kan anses som et matematisk bevis da et generisk eksempel kun har bevist at det gjelder for det ene eksempelet, og det vil derfor ikke kunne ses på som et fullt generaliserbart bevis. Følger vi Reid og Vargas (2018b) sine to aspekter, kognitive og sosiale, kan et generisk eksempel ses på som et bevis om de to aspektene blir fulgt. Det kognitive aspektet handler om at det generiske eksempelet må fremstilles i en generell deduktiv resonnementprosess, som vil si at leseren forstår det som blir fremstilt deduktivt. Dette skal forekomme i elevenes tanker. For at dette skal være mulig må det generiske eksempelet ha et deduktivt utgangspunkt. For at et generisk eksempel skal godtas som et bevis i det sosiale aspektet, avhenger det av de sosiale konvensjonene som gjelder under ulike kontekster (Reid & Vargas, 2018b). Det vil bety at det må godtas av de gitte aksiomene eller reglene som forstås blant aktørene rundt, som i dette tilfellet er elevene.

Elevenes begrunnelser om hvorfor deres generiske eksempler er sanne, er forklarende i den forstand at de ikke bare gjentar hva de har gjort, men begrunner hvorfor det er sånn. De henviser til tegningen sin og viser at fem påfølgende heltall vil kunne divideres på fem ved å sortere klossene de har tegnet til fem like store grupper. De forklarer videre at dette vil fungere uansett hvilke påfølgende tall en velger da det alltid vil være mulig å fordelene klossene likt. På denne måten har de klart å komme fram til en generaliserbar begrunnelse for de eksemplene de har tatt utgangspunkt i. Da alle elevene i gruppene viser forståelse av hverandres begrunnelser ved å gjenfortelle eller reprodusere egne generiske eksempler ut ifra andre elevers svar, tolker vi det som at de har forstått og godtatt svarene som et bevis da det fungerer med deres egne eksempler også.

5.3.3 Oppsummering elevens forståelse av matematiske bevis

Det interessante i vår studie er å kunne se hva elevene ville akseptere som et bevis før proof-based teaching og hva de endte opp med å akseptere etter. Reid og Vargas (2018, 2019) mener det er tre aspekter bevis forekommer i. Hvilke uttalelser som er aksepterte, gyldige argumentasjoner som kan godtas og de aktuelle eller kjente formene for representasjon (Reid & Vargas, 2019). Med disse aspektene av bevis, kan man sammenligne hva elevene aksepterte av uttalelser, argumentasjoner og representasjoner før og etter proof-based teaching.

De første observasjonene viser tydelig at de ikke har en kjent metode for å bevise om formodninger stemmer eller ikke. Det er noe vi forventet da elevene ikke har jobbet med slike oppgaver før. Noe av det vi var ute etter var å se hvordan elevene delte sin forståelse av det de så på som matematiske bevis. Elevene kom fram til noen svar før proof-based teaching og forklarte hva de hadde gjort, men begrunnelsene var vage i den forstand at de kun gjentok hva de hadde gjort. Etter proof-based teaching brukte elevene fortsatt samme tilnærming i starten ved å bruke eksempler, men denne gangen bygde de videre på dette ved å visualisere eksemplene sine. De begrunnet hvorfor tegningene beviset at formodningen stemte og hvorfor de numeriske eksemplene beviset at formodningen stemte. Da gjentok de ikke representasjonene sine, men ga et svar om hvorfor det var sånn.

Elevenes toolbox, som Reid og Vargas (2019) mener er et viktig element i proof-based teaching, ble utvidet gjennom proof-based teaching som ga elevene flere muligheter rundt oppgaven. En kan si at elevene bare kopierte det de gjorde i undervisningene for å løse oppgaven de fikk ved observasjonen, men de jobbet ikke med formodninger om tallteori gjennom proof-based teaching. Da fikk de formodninger om geometri og figurer. Det elevene har lært om formodninger og påstander i geometri har de klart å overføre til et helt annet tema, noe som er målet med proof-based teaching. Elevene skal ikke bare gjenta prosessene for bevisføring og komme til et svar, men de skal bruke det til å lære seg å forstå matematiske problemer, kunne begrunne hvorfor det er sånn og lære seg nytt stoff. Ved å kunne komme fram til hvorfor en formodning stemmer og deretter kunne forklare hvorfor, så tolker vi det som at eleven har forstått det matematiske problemet og har en forståelse av matematiske bevis. Tar vi utgangspunkt i Stylianides (2007) vil det ikke nødvendigvis være dårligere om eleven kommer fram til et generisk eksempel fremfor et generelt bevis, så lenge eleven har forstått hvorfor formodningen stemmer eller ikke, og klarer å begrunne det ved å bruke deduktive argumenter. Elevene har vist tegn på læring noe som er hele poenget med et undervisningsopplegg i skolen. Elevene viser at de har en større forståelse for å bevise matematiske påstander, og de argumenterer for nytteverdien av å bevise dem, i motsetning til resultater fra internasjonal forskning (eks Cabassut et al. 2012; Chazan, 1993; Harel & Sowder, 1998; Healy & Hoyles, 2000).

6 Konklusjon og perspektivering

Resultatet viser elevene klarer å overføre matematisk forståelse av bevisføring fra et domene i matematikken, til et annet. Dette gjør de ved å bruke det de har lært gjennom proof-based teaching med tema geometri, og overfører det til tallteori. Elevene diskuterer, resonnerer og deler det de har fått med seg fra undervisningene for å bevise formodningene. Bruk av eksempler har en sentral rolle hos elevenes argumentasjoner, men elevenes bevis baseres ikke lenger kun på eksempler. De bruker eksempler som et støttemiddel for å komme med generelle begrunnelser i tillegg til de de generiske eksemplene de har kommet fram til. Slik vi tolker resultatene, har elevene vist at de klarer å bruke det de har lært om matematiske bevis til å generelt begrunne hvorfor en formodning stemmer. De har utvikler seg fra først å godta noen få eksempler og kun referere til de, til etter å ha utviklet seg fra å først bruke eksemplene for å produsere generiske eksempler som kommuniserer gjennom verbalt språk og visualisering. En ser tydelige indikasjoner på at elevene beveger seg fra induktive mot deduktive argumenter, i den grad at de begrunner hvorfor B er en logisk konsekvens av A, da de tidligere kun aksepterte at B er en konsekvens av A.

Etter å ha brukt proof-schemes (Harel & Sowder, 1998) og de fire nivåene til Balacheff (1988) i analysen, kan vi se at samtlige elever har utviklet sin forståelse av matematiske bevis. Hos Balacheff (1988) sine nivåer har de gått fra naiv empirisme til generiske eksempler og i proof-schemes har noen elever nådd analytisk bevisskjema. Elevene påstår også selv at de har en bedre forståelse om hva matematiske bevis er, men legger til at de føler deres matematiske forståelse har forbedret seg som de begrunner det med å si at de nå vet hvorfor noe er som det er. Vi observerte også at de hadde en større vilje til å gå i dybden i de matematiske temaene.

Gjennom perioden med proof-based teaching hadde det pedagogiske synspunktet på å lære om matematiske bevis en sentral rolle. Målet var å veilede elevene til deduktiv resonnering og logiske slutninger, som en basis for dannelse av matematisk kunnskap. Ut ifra studiens funn, har elevene også vist en utvikling matematisk forståelse der de kombinerer deres forkunnskaper med det nye de har lært. Deres kunnskaper om addisjon, subtraksjon, multiplikasjon og divisjon tas i bruk for å teste om formodningen stemmer, og deretter kommuniserer de med hverandre for å bevise hvorfor, noe som var manglende før proof-based teaching.

Da studien vår baseres seg på funn fra kun et trinn, vil det ikke være forsvarlig å generalisere funnene våre og mene det gjelder for alle elever i Norge. Men studien viser at proof-based teaching har store potensialer for å fremme både forståelse for matematisk resonnering og for matematikkens innhold. I tillegg til det er teorien vi har valgt basert på anerkjente studier som har likhetstrekk med vår studie.

I videre studier ville vi ha tatt for oss flere trinn og flere skoler, og hentet inn data fra en kontrollgruppe som ikke gjennomføre en seks ukers periode med proof-based teaching, men gjennomførte deres vanlige undervisning om samme tema. Da kunne vi ha sammenlignet hvordan elevenes resonneringer, samtaler og diskusjoner hadde forandret seg i forhold til hverandre. Det kan tenkes at en kvantitativ tilnærming med mange deltagere kan gi et mer generaliserbart svar på om proof-based teaching øker elevenes matematiske forståelse.

Noe av det vi sitter igjen med etter studien, er hvordan elevene tok imot undervisningsopplegget. Elevene kom med positive tilbakemeldinger om gjennomføringen. De satt pris på å ikke få utdelt et hefte med masse oppgaver eller slå opp matematikkboken for å jobbe i den. De likte å få utdelt en større oppgave som de skulle bruke hele timen på å løse felles med andre elever. Det kan være nyttig for elevene å kunne vise hverandre hvordan de tenker og gi de en mulighet til å utvikle sine kommunikasjons- og argumentasjonsevner. Lærere vil også få innblikk i hvordan elever resonnerer ved å lytte til samtalene til elevene under problemløsningsfasene. En kan bruke det til å kartlegge elevenes matematiske ståsteder for å legge til rette videre. Vi har også fått trening og innsikt i hvordan det å undervise slik kan utvikle elevenes forståelse for matematisk resonnering og det matematiske temaet. Og vi tenker det vil ha stor betydning for vårt arbeid som lærere. Vi tar også med oss forståelsen av kompleksiteten som kan forekomme i klasseromsdiskusjoner, med alle de ulike måtene å begrunne på.

Referanser

Antonini, S. & Mariotti, M. A. (2009). Abduction and the explanation of anomalies: The case of proof by contradiction. I Durrand-Guerrier, V., Soru-Lavergne, S., & Arzarello, F. (Eds.) *Proceedings of the 6th ERME Conference,* Lyon, France.

Arbaugh, F., Smith, M., Boyle, J., Stylianides, G., J. & Steele, M. (2019). *We reason & we prove for all mathematics – building students´ critical thinking.* California: Corwin Mathematics

Arzarello, F., Bussi, M. G. B., Leung, A. Y. L., Mariotti, M. A. & Stevenson, A. (2012). Experimental Approaches to Theoretical Thinking: Artefacts and Proof. I G. Hanna & de Villiers (Ed.): *Proof and proving in mathematics education*. Springer.

Baccaglini-Frank, A. (2010). The maintaining dragging scheme and the notion of instrumental abduction. I P. Brosnan, D. Erchick & L. Flevares (Eds.), *Proceedings of the 10th conference of the PMENA* (Vol. 6, 607-615), Colombus, Ohio.

Bass, H. (2009). *How do you know that you know? Making Believe in Mathematics. Distinguished University Professor Lecture given at the University of Michigan* on March 25, 2009. Hentet fra: http://deepblue.lib.umich.edu/bitstream/2027.42/64280/1/Bass-2209.pdf

Balacheff, N. (1988). Aspect of proof in pupil´s practice of school mathematics. I D. Pimm (Ed.) *Mathematics, teachers and children* (pp. 216-235). London: Hodder & Stoughton

Ball, D. L. & Bass, H. (2003). Making mathematics reasonable in school. I Kilpatrick, J., Martin W. G. & Schifter, D. (Eds.) *A Research Companion to Principals and Standards for School Mathematics (pp. 27-44).* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Borwein, J. M. (2012) Exploratory experimentation: Digitally-assisted discovery and proof. I G. Hanna & de Villiers (Eds.).: *Proof and proving in mathematics education*. Springer.

Cabassut, R. (2012). Conceptions of proof – in research and teaching. I Hanna, G. & de Villiers (Eds.): *Proof and proving in mathematics education*. Springer.

Cervantes, J. A., Sanchez, G. C, & Reid, D (2019). Complex Argumentation in Elementary School. I *PNA Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática 13(4)*

Cervantes-Barazza, J. A., Moreno A. H. & Rumsey, C. (2019). Promoting mathematical proof from collective argumentation in primary school. I *School Science and Mathematics 2020:120 s. 4-14.*

Carpenter, T., Franke, M., L. & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating Arithmetic and Algebra in Elementary School.* Canada: Pearson Education.

Chazan, D. (1993). High school geometry students´ justification for their view of empirical evidence and mathematical proof. I *Educational Studies in Mathematics 24(4):*359-287

Davis, P. J. & Hersh R. (1981). *The mathematical experience.* New York: Viking Penguin Inc

Dawkins, P. C. & Weber, K. (2016). Values and norms of proof for mathematicians and students. I *Educational Studies in Mathematics 95(2)* 1-20

Douek, N. (2009). *Approaching proof in school: From guided conjecturing and proving to a story of proof construction* (Vol. 1, pp. 142-148).

Duval, R.: 1991, 'Structure du raisonnement déductif et apprentissage de la Démonstration'. I *Educational Studies in Mathematics 22(3),* 233–261.

Fangen, K. & Sellerberg, A. M. (2011). *Mange ulike metoder.* Oslo: Gyldendal Akademisk.

Fried, M. N., & Amit, M. (2008). The co-development and interrelation of proof and authority: The case of Yana and Ronit. I *Mathematics Education Research Journal, 20(3), 54–77*

Flores, A. (2006). How do students know what they learn in middle school mathematics is true? I *School Science and Mathematics, 106(3), 124–132.*

Grabiner, J. V. (2012). Why Proof? A Historian´s Perspective. I G. Hanna & de Villiers (Ed).: *Proof and proving in mathematics education*. Springer.

Grønmo, S. (2016). *Samfunnsvitenskapelige metoder.* Bergen: Fagbokforlaget

Halvorsen, K. (2008). *Å forske på samfunnet: en innføring i samfunnsvitenskapelig metode.* Oslo: Cappelen Damm Akademisk

Hana, G. M. (2013). Matematiske byggesteiner – metamatematikk for lærerutdanningen. Caspar forlag.

Hanna, G. & Barbeau, E. (2010). Proofs as bearers of mathematical knowledge. In Hanna, G., Jahnke, H. N. & Pulte, H. (Eds.) *Explanation and proof in mathematics: Philosophical and educational perspectives* (s. 85-100). New York. Springer
Research on Proof and Proving – An International Perspective. Springer.

Harel, G. & Sowder, L. (1998). Students' Proof Schemes: Results from Exploratory Studies. I *CBMS Issues in Mathematics Education*., Rhode Island: American Mathematical Society.

Harel, G. & Sowder, L. (2005). Advanced mathematical thinking at any age: Its nature and its development. I *Mathematical Thinking and Learning, 7 s. 27-50.*

Healy, L., & Hoyles, C. (2000). A study of proof conceptions in algebra. I *Journal for Research in Mathematics Education.* 31, (p. 396-428).

Hiebert, J., Carpenter, T. P. Fennema, E., Fuson, K. C., Wearne, D., Murray, H., Olivier, A. & Human, P. (1997). *Making sense – teaching and learning mathematics with understanding.* Portsmouth: Heineman

Hofmann, A. & Kaufman, O., T. (2014). Geometri. I Gustavsen, T., S. Hinna, K., R., C. Borge, I., C. & Andersen, P., S. (Eds.). *QED 1.-7. – matematikk for grunnskolelærerutdanningen - Bind 2.* Oslo: Cappelen Damm AS

Housman, D. & Porter, M. (2003). Proof Schemes and Learning Strategies of Above-Average Mathematics Students. I *Educational Studies in Mathematics Vol. 53. No. 2 (2003) s. 139-158*

Hsieh, F., Horng, W. & Shy, H. (2012). From Exploration to Proof Production. I Hanna, G. & de Villiers (Eds.). *Proof and proving in mathematics education*. Springer.

Hummelvoll, J.K., Andvig, E. & Lydberg, A. (2010). *Etiske utfordringer i praksisnær forskning.* Oslo: Gyldendal Akademisk.

Høgheim, S. (2020). *Masteroppgaven I GLU.* Bergen: Fagbokforlaget.

Jacobsen, D., I. (2005). *Hvordan gjennomføre undersøkelser? - innføring i samfunnsvitenskapelig metode.* Oslo: Cappelen Damm Akademisk.

Johannessen, A., Tufte, P. A., & Christoffersen, L. (2016). *Introduksjon til samfunnsvitenskapelig metode.* Oslo: Abstrakt

Johnson, R., B. & Christensen, L. (2014). *Educational research – quantitative, qualitative and mixed approaches.* USA: SAGE.

Kieran, C., Doorman, M., & Ohtani M. (2015) Frameworks and Principles for Task Design. I Watson, A & Ohtani, M. *Task Design in Mathematics Education – an ICMI Study 22* (s. 19-81) Springer.

Kleven, T., A. (2008). Validity and validation in qualitative and quantitative research. I *Nordic Studies in Education (03), 2008,* s. 219-233.

Kleven, T. A. & Hjardemaal, F. R. (2018). *Innføring i pedagogisk forskningsmetode – en hjelp til kritisk tolkning og vurdering*. Bergen: Fagbokforlaget

Kvale, S. & Brinkmann, S. (2019). *Det kvalitative forskningsintervju.* Oslo: Gyldendal.

Larsen, A. K. (2012). *En enklere metode – veiledning i samfunnsvitenskapelig forskningsmetode.* Bergen: Fagbokforlaget.

Limón, M. (2001) On the cognitive conflict as an instructional strategy for conceptual change: a critical appraisal. I *Learning and Instruction,* (11), 357-380.

Louisiana Department of Education (2013). *Grade 8 Mathematics Practice Test 2013-2014*. Hentet fra: https://www.louisianabelieves.com/docs/assessment/practice-test-math-grade-8.pdf

Mason, J. & Johnston-Wilder, S. (2006). *Designing and Using Mathematical Tasks.* Tarquin Publications

Matematikksenteret (2018). MatteLIST – en ny nettside med aktiviteter som passer alle. Hentet fra: https://www.matematikksenteret.no/nyheter/mattelist-ny-nettside-med-aktiviteter-som-passer-alle

Maxwell, J. A. (2013). *Qualitative research design – An Interactive Approach.* Los Angeles: Sage Publications Inc.

Morales Pedraza, J. (2017). Can deductive approach be used in qualitative case study?. Hentet fra: https://www.researchgate.net/post/can_deductive_approach_be_used_in_a_qualitative_case_study

Movshovitz-Hadar, N. (1988). Stimulating presentations of theorems followed by responsive proofs. I *For the Learning of Mathematics, 8 (2), 12-30.*

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). *Principles and standards for teaching Mathematics.* Reston, VA: Author

The Norwegian National Research Ethics Committees (NESH). (2016). *Guidelines for Research Ethics in the Social Sciences, Humanities, Law and Theology.* Hentet fra: https://www.forskningsetikk.no/globalassets/dokumenter/4-publikasjoner-som-pdf/60127_fek_guidelines_nesh_digital.pdf

Nosrati, M., & Wæge, K. (2015). *Sentrale kjennetegn på god læring og undervisning i matematikk. (Central characteristics of good learning and teaching in mathematics).* A research review requested by the Ministry of Education.

NOU 2014:7. (2014). *Elevenes læring i fremtidens skole – Et kunnskapsgrunnlag*. Hentet fra https://www.regjeringen.no/no/dokumenter/NOU-2014-7/id766593/

NOU 2015:8. (2015). Fremtidens skole – Fornyelse av fag og kompetanser. Hentet fra https://www.regjeringen.no/no/dokumenter/nou-2015-8/id2417001/

Pedemonte, B. & Buchbinder, O. (2011). Examining the role of examples in proving processes through a cognitive lens: The case of triangular numbers. I *ZDM Mathematics Education (2011) 43:257-267*

Pedemonte, B. & Reid, D. (2011). The role of abduction in proving processes. I *Ecucational Studies in Mathematics, 76*(3), 281-303.

Piaget, J. & Inhelder, B. (1967). *The child´s conception of space.* New York: W. W. Norton

Polster, B. (2008). *Q.E.D. – Beauty in Mathematical Proofs.* New York: WALKER & CO.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em matemática. I GTI (Ed.), I *professor e o* desenvolvimento curricular (pp. 11-34). Lisboa, Portugal: APM.

Prediger, S. (2019). Theorizing in Design Research: Methodological reflections on developing and connecting theory elements for language-responsive mathematics *classrooms.* I *AIEM – Avances de Investigación en Educación Matematica.* 2019, 15, 5-27

Reid, D. (2011). Understanding proof and transforming teaching. In Wiest, L., & Lamberg, T. (Eds.) Proceedings of the 33rd Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. (pp. 15–30). Reno NV: University of Nevada.

Reid, D. & Knipping, C. (2010). Proof in Mathematics Education – Research, Learning and Teaching. Rotterdam: Sense Publishers

Reid, D. & Vargas, E. (2019). Evidence and argument in a proof based teaching theory. I *ZDM 2019 51*:807-823. Karlsruhe

Reid, D. & Vargas, E. A. V. (2018a). *Proof-based teaching as a basis for understanding why.* CERME-10, Feb 2017, Dublin Ireland.

Reid, D. & Vargas, E. A. V. (2018b). When is a Generic Argument a Proof?. I Stylianides, A. J. & Harel, G (Eds.): *Advances in Mathematics Education Research on Proof and Proving.* Springer

Rota, G. C. (1997). *Indiscrete thoughts.* Boston: Birkhauser.

Rumsey, C., & Langrall, C. W. (2016). Promoting mathematical argumentation. I *Teaching children mathematics, 22(7),* 413-419.
Sen, C., & Guler, G. (2015). Examination of Secondary School Seventh Graders' proof skills and proof schemes. I *Universal Journal of Educational Research, 3(9), 617–631*
Sfard, A. (2008). Thinking as Communicating. Human Development, the Growth of Discourses, and Mathematizing. Cambridge: Cambridge University Press.
Sfard, A. (1991). On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin. I *Educational studies in Mathematics* 22(1):1-36
Silverman, D. (2014). *Interpreting Qualitative Data.* SAGE.
Smith, M., & Stein, M. (1998). Selecting and creating mathematical tasks: Form research to practice. I *Mathematics teaching in the middle school*, 3(5), 344-350.
Sriraman, B. (2013). Kulturelle nyanseforskjeller I matematikk: Bevisenes rolle. I A. B. Fyhn (Ed.) *Kultur og matematikk/Kultuvra ja matematihkka*. Caspar Forlag.
Solar, H., Deulofeu, J. & Azcárate, C. (2015) Modeling competence in functional graph interpretation. Enseñanza de las Ciencias 33(2):191-210
Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. I *Mathematical Thinking and Learning, 10(4), s. 313–340.*
Steiner, M. (1978). Mathematical explanation. I *Philosophical Studies*, 34, s. 135-151
Strayer, J. F. & Brown, E. (2012). *Teaching with High-Cognitive-Demand Mathematical Tasks Helps Students Learn to Think Mathematically*. Hentet fra: https://www.ams.org/journals/notices/201201/rtx120100055p.pdf
Stylianides, A. J. (2019). Secondary students' proof constructions in mathematics: The role of written versus oral mode of argument representation. *I Review of Education, 7(1), 156–182.*
Stylianides, A. J. & Stylianides G. (2018). Addressing Key and persistent problems of students´ learning : The case of proof. I Stylianides, A. J. & Harel, G (Eds.): *Advances in Mathematics Education Research on Proof and Proving.* Springer
Stylianides, A. J. (2007). Proof and proving in school mathematics. I *Journal for Research in Mathematics Education, 38,* 289-321
Stylianides, G. (2009). Reasoning-and-Proving in. School Mathematics Textbooks. I *Mathematical Thinking and Learning, Vol 11, 2009.* Hentet fra: https://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/10986060903253954
Stylianou, D., Chae, N. & Blanton, M. (2006). Students´ proof schemes: a closer look at what characterized student´ proof conceptions. I *PME-NA 2006 Proceedings Vol. 2-54*
Tall, D. (2011). Crystalline concepts in long-term mathematical invention and discovery. I *For the Learning of Mathematics 31, 1 (March 2011) s. 3-8.*
Tall, D., Yevdokimov, O., Koichu, B., Whiteley, W., Kondratieva, : & Cheng, Y. (2012). Cognitive Development of proof. I Hanna, G. & de Villiers (Ed.): *Proof and proving in mathematics education*. Springer.
Utdanningsdirektoratet. (2020). Eksempeloppgaver og tidligere nasjonale prøver. Hentet fra: https://www.udir.no/eksamen-og-prover/prover/eksempeloppgaver-tidligere-nasjonale-prover/8-9-trinn/regning/bokmal/?path=cefglhhcefglifcefglik#
Utdanningsdirektoratet. (2019a). Læreplan i matematikk 1.-10. trinn (MAT01-05). Hentet fra https://www.udir.no/lk20/mat01-05?lang=nob
Utdanningsdirektoratet. (2019b). Kjerneelementer – Matematikk 1-10 (MAT01-05). Hentet fra: https://www.udir.no/lk20/mat01-05/om-faget/kjerneelementer?lang=nob
Utdanningsdirektoratet. (2019c). Grunnleggjande ferdigheter – Matematikk 1-10 (MAT01-*05).* Hentet fra: https://www.udir.no/lk20/mat01-05/om-faget/grunnleggende-ferdigheter
Utdanningsdirektoratet. (2018). Nasjonal prøve i regning 8. trinn 2018 versjon 1 - PGSC (UDIR). Hentet fra:

https://pgsc.udir.no/kursweb/content?contentItemId=46528821&marketplaceId=624075&selectedLanguageId=1

Utdanningsdirektoratet. (2017). Nasjonal prøve i regning 8. trinn 2017 versjon 1 - PGSC (UDIR). Hentet fra: https://pgsc.udir.no/kursweb/content?contentItemId=44580096&marketplaceId=624075&selectedLanguageId=1

Utdanningsdirektoratet. (2013). *Læreplan i matematikk fellesfag (MAT01-04)* Hentet fra: https://www.udir.no/kl06/mat1-04#

Utdanningsdirektoratet. (1998). *Læreplanverket for den 10-årige grunnskolen.* Oslo: Kyrkje-, utdannings og forskningsdepartmentet.

Valenta, A. (2016). *Kognitive krav i matematikkoppgaver.* Hentet fra: https://www.matematikksenteret.no/sites/default/files/media/filer/MAM/Valenta%20Kognitive%20krav%20i%20matematikkoppgaver_0.pdf

Vygotsky, L. (1978). *Mind in Society ,The Development of Higher Psychological Processes.* (M. Cole, V. John-Steiner, S. Scribner, & E. Souberman, Eds.) USA: Harvard University Press.

Weber, K., Inglis, M. & Mejia-Ramos, J. P (2014). How Mathematicians Obtain Conviction: Implications for Mathematics Instruction and Research on Epistemic Cognition. I *Educational Psychologist, 49:1*, 36-58.

Weber, K. & Mejia-Ramos, J. P (2020). Do Generic Proofs Improve Proof Comprehension? I *Journal of Educational Research aug 2020*

Zaslavsky, O., Nickerson, S. D., Stylianides, A., Kidron, I., & Winicki-Landman, G. (2012). The need for proof and proving: mathematical and pedagogical perspectives. In G. Hanna & M. de Villiers (Eds.*), Proof and proving in mathematics education, New ICMI Study Series 15 (pp. 215–229).* Dordrecht, The Netherlands: Springer.

Vedlegg

Vedlegg kan være forsøksresultater, tegninger, diagrammer, spørreskjemaer eller lignende. Store datamengder bør plasseres i vedleggene, ellers kan leseren gå trøtt av detaljer.

Vedlegg 1: Informasjonsskriv og samtykkeerklæring
Vedlegg 2: Godkjennelse fra NSD

Vedlegg 1: Informasjonsskriv og samtykkeerklæring

Vil du delta i forskningsprosjektet

Bevis og argumentasjon på mellomtrinnet

Dette er et spørsmål til deg om å delta i et forskningsprosjekt hvor formålet er å *se hvordan elever kan forbedre sine ferdigheter i bevis og argumentasjon i matematikk*. I dette skrivet gir vi deg informasjon om målene for prosjektet og hva deltakelse vil innebære for deg.

Formål

Formålet med dette forskningsprosjektet er å se hvordan elevenes ferdigheter og forståelse av bevis og argumentasjon i matematikken kan forbedres ved hjelp av et intervensjonsprogram. Intervensjonsprogrammet vil fokusere på elevenes argumenter, og hvordan disse blir mer sofistikerte i løpet av en tidsperiode på seks uker. Målet er å kartlegge om det sosiale klasserommet, der argumenter deles, vurderes og nyanseres kan føre til et mer sofistikert og presist matematisk språk, der de beviser og generaliserer matematiske påstander. Forskningsprosjektet er en masteroppgave.

Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?

Universitetet i Sørøst-Norge er ansvarlig for prosjektet.

Hvorfor får du spørsmål om å delta?

Eleven og deres foresatte får spørsmål om å delta på forskningsprosjektet på følgende grunnlag; eleven befinner seg i klassetrinn der overgangen til ungdomsskolen nærmer seg, dette temaet er innført i den nye læreplanen som spesielt vektlegger bevis og argumentasjon i faget og det vil forberede elevene til matematikkfaget i ungdomsskolen. Mye forskning tyder på at bevis og argumentasjon i matematikk utvikler elevenes matematiske forståelse og deres resonneringsevner.

Hva innebærer det for deg å delta?

Hvis du velger å delta i prosjektet, innebærer det lyd- og videoopptak, intervju og at du gjør en oppgave som vil ta rundt 30-45 minutter. Oppgaven går ut på matematiske oppgaver som fokuserer på bevis og argumentasjon. Hvis eleven ønsker å delta i forskningsprosjektet innebærer det også at eleven vil bli gjort lyd og videoopptak av i en gruppe på 4-6 elever, både i forkant og i etterkant av intervensjonen. Det vil ta gruppen som eleven er en del av ca. 30-45 minutter. All data vil være anonymisert, som vil si at det ikke vil være mulig å identifisere elevene i masteroppgaven. Navn og personopplysninger vil ikke bli brukt. Alle navn vil bli til anonymiserte navn (eksempelvis blir Kari til Eline og Trond til Kristian).

Dersom det er ønskelig fra foresatte kan dere ta kontakt med studentene for å se oppgaven på forhånd.

Det er frivillig å delta

Det er frivillig å delta i prosjektet. Hvis du velger å delta, kan du når som helst trekke samtykket tilbake uten å oppgi noen grunn. Alle dine personopplysninger vil da bli slettet. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for deg hvis du ikke vil delta eller senere velger å trekke deg. Det vil på ingen måte påvirke ditt/ditt barns forhold til skolen. Dersom eleven ikke ønsker å delta på forskningsprosjektet vil eleven følge normal undervisning i klassen.

Ditt personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker dine opplysninger

Vi vil bare bruke opplysningene om eleven til formålene vi har fortalt om i dette skrivet. Vi behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket. De eneste som vil ha tilgang på datamaterialet er Henrik F. Gudmundsen, Qendrim Alija, og veiledere ved USN, Sigurd Hals (veileder) og Andrea Hofman (biveileder). De tiltakene som gjøres for å sikre at ingen uvedkommende får tilgang på personopplysningene er at navnet på eleven vil erstattes med en kode som lagres på egen navneliste adskilt fra øvrige data, datamaterialet vil lagres på en innelåst forskningsserver. Deltakerne i prosjektet vil ikke kunne gjenkjennes ved publikasjon. Datamaterialet som samles inn vil lagres på Universitetet i Sørøst-Norge, med streng adgangsbegrensning, navn vil anonymiseres og alt vil krypteres.

Hva skjer med opplysningene dine når vi avslutter forskningsprosjektet?

Opplysningene anonymiseres frem til prosjektet avsluttes/oppgaven er godkjent, noe som etter planen er 15. mai 2021. Alle opplysninger vil ved prosjektslutt slettes fra alle servere, lyd- og videoopptak vil også slettes.

Dine rettigheter

Så lenge du kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:

- innsyn i hvilke personopplysninger som er registrert om deg, og å få utlevert en kopi av opplysningene,
- å få rettet personopplysninger om deg,
- å få slettet personopplysninger om deg, og
- å sende klage til Datatilsynet om behandlingen av dine personopplysninger.

Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om deg?

Vi behandler opplysninger om deg basert på ditt samtykke.

På oppdrag fra Universitetet i Sørøst Norge har NSD – Norsk senter for forskningsdata AS vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Hvor kan jeg finne ut mer?

Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:

- Universitetet i Sørøst-Norge ved prosjektansvarlig Sigurd Hals, epost: sigurdhals@usn.no tel: 31009843. Henrik F. Gudmundsen, epost: 221279@student.usn.no tel: 94874257. Qendrim Alija, tel: 40602783.

Vårt personvernombud: Paal Arne Solberg, kan kontaktes på epost: personvernombud@usn.no, eller per telefon: 35575053/91860041

Hvis du har spørsmål knyttet til NSD sin vurdering av prosjektet, kan du ta kontakt med:

- NSD – Norsk senter for forskningsdata AS på epost (personverntjenester@nsd.no) eller på telefon: 55 58 21 17. Referansekode: *470880*

Med vennlig hilsen

Sigurd Hals   Henrik F. Gudmundsen & Qendrim Alija

(Veileder/forskere)

Samtykkeerklæring

Jeg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet *Bevis og argumentasjon på mellomtrinnet*, og har fått anledning til å stille spørsmål. Jeg samtykker til:

- å delta i lyd og videoopptak

Jeg samtykker til at mine opplysninger behandles frem til prosjektet er avsluttet

----

(Signert av prosjektdeltaker, dato)

Vedlegg 2: Godkjennelse NSD

Det innsendte meldeskjemaet med referansekode 470880 er nå vurdert av NSD.

Følgende vurdering er gitt:

Det er vår vurdering at behandlingen av personopplysninger i prosjektet vil være i samsvar med personvernlovgivningen så fremt den gjennomføres i tråd med det som er dokumentert i meldeskjemaet den 19.10.2020 med vedlegg, samt i meldingsdialogen mellom innmelder og NSD. Behandlingen kan starte.

MELD VESENTLIGE ENDRINGER

Dersom det skjer vesentlige endringer i behandlingen av personopplysninger, kan det være nødvendig å melde dette til NSD ved å oppdatere meldeskjemaet. Før du melder inn en endring, oppfordrer vi deg til å lese om hvilke type endringer det er nødvendig å melde: nsd.no/personvernombud/meld_prosjekt/meld_endringer.html

Du må vente på svar fra NSD før endringen gjennomføres.

TYPE OPPLYSNINGER OG VARIGHET

Prosjektet vil behandle alminnelige kategorier av personopplysninger frem til 15.05.2021.

LOVLIG GRUNNLAG

Prosjektet vil innhente samtykke fra de registrerte til behandlingen av personopplysninger. Vår vurdering er at prosjektet legger opp til et samtykke i samsvar med kravene i art. 4 og 7, ved at det er en frivillig, spesifikk, informert og utvetydig bekreftelse som kan dokumenteres, og som den registrerte kan trekke tilbake. Lovlig grunnlag for behandlingen vil dermed være den registrertes samtykke, jf. personvernforordningen art. 6 nr. 1 bokstav a.

PERSONVERNPRINSIPPER NSD vurderer at den planlagte behandlingen av personopplysninger vil følge prinsippene i personvernforordningen om:

- lovlighet, rettferdighet og åpenhet (art. 5.1 a), ved at de registrerte får tilfredsstillende informasjon om og samtykker til behandlingen - formålsbegrensning (art. 5.1 b), ved at personopplysninger samles inn for spesifikke, uttrykkelig angitte og berettigede formål, og ikke viderebehandles til nye uforenlige formål - dataminimering (art. 5.1 c), ved at det kun behandles opplysninger som er adekvate, relevante og nødvendige for formålet med prosjektet - lagringsbegrensning (art. 5.1 e), ved at personopplysningene ikke lagres lengre enn nødvendig for å oppfylle formålet

DE REGISTRERTES RETTIGHETER Så lenge de registrerte kan identifiseres i datamaterialet vil de ha følgende rettigheter: åpenhet (art. 12), informasjon (art. 13), innsyn (art. 15), retting (art. 16), sletting (art. 17), begrensning (art. 18), underretning (art. 19), dataportabilitet (art. 20). NSD vurderer at informasjonen som de registrerte vil motta oppfyller lovens krav til form og innhold, jf. art. 12.1 og art. 13.

Vi minner om at hvis en registrert tar kontakt om sine rettigheter, har behandlingsansvarlig institusjon plikt til å svare innen en måned.

FØLG DIN INSTITUSJONS RETNINGSLINJER

NSD legger til grunn at behandlingen oppfyller kravene i personvernforordningen om riktighet (art. 5.1 d), integritet og konfidensialitet (art. 5.1. f) og sikkerhet (art. 32). For å forsikre dere om at kravene oppfylles, må dere følge interne retningslinjer og eventuelt rådføre dere med behandlingsansvarlig institusjon.

OPPFØLGING AV PROSJEKTET NSD vil følge opp ved planlagt avslutning for å avklare om behandlingen av personopplysningene er avsluttet.

Lykke til med prosjektet!

Kontaktperson hos NSD: Mirza Hodzic   Tlf. Personverntjenester: 55 58 21 17 (tast 1)