

Reidar Mosvold

Matematikk i hverdagen:

Vinkelbegrepet

Rapport 11/02

Telemarksforskning – Notodden

August 2002

Forord

Denne artikkelen har bakgrunn i klasseromsstudien jeg gjorde i mitt hovedfagsprosjekt i matematikdidaktikk ved Høgskolen i Agder. I dette prosjektet var det genetiske prinsipp og bruk av historie i matematikkundervisningen hovedfokus.

Denne artikkelen bygger bro mellom hovedfagsprosjektet og mitt nåværende doktorgradsprosjekt, idet den med utgangspunkt i det genetiske prinsipp også fokuserer på matematikk i hverdagen, gjennom dette konkrete eksempelet med vinkelbegrepet.

Artikkelen tar for seg noen av momentene ved hovedfagsprosjektet. Dersom du ønsker å lese mer om dette, kan jeg henvise til hovedfagsoppgaven min: "Det genetiske prinsipp i matematikdidaktikk", HiA 2001.

Innhold

HVA ER EN VINKEL?	4
HISTORISKE OG SAMTIDIGE OPPFATNINGER AV VINKELBEGREPET	5
FORSKNING PÅ VINKELBEGREPET	5
VINKELBEGREPET I MEDIA	9
SUNKET RUSSISK MARINEUBÅT	9
HAVNELAGERET PÅ KOKKENES	9
START BORTE MOT MOLDE	9
USA MOT BRASIL I OL	10
KLASSEROMSSTUDIEN	10
LÆREBØKER PÅ SMÅSKOLETRINNET	10
LÆREBØKER PÅ MELLOMTRINNET	10
LÆREBØKER PÅ UNGDOMSTRINNET	11
FORVENTEDE LÆRINGSHINDRINGER	11
UNDERVISNINGSOPPLEGG	12
RESULTATER FRA STUDIEN	12
EUKLIDSK VINKELDEFINISJON	13
<i>Fra 1. time i gruppe 3</i>	13
<i>Fra 2. time i gruppe 3</i>	13
<i>Fra 3. time i gruppe 4</i>	14
SCHULSTADS VINKELDEFINISJON	14
<i>Fra 1. time i gruppe 3</i>	15
VINKEL SOM ROTASJON	16
<i>Fra 2. time i gruppe 3</i>	16
<i>Fra 3. time i gruppe 3</i>	17
DISKUSJON	18
REFERANSER	18

Lærere opplever stadig at de kan bruke matematikkens historie i undervisningen. De opplever også iblant at historien ”gjentar seg” hos deres egne elever. Samtidig sier forskere at historiske problemer aldri vil kunne bety det samme for dagens elever som de gjorde tidligere. Dette tar oss rett inn i diskusjonen omkring det såkalte ”genetiske prinsipp” i matematikdidaktikken. I denne artikkelen skal jeg ikke ta opp denne diskusjonen noe videre, men jeg skal snarere forsøke å vise hvordan anvendelser av disse teoriene kan brukes i den praktiske klasseromssituasjonen.

Én av de nyeste anvendelsene av det genetiske prinsipp i didaktikken finner vi i teoriene om epistemologiske hindringer. Disse teoriene går ut fra en tanke om paralleller mellom den historiske og den individuelle utviklingen, og i så måte hører de hjemme under den historiske genesen. Fokus er på feil og hindringer som fører til feil hos elevene. Teoriene, som først ble utviklet av Bachelard og senere moderert for matematikdidaktikken av Brousseau, hevder at der fins ulike typer læringshindringer for elevene. Noen hindringer kan ha didaktiske årsaker, andre kan ha ontogenetiske årsaker, noen kan være av kulturell art, mens andre igjen kan være hindringer med epistemologiske årsaker. De siste kaller vi for epistemologiske hindringer, og de har sin bakgrunn i begrepenes historiske utvikling. I følge Brousseau er de uunngåelige, og på mange måter er de også nødvendige i lærings situasjoner.

Teoriene for epistemologiske hindringer har blitt mye brukt i klasseromsstudier. Jeg har tatt for meg vinkelbegrepet som en praktisk tilnærming til teorien. På bakgrunn av studier av historien kunne vi avdekke mulige hindringer. Disse kan så brukes som bakgrunn for undervisningsopplegg. Det er ikke umiddelbart en enkel oppgave å avgjøre om disse hindringene er epistemologiske, didaktiske eller kulturelle. Såkalte epistemologiske hindringer er ofte i virkeligheten didaktiske hindringer. De er blitt overført gjennom lærebøker og didaktiske tradisjoner. Det er derfor vanskelig å avgjøre om de læringshindringene vi ser hos elever er av didaktisk eller epistemologisk art. Mange mener at epistemologiske hindringer i virkeligheten er kulturelt betinget, noe en kan argumentere for på liknende vis. Kulturen kan innbefatte både historien, didaktiske tradisjoner og andre typer overføring.

Denne studien ønsker ikke å bevise at epistemologiske hindringer eksisterer, eller at det genetiske prinsipp fungerer i undervisningen i alle klasser. Likevel mener den å antyde at disse teoriene kan ha en praktiske nytteverdi.

Hva er en vinkel?

Vinkelen er et av de matematiske begrepene alle har truffet på. Alle har en formening om hva en vinkel er. Rent intuitivt kan det derfor virke som vinkelbegrepet er enkelt og uproblematisk. Hvis vi går litt nærmere inn på dette, finner vi fort ut at det ikke er slik. Det ser faktisk ikke ut til at det fins noen entydig og klar definisjon av hva en vinkel er (jf. Tropicke 1903, Jahr 1998 m.fl.). Johnsen 1996, s. 26 sier til og med at

...vinkler må betraktes som et begrepsmessig ytterst vanskelig emne – både i innledende og videregående undervisning.

Vi ønsker derfor å studere utviklingen av dette begrepet litt nærmere, både fordi dette er interessant i seg selv, og fordi det kan fungere som en praktisk anvendelse av den genetiske metode og teorien for epistemologiske hindringer. Vi skal se på sammenhengen mellom den historiske utviklingen av begrepet og elevers oppfatninger omkring det, og vil forsøke å finne

hindringer i den historiske utviklingen av begrepet, og se om disse kan danne grunnlag for oppfatninger som vi finner igjen hos elever.

Historiske og samtidige oppfatninger av vinkelbegrepet

Alle de historiske hindringene omkring vinkelbegrepet som jeg fant i min historiske studie kunne jeg også finne som læringshindringer hos elevene i klasseromsstudien. Både i historien og i tidligere lærebøker fant jeg ting som skulle tilsi en figurativ oppfatning av vinkelen. Dette ble illustrert klart hos noen av elevene, som selv helt mot slutten av undervisningsopplegget definerte vinkelen som "to linjer som møtes i ett punkt", omtrent slik Euklid definerte vinkelen. Elevene hadde også problemer med å oppfatte vinkelen som rotasjon, og de hadde problemer med store vinkler, igjen slik en kunne forvente ut fra den historiske studien.

Schotten 1893 tar opp mange ulike vinkeldefinisjoner. Han deler dem inn i tre grupper:

- Vinkelen som retningsendring
- Vinkelen som et stykke område
- Vinkelen som dreiningsstørrelse

Schotten understreker hvor tett sammenheng det er mellom vinkel og retning, og han sier at en definisjon som vil gi en virkelig forklaring av vinkelen må ta hensyn til sammenhengen mellom vinkel og dreining (Schotten 1893, s. 99f). Han nevner også at det er en vanlig måte å omgå definisjonen av vinkel på å si at "en vinkel oppstår når...". Dette er nettopp en slik definisjonsmåte som Jahr kommer fram til i konklusjonen på sin artikkel (Jahr 1998, s. 27).

Tropfke 1903, s. 21-29, slår sammen Schottens retningsendring og dreiningsstørrelse idet han sier at der til i dag ikke fins enighet om vinkelen. I hovedsak er det to forklaringsforsøk som dukker opp i ulike former:

1. Vinkelen som retningsforskjellen mellom to linjer (à la Euklid) som sikkert går tilbake til den platonske skole - med én modifikasjon i vinkel som en dreiningsstørrelse. Framhevingen av vinkel som dreiningsstørrelse skyldes i tysk kultur Moebius innflytelse fra 1840-årene.
2. Vinkel som et flatestykke som dannes av to stråler som går ut fra et punkt (Bertrand 1778: Un angle est une portion de superficie plane contenue entre deux lignes droites). Utbredt i Tyskland etter Baltzers "Die Elemente der Mathematik" fra 1870 (jf. Søggaard & Tambs Lyche 1954).

Noen vinkeldefinisjoner beskriver som nevnt vinkel som retningsforskjellen mellom to linjer. Slik var det Krainer oppsummerte Euklids vinkeldefinisjon, og en slik definisjon blir problematisk når en ser på vinkler som er 0° , 180° eller 360° . Vi kan da også stille spørsmål om hvordan retning er definert og til hva slags størrelse vinkelen egentlig tilhører. Andre definisjoner beskriver vinkelen som forhold mellom linjer, som dreiningsstørrelse og så videre.

Forskning på vinkelbegrepet

Som vi allerede har sett, er begrepet vinkel epistemologisk sett svært sammensatt, og derfor vil en tro at begrepet kan være vanskelig å forstå for mange elever. For å unngå å bare stole på intuisjonen her, skal jeg se litt nærmere på noe av den forskningen som er gjort

omkring vinkelbegrepet og elevers forståelse og utvikling av det. Den nyeste og mest omfattende er arbeidet til Mitchelmore & White 2000.

Mitchelmore & White 2000, s. 209, refererer til ulike måter å definere vinkelen på, både i lærebøker og historisk. Disse definisjonene deler de inn i tre klasser:

1. ...størrelsen til rotasjonen omkring et punkt mellom to linjer ...
2. ...et par av stråler med et felles endepunkt ...
3. ...det området som blir dannet når to halv-plan skjærer hverandre

Disse tre klassene forekommer ofte når en forsøker å definere vinkel. Andre foretrekker å klassifisere etter vinkelens fysiske egenskaper med understreking av forskjellen mellom dynamiske og statiske sider ved begrepet.

De hevder at elevene har en del problemer i forbindelse med vinkelbegrepet. Blant annet har mange problemer med å oppfatte vinkel som rotasjon, og i stedet oppfatter de vinkelen som en figur, som knekk i en rett linje eller liknende. Videre ser de på utviklingen fra de begrepene barna møter i hverdagen, via de elementære matematiske begrepene til de formelle matematiske begrepene. De beskriver barnas utvikling av vinkelbegrepet etter denne modellen, og de formulerer tre "stadier" i utviklingen:

- Hverdagsidéer - situerte vinkelbegrep: Barna erfarer vinkler som fysiske objekter: sakser, fliser, ruter, kryss, karusell, sklie, bakke, tak, blyantspiss, brukket pinne, kran osv. Vi voksne kan se at dette inneholder vinkelidéer, men disse idéene er situasjonsbetingete, og barn vil ikke nødvendigvis se på dem som analoge begreper. Barn vil for eksempel ikke se at takvinkel og brattheten på en bakke inneholder samme vinkelbegrep, men de vil kanskje se at et jordras og snø som sklir ned fra taket kan klassifiseres under samme begrep for bratthet. I følge Mitchelmore & White har barn mange slike situerte vinkelbegrep før de begynner på skolen.
- Elementærmatematiske idéer - kontekstualiserte vinkelbegrep: På skolen utvikler barna en evne til å gruppere visse situasjonsbetingede idéer i klasser. I artikkelen blir 14 fysiske vinkelkontekster presentert: stigning, snuvinkel, kryss, hjørner, vendinger, retninger, åpninger osv. Disse overlapper gradvis med alderen og blir sett på som fasetter av samme begrep. De formes imidlertid ved empirisk abstraksjon og registreres best som andreordens hverdagsidéer. Barn kan sjelden definere begrep som stigning, åpning eller retning, men de kan godt beskrive hva det er.
- Formalmatematiske idéer - abstrakte vinkelbegrep: Så i det siste stadiet begynner barna å abstrahere, og de kan dermed lage definisjoner. Det å kunne se analogier mellom ulike vinkelkontekster er begynnelsen til et matematisk vinkelbegrep som krever en mental aktivitet hos eleven. Slike klasser av analoge kontekster danner bakgrunn for abstrakte vinkelbegrep. Mitchelmore & White har funnet flere slike abstrakte begrep: som et punkt (hjørne, kryss), en enkelt skrålinje (slope, turn), to skrålinjer som møtes i et punkt (som oftest). Inklinasjonen mellom de to linjene representerer ulike ting i ulike situasjoner, for eksempel skarphet, bratthet og dreining. Det siste av disse begrepene blir kalt for standard vinkelbegrep i artikkelen, og det utvikler seg sakte over lang tid. For eksempel er det 30% av 6. klasse elever som ikke lett kan se noen vinkelanalogi mellom dreining og bøyning. (Mitchelmore & White 2000, s. 210-218)

Når barna har nådd det siste stadiet er de i stand til å sammenlikne ulike typer fysiske vinkelbegreper, og de er i ferd med å forme mer abstrakte begreper. Videre hevder de at konstruksjonen av et formelt matematisk begrep vil være et slags fjerde stadium, som de ikke tar videre opp i artikkelen (Mitchelmore & White 2000, s. 214ff.).

På bakgrunn av en avhandling av Gillian Close beskriver han så ulike oppfatninger som barn har i forhold til vinkelbegrepet. Mange elever hadde problemer med å gjenkjenne rette vinkler som var plassert rotert på arket, slik at vinkelbeina ikke var parallelle med kantene på arket. En av elevene mente at en rett vinkel alltid måtte "ligge riktig". Det var også mange elever som hadde problemer med å "se" vinkler mellom 180 og 360 grader. Close forklarer dette med at mange elever har et statisk vinkelbegrep, der de ser vinkel som "spisshet" på en knekt linje.

Som en av hovedoppgagelsene i avhandlingen, fant Close ut at når elevene brukte en "full" gradskive i stedet for en "halv" ble de ikke bare flinkere til å måle vinkler, men de utviklet også en bedre forståelse av vinkelbegrepet. Videre gikk hun også inn på elevenes oppfatning av vinkelens størrelse. Hun så på hvordan vinkelbeinas lengde, vinkelens plassering på arket og vinkelbuens størrelse innvirket på dette. Close så også på sammenhengen mellom elevenes forståelse av vinkelmåling og forståelsen av selve vinkelbegrepet (Krainer 1990, s. 45-48)

Jahr har sett nærmere på selve vinkelbegrepet. Han nevner at lærebøkene gir helt forskjellige beskrivelser av vinkelbegrepet. Han skisserer tre nivåer for å avklare vinkelbegrepet:

- Hva er en vinkel *egentlig*?
- Hva skal vi si til *studentene* at en vinkel er?
- Hva skal vi si til *skoleelevene* at en vinkel er?

Et viktig aspekt ved beskrivelser av vinkelbegrepet er i følge Jahr at de tillater at vinkelen kan måles. Han presenterer radianer og nygrader som måter å måle vinkler på, og han hevder at:

...måltallet for en vinkel ikke måler areal, men knyttes til vinkelen... (Jahr 1998a, s. 22).

Med henvisning til historiske oppfatninger, hevder han at vinkelen kan oppfattes innenfor tre kategorier, nemlig som kvantitet, kvalitet eller relasjon. Jahr går også gjennom flere andre vinkeldefinisjoner, og til slutt oppsummerer han med at:

I stedet for å si hva en vinkel er..., bør vi si at en vinkel dannes av to stråler med felles endepunkt. Så kan hver og en beholde sine egne forestillinger om vinkelens egentlige vesen (d.s., s. 27).

Studier av vinkelbegrepet i historien, fra egypterne og babylonerne, via Euklid, Proklos, Choquet og Hilbert viser ulike oppfatninger av en vinkel. Studier av eldre lærebøker i matematikk gjenspeiler også dette spekteret av oppfatninger. Når vi så studerer vinkelbegrepet slik vi møter det i hverdagen, finner vi andre oppfatninger. Sammenfattet kan dette oppsummeres i 8 ulike idéer knyttet til vinkelbegreper:

- Etymologi: fra et middelaldertysk ord som egentlig betyr hjørne.
- En geometrisk figur som dannes av to rette linjer fra samme punkt (bein og toppunkt).
- Oppstått ved at et bein dreies ut fra det andre med toppunktet som sentrum.
- Inklinasjonen til hverandre av to kurver i et plan, som skjærer hverandre og ikke ligger på ei rett linje.
- Dersom kurvene er rette linjer så kalles vinkelen rettlinjet (Euklid har et slikt skille).
- "Deflection/breaking" i.e. avvik/brudd mellom to linjer (Aristoteles).
- Éi brukket linje som danner en vinkel (Apollonios).
- Størrelsen på forskjellen mellom retningene mellom to linjer (Plutark).

- En størrelse, nemlig avstanden mellom de to linjene som danner den (Karpos) - i rotasjonsbetydning mer enn lineær betydning, i.e. lengden av en sirkelbue.

Den neste utfordringen blir nå å se hvordan denne kunnskapen kan brukes i skolen, for å legge opp til undervisningsopplegg som gjør at elevene kan utvikle riktige begreper. Brousseau presenterte et program for hvordan en skal bruke teorien om epistemologiske hindringer (Brousseau 1997, s. 99). Først skal en finne feil som stadig oppstår hos elever, så finne hindringer i matematikkens historie. Til slutt skal en sammenlikne historiske hindringer med læringshindringer og etablere deres epistemologiske karakter. I denne sammenhengen har vi ikke hatt mulighet til å undersøke feiltyper hos elever først, så vi støttet oss på tidligere forskning på dette punktet. For å få en praktisk tilnærming til teorien, utformet vi et undervisningsopplegg for en skoleklasse. I dette opplegget brukte vi det vi hadde funnet om epistemologiske hindringer til å utfordre elevenes oppfatninger omkring de aktuelle begrepsområdene, slik at de kunne bli klar over eventuelle læringshindringer og overkomme disse hindringene.

Vi finner mange uklarheter i den historiske utviklingen av vinkelbegrepet. Euklid kom med den første fullstendige utformingen av et teoretisk vinkelbegrep, og allerede her finner vi grunnlag for feiloppfatninger. Definisjonen åpner for en svært figurativ oppfatning av vinkelen, og vi får problemer med vinkler som er større enn 180° . Ut fra denne definisjonen er det også problematisk å få forståelse for de problematiske vinklene på 0° , 180° og 360° . Vi har også sett at mange definisjoner enten holder seg til en slags figurativ oppfatning av vinkelen som avstand mellom to rette linjer som skjærer hverandre, eller de velger å oppfatte vinkelen som rotasjon. Bare noen få definisjoner tar med begge aspektene. Mitchelmore & White 2000 peker på at mange elever har problemer med å oppfatte vinkel som rotasjon, og at elevene bare får en figurativ oppfatning av vinkelbegrepet. Det ser ut til at dagens norske læreplan forsøker å gjøre noe med dette. Allerede i 3. klasse skal elevene få erfaring med vinkel som dreining. Hele tiden legger en også vekt på måling av vinkler og elevene skal også få forståelse av vinkelens størrelse. Det er interessant å se hvordan lærebøkene tolker dette, eller eventuelt hvordan de unnlater å ta dette opp. Det virker som at læreplanen allerede hos lærebokforfatterne støter an mot en epistemologisk hindring.

Den euklidske definisjonen, og andre senere definisjoner beskriver vinkelen som flaten mellom to skjærende linjer. Altså blir vinkelen oppfattet som en figur, og når en da skal vurdere vinkelens størrelse er det en mulighet for at en kan ta i betraktning vinkelbeinas lengde. Slik blir altså en mulig hindring at vinkelbeinas lengde, og dermed også vinkelfigurens "størrelse" har noen innvirkning på vinkelens størrelse. Noen elever gjør feil her. Derfor er det også vanlig i diagnostiske tester å presentere stumpe vinkler med korte vinkelbein og spisse vinkler med lange vinkelbein, og spørre hvilken vinkel som er størst.

En måte å definere vinkelen på er å si at:

...den delen av planet som ligger mellom to rette linjer som skjærer hinannen ... kalles en vinkel (Schulstad 1931, s. 9).

Når vinkelen blir definert slik, glemmer en fort at to linjer som skjærer hverandre, eller to stråler som går ut fra samme punkt, faktisk danner mer enn én vinkel. Ut fra slike definisjoner kan elevene lett få den oppfatningen at to skjærende linjer bare danner én vinkel, og naturlig nok ser de da bare den minste vinkelen. Denne vinkelen er som regel spiss, eller i alle fall mindre enn 180° . Derfor ser vi i diagnostiske tester tegning av "en vinkel" (to stråler som går ut fra samme punkt), og spørsmål om hvor mange vinkler eleven ser i figuren. Mange elever ser da bare den minste vinkelen som ligger mellom de to linjene. Den oppfatningen elevene

har i denne sammenhengen er også nært knyttet til problemene med å oppfatte vinkler større enn 180° .

Vi kan altså avdekke flere mulige epistemologiske hindringer som er knyttet til den historiske utviklingen av vinkelbegrepet. Problemet med de fleste vinkeldefinisjonene vi har sett på, er at de gir et for unyansert bilde av vinkler. Ut fra disse definisjonene er det lett å få et snevert syn på vinkler, og en kan få problemer med å oppfatte vinkler som ikke passer direkte inn i definisjonen. Slik oppstår epistemologiske hindringer, som vi finner igjen i feil som elever gjør.

Vinkelbegrepet i media

Før vi går inn på selve klasseromsstudien, skal vi nå se litt på hvordan elever kan møte vinkelbegrepet i hverdagen. I den anledning har jeg foretatt et lite søk i vår lokalavis Fædrelandsvennen.

Sunket russisk marineubåt

Tidlig på høsten 2000 sank den russiske marineubåten "Kursk" . I forsøket på å komme inn i den havarerte ubåten prøvde redningsarbeiderne å koble en dykkerklokke til ubåten:

Samtidig vet ingen bedre enn mannskapet hvor vanskelig redningsarbeidet er ettersom "Kursk" har en betydelig slagside, kanskje så mye som 60 grader. Dykkerklokken må koble seg på "Kursk" i rett vinkel for at mannskapet skal kunne sluses opp og i frihet (Fædrelandsvennen, 16.08.00).

Her dukker vinkelen opp på to måter. Først beskrives skipets slagside som så stor som 60 grader. Deretter må dykkerklokken koples på i rett vinkel. Rett vinkel er som vi har nevnt tidligere et av de eldste geometriske begrepene, og de fleste har en klar oppfatning av hva dette betyr.

Havnelageret på Kokkenes

Tidlig i mai 2000 var det en sak om rivingen av havnelageret i Lillesand, der arkitekten foreslo å bygge et nytt IT-bygg:

Arkitekten sier han har gitt den nye bygningen en mer spenstig takvinkel og at takvinkelen på havnelageret er flatere enn det som er vanlig i Lillesand (Fædrelandsvennen, 05.05.00).

Takvinkler er også noe vi møter i mange lærebøker i matematikk på gruntrinnet, men "flate" vinkler er et nytt begrep. En flat takvinkel må være en vinkel som nærmer seg flaten, altså den rette linja, som jo er 180 grader.

Start borte mot Molde

Sportsjournalister bruker ofte vinkelbegrepet, og særlig de som skriver om fotball. Her er et utdrag fra artikkelen som kom etter at Start spilte uavgjort borte mot Molde i midten av august 2000:

Bare fire minutter etter ble det tyst som i graven på Molde stadion. Da ladet Kristian Sørli godfoten og fra 25 meters hold føk ballen som en prosjektil opp i vinkelen til en måpende Morten Bakke (Fædrelandsvennen, 14.08.00).

Her brukes "vinkelen" om de to øvre hjørnene av målet, som er to rette vinkler. Mange elever har også en intuitiv oppfatning av at en vinkel er på 90 grader. Det er på mange måter en

forståelig misoppfatning, for de møter jo ofte vinkler i form av rette vinkler i hverdagen.

USA mot Brasil i OL

I semifinalen i fotball for kvinner mellom USA og Brasil fikk USA sitt vinnermål i en omstridt situasjon. Amerikanske Tiffany Milbrett burde etter manges mening vært avblåst for angrep på keeper, men i stedet endte det i mål:

I den omstridte situasjonen gikk Milbrett i duell med Brasils målvakt Andreia på et innlegg fra venstre, og Hamm kunne slå ballen i tomt mål fra spiss vinkel. Brasilianerne protesterte fortvilt, men den sveitsiske dommeren godkjente målet (Fædrelandsvennen, 24.09.00).

Klasseromsstudien

Min studie fant sted i en 9. klasse i en norsk skole. Før jeg presenterer resultatene fra studien, skal vi se litt nærmere på måten vinkelbegrepet presenteres i lærebøkene denne klassen har hatt tidligere.

Lærebøker på småskoletrinnet

Når elevene kommer opp på ungdomstrinnet har de allerede hatt mye geometri, og de har lært mye om vinkelbegrepet. Denne klassen bruker Cappelens læreverk, så derfor har jeg tatt for meg Cappelens læreverk i matematikk på barnetrinnet, "Tusen Millioner", for å se på hvordan vinkelbegrepet er blitt presentert for elevene tidligere.

2. klasse er første året elevene har lærebok i matematikk, og da er det læring av tallene og telling som blir vektlagt. Elevene møter også noen geometriske figurer som skal telles og fargelegges, og de treffer på symmetri og mønstre av ulike figurer. Litt speiling får de også prøvd seg på. Allerede i 3. klasse treffer de på vinkelbegrepet eksplisitt. Vinkelen blir da presentert som hjørnet i en trekant eller firkant.

I 4. klasse presenteres vinkel på en veldig fin måte, som deler av en sirkel (Gjerdrum & Kristiansen 1999, s. 85). Da får også 360 grader en mening, siden det er hele sirkelen skravert. Elevene får blant annet øve seg i å lage vinkler på 90, 180 og 270 grader på sirkelskiva. Like etter presenteres en liknende sirkelskive, og vinkelen blir presentert som dreining. Her får elevene presentert vinkel som dreining og vinkelfelt samtidig. I øvingsoppgavene blir elevene spurt om tradisjonelt vanskelige vinkler, og ikke bare "standardvinkler", på mindre enn 90 grader.

Lærebøker på mellomtrinnet

På mellomtrinnet har læreverket nye forfattere, og vi merker en forskjell både i oppbyggingen av bøkene og i innhold. Det siste har selvsagt sammenheng med læreplanen også. I 5. klasse presenteres vinkel som dreining (Rasch-Halvorsen m.fl. 1997, s. 145). Elevene får litt mer praktisk rettede oppgaver, der de blant annet skal styre hverandre med kommandoer (eks. 90° til venstre, to skritt fram osv.). Dette blir nesten som en slags levende utgave av LOGO. De får også presentert begrepet rett vinkel. Når vinkel blir presentert som dreining her, er det dreiningen til en pil som følger omkretsen på en sirkel. Det er også litt typisk for bøkene på mellomtrinnet at det skapes et lite skille mellom dreining og vinkel. Disse to begrepene presenteres som regel hver for seg. Vinkler som har blitt til ved dreining tegnes ikke som "vanlige" vinkler, men som deler av en sirkelsektor, og når en tegner "vanlige" vinkler nevner en aldri dreining.

I 6. klasse kommer dette enda tydeligere fram. Først blir vinkel presentert på en klassisk figurativ måte. En fokuserer på måling av vinkler, vinkler i bygninger osv. (Rasch-Halvorsen m.fl. 1998, s. 114ff.) Litt senere kommer et separat kapittel om dreining. Her

bruker en også begrepet grader, men ordet vinkel blir ikke nevnt i dette kapitlet (Rasch-Halvorsen m.fl. 1998, s. 126ff.).

I 7. klasse er det også et eget kapittel om dreining (Rasch-Halvorsen 1999, s. 136ff.). Her blir det knyttet litt nærmere til vinkel, selv om en ikke direkte bruker ordet "vinkel". På dette klassetrinnet kommer det også inn et interessant kapittel helt til slutt. Her ser en på babylonernes 60-talls system og knytter dette til gradinndelingen av jordkloden (Rasch-Halvorsen m.fl. 2000, s. 177ff.). Dette blir en spennende og praktisk anvendelse av vinkelbegrepet.

Lærebøker på ungdomstrinnet

På ungdomstrinnet bruker denne skolen Cappelens læreverk: "Matematikk åtte-ni-ti". Læreplanen (i følge Martinsen m.fl. 1997b, s. 41) setter opp disse målene for 8.klasse:

- Etter å ha gjennomgått dette kapitlet, bør elevene ha kjennskap til sentrale begreper som symmetri, vinkel, normal, avstand og parallell
- kunne konstruere vinkler og gjennomføre enkle trekant- og firkantkonstruksjoner
- kjenne til og arbeide med trekanter med spesielle egenskaper
- ha fått noe øvelse i perspektivtegning

Dette er altså det en skal kunne forvente av elevene etter 8. klasse. Hvis vi går litt nærmere inn i lærerveiledningen og grunnboka, vil vi se hva som konkret ligger i disse målene. I et underkapittel om vinkler sier lærerveiledningen (Martinsen m.fl. 1997b, s. 43) at vinkler er en del av vår hverdag, og at vi finner dem blant annet som takvinkler og bratthet på bakker. En vanlig feil hos elever å oppfatte vinkler med lange vinkelbein som større enn vinkler med korte vinkelbein. De legger også vekt på bruken av gradskive, og at elevene skal bli kjent med begrepene rett vinkel, spiss vinkel og stump vinkel. Videre skal elevene lære om trekanter, vinkelsummen i trekanter og konstruksjon av ulike vinkler.

I læreboka (Martinsen m.fl. 1997a, s. 154ff.) blir vinkelen beskrevet ved begrepene vinkelbein og toppunkt. De går så rett over på måling av vinkler med (halvsirkelformet) gradskive. Vi legger merke til at bare noen få av eksemplene beskriver vinkler større enn 90 grader, og de kutter helt ut vinkler større enn 180 grader. De ser så litt på vinkler i bygninger, før de går over til vinkelsummen i en trekant. Det er nesten litt påfallende at de ikke nevner vinkler større enn 180 grader med ett eneste ord. De tar heller ikke opp vinkler som dreining.

I 9. klasse:

...får elevene virkelig boltre seg ved å lage figurer av ulik størrelse og form (Martinsen m.fl. 1998, s. 50).

Videre trekker de inn geometrien som historisk disiplin, og de nevner at elevene skal kjenne til noe av den historiske utviklingen. De nevner også at elevene skal se hvordan tradisjonell geometri har blitt brukt i kunst, håndverk og arkitektur. Når det gjelder vinkler spesielt, tar de nå for seg vinkelsummen i mangekanter.

Forventede læringshindringer

Vi skal nå se litt nærmere på hvilke begrepsoppfatninger vi kan forvente ut fra studien av de lærebøkene elevene har hatt.

Første gangen elevene møtte vinkler var i 3. klasse. Da ble vinkelen presentert som et hjørne i en geometrisk figur i læreboka "Tusen Millioner". Det vil ikke være utenkelig at noen av elevene har blitt sittende igjen med denne oppfatningen, siden de første erfaringene ofte er de som huskes best.

I 4. klasse presenterte læreboka vinkler som sektorer av en sirkel. Dette skulle gjøre det lettere å oppfatte vinkler større enn 180 grader, men kanskje vi kan finne igjen en oppfatning av at vinkler bare kan være 360 grader eller mindre. Det vil muligens være en del elever som har problemer med å se for seg vinkler som er større enn dette, siden dette er noe de sjelden har møtt.

På mellomtrinnet treffer elevene på både vinkel- og dreiebegrepet, men det er ikke alltid like lett å forholde seg til disse. Ofte blir begrepene presentert hver for seg, som i læreboka for 6. klasse. Det vil derfor ikke være utenkelig at noen elever har problemer med dette skillet også.

I 8. klasse var det måling av vinkler som sto i fokus, og elevene møtte begrepene "vinkelbein" og "toppunkt". Her tok en ikke opp vinkler større enn 180 grader, og en nevnte ikke vinkel som dreining. Disse punktene kan nok kanskje være problematiske.

Undervisningsopplegg

Da jeg utarbeidet et undervisningsopplegg for denne 9. klassen, tok jeg utgangspunkt i det jeg fant ut om epistemologiske hindringer omkring vinkelbegrepet. Jeg ville også bruke kunst som tar i bruk tradisjonell geometri, for å utfordre elevenes oppfatninger av de geometriske begrepene. I noen eksempler ville jeg også bruke mangekanter og diskutere vinklene vi finner i dem.

1. tema: Kremmerhusoppgaven

Gruppene får utdelt ark, saks og lim. De har passer og linjal på hver gruppe. Læreren viser hvordan en kan lage et enkelt kremmerhus. Hvordan kan vi lage et finere kremmerhus? (Elevene skal komme fram til at en kan klippe arket i sirkel/sirkelsektor.) Hvordan kan vi forandre størrelsen på kremmerhusene? Hvordan kan vi lage kremmerhus som inneholder mest mulig snop? Deler ut sirkelsektorer av ulike størrelse. Hvorfor blir kremmerhusene forskjellige?

Når gruppene blir ferdige med dette, får de utdelt ark med oppgaver om vinkler. Oppgavene skal også diskuteres i gruppene.

2. tema: Rotasjon

Elevene får se et bilde av en svingete elv. Beskriv hvordan skipperen skal navigere.

Hver gruppe får utdelt et orienteringskart, og en "fortelling". Fortellingen beskriver hvordan en o-løper har løpt, men den mangler alle enheter. Elevenes oppgave blir å fylle inn de tomme rommene og fullføre fortellingen.

Oppgaver med vinkel som rotasjon (kulestøter, diskos- og sleggekaster oppgavene).

3. tema: Vinkler i hverdag og kunst

Elevene finner flest mulig vinkler i klasserommet. Legg fram forslagene for klassen. (Diskuter om alle disse er vinkler. Finner vi flere vinkler?)

Eleven får kopier av ulike Escher-bilder og finner vinkler i disse. Hvilken gruppe kan finne flest vinkler? Legger fram resultatet for klassen. Sammenlikner resultatene. Fins flere vinkler i bildene? Læreren provoserer elevenes vinkelbegrep om nødvendig.

Gruppene forsøker å lage sine egne definisjoner av en vinkel.

Resultater fra studien

Nå skal vi ta opp noen erfaringer og resultater fra klasseromsstudien. Jeg vil her forsøke å skille ut de ulike typene læringshindringer, og dette skillet lager jeg på bakgrunn av

de historiske hindringene jeg presenterte i kapittel 6.7. Dette gjør jeg for å forsøke å finne en sammenheng mellom de historiske hindringene og læringshindringer hos dagens elever.

Euklidsk vinkeldefinisjon

Euklid definerte vinkel som inklinasjonen (hellingen) mellom to linjer. En slik definisjon kan skape hindringer for oppfatningen av store vinkler, særlig de som var større enn 180 grader. Vinkler over 360 grader blir helt meningsløse i et slikt perspektiv.

Fra 1. time i gruppe 3

61. Lærer: Ja, den har mi målt. Men, her er et vinkelbein her og et vinkelbein her. Går der'kje egentlig ein vinkel her?
62. Sara: Her???
63. Lærer: Mhm. ...En veldig stor vinkel...
64. Sara: Det har'ke du lært oss engang!
65. Maria: Heile greia?
66. Sara: Ja, så..., den der!
67. Lærer: Er det ein vinkel?
68. Markus: Nei.
69. Maria: Ja.
70. Sara: Det er vel en vinkel...
71. Lærer: Åffer er det en vinkel?
72. Sara: Men åssen vei skal du måle da?
73. Maria: Det er en selvfølge...
74. Sara: Ja, det er en selvfølge. Det er en bit av en runding og så en...
75. Lærer: Ja...
76. Maria: Vink.... Han skal jo egentlig gå helt rundt... Nei. Han skal jo egentlig det (til seg selv)...

I situasjonen over måler elevene vinkler og læreren forsøker å utfordre dem på om det ikke er flere vinkler på tegningene, nemlig de utvendige vinklene. Vi ser at elevene gjør det som er ganske typisk i en slik situasjon. Når de får presentert et bilde av to linjer som skjærer hverandre og får i oppgave å måle vinkelen mellom dem, så måler de fleste automatisk den minste vinkelen. Sara har tydelig ikke tenkt tanken på å måle den ytre vinkelen en gang, og unnskylder seg med at læreren ikke har lært dem dette. Maria og Markus er uenige i om den utvendige vinkelen i det hele tatt er en vinkel. Det er tydelig at elevene er litt usikre når de blir stilt overfor litt ukonvensjonelle vinkeloppfatninger.

Fra 2. time i gruppe 3

Her skal vi se på en ny situasjon fra den samme gruppa som over, men fra den neste timen. Elevene har nå fått en oppgave om rotasjonen til en diskoskaster, en kulestøter og en sleggekaster. De skal finne ut hvor mange grader de roterer.

13. Sara: Kulestøt ... kulestøter'n
14. (mumling. elevene prater litt i munnen på hverandre.)
15. Sara: Ikke sant, en halv gang er 180. En og en halv gang er 360...
16. Rut: Pluss 180.
17. Sara: Firehundreog...
18. (mumling, en av elevene regner ut på kalkulatoren.)
19. Maria: Men, en hel. Kan en hel bli mer enn 360?
20. (mumling)
21. Maria: En hel kan ikke bli mer enn 360!
22. Rut: Nei, men...
23. Maria: Jammen, det æ mener ... når det er en av de...
24. Sara: Det er så mange grader.

25. Rut: Det er en og en halv!
 26. Maria: Ja, en og en... Ja.
 27. Sara: Ja, og så fikk du 540 grader.
 28. Rut: Ok, så er det 540 grader.
 29. Sara: En og en halv gang.
 30. Rut: Ja, skriv bare den!

Her ser vi at Sara og Rut er i full gang med å regne ut en og en halv ganger 360 grader. Når svaret blir større enn 360, ser vi at Maria reagerer. Hun har en helt klar oppfatning av at en vinkel aldri kan bli større enn 360 grader, men hun lar seg overbevise av de to andre, og de fortsetter å regne ut videre på samme måten.

Som nevnt la læreboka i 4. klasse opp til en oppfatning av at vinkler er en del av en sirkel, og at elevene derfor kunne tro at der ikke fantes vinkler større enn 360 grader. Maria har helt tydelig en slik oppfatning, og vi ser at denne sitter ganske dypt. I løpet av de tre timene studien varte fikk hun utfordret dette synet flere ganger, men det virket som det stadig kom tilbake. Teorien om epistemologiske hindringer sier at vi ikke må stemple elevenes oppfatning som "feil". Elevene bygger hele tiden opp kunnskapsmønstre, og denne kunnskapen fungerer ofte, selv om den kanskje ikke er helt korrekt. Her så vi at Maria hadde bygd opp et kunnskapsmønster om vinkler som fungerte helt fint for alle vinkler opp til 360 grader. Den oppfatningen skaper som regel ikke problemer i skolen, siden vinklene ofte er innenfor disse grensene. Av og til møter eleven en oppgave eller et problem som utfordrer denne oppfatningen, og da representerer kunnskapen en hindring, slik vi så her. Det ville derfor vært veldig interessant å følge opp denne eleven videre, for å forsøke å utfordre forståelsen av vinkelbegrepet videre, slik at hun kanskje kunne utviklet denne forståelsen.

Fra 3. time i gruppe 4

I den siste timen fikk elevene i oppgave å definere en vinkel. I den anledning fikk vi et godt eksempel på en euklidisk oppfatning hos en av de andre gruppene:

36. Lærer: Nå får hver gruppe utlevert det siste arket her sånn. Då skal dere skrive hvordan dere definerer ein vinkel.. Så har æ skrevet: "vi definerer en vinkel" og så kolon. Så skriver dere det svaret dere mener er riktig på det.
 37. Jakob: En vinkel er to streker som møtes i et punkt. Ferdig!
 38. Eva: Ja, skriv det!
 39. Jakob: ...to streker eller linjer møtest i et punkt. (mens den andre skriver)
 40. David: Vi definerer en vinkel slik: To linjer som møtes i et punkt.
 41. Jakob: To linjer som møtes i ett punkt!

Vi ser her at Jakob har innarbeidet en klar oppfatning av vinkel som to linjer som møtes i et punkt. Det er interessant å se at eleven har en så bestemt oppfatning av vinkelen, selv om klassen på dette tidspunktet hadde jobbet med vinkler som rotasjon, dreining og liknende i tre timer. Dette var den siste oppgaven elevene fikk i studien, og den viser hvor dypt enkelte elevers begrepsoppfatninger sitter.

Schulstads vinkeldefinisjon

Schulstad 1931, s. 9, definerte vinkel som den delen av planet som ligger mellom to rette linjer som skjærer hverandre.

Når en ser på en "tradisjonell" vinkel, vil en ut fra en slik definisjon automatisk se på den minste vinkelen, den som "ligger mellom to rette linjer". Vi kunne derfor ut fra denne historiske hindringen forvente at elever vil gjøre det samme, og at de vil ha problemer med å oppfatte den utvendige vinkelen som en vinkel.

Fra 1. time i gruppe 3

Vi skal nå se på en litt lengre diskusjon i ei gruppe der elevene har litt problemer med akkurat dette. Elevene holder på med å måle vinkler fra oppgavearket.

93. Sara: Det er ikke den vinkelen vi snakker om! (til Rut) Det er en annen vinkel!
94. Lærer: ...ja... Mi kan godt ta den vinkelen her, som du har.
95. Rut: Det er 90.
96. Lærer: Ja, det ser fint ut. Heilt topp! Men, er der ein vinkel her au?
97. Sara: Den der er det vi snakka om!
98. Lærer: Er det ein vinkel?
99. Rut: Derfra til der?
100. Lærer: Ja.
101. Maria: Ja!
102. Rut: Ja.
103. Sara: Hvor? Derfra til der.
104. Lærer: Ja, åffer er det en vinkel?
105. Rut: Men det går'ke an å måle han!
106. Lærer: ...det går'kje an å måle han...
107. Maria: Det gjør jo det!
108. Sara: (prøver å forklare) Det er derfra til der! Det er møtepunktet for de to vinkelbeina, hvis det går sånn strek der!
109. Lærer: Skal mi se. Der er et vinkelbein der, og et vinkelbein som går sånn.
110. Rut: Hæ?
111. Lærer: Hvis mi vet at den er 90 grader, klarer mi å finne ut å stor den vinkelen då er?
112. Maria: Ja, det er 180 til sammen. Nei, nei, nei.
113. Lærer: Ja.
114. Maria: Da blir det 100... Nei, 90. Nei..., jo, 90.
115. Rut: Det her kan'ke æ huske at vi har hatt!
116. Lærer: Men, den er vel kanskje større enn ... den.
117. Sara: Det er den vinkelen som går... Æ skjønner ikke helt. Det er den vinkelen som ville vært her ute?
118. Lærer: Ja! Den som er her ute, ja. Akkurat.
119. Rut: Den er sånn. Akkurat sånn skrått....
120. (prater litt i munnen på hverandre)
121. Maria: Han er 180!
122. Sara: Så en vinkel kan være sånn liksom...
123. Lærer: Ja, stemmer.
124. Rut: (sukker litt) Da skal vi se... Da blir han akkurat... eh, hvis du tar den...
125. Sara: Ja! Du tar 180 minus den vinkelen...
126. Maria: (til Sara) Det blir 90.

Læreren forsøker i 96. og 98. å få elevene til å se på den utvendige vinkelen, siden de bare har målt de minste vinklene til nå. Blant annet Sara ser ut til å ha litt problemer med å se denne vinkelen, mens Rut hevder at det ikke går an å måle den. Likevel ser det ut til at de har laget seg en algoritme for å regne ut slike vinkler. Vi ser at Sara husker litt feil og mener at en må ta 180 og trekke fra den minste vinkelen, men litt senere i timen finner de ut at de må ta 360 og trekke fra den lille vinkelen.

I denne gruppa ser det ut til at elevene automatisk ser på den minste vinkelen, slik de fleste elever gjør, mens den ytre vinkelen bare blir noe en kan regne ut i tillegg, hvis en får spørsmål om det. Vi ser også at de har litt problemer med å måle de store vinklene, siden de bare har "halv" gradskive. Dette problemet skal vi komme tilbake til senere.

Litt senere i den samme timen, i den samme gruppa, finner vi følgende sekvens:

167. Lærer: Kan du... Kan du merke de vinklene som er 90 grader?
168. Rut: Sånn, nå er vi ferdige med dette arket!
169. Sara: Det blir f... Men skal vi...

170. Maria: Bare gjør det!
 171. Sara: Men, skal vi ta de på... sånn som vi gjorde på den? Liksom den som ville vært her ute og? ...
 Nei, det trenger vi jo ikke gjør, for det er jo bare...
 172. Lærer: Hvis du ser her... Her har du skrevet at den er 90. Er det den du meiner som er 90 da, eller?
 173. Sara: Den!
 174. Lærer: Men, den vinkelen der da? Den som er rundt hjørnet liksom...
 175. Sara: Den..., skal vi måle den og?

Her ber læreren dem merke hvilke vinkler de har målt, og det viser seg at elevene har målt de minste vinklene. Når læreren spør om den ytre vinkelen (174.), ser vi at Sara stadig er usikker på om de skal måle denne. Det kan altså virke som at særlig Sara på denne gruppa har en oppfatning av at den ytre, eller omkringliggende vinkelen ikke er like mye vinkel som den minste, indre vinkelen. Vi har sett at læreboka for 8. klasse ikke tar for seg vinkler større enn 180 grader, og det er ofte slik at når lærebøkene ber elevene måle vinkler, er det ofte "standardvinkler" som er mindre enn 90 grader, eller i alle fall mindre enn 180. Sara har tydeligvis en slik oppfatning, og vi ser at han får problemer når han støter på vinkler som går utover dette.

Vinkel som rotasjon

Vi har nå sett ulike eksempler på et figurativt vinkelbegrep hos elevene. Ofte møter elevene vinkler som statiske objekter i planet. I studien fikk eleven oppgaver som skulle utfordre dette vinkelbegrepet. Vi skal nå se noen eksempler på dette.

Fra 2. time i gruppe 3

Denne gruppa jobbet en del med oppgavene om vinkel som rotasjon, og her skal vi se et eksempel fra oppgaven der elevene skal navigere en båt nedover ei svingete elv:

254. Maria: Jammen, vi må finne ut hvordan vi måler vinklanel!
 255. Sara: Ok. Skal vi se.
 256. (snakker i munnen på hverandre)
 257. Maria: For hver gang det snur sånn, så må vi måle.
 258. (mumling)
 259. Sara: Han kjører rett fram hit.
 260. Maria: Ja, æ vet det! Vi tegner alle stedene vi må bruke vinkler ... vi må tegne vinkler.

Her får elevene litt problemer med å måle vinklene, fordi det ikke er tegnet opp hvilke vinkler de skal måle. Vi så at noen av gruppene begynte med å måle vinklene langs elvebredden, og bare her er det jo et spørsmål om en skal måle vinklene i innersvingen eller yttersvingen. Maria mener at de må måle hver gang "det snur", og hun finner ut at de må tegne alle stedene de må bruke vinkler. Gruppa jobber videre, og litt senere får vi denne diskusjonen:

307. Sara: Jo, men æ vet ikke om du skal bruke den linja vi har tegnt der sånn, for å finne ut hvor svingen er...
 308. Maria: Nei, nei, nei! Dere må jo begynne helt fra begynnelsen!
 309. Rut: Her er det jo 90 grader, det ser jo alle!
 310. Sara: Er det den du skal måle? ... Jammen, Rut, er det den du skal måle?
 311. Rut: Æ har'ke peiling!
 312. Sara: Rut, nei. Men vent da! Slow down! Ta det i vår fart!!! Ok. Han skal jo ikke dreie 90 grader her, for det ville jo vært ned hit!
 313. (mumling)
 314. Sara: Ikke sant? Det er jo ikke 90 grader!
 315. Rut: Det er den vinkelen du skal måle!
 316. Sara: Ja, den veien han skal kjøre ... og det blir her.
 317. Maria: Ja, det var jo det æ sa, du må begynne med den første!
 318. Sara: Blir 55.

319. (mumling)

320. Sara: Og så må du ta den fra den til der...

321. Maria: Vi gidder ikke skrive at det må være til venstre 55 grader... Vi skriver bare sånn...

Elevene har begynt å tegne ei linje der båten kjører, og Rut begynner å måle. Da reagerer Sara, og hevder at hun måler feil vinkel. Denne eleven begynner helt klart å forstå dreining av vinkel, mens de to andre elevene i diskusjonen, og da særlig Rut, tydeligvis ikke er helt sikker. Nettopp dette med vinkel som dreining i en slik oppgave ble tydeligvis problematisk for elevene. Denne gruppa var tross alt den som fungerte best i klassen, og til og med her hadde de problemer. Ting tyder på at elevene ikke er vant med å oppfatte vinkler på denne måten. De forsøker som regel først å måle elvebredden eller andre statiske vinkler som de kan se.

Fra 3. time i gruppe 3

I siste time fikk elevene i oppgave å definere en vinkel, en oppgave som mange hadde problemer med, og som tydeligvis var ganske annerledes enn de oppgavene de var vant med å jobbe med.

271. Lærer: (til alle) Nå får hver gruppe utlevert det siste arket her sånn. Og då skal dikkon

skrive åssen dikkon definerer en vinkel. Så har æ skrevet "vi definerer en vinkel slik:". Så skriver dikkon det svaret som dikkon meiner er riktig.

272. Maria: Hva mener du med det? Åssen vi...

273. Lærer: Åssen du definerer..., åssen du forklarer ein vinkel.

274. Maria: Forklare at en hel vinkel er 360, eller må du...

275. Lærer: Forklar å du meiner med en vinkel. Alle vinkler trenger ikkje være... Ja, men åssen definerer du ein vinkel? Ett eller annet felles som gjør at de er en vinkel, ikkje sant?

276. Rut: To vinkelbein og... Hva heter det siste?

277. Sara: Jammen, hva heter den der, ikke sant... Det går sånn... Æ hadde jo tegnet her, men...

278. (mumling)

279. Sara: Hva heter det punktet?

280. Rut: Åååh! Æ husker'ke!

281. Lærer: (kommer og leser det de har skrevet) En vinkel har to vinkelbein og et...

282. Rut: Vi husker'ke hva det heter...

Den første reaksjonen er at elevene, anført ved Maria, ikke skjønner hva oppgaven går ut på. Maria er veldig opptatt av at "en hel vinkel" er 360 grader, som vi har sett tidligere, og hun tenker intuitivt på dette. Etter at læreren har gjort et par forsøk på å forklare oppgaven, begynner elevene å snakke om vinkelbein og toppunkt, som de i starten ikke husker navnet på. I stedet for å bruke erfaringene fra det de har jobbet med, trekker de fram de "gamle" begrepene de tydeligvis har hatt om vinkler.

Læreren må gi ganske mange hint for å få elevene til å trekke inn dreining i definisjonen sin, men til slutt er elevene med på denne tankegangen også, de ender opp med en endelig definisjon. Maria holder stadig fast på at vinkelen bare kan bli 360 grader, men hun legger til at en likevel kan gå flere ganger rundt, slik at den kan bli større. Gruppa har også funnet ut at vinkelen har et fast punkt, og at den dreier. Nå har elevene blitt så fortrolige med vinkelen oppfattet som dreining at de helt har glemt vinkelbeina, og de har gått bort fra de klassiske definisjonene. Det ville vært veldig interessant å se om elevene virkelig bruker denne definisjonen når de møter på nye oppgaver med vinkler. Uansett har denne gruppa fått erfaring i å diskutere matematiske begreper, selv om de kanskje ville falle tilbake til de definisjonene læreren har gitt dem når de kommer til prøvene.

Diskusjon

Som jeg har vist i eksemplene ovenfor, var det en del elever som viste læringshindringer som tilsvarte de historiske hindringene jeg avdekket. Vi fant igjen euklidiske definisjoner av vinkelen, problemer med å oppfatte vinkler større enn 180 grader, og særlig vinkler større enn 360 grader, og vi så at noen elever hadde problemer med å oppfatte vinkel som rotasjon. Mange lærere kjenner nok også igjen nettopp slike typer problemer fra sin egen undervisning. Dette kan nok ha mange årsaker, og en av årsakene er nok at kulturen, blant annet slik vi oppfatter den gjennom media og trykte kilder, bruker vinkelbegrepet på mange ulike måter. Ofte ser vi en statisk oppfatning av vinkelen som hjørne i en eller annen geometrisk figur.

Vi har nå fulgt Brousseaus modell, om enn i en litt gal rekkefølge, i det vi har funnet hindringer i historien, funnet feil hos eleven som stadig gjentar seg og vi har sammenliknet disse læringshindringene med de historiske hindringene. Brousseau skrev at en til slutt måtte bestemme hindringenes epistemologiske karakter. Han går ikke noe særlig inn på hva han mener med akkurat dette, men jeg antar at han legger opp til en diskusjon omkring hvorvidt disse hindringene virkelig er av epistemologisk, didaktisk eller annen karakter.

Rogers 2000 hevder at epistemologiske hindringer ikke har sin årsak i begrepenes natur og historiske utvikling, men at de for eksempel kan ha didaktiske årsaker. Dette kan være måten begrepene har blitt presentert på i lærebøker, eller den måten lærere tradisjonelt har undervist begrepene. Vi har sett at de historiske hindringene også kunne være å vente ut fra studiet av de lærebøkene elevene har hatt på tidligere klassesertrinn, så det vil være galt å påstå at hindringene utelukkende har en epistemologisk karakter. Hvis vi bruker Rogers måte å definere epistemologiske hindringer, kan vi si at vi har funnet en del epistemologiske hindringer som har didaktiske eller kanskje til og med kulturelle kilder. Rogers hevder at det er helt feil å snakke om hindringer som har bakgrunn i historien til begrepene og deres utvikling. En kan også se på dette på en litt annen måte, der en sier at begrepenes historie er uløselig knyttet til måten de har blitt presentert på i historien gjennom lærebøker av ulike slag, og gjennom måten de har blitt forklart på fra læremester til elev. Dermed kan en kanskje hevde at begrepenes historie også faller sammen med deres didaktiske historie. Fra en slik synsvinkel kan vi være enige med både Rogers og Brousseau.

Om en kaller det for epistemologiske hindringer, didaktiske hindringer, eller hva en nå måtte kalle det, er kanskje ikke så viktig. Poenget må være at en finner oppfatninger hos elevene som i bestemte situasjoner slår ut i feilsvar. Disse oppfatningene kan ha en didaktisk eller historisk bakgrunn som vi kan finne. På den måten kan vi ved å studere begrepshistorien, tidligere lærebøker og liknende, forutse slike feiloppfatninger. Dermed kan vi også angripe disse oppfatningene på en konstruktiv måte, i stedet for bare å stemple dem som feil.

Hvilken gradskive elevene bruker kan også generere en hindring. Det så ut som at noen elever hadde problemer med å måle vinkler som var større enn 180 grader, og det er jo ganske naturlig når de bare har "halve" gradskiver. Dersom de hadde hatt en full gradskive, ville det nok vært færre problemer med vinkler opp til 360 grader. Samtidig ville vi kanskje stadig fått problemer med vinkler som går utover dette.

Referanser

Brousseau, Guy (1997) *Theory of Didactical Situations in Mathematics*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers

Gjerdrum, Anne-Lise & Kristiansen, Elisabeth W. (1999) *Tusen millioner 4B*, Oslo: J.W. Cappelen

- Jahr, Einar (1998a) Hva er en vinkel?, *Tangenten* 1, p. 21-28
- Jahr, Einar (1998b) Piaget og Vygotskij, in Tufteland, Geir (red.): *Matematikk 1 - For allmennlærerutdanningen, Bind 1*, Oslo: Universitetsforlaget
- Johnsen, Veslemøy (1996) Hva er en vinkel?, *Nordisk Matematikdidaktikk* 4, nr. 1, p. 25-49
- Krainer, Konrad (1990) *Lebendige Geometrie - Überlegungen zu einem integrativen Verständnis von Geometrieunterricht anhand des Winkelbegriffes*, Frankfurt am Main: Verlag Peter Lang GmbH
- Martinsen, Roy m.fl. (1997a) *Matematikk åtte - ni - ti 8: Grunnbok*, Oslo: J.W. Cappelens Forlag
- Martinsen, Roy m.fl. (1997b) *Matematikk åtte - ni - ti 8: Lærerveiledning*, Oslo: J.W. Cappelens Forlag
- Martinsen, Roy m.fl. (1998) *Matematikk åtte - ni - ti 9: Lærerveiledning*, Oslo: J.W. Cappelens Forlag
- Mitchelmore, Michael C. & White, Paul (2000) Development of Angle Concepts by Progressive Abstraction and Generalisation, *Educational Studies in Mathematics* 41, p.209-38
- Mosvold, Reidar (2000) "*Genetisk*" - begrepsforvirring eller begrepsavklaring, preprint
- Mosvold, Reidar (2001) *Det genetiske prinsipp i matematikdidaktikk*, Høgskolen i Agder (hovedfagsoppgave)
- Rasch-Halvorsen, Anne m.fl. (1997) *Tusen millioner 5A*, Oslo: J.W. Cappelen
- Rasch-Halvorsen, Anne m.fl. (1998) *Tusen millioner 6A*, Oslo: J.W. Cappelen
- Rasch-Halvorsen, Anne m.fl. (1999) *Tusen millioner 7A*, Oslo: J.W. Cappelen
- Rasch-Halvorsen, Anne m.fl.(2000) *Tusen millioner 7B*, Oslo: J.W. Cappelen
- Rogers, Leo (2000) The biogenetic law and its influence on theories of learning mathematics, in Rowland, Tim and Morgan, Candia (eds.) *Research in Mathematics Education volume 2*, London: British Society for Research into Learning Mathematics
- Schotten, Heinrich (1890) *Inhalt und Methode des Planimetrischen Unterrichts*, Leipzig: Druck und Verlag von G.G. Teubner
- Schulstad, Olav (1931) *Lærebok i regning og rumlære for lærerskolen - II Plangeometri*, Oslo: J. W. Cappelens Forlag
- Søgaard, Anders & Tambs Lyche, R. (1954) *Matematikk for den høgre skulen I*, Oslo: Gyldendal Norsk Forlag
- Tropfke, Johannes (1903) *Geschichte der Elementar-Mathematik - In systematischer Darstellung*, Leipzig: Verlag von Veit & Comp.