Universitetet i Sørøst-Norge
Fakultet for teknologi og maritime fag/institutt for realfag og industrisystemer
–

Mastergradsavhandling
Studieprogram: LR-MFY5100
Vår 2023

Ann-Victorie Kopmann

Glatte mangfoldigheter av dimensjon 2

Arvid Siqveland

Sammendrag

Besvarelsen er en faglig besvarelse i matematikk, nærmere bestemt inn på topologi og glatte mangfoldigheter. Oppgaven skal ta for seg teoretisk beskrivelse av disse emnene, med eksempeloppgaver underveis som er med på å belyse emnene og sette litt mer forståelse på det. Besvarelsens problemstilling vil være ***"Hvor forberedt vil en elev, som har fullført videregående teoretisk matematikk, være på universitetsmatematikk?"*** sett i lys av oppgaver som skal oppsummere en elevs kunnskap ved endt skoleløp på videregående skole sammenlignet med teori som man vil komme borti på universitetet.

Besvarelsen inneholder også en liten didaktisk del. Med andre ord starter oppgaven med beskrivelse av enkelte matematikkoppgaver i sammenheng med LK20, rettet mot eksamen på videregående skole. Disse oppgavene belyser hva en nåværende elev skal gå gjennom i fagene R1 og R2 på videregående skole, og skal prøve å sette blikk på hva elever sitter igjen med av kunnskap etter videregående skole.

Målet med besvarelsen er at leseren skal sitte igjen med et innblikk på hvorvidt en elev på videregående skole blir forberedt på universitetsmatematikk ved kunnskap og forståelse, og om oppgavene elevene får på videregående og eksamen er typer oppgaver som fremmer lærelyst og nysgjerrighet.
Forhåpentligvis vil leseren være enig i at spesielt matematikk R2 fremmer mer algoritme og pugging, og har mindre fokus på forståelse og problemløsning, noe som er viktige faktorer som kreves for å kunne ta universitetsmatematikk, og anvende dette videre i hverdagen. I tillegg vil kanskje leseren få noen tanker om at LK20 er en god reform i skolen, som tester mer anvendelse av teori i ulike situasjoner man møter på i hverdagen, framfor kun matematikkregning og oppgaveløsning uten noe hensikt bak.

Innholdsfortegnelse

Kapittel 1

Innledning - LK20 og eksamensoppgaver

1.1 LK20 - Kunnskapsløftet 2020

Læreplanmålene fra utdanningsdirektoratet skal gjenspeile hva en elev skal gå ut med av kunnskap etter hvert klassetrinn i hvert fag. Før LK20, som er dagens aktuelle, hadde vi kunnskapsløftet fra 2006. Denne har for mange fungert bra når det kommer til læring. I matematikk har det innebært mange spesifikke kunnskapsmål som går ut på å skulle kunne veldig spesifikke emner og begreper innad i matematikken. **(utdanningsdirektoratet, 2020)**[1]. Disse matematiske begrepene som inngår i læreplanen kan for elevene skape en såkalt *backwash effekt*, der elevene leser kun på det som kommer på en vurdering, og at læreren underviser kun det som kommer på en vurdering i ønske om at alle elever består **(wiley online library, 2020)**[2]. Det fører også til en god del pugging både rett før en vurdering, på bakgrunn av at man blir introdusert, spesielt i matematikk, en rekke formler og regler man har blitt fortalt at man må huske. Pugging alene er ikke med på å bidra til forståelse**(utdanningsnytt, 2019)**[3], og det må jobbes videre med, da gjerne over tid.

Siden 2006 har det kommet en ny læreplan, som har vært gjeldende siden 2020. LK20 fokuserer på en dybdelæring som foregår på bakgrunn av forståelse og utforskning. Et utdrag av læreplaner fra LK20 vil ha mye mindre spesifikke begreper som er byttet ut med begreper som går igjen. For eksempel utforsking, argumentasjon, analyse og redegjørelse **(utdanningsdirektoratet, 2020)**[1]. I sammenheng med en skolehverdag er begrepene verb som assosieres som tidskrevende og noe man må gjøre over lengre periode for å fremme forståelse og utforsking. Et fokus på forståelse gjør det viktig at man som lærer også setter teori i lys av situasjoner man møter på i hverdagen slik at man får et forhold til hva man skal lære. En slik praksis over tid vil forhåpentligvis gi elever som ser på matematikk som noe nyttig og meningsfullt, og en læring i dybden som gjør at de klarer å visualisere og utlede matematiske formler. Eksamen burde være slik som denne undervisningsformen og framgangsmåten da denne skal gjenspeile hva en elev lærer i løpet av skolegangen.

1.2 Eksempel eksamen - R1 og R2

I matematikken finnes denne læreplanen: **utdanningsdirektoratet, 2020**[4] som skal være med på å fremme *forståelse, argumentasjon og kreativitet.* Disse tre faktorene er viktige for å kunne ta videre fag på universitet som bygger på matematikk. På grunn av litt andre diverse årsaker så har det enda ikke blitt satt i gang en eksamen i fagene matematikk R1 og R2, så det er heller ikke mange oppgaver ute som belager seg på disse. Her er noen oppgaver fra eksempeleksamenssettet som skal belyse teorien som kommer senere i avhandlingen.

1.2.1 R1 - eksempeloppgaver

Fra R1 eksempeloppgave:

Oppgave 3

```
def f(x):
    return x/(1+x**2)

h = 0.0001
x = 0
while (f(x+h)-f(x))/h > 0:
    x = x + 0.01
print("x=", x)
```

En elev har skrevet programkoden ovenfor.

a) Hva ønsker eleven å finne ut?

b) Forklar hva som skjer når programmet kjøres. Hva blir resultatet?

(utdanningsdirektoratet, 2022)[5]- *eksempeloppgave R1 våren 22*

Oppgaven er en programmeringsoppgave der eleven skal forklare hva koden ønsker å få som output. Man blir introdusert for funksjonen:

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}$$

Eleven må se på funksjonsuttrykket og kjenne til uttrykket for den deriverte, og kjenne til hva kravene for funksjonen er. Man vil da se på negative deriverte (avbildninger) der x-verdi som inputsverdi er større enn 0. Derivasjon og den deriverte vil dukke opp i teoridelen også, da dette er med på å definere en glatt mangfoldighet. Områder som grenseverdi(som dukker opp ved derivasjon), og dermed kontinuitet er også relevant her.

En annen oppgave fra eksempelsettet er denne:

Oppgave 2

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = x^4 - b \cdot x^3 + 2\,,\quad D_f = [-3, \rightarrow\rangle$$

For hvilke verdier av b har f en omvendt funksjon?

(utdanningsdirektoratet, 2022)[5]- *eksempeloppgave R1 våren 22*

Denne oppgaven er en oppgave som framstiller en funksjon, der man må kunne litt om en omvendt funksjon (det som senere i oppgaven vil være inversfunksjon, eller $g \circ f = g(f(x))$. Her skal man altså finne hvilken verdi for b som gjør at man får en inversavbildning. Man får også oppgitt en definisjonsmengde, som innebærer grunnkunnskap for blant annet logikk. For å løse denne oppgaven må man vite litt om den deriverte, og dermed kontinuitet, grenseverdi og definisjonsmengde.

1.2.2 R2 - eksempeloppgaver

Et av eksemplene i teoridelen er en sfære som kan sees på som en glatt mangfoldighet. Glatte mangfoldigheter av dimensjon 2 blir generelt visualisert som overflaten av tredimensjonale figurer. Derfor kan denne fra R2 eksamen være relevant:

> **Oppgave 3**
> En kuleflate K har sentrum i origo og radius 3.
>
> Punktet $(-1, 2, 2)$ er et eksempel på et punkt på K som har heltallige koordinater.
>
> Lag et program som finner antall punkt på K som har heltallige koordinater.

(utdanningsdirektoratet, 2022)- *eksempeloppgave R2 våren 22*[6]

I denne oppgaven tar man utgangspunkt i en kuleflate som har sentrum i origo og radius 3.

En del av oppgavene i R2 eksempelsettet er basert på ren teori. De første oppgavene er ganske rett frem, med aritmetiske rekker, geometriske rekker, vektorer og oppgaver der elevene skal ta i bruk formler som de tidligere har lært i skoleløpet. Her er to eksempler:

> **Oppgave 3**
> Løs likningen
>
> $$\cos^2 x - 3\sin^2 x = -2\,, \quad x \in [0, 2\pi\rangle$$

(utdanningsdirektoratet, 2022)- *eksempeloppgave R2 våren 22*[6]

> **Oppgave 5**
> En uendelig geometrisk rekke $b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + \cdots$ konvergerer mot 6.
>
> Summen av de seks første leddene er $\frac{38}{9}$.
>
> Bestem summen av de fire første leddene.

(utdanningsdirektoratet, 2022)- *eksempeloppgave R2 våren 22*[6]

Avhandlingen skal som sagt videre i oppgaven gjøre rede for teorien, både bakgrunnsteori som tar for seg mengdelære, funksjoner og kontinuitet, og i tillegg større faglige områder som innebærer topologi og mangfoldigheter. Underveis vil det være eksempler som viser anvendelse av teorien, slik at man kan gjøre seg tanker om hvorvidt disse eksamensoppgavene er relevante for det som skjer videre.

Kapittel 2

Bakgrunnsteori

I dette kapittelet vil min referanse være **(Rognes, 2021, s.1-s.12)**[7] og**(Munkres, 2014)**[8]

2.1 Mengdelære

2.1.1 En mengde og dens elementer

Matematikken er stort sett uttrykt med tall. I blant kan disse samles i *mengder* som *elementer*. For eksempel, en mengde M med elementene $1, 2, 3$ og x slik at $M = \{1, 2, 3, x\}$. Et av elementene, eksempelvis 2 uttrykkes som inneholdt i mengden ved å skrive

$$2 \in M.$$

Det finnes tilfeller med krav til at et element skal kunne finnes i mengden. Ved betingelser og krav opererer vi med symbolet $|$. Et eksempel kan være en mengde der alle elementer er heltall, $\mathbb{Z}$ og partall:

$$M = \{n | n = 2n, n \in \mathbb{Z}\}$$

I topologi brukes den tomme mengden $\emptyset$, som er en mengde med ingenting i.

Eksempel 1 *I den tomme mengden blir x uttrykt ved:*

$$\emptyset = \{x | x \notin \emptyset\}$$

Hvis mengden har elementer i seg, blir mengden kalt for en *ikke-tom mengde*.

2.1.2 Inkludering og likhet

For mengder finnes *undermengder*, uttrykt ved $\subseteq$. La to mengder A og B, der A er en undermengde av B. Dette uttrykkes som $A \subseteq B$. Det vil si at alle elementene som er i A også er i B. Den logiske formen:

$$x \in A \text{ bare hvis } x \in B \text{ slik at } (x \in A) \implies (x \in B)$$

I tillegg til undermengde finnes også *supermengde*, $\supset$ og *"proper" undermengde*, $\subset$
Når $A \subset B$, vil B være en supermengde, og skrives som $B \supset A$, der A er inneholdt i B.
En proper undermengde er en undermengde $A \subset B$, der $A \not\subseteq B$ slik at alle elementene i B ikke er lik alle elementene i A.

Eksempel 2 *Supermengden* $B = \{1, 2, 3, 4\}$
har undermengden $A = \{1, 3, 4\}$
$A \subset B$, *A er en proper undermengde, og* $A \not\subseteq B$.

2.1.3 Snitt og union

For to mengder A og B er snittet $A \cap B$ de elementene som er i både A og B.

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ og } x \in B\}$$

Ved A snitt B er elementene x slik at x er i A og x er i B.

For samme mengder er union $A \cup B$ de elementene som er i både A og B.

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ eller } x \in B\ \}$$

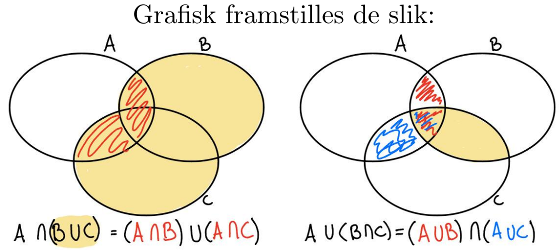
Ved A union B er elementene x slik at x er i A eller i B.

Eksempel 3 *Mengdene A og B er gitt ved:* $A = \{1, 2, 3, 4\}$ *og* $B = \{3, 4, 6, 7\}$.
Snittet $A \cap B = \{3, 4\}$ *er elementene mengdene A og B har til felles.*
Unionen $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 7\}$, *er elementene som utgjør A og B sammen.*

Det finnes to lover ved snitt og union, som er et resultat av de kommutative og assosiative lover. Disse to lovene blir kalt for de *distributive lover*:

$$1)\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
$$2)\ A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Grafisk framstilles de slik:



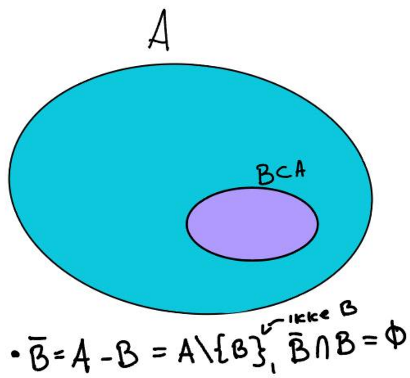
Figur 1

2.1.4 Differanse og komplement

For mengdene A og B, der $B \subset A$ vil elementer i A som ikke er i B, $A - B$, være *differansen*:

$$A - B = \{x \in A | x \notin B\}$$

Ved å finne differansen $A - B$ og snitte dette med B så vil man få den tomme mengden $\emptyset$.
Grafisk kan det fremstilles slik:



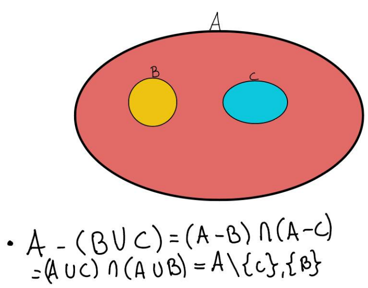
Figur 2

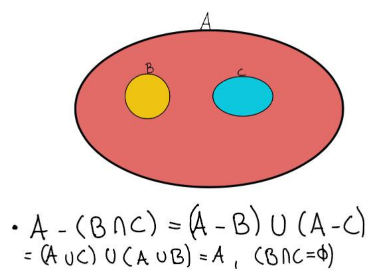
Å ta $(A - B) \cup B$, gir hele mengden, $A \cup B$

Differansen $A - B \subset A$, er alt i A som ikke er B, og blir også kalt for *komplementet* av B i A, og blir uttrykt som $\overline{B}$. Komplementet av en union vil være snittet av komplementene. Komplementene av et snitt vil være en union av komplementene. Dette kalles for *DeMorgans lover*:

$$A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$$
$$A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$$

Disse kan vises grafisk:





Figur 3 **Figur 4**

Figur 3 representerer $A - (B \cup C)$, og **figur 4** representerer $A - (B \cap C)$

2.1.5 Samling av mengder, potensmengder

En mengde kan være et element av en annen mengde. Dette kalles en *samling av mengder*, og/eller en *familie av mengder*. En familie blir notert med en kaligrafisk bokstav, og blir uttrykt som $\mathcal{A}$ istedenfor A

En student er et element av et universitet. I universitetet finnes en mengde studenter. Det finnes på universitetet forskjellige fag, der hvert fag er et element. Unionen av fag blir en mengde av fag. Alle studentene tar ikke samme fag, så vi kan se på deltagerne av faget som et eget element igjen. Studentene som deltar på faget vil bli sett på som en egen mengde, men samtidig som en samling av mengder.

Eksempel 4 *Mengder av studentene :* $S = \{s | s \text{ er en student }\}$
Mengder av alle fag: $F = \{f | f \text{ er et fag }\}$
Mengder av deltakere: $D_f = \{s \in S | s \text{ ble med i } f\}$
Samling av mengder av studenter som deltok i et fag: $\mathcal{D} = \{D_f | f \in F\}$

Samlingen av alle undermengder av en mengde kalles *potensmengder*. Potensmengden til en mengde A er familien av alle undermengder $B \subset A$:

$$\mathcal{P}(A) = \{B | B \subset A\}$$

2.1.6 Vilkårlige snitt og unioner

Samlingen av mengdene $\mathcal{A}$, $\mathcal{P}(A)$ har *et vilkårlig snitt* gitt ved:

$$\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A = \{x | \forall A \in \mathcal{A} \Rightarrow x \in A\}$$

Som er snittet av elementene i $\mathcal{A}$

Og en *vilkårlig union* gitt ved:

$$\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = \{x | \exists A \in \mathcal{A} \Rightarrow x \in A\}$$

2.2 Funksjoner

2.2.1 Domene, område og graf

En funksjon/avbildning f fra en mengde A til en mengde B, har en $x \in A$ assosiert til et unikt element $f(x) \in B$. A kalles *domenet* til f, og B kalles *området/kodomenet*. Avbildningen kan ha betingelser:

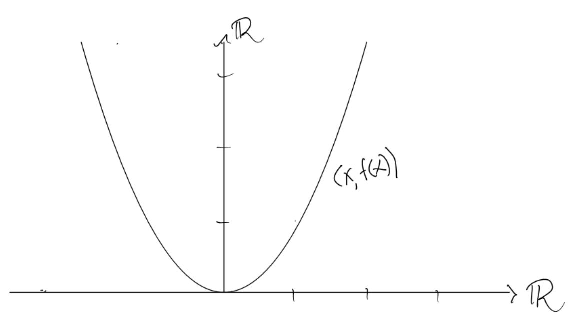
Eksempel 5

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 1 & \text{hvis } x \text{ er oddetall} \\ x/2 & \text{hvis } x \text{ er partall} \end{cases}$$

En slik avbildning er det som kalles et kartetisk produkt av domenet og kodomenet. Det kartetiske produktet blir uttrykt ved Γ_f:

$$\Gamma_f = \{(x, y) \in A \times B | y = f(x)\} = \{x, f(x)\} \subseteq A \times B\}.$$
$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \in A \times B | x \in A\}$$

Eksempel 6 *Avbildningen for funksjonen f:*
f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x) = x^2$, *vil se sånn ut:*



Figur 5

Domenet er $\mathbb{R}$ slik at $x \in \mathbb{R}$ og kodomenet $\mathbb{R}^2$ slik at $f(x) \in \mathbb{R}^2$.
I figur 5 vil Γ_f være selve avbildningen, og grafen $x, f(x)$

2.2.2 Bilde, restriksjon og korestriksjon

En funksjon, $f{:}A \longrightarrow B$ går fra A til B, og vil ha undermengdene $f(A) \in B$, som også blir kalt for *imaget/bildet* til B. Undermengdens verdier er alle verdiene til $f(x)$ for $x \in A$.

$$f(A) = \{f(x) \in B | x \in A\}$$

Noen ganger er bildet hele området.

I noen tilfeller vil domenet A ha en undermengde som kalles en *restriksjon*. For eksempel er $S \subset A$ en restriksjon uttrykt ved: $f|S : S \longrightarrow B$, der B er kodomenet uttrykt ved: $f|S(x) = f(x)$ for alle $x \in S$. Siden $S \to B$, så kan man også skrive avbildningen f som en undermengde: $f(x) \subset S \times B$, og videre kan man da skrive $f|S$ som en korrespondanse til undermengden av $S \times B$

$$\Gamma_f \cap (S \times B)$$

Γ_f er definert ved $(A \times B)$, som grafen av f.

På lik linje kan kodomenet B ha en undermengde som kalles en *korestriksjon*. For eksempel $T \subset B$. $f(A) \subset T$. T har en tilsvarende avbildning gitt ved $g(x) = f(x)$, der g korresponderer til undermengden:

$$\Gamma_f \cap (A \times T)$$

2.2.3 Injektiv, surjektiv og bijektiv

Avbildningene fra A til $B, f : A \to B$ har tre typer:

En *injektiv/en-til-en*-funksjon er en avbildning som kun treffer ett, men ikke nødvendigvis alle element i kodomenet for alle element i domenet ved avbildning. En funksjon er injektiv hvis det for alle $x, y \in A$ slik at $x \neq y$ og $f(x) \neq f(y)$.

En funksjon f, er *surjektiv* hvis det for alle $y \in B$ eksisterer $x \in A$ uttrykt ved $f(x) = y$. Hvis f er surjektiv så må bildet være lik sitt område, $f(A) = B$.

En *bijektiv* funksjon f har en en-til-en-korrespondanse. Denne avbildningen er både surjektiv og injektiv. For hver $y \in B$ så eksisterer det kun én $x \in A$ med $f(x) = y$.

En bijektiv funksjon, f kan ha en *inversavbildning*$f^{-1} : B \to A$, der domenet og kodomenet utveksler seg, slik at for hver $y \in B$ finnes en unik $x \in A$ slik at $f(x) = y$. På andre siden har man $f^{-1}(y) = x$. Hvis en avbildning ikke er bijektiv så finnes ingen definert inversavbildning.

2.2.4 Sammensetninger av funksjoner

Avbildningene f og g er gitt ved $f : A \to B$, og $g : B \to C$. Området til f er domenet til g. En *sammensatt funksjon* er en avbildning som går fra A til C gitt ved $g \circ f : A \to C$. $g \circ f = g(f(x))$:

$$(g \circ f(x)) = g(f(x))$$

for alle $x \in A$.
Avbildningen $(g \circ f)(x)$ er en undermengde av $A \times C$, og kan skrives med gamma:

$$\Gamma_{(g \circ f)} = \{(x, z) \in A \times C | \text{ det eksisterer en } y \in B \text{ med } (x, y) \in \Gamma_f \text{ og } (y, z) \in \Gamma_g\}$$

Hvis $f^{-1} : B \to A$ så vil $f^{-1} \circ f : A \to$, være identitetsfunksjonen id_A
Dette er ikke kommutativt så $g \circ f \neq f \circ g$

2.2.5 Inversbilder av undermengder

I avbildningen $f : A \to B$ har hver undermengde $T \subset B$ et *inversbilde*, $f^{-1}(T) \subset A$ gitt ved:

$$f^{-1}(T) = \{x \in A | f(x) \in T\}$$

der f tar x-verdier fra A.
Hvis man tar T til f^{-1} så får man avbildningen

$$\begin{gathered} f^{-1} : \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(A) \\ T \longmapsto f^{-1}(T) \end{gathered}$$

Denne notasjonen kan også brukes selv om det ikke er snakk om en bijektiv funksjon. Men når den faktisk er bijektiv så er likheten i mengden gitt ved

$$\{x \in A | f(x) \in T\} = \{f^{-1}(y) \in A | y \in T\}$$

Hvis $S \subset T \subset B$, så er

$$f^{-1}(S) \subset f^{-1}(T)$$

Hvis $S, T \subset B$, så er

$$\begin{gathered} f^{-1}(S \cup T) = f^{-1}(S) \cup f^{-1}(\mathrm{T}) \\ f^{-1}(S \cap T) = f^{-1}(S) \cap f^{-1}(T) \\ f^{-1}(S - T) = f^{-1}(S) - f^{-1}(T) \end{gathered}$$

2.3 Endelige mengder

2.3.1 Kardinalitet

For hver $n \in \mathbb{N}$ kalles $\{1, 2, ..., n\}$ en *seksjon*.

Lemma 1 *Hvis det finnes en injektiv funksjon*

$$f : \{1, 2, .., m\} \to \{1, 2, ..., n\}$$

så er $m \leq n$

Eksempel 7 $A = \{1, 2, 3\}, B = \{1, 2, 3, 4\}$
$A \to B$
$x \in A, f(x) \in B$
$f : x \mapsto f(x)$ *der* $f(x) = x$
$f(A) = (1, 2, 3) \in B.$
Alle elementene i B blir ikke truffet, da B har flere elementer enn A, og større kardinalitet. Med andre ord må $m \leq n$.

Hvis m er større enn n, så finnes det ingen injektiv funksjon, og korollaret følger:

Korollar
Det finnes ingen injektiv funksjon $f : \{1, 2, ..., m\} \to \{1, 2, ...n\}$ *hvis* $m > n$

Proposisjon 1 *Hvis det fins en* $f : \{1, 2, ..., m\} \to \{1, 2, ..., n\}$, *da er* $n = m$.
Hvis $m \neq n$, *så fins det ingen bijektiv funksjon.*

Kardinalitet har følgende definisjon:

Definisjon 1 *En mengde A er endelig hvis det eksisterer en bijektiv funksjon* $f : A \to \{1, 2, ..., n\}$ *for* $n \leq 0$. *Da har A kardinalitet n.*

Eksempel 8 *Den tomme mengden vil være en endelig mengde med kardinalitet 0. Hvis det er en mengde med kun ett element så blir kardinaliteten 1.*

2.4 Kontinuitet

Kontinuitet har følgende definisjon: **(encyclopediaomath, 2011)**[9]:

Definisjon 2 f *er en reell funksjon definert på* $E \subset \mathbb{R}$ *slik at* $f : E \to \mathbb{R}$. f *er kontinuerlig i punktet* $x_0 \in E$ *hvis det for hver* $\epsilon > 0$ *eksisterer en* $\delta > 0$ *slik at det for alle* $x \in E$ *med* $|x - x_0| < \delta$ *gir en ulikhet*

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

Det er flere måter å se at en funksjon er kontinuerlig på. For eksempel så kan man ha sjekk ved å ta grenseverdi:

Eksempel 9

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 9, & x \leq 2 \\ x + 1, & x < 2 \end{cases}$$

Ved å sjekke grensen for punktet x=2 skal de for begge begrepene få samme verdi i kodomenet. Da må man ta grenseverdi tilnærmet fra negativ og positiv side for x=2:

$$\lim_{x \to 2^+} f_1(x) = \lim_{x \to 2^+} -x^2 + 9 = -(2^2) + 9 = 5$$
$$\lim_{x \to 2^-} f_2(x) = \lim_{x \to 2^-} f_2(x)x + 1 = 2 + 1 = 3$$
$$\implies f_1(x) \neq f_2(x)$$

Grenseverdi gir to forskjellige grenser, og man kan dermed konkludere med at f(x) er diskontinuerlig.

En annen måte å sjekke dette på er topologisk sett. Hvis det finnes en kontinuerlig avbildning i form av mengder, så må en funksjon gi en avbildning, og hvert punkt vil gi en inversavbildning.

Eksempel 10 *La intervallene* $X = [0,1]$ *og* $Y = [a,b]$*, slik at* $a < b$ *og homeomorfien er gitt ved*

$$[0,1] \cong [a,b]$$

Funksjonen utledes ved å ta utgangspunkt i:

$$f(0) = a, y_1 = a \text{ og } x_1 = 0$$
$$f(1) = b, y_2 = b \text{ og } x_2 = 1$$

og formel for stigningstall

$$c = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{b-a}{1}$$

Som videre substitueres inn i ettpunktsformelen:

$$y - y_1 = (b-a)(x - x_1)$$
$$\Longrightarrow y - y_1 = bx - ax$$
$$\Longrightarrow f(x) = xb - xa + a \Longrightarrow f(x) = x(b-a) + a$$

der inversen er

$$f^{-1}(x) = \frac{y-a}{b-a}$$

Siden $a < b$*, så er begge disse funksjonene kontinuerlige, og man kan si at avbildningen også er kontinuerlig. Man kan konkludere med at to intervall* $[a,b]$ *og* $[c,d]$ *er homeomorfe (som blir definert i kapittel 4.2) for* $a < b$ *og* $c < d$*.*

2.5 Projeksjoner

I eksempel 37 blir projeksjoner nevnt. I forbindelse med mangfoldigheter vil det forekomme eksempler på *stereografiske projeksjoner*. En projeksjon er en avbildning**(snl, 2022)**[10] i form av rette linjer i et plan. Man tar elementer fra en mengde og avbilder videre til en undermengde. Et eksempel kan være begrensningene til en mengde, som blir vist ved en projeksjon. Denne linjen går gjennom to punkt.

Ved introduksjon av mangfoldigheter av dimensjon 2 nevnes stereografiske projeksjoner i form av et eksempel der man går fra en sfære som ligger i $\mathbb{R}^3$-planet, og får en undermengde i $\mathbb{R}^2$-planet ved bruk av projeksjon. Dette kommer senere i kapittelet om mangfoldigheter 6.3.1.

Kapittel 3

Topologi

Med mindre noe annet er oppgitt i dette kapittelet, så er referansen **(Rognes, 2021, s.13-15, s.55-59, s.65-69)**[7] og**(Munkres, 2014)**[8].

3.1 Åpne mengder

En åpen mengde i topologi kan tenkes som et punkt i en mengde, der man fortsatt er innenfor mengden hvis man tar et punkt ved siden av. Man er ikke borti grensen av mengden, og hele tiden innenfor samme mengde.

En topologi på en mengde har definisjonen:

Definisjon 3 *X er en mengde. En topologi på mengden X er en samling $\mathcal{T}$ av undermengder av X som kalles åpne slik at:*
1) Den tomme mengde, $\emptyset$ og X er element i $\mathcal{T}$
2) For hver undersamling $\{U_1, U_2, ..., U_\alpha\}$ av $\mathcal{T}$ er unionen $\bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha$ i $\mathcal{T}$
3) For hver endelig undersamling $\{U_1, U_2, ..., U_\alpha\}$ av $\mathcal{T}$ er snittet $U_1 \cap U_2 \cap ... \cap U_\alpha$ i $\mathcal{T}$.

For mengden X, med $U \subset$ X og $U \in \mathcal{T}$, er U åpen hvis den tilfredsstiller:
1) $\emptyset$ og X er åpne.
2) Unionen av enhver samling av åpne undermengder av X er også åpen.
3) Snittet av enhver endelig samling av åpne undermengder av X er også åpen.

En topologi på en mengde X er en familie av åpne mengder som kan skrives som $\mathcal{T}$(x)$\subseteq \mathcal{P}$(x)

3.2 Diskrete og trivielle topologier

Diskret og triviell topologi har følgende definisjon:

Definisjon 4 *En diskret topologi på mengden X er topologien $\mathcal{T}_{disk}$ der alle undermengder U er åpen i X. Vi får det topologiske rommet (X, $\mathcal{T}_{disk}$)*

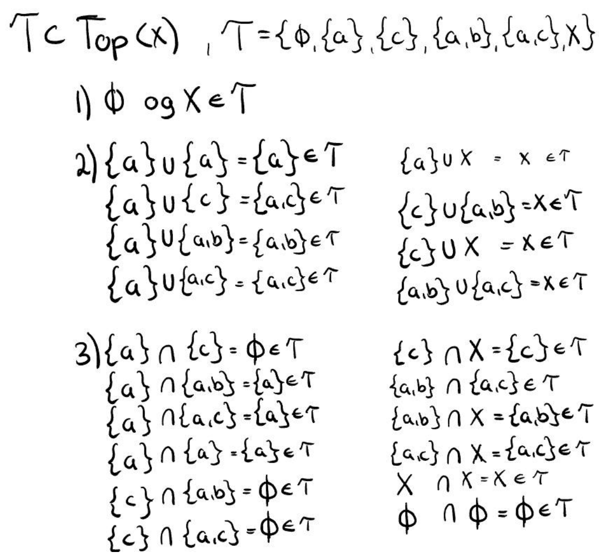
Ettpunktsmengden x er inneholdt i X, $\{x\} \in$ X. Alle punkter y slik at $x \neq y \in$ X er separert. Den diskrete topologien på X består av distinkte, isolerte punkt, og har ingen interaksjoner med andre punkt.

Eksempel 11 *I den diskrete topologien vil potensmengden være hele topologien.*

Definisjon 5 *En triviell topologi på mengden X er topologien $\mathcal{T}_{triv}$ der kun den tomme mengden $\emptyset$ og X er åpen. Den trivielle topologien er gitt ved: $\mathcal{T}_{triv} = \{\emptyset,\ X\}$*

Eksempel 12 *$X = \{a,b,c\}$ har en topologi :*
$\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, X\}$

1) Det oppfyller det første kravet om at X og $\emptyset$ er med i topologien.
2) Unionen av to undermengder i topologien skal gi en tredje mengde som også er i topologien. (**Se figur 6**)3.2
3) Snittet av to undermengder i topologien skal gi en mengde som også er med i topologien (**Se figur 6**)3.2.



Figur 6

Eksempel 13 *I det topoligiske rommet $X = \{a, b, c\}$ er følgende topologier* ***ikke*** *en topologi.*
1) $\mathcal{T} = \{\{a\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$ - dette er ikke en topologi da første kravet om at X og $\emptyset$ må være med.
2) $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, X\}$ - Ved å ta unionen av to elementer i $\mathcal{T}$ så skal man få et element som også er i $\mathcal{T}$. $\{a\} \cup \{b\} = \{a, b\}$ er ikke med i topologien, og dette er ***dermed ikke en topologi****.*
3) $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a, b\}, \{a, c\}, X\}$ - Ved å ta snittet av enhver sammen så skal jeg få et resultat som og er med i topologien. $\{a, b\} \cap \{a, c\} = \{a\}$, som ikke er med i topologien, og er dermed ikke en topologi.

3.3 Grovere og finere topologi

To topologier på samme mengde kan gi denne definisjonen:

Definisjon 6 *La $\mathcal{T}$ og $\mathcal{T}'$ være to topologier på mengden X. $\mathcal{T}$ er grovere enn $\mathcal{T}'$ hvis $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$. Med andre ord så er hver åpne undermengde, $U \subset X$, i $(X, \mathcal{T})$ også åpen i $(X, \mathcal{T}')$*

Definisjonene om diskret og triviell topologi gir lemmaet:

Lemma 2 *Den trivielle topologien er grovere enn hvilken som helst annen topologi, og den diskrete topologien er finere enn hvilken som helst annen topologi.*

For å kunne være en topologi må den inneholde X og $\emptyset$, noe den trivielle topologien gjør, og kun disse elementene. Den diskrete topologien må ha alle sine undermengder åpne, som vil utgjøre alle elementer i en åpen mengde. Den trivielle topologien vil bli en undermengde av den diskrete topologien.

To topologiske rom X og Y, har en funksjon *f:* X $\rightarrow$ Y som er kontinuerlig hvis det finnes en åpen mengde $V \subset Y$, slik at inversbildet $f^{-1}(V)$ åpen i X. Tatt ut ifra definisjonen om grovere og finere topologi, der $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$ og $\mathcal{T}$ er grovere så vil det ved f være vanskeligere å være kontinuerlig i denne topologien (med hensyn til $\mathcal{T}$) ved funksjonen

$$f\text{:}\ \mathrm{X} \rightarrow \mathbb{R}$$

$\mathcal{T}$ sies derfor å være den sterkere topologien.

3.3.1 Kofinit topologi

Kofinit topologi har følgende definisjon:

Definisjon 7 *X er en mengde. Den kofinite topologien $\mathcal{T}_{kof}$ er samlingen av undermengder $U \subset X$, der komplementet X–U er endelig.*

Komplementet av de endelige mengdene er åpen.

En endelig mengde $E \subset$ X vil ha U (fra definisjonen 7) uttrykt ved $= X - E.X - U$ er endelig, siden $(X - U) = E$, så blir komplementet
$X - U = X - E \longrightarrow X - U = X - (X - E) = E \longrightarrow X - U = E$, som er den endelige mengden.

Lemma 3 *Samlingen $\mathcal{T}_{kof}$ er en topologi på X.*

$\emptyset$ er en mengde på topologien på X. Komplementet av X, $\overline{X}$, er X $-$ X $= \emptyset$

Eksempel 14 *Komplementet til en undermengde i en topologi vil man gi en lukket mengde da en lukket mengde er komplementet til en åpen mengde U^C (definert i kapittel 3.8). Man kan på denne måten vise at i en topologi, som har åpne undermengder, at de åpne undermengdene også kan være lukket.*
Lukket = X - Åpen, der Åpen = komplement, så hvis
$\mathcal{T}_{cof} = \{\emptyset, U_1, U_2, X\}$ *så kan vi vise at* $\overline{U_1}$ = *det som ikke er* U_1 *i topologien, som er* U_2, *og* U_2 *vil ifølge definisjonen om lukkethet være lukket.*

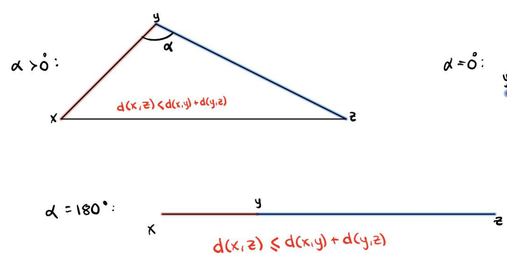
3.4 Metriske rom

3.4.1 Den metriske topologien

Metrikk er definert slik:

Definisjon 8 *En metrikk på en mengde X er en funksjon $d : X \times X \to \mathbb{R}$ slik at :*
1) $d(x, y) \geq 0$ for alle $x, y \in X$, og hvis $x = y$ så er $d(x, y) = 0$.
2) For alle $x, y \in X$ så er $d(x, y) = d(y, x)$
3) For alle $x, y, z \in X$ så er $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Den siste kalles for triangelulikheten, der summen av to sider av en trekant må være større eller lik den tredje siden og kan vises ved denne framstillingen **(Khan Academy (youtube),(2012))**[11]:



Figur 7

En metrisk topologi $(X, \mathcal{T}_{met})$ har definisjonen:

Definisjon 9 *Det metriske rommet (X, d) med den metriske topologien $(X, \mathcal{T}_{met})$ på X er samlingen undermengder $U \subset X$ som tilfredsstiller kravet:*

For hver $x \in U$ eksisterer det en $\epsilon >$ 0 slik at $\mathcal{B}_d(x, \epsilon) \subset U$.

der $\mathcal{B}_d$ kalles ϵ-ballen rundt $x \in (X, d)$

Ballen rundt $x \in (X, d)$ er definert ved:

Definisjon 10 *Det metriske rommet (X, d) har et punkt $x \in X$ og positive tall, der $\epsilon > 0$ slik at*

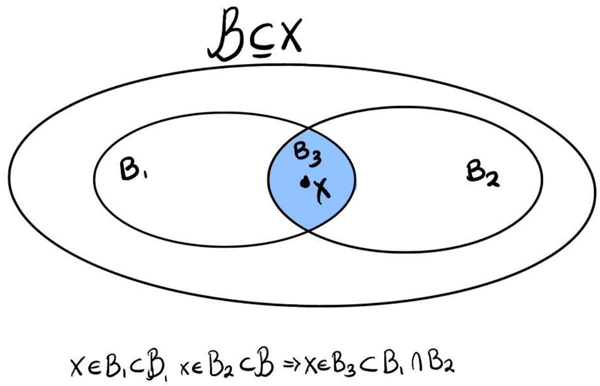
$$\mathcal{B}_d(x, \epsilon) = \{y \in X | d(x, y) < \epsilon\}$$

Det er greit å bemerke seg at samlingen av $\mathcal{T}_{met}$ er en topologi på X.

3.5 Basis for en topologi

3.5.1 Topologien generert av basisen

Definisjon 11 *En mengde X har en samling med undermengder, $\mathcal{B}$, slik at $\mathcal{B} \subset X$ kalles en basis hvis:*
1) Det for hver $x \in X$ eksisterer en $B \in \mathcal{B}$ med $x \in B$.
2) Hvis B_1 og $B_2 \in \mathcal{B}$ og $x \in B_1 \cap B_2$ så eksisterer det en $B_3 \in \mathcal{B}$ med $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$
Mengdene B er kalt for basismengder, som er basiser av $\mathcal{B}$ og dermed undermengder av X.



Figur 8

Siden B er en samling undermengder vil det være en undermengde av andre undermengder slik at $B \subset U$. Hvis x er et element i en basis så vil $x \in B \subset U$. Hvis dette er en basis for en topologi, $\mathcal{T}$, så sier man at $\mathcal{T}$ er generert av basisen.
Vi har følgende lemma:

Lemma 4 *Samlingen av topologiene $\mathcal{T}$ generert av basiser $\mathcal{B}$ er en topologi på X.*

Eksempel 15 ***: (E-academy (youtube), 2017)****[12]*
$X = \{a, b, c, d\}$
$\mathcal{T} = \{\emptyset, X\{a\}, \{d\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}, \{b, c, d\}\} B = \{\{a\}, \{d\}, \{b, c\}\}$
Er det en basis?
Alle elementene som er i B er i $\mathcal{T}$, dermed er alle medlemmene av basis en åpen mengde. Hvis vi tar unionen av elementene i basisen så får man $\{a\} \cup \{d\} \cup \{b, c\} = \{a, b, c, d\} = X$. Siden unionen av basismengden utgjør hele X, så er det en basis.

Proposisjon 2 *La $\mathcal{B}$ være en basis for topologien $\mathcal{T}$ på X, sånn at $\mathcal{T}$ blir generert av basisen $\mathcal{B}$:*
1) Hver $B \in \mathcal{B}$ er åpen i X. Hver union av elementene er også åpen i X.
2) Hver åpen $U \subset X$ er en åpen union av basiselementer.

3.5.2 Underbasiser

En samling av undermengder av X, kalt for S vil ved alle endelige snitt gi en basis B:

$$B = S_1 \cap \ldots \cap S_n$$

Dette kalles underbasis fordi $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}$. I en underbasis er alle endelige snitt med.
Underbasis har følgende definisjon og lemma:

Definisjon 12 *En underbasis for en topologi på X er en samling $\mathcal{S}$ av undermengder på topologien, X, der unionen er lik X. Basisen $\mathcal{B}$ som hører til $\mathcal{S}$ er samlingen av $\mathcal{B}$ som er bestående av alle snitt av elementer i underbasisen.*

$$B = S_1 \bigcap S_2 \bigcap \ldots \bigcap S_n$$
$$n \geq 1$$

Lemma 5 *$\mathcal{S}$ er en underbasis på X. Den assosierte samlingen $\mathcal{B}$ er en basis for topologien.*

3.6 Produkttopologien på X×Y

Bygget på avsnittet om kartesiske produkt, og får om en produkttopologi følgende definisjon:

Definisjon 13 *X og Y er topologiske rom. En produkttoplogi på disse er topologien som er generert av basisen*

$$\mathcal{B} = \{U \times V \mid U \text{ er åpen i } X \text{ og } V \text{ er åpen i } Y\}$$

der $U \times V \subset X \times Y$, slik at U er åpen over alle undermengder i X og V er åpen over alle undermengder i Y.

Samlingen av alle disse basisene vil også være en basis for topologien X × Y. Vi har lemmaet:

Lemma 6 *Samlingen $\mathcal{B}$ er en basis for en topologi på $X \times Y$.*
$X \times Y$ i seg selv er en basis basert på definisjonen for basis. Gitt en basis B_1 og en basis B_2 slik at unionen ikke er det tomme rommet, slik at det må eksistere et element i en tredje basis som er undermengde i $B_1 \cap B_2$. Den tredje basisen blir B_3. Samler man disse vil man fortsatt få alle undermengder på mengdene X og Y, og man får dermed elementer som er med i topologien og.

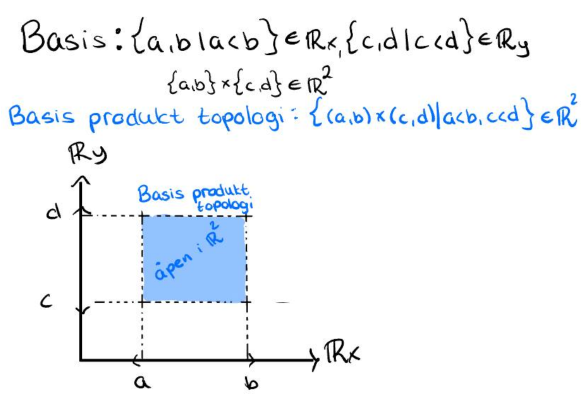
Produkttopologi har teoremet:

Teorem 1 *X har en topologi som er generert av basisen, $\mathcal{B}$ og Y har en topologi som er generert av basisen $\mathcal{C}$. Da er samlingen*

$$\mathcal{D} = \{B \times C \mid B \in \mathcal{B} \text{ og } C \in \mathcal{C}\}$$

også en basis for produkttopologien på $X \times Y$.

Bevis:
X $\subseteq \mathbb{R}$, Y $\subseteq \mathbb{R}$
$a, b \in$ X slik at $a < b$.
$c, d \in$ Y slik at $c < d$.
$[a, b] \times [c, d] \subset X \times Y$ former en rektangulær basis:



Figur 9

3.7 Underromstopologi

Anta at man har et topologisk rom X med topologien $\mathcal{T}$. Samlingen $\mathcal{A} \subset$ X.
Hvis man tar alle elementene til topologien $\mathcal{T}$ samme samlingen, $\mathcal{A}$, så vil man få en ny topologi $\mathcal{T}_A$. Definisjonen for *undermengder* sier:

Definisjon 14 *La $(X, \mathcal{T})$ være et topologisk rom med A som undermengde, $A \subset X$. Samlingen*

$$\mathcal{T}_A = \{A \cap U | U \in \mathcal{T}\}$$

av undermengder av A er kalt for underromstopologien på $A|(A, \mathcal{T}_A)$ blir kalt for et underrom av X.

Eksempel 16 *Enkelt forklart har man et topologisk rom X, med topologien $\mathcal{T}$. Undermengden $\mathcal{A}$, og skal finne samlingen $\mathcal{T}_A$ som utgjør underromstopologien. Vi definererer følgende:*
$X = \{a, b, c, d, e\}$
$\mathcal{T}_A = \{X, \emptyset, \{a\}, \{d\}, \{a, d\}\}$
$A = \{a, c\}$ *Ved å bruke definisjonen for underromstopologien må man snitte A med hvert element i topologien $\mathcal{T}$*
$A \cap X = A, A \cap \emptyset = \emptyset, A \cap \{a\} = \{a\}, A \cap \{d\} = \emptyset, A \cap \{a, d\} = \{a\}.$
Det alle disse har til felles er
$\mathcal{T}_A = \{\emptyset,\ A,\{a\}\}$

3.8 Lukkede mengder og grenseprodukter

3.8.1 Tillukning og interiør

Tillukning og interiør er en fordypning på lukkede og åpne mengder. Kort fortalt er en åpen mengde en mengde der du kan ta et element, og sette en ball rundt med radius større enn r, og punktene i denne ballen er i samme mengde. En lukket mengde vil være komplementet. Dette gjelder for undermengder også.

En topologi innebærer åpne undermengder, men det er også lukket. Den diskrete topologien er definert til å være åpen, men det kan også være lukket. Dette gir et eksempel:

Eksempel 17 *I den diskrete topologien $\mathcal{T}_{disc}$ på X, så er hver undermengde lukket. I den trivielle topologien $\mathcal{T}_{triv}$ er kun $\emptyset$ og X lukket.*

Dette motstrider tidligere definisjoner om at i en diskret topologi er hver undermengde *åpen* og i en triviell topologi er kun $\emptyset$ og X *åpen.* Dette bevises slik :

Bevis:
X $= \{a, b\}$
$\mathcal{T}_{disc} = \mathcal{P}(x) = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}\}$
Definisjon lukket := X - åpen
Lukket:= X - $\{a\} = \{b\} \Rightarrow \{b\}$ er åpen men også lukket
X - $\{b\} = \{a\} \Rightarrow \{a\}$ er åpen men også lukket.

Det man må tenke på her er at den trivielle topologien utgjør potensmengden, som er en samling åpne undermengder i dette tilfellet. En lukket mengde er komplementet av det som er åpent. Ved å se på komplementene av ethvert element i $\mathcal{P}(x)$ så ser man på hva som *ikke* er det elementet. For eksempel, komplementet av elementet a, $\overline{a}$ = de elementene som ikke er a i $\mathcal{P}(x)$. Dette er $\{b\} \in \mathcal{P}(x)$. Siden komplementet av a er i $\mathcal{P}(x)$, så blir det definert som lukket, men også åpent siden det er det den diskrete topologiens definisjon sier.

Det samme gjelder for den trivielle topologien. I følge definisjonen skal $\emptyset$ og X være åpne.
X$-X = \emptyset$, som er lukket.
X$-\emptyset =$ X som er lukket.

Komplementet for den hele mengden X er det er elementet i $\mathcal{P}(X)$ som ikke er X$-\emptyset$. Komplementet av $\emptyset$ er hele X. Disse elementene er lukket men åpen.

Tillukning og interiør har følgende definisjon:

Definisjon 15 *X er et topologisk rom med undermengde $A, A \subset X$. Tillukningen $ClA = \overline{A}$ av A er snittet av alle lukkede undermengder av X som inneholder A. Interiøret IntA av A er unionen av alle åpne undermengder av X som inneholder A. Tillukningen av A kan også skrives som $\overline{A}$.*

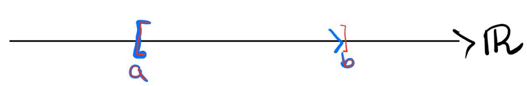
I en sfære A, der tillukningen er selve randen til sirkelen og det inni, mens interiøret er sirkelen og ikke randen.

Litt lenger ned i overskriftene 17 om grensepunkt, vil man se at $\overline{A} = A \cup A'$, der A' er grensepunktene for undermengden.

Lemma 7 .
1) Tillukningen ClA er en lukket undermengde av X.
2) $A \subset ClA$ ClA
3) Hvis $A \subset K \subset X$ med K lukket, så er $ClA \subset K$.

Lemma 8 .
1) Interiøret Int A er en åpen undermengde av X.
2) $IntA \subset A$
3) Hvis $U \subset A \subset X$, med U åpen så er $U \subset$ Int A

Eksempel 18 $X = \mathbb{R}$
$A = [a, b),\ a < b$
$ClA = [a, b]$
$IntA = (a, b)$



Figur 10

Siden tillukningen er snittet av alle lukkede undermengder av X, som inneholder A, så vil en tillukning for A se slik ut, altså fra og med a til og med b. Interiøret for dette intervallet vil være det som ikke er randen, eller selve grensene, så her ville det vært (a, b).

Det opprinnelige intervallet er det som er markert i blått, og tillukningen er markert i rødt.

Eksempel 19 *For et topologisk rom X med den diskrete topologien, da også potensmengden* $\mathcal{P}(X)$, $\mathcal{T}_{disk} = \mathcal{P}(X)$.
For X har vi undermengden A. Siden det er en diskret topologi er alle undermengder åpen, og A har dermed kun åpne undermengder. Disse er også lukket (fra eksempel 17 fra diskret og triviell topologi).
Siden dette er tilfellet vil $IntA = ClA = A$.

Eksempel 20 *Sierpinksi topologien:*
$X = \{a, b\}$
$\mathcal{T}_a = \{\emptyset, \{a, b\}, X\}$*, altså b er lukket.*
Tillukningen for X vil være $Cl\{b\} = \{b\}$*, og tillukningen for A vil være* $Cl\{a\} = X$.
b er et punkt inni X som ikke har noen omegn, og er dermed et lukket punkt uten tillukninger.
For punktet a kan det ha omegn så stor som hele X.

3.8.2 Omegner

En åpen *omegn* er gitt med denne definisjonen:

Definisjon 16 *I et topologisk rom, X med undermengde* $U \subset X$*, med et punkt* $x \in X$*, så er U omegn til x hvis* $x \in U$ *og U er åpent.*

Teorem 2 *La A være en undermengde av et topologisk rom X. Et punkt* $x \in X$ *ligger i tillukningen* $\overline{A}$ *hvis og bare hvis A møter hver åpen mengde U i X som inneholder punktet x.*
$x \in \overline{A}$ *hvis og bare hvis A møter U for hver omegn U av x.*

Hvis A er i X, så er komplementet til $A, A^C = \mathrm{X}-A$. Hvis $x \in \mathrm{Int}(\mathrm{X}-A)$, ligger $x \in A^C$, der det kan eksistere en omegn U rundt x. Med andre ord er $x \in U \subset X - A$. Hvis $x \in$ X−Int(X - A), så ligger $x \in \overline{A}$, som vil si hele A og dens rand. $U \subset A^C$, og hvis A hadde vært alle åpne mengder i A og ikke dens rand, så ville $A \cap U \neq \emptyset$. Hadde disse to vært tilfelle hadde vi hatt en påstand som sier at *for hver åpen U om x, med* $x \in U$*, så har vi en* $A \cap U \neq \emptyset$. Da måtte x ha vært i tillukningen til A, og det skjer hvis og bare hvis omegnen $x \in U$ møter A.

3.8.3 Grensepunkter

Definisjon 17 *La A være en undermengde av det topologiske rom X. Et punkt* $x \in X$ *er et grensepunkt til A hvis omegnen U rundt x inneholder noen andre punkt i A enn x. Altså hvis x tilhører tillukningen av* $A - \{x\}$

Grensepunktene blir skrevet som A' hvis det skal gjøres en forskjell på dette, og vi får teoremet:

Teorem 3 *La A være en undermengde av et topologisk rom X, med tillukning* $\overline{A}$ *og mengden grensepunkter* A'*. Da er*

$$\overline{A} = A \cup A'$$

Tatt utgangspunkt i at $x \in \overline{A}$, så gir det noen scenarioer:
- Hvis $x \in A$, så er $x \in A \cup A'$
- Hvis $x \notin A$, så er $A - \{x\} = A$, fordi $\{x\}$ ikke eksisterer i A.
- Hvis $x \in \overline{A}$, så må hver omegn U av x møte $A - \{x\}$, og da må $\{x\} \in A'$ med andre ord.

Korollar *En undermengde A av et topologisk rom er lukket hvis og bare hvis det inneholder alle sine grensepunkter.*

Hvis $A = \overline{A}$, så er $A = A \cup A'$, ved substutusjon av $\overline{A}$ fra teorem 33.

Bevis:
Hvis A innholder alle sine grensepunkter så er det lukket.

3.8.4 Hausdorff rom

Et hausdorff-område er et separasjonsaksiom, der hausdorff rom har følgende definisjon:

Definisjon 18 *Et topologisk rom X kalles et hausdorff rom hvis det for hvert par av punkter $x, y \in X$ slik at $x \neq y$ eksisterer åpne mengder $U, V \subset X$ slik at $x \in X$, $y \in Y$, og $X \cap Y = \emptyset$. Det eksisterer omegner U og V for x og y med det tomme rom, $\emptyset$ til felles.*

Lemma 9 *Hvert metriske rom (X, d) er hausdorff.*

Bevis:
Hvis $x, y \in$ X slik at $x \neq y$, så er x og y distinkte og distansen
$\delta = d(x, y) > 0$, så er omegnen $U = B_d(x, \delta/2)$ og omegnen $V = B_d(y, \delta/2)$.
Tar man snittet av disse, så vil man få det tomme rom: X $\cap$ Y $= \emptyset$

Eksempel 21 *En mengde $X = \{a, b\}$ med den diskrete topologien. Diskret topologi 4 har at alle punkter er distinkte. a og b i X er derfor distinkte, og har sine omegner som ikke nærmer seg hverandre. Rommet X med den diskrete topologien er dermed et hausdorff rom.*

Teorem 4 *Hvis X er et hausdorff rom, så konvergerer sekvensen, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ av punkter i X mot maks ett punkt i X.*

Lukkede punkt og grensepunkt i hausdorff rom

Teorem 5 *Hver endelige undermengde $A \in X$ i et hausdorff rom er lukket.*

A er i et hausdorff rom slik at punktene i A er distinkte. A består av en samling av single elementer $\{x\}$ som er lukket i X. Punktene $x, y \in X$ slik at $x \neq y$ har omegnene U og V, slik at $x \in U$ og $y \in V$ og $U \cap V = \emptyset$. Siden $x \in U \Rightarrow x \notin V$, og siden $\{x\}$ er lukket og inneholdt i U, så er $X - V$ en lukket mengde som inneholder $\{x\}$. Hele x, Cl$\{x\} \in X - V$, som vil si at $y \notin$ Cl$\{x\}$, som ikke inneholder noen andre punkt enn x, som dermed impliserer at $\{x\}$ er lukket og Cl$\{x\}$ er lukket.

Teorem 6 *A er en undermengde av X, $A \in X$. Et punkt $x \in X$ er et grensepunkt hvis og bare hvis hver omegn U av x møter A i uendelig mange punkt.*

I tillegg til å møte A i x vil U også møte A i andre punkt enn x. Ved samme argumentasjon som ved definisjonen for grensepunkt 17, så vil U møte A - $\{x\}$. I dette tilfellet vil $\{x\} \in A'$. Vi kan også se for oss at vi har $U \cap A$ som endelig, og ikke-tomt. Da vil $U \cap (A - \{x\}) = \{x_1, ..., x_n\}$, som er en mengde lukkede punkt. En ny undermengde
$V = U - \{x_1, ..., x_n\} = U \cap (X - \{x_1, ..., x_n\})$ er åpen. Hvis $x \in V$ er åpent, vil det heller ikke være et grensepunkt.

Kapittel 4

Kontinuerlige funksjoner og homeomorfi

4.1 Kontinuerlige funksjoner

Et inversbilde er en avbildning uttrykt ved

$$f^{-1}(\mathrm{T}) = \{x \in \mathrm{A} \,|f(x) \in \mathrm{T}\}$$
der $f : A \to B$, slik at $x \in A$, og $T \subset B$.

har i sammenheng med kontinuitet denne definisjonen:

Definisjon 19 *X og Y er topologiske rom. En avbildning $f : X \to Y$ er kontinuerlig hvis inversbildet:*

$$f^{-1}(V) = \{x \in X | f(x) \in V\}$$

er åpent for enhver åpen undermengde $V \subset Y$

Lemmaet følger:

Lemma 10 *La de topologiske rommene være X, Y og Z. Hvis f: $X \to Y$ og g: $Y \to Z$ er kontinuerlige, så er den sammensatte funksjonen $g \circ f : X \to Z$ også kontinuerlig*

4.1.1 Punktvis kontinuitet

Teorem 7 *X og Y er topologiske rom med funksjonen f: $X \to Y$. f er kontinuerlig hvis og bare hvis det for hver $x \in X$ eksisterer en omegn av $f(x), f(x) \in V$, og en omegn av $x, x \in U$ slik at $f(U) \subset V$.*

Definisjon 20 *f er kontinuerlig for x hvis det eksisterer en omegn V slik at $f(x) \in V$ som har et tilhørende omegn U slik at $x \in U$, slik at $f(U) \subset V$. Med andre ord er f:$X \to Y$ er kontinuerlig hvis og bare hvis den er kontinuerlig for hver $x \in X$.*

4.1.2 Kontinuitet med tanke på lukkede mengder og tillukning

Teorem 8 *La X og Y være topologiske rom, med $f : X \to Y$ som en funksjon. Da finnes følgende ekvivalenser:*
1)f er kontinuerlig
2) For hver undermengde $A \subset X$ har vi $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$
3) For hver lukket L i Y så er inversbildet $f^{-1}(x)$ lukket i X

4.2 Homeomorfi og topologisk ekvivalens

Homeomorfi gir definisjonen:

Definisjon 21 *En bijektiv funksjon f:X→Y mellom to topologiske rom der både f og f^{-1} er kontinuerlig kalles for en homeomorfi. Hvis det eksisterer en homeomorfi $f : X \to Y$ så sier vi at X og Y er homeomorfe rom, eller topologisk ekvivalente uttrykt ved $X \cong Y$*

Med homeomorfi får man et par regler og lemma å forholde seg til for å avgjøre hva som er en homeomorfi og ikke.

Lemma 11 *Å være homeomorf er en ekvivalensrelasjon på hvilket som helst mengde av et topologisk rom:*
1) For hvert rom X, så er identitetfunksjonen: $X \to X$ gitt ved id(x) $=$ x for alle $x \in X$ en homeomorfi.
2) Hvis f: $X \to Y$ er en homeomorfi så er den inversbildet f^{-1}: $Y \to X$ også en homeomorfi.
3 Hvis f: $X \to Y$ og g: $Y \to Z$ er homeomorfier så er den sammensatte funksjonen $g \circ$ f:X $\to$ Z en homeomorfi.

Lemma 12 *$f : X \to Y$ er en bijektiv funksjon mellom to topologiske rom. Da er følgende ekvivalente:*
1) f er en homeomorfi
2)En mengde $U \subset X$ er åpen i X hvis og bare hvis bildet $f(Y) \subset Y$ er åpen i Y.
3)En mengde $V \subset Y$ er åpen i Y hvis og bare hvis inversbildet $f^{-1}(V) \subset X$ er åpent i X.

Eksempel 22 *La de topologiske rommene være $X : [0, 1]$ og $Y = [a, b]$ slik at a<b. Begge to har underromstopologi fra $\mathbb{R}$.*

La $f(x)$ være definert ved $f(x) : a(1 - x) + bx$ med inversavbildningen
$f^{-1}(y) = \frac{y-a}{b-a}$ for $a < b$, slik at a≠b. For at dette skal kunne være en homeomorfi må kravene i forrige lemma 12 oppfylles. Siden a≠b finnes det ingen verdi for a som gjør at $f^{-1}(y)$ blir diskontinuerlig. Det er heller ingen verdi med mellom 0 og 1 som gjør at funksjonen f(x) blir diskontinuerlig. f er en homeomorfi siden bildet f(Y) er åpen i Y og inversbildet $f^{-1}(V)$ er åpen i X.

4.3 Sammenheng og kompakthet

4.3.1 Sammenhengende rom

Definisjon 22 *La C og D være topologiske rom, der $C \cap D = \emptyset$. Den disjunkte unionen, $C \sqcup D$ har inklusjonene:*

$$i_C\colon\ C \to C \sqcup D$$
$$i_D\colon\ D \to C \sqcup D$$

En disjunkt topologi på $C \sqcup D$ er samlingen av undermengder $W \subset C \sqcup D$ slik at $W \cap C$ er åpen i C og $W \cap D$ er åpen i D.

Bemerkning:
Den disjunkte union $C \sqcup D$ blir *koproduktet* av de to rommene C og D.

Et rom X er homeomorf til en disjunkt union på en triviell måte $C \sqcup D$ hvis $C = \emptyset$ eller $D = \emptyset$. Hvis X er homeomorf til $C \sqcup D$ på en ikke-triviell måte, så er både C og D ikke-tom, $C \neq \emptyset$ og $D \neq \emptyset$. Det følger at X er ikke-sammenhengende.

4.3.2 Separasjoner

Definisjon 23 *En separasjon på et topologisk rom X er et par disjunkte, åpne undermengder $U, V \in X$, slik at unionen $U \cup V$=X og snittet $U \cap V \neq \emptyset$. X er sammehengende hvis det ikke finnes en separasjon av X.*

Lemma 13 *Et rom X er sammenhengende hvis og bare hvis de eneste undermengdene av X som er åpen og lukket er X og $\emptyset$.*

Tatt fra ***bemerkningen*** litt opp ser vi da at dette gjelder for underrommene C og D også.

Lemma 14 *Hvis U og V er en separasjon av X, så er X homeomorf til den disjunkte unionen av undermengdene U og V, $X \cong U \sqcup V$.*

Lemma 15 *Hvis $C, D \in X$ slik at $C, D \neq \emptyset$ og $C \sqcup D = X$, så er C og D en separasjon av X.*

I og med at $C \cap D = \emptyset$, så vil de to undermengdene av X ikke dele noen grensepunkter med hverandre.

Eksempel 23 *Det topologiske rommet er gitt ved $X = [-1, 0) \cup (0, 1]$ slik at $X \subset \mathbb{R}$. Dette er ikke en sammenhengende vei. Punktet $x = 0$ for $x \in X$ er ikke definert i X og dermed et lukket punkt som må skille noe. De to mengdene $U, V \in X$ kan utgjøre rommet X slik at $[-1, 0) \in U$ og $(0, 1] \in V$.*

Det er vesentlig å få med seg at det kan finnes en sammenhengende undermengde, men da må A være i en av de to mengdene som er i X slik at $A \in U \subset$ X eller $A \in V \subset$ X.
Hvis undermengdene har minst ett punkt til felles, så vil unionen av undermengdene være sammehengende.

Lemma 16 *Hvis U og V er en separasjon på X og A er en sammenhengende undermengde, så er enten $A \in U$ eller $A \in V$.*

Definisjon 24 *Unionen av en samling undermengder av X som har et punkt til felles vil kalles sammenhengende.*

Et sammenhengende rom ikke har en separasjon. Det vil si at alle punkt i mengden U er definerte, og mengden er kontinuerlig.

Teorem 9 *Det kontinuerlige bildet av et sammenhengende rom er sammenhengende.*

4.3.3 Sammenhengende rom på reelle linje

En konveks undermengde har definisjonen:

Definisjon 25 *En undermengde $C \subset \mathbb{R}$ er konveks hvis to punkter $a<b$ i C slik at det lukkede intervallet $[a,b]$ er en undermengde av C.*

Punktene a og b er hele intervallet mellom a og b inneholdt i mengden C. Definisjonen for begrepet *stjernelik* som er lenger ned i avhandlingen (6.2), bygger på denne definisjonen.

Eksempel 24 *Punktene a, b er inneholdt i $\mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$, og har følgende konvekse undermengder:*
$\emptyset, (-\infty, b], (-\infty, b), [a, \infty), (a, \infty), (a, b), [a, b], (a, b], [a, b)$

$\mathbb{R}$ har ingen ende, hverken i positiv eller negativ retning, så undermengdene kan bli definert etter eget ønske, da det ikke er gitt noen begrensninger.

Eksempel 25 *I $\mathbb{R}$ har vi intervallet $[a, b] \in C$ slik at $C \subset \mathbb{R}$. Følgende undermengder er konvekse: $\emptyset, [a, b], (a, b], [a, b), (a, b)$.*

Figur 11

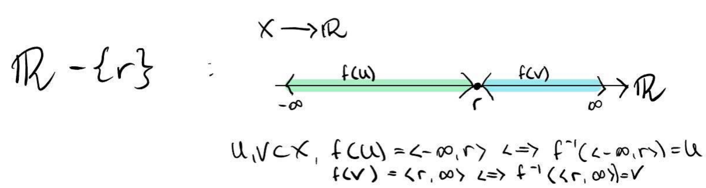
Blå farge indikerer $[a, b]$, rød farge indikerer $(a, b]$, grå farge indikerer (a, b) og grønn farge indikerer $[a, b)$

Det er ikke noen punkt i de forskjellige intervallene som skiller undermengden C. Det gir teoremet:

Teorem 10 *Hver konveks undermengde $C \subset \mathbb{R}$ er sammenhengende.*

Teorem 11 ***Rolles teorem*** **-** *Funksjonen $f : X \to \mathbb{R}$ er en kontinuerlig avbildning, og X er et sammenhengende rom. Hvis $a, b \in X$, er to punkter og $r \in \mathbb{R}$ ligger mellom f(a) og f(b) så eksisterer det et punkt $c \in X$ slik at f(c) $=$ r*

Bevis:
Den reelle linjen blir uttrykt ved $\mathbb{R} - \{r\}$. Avbildningen $f(X)$ for punktene $a, b \in X$ vil være undermengde av $\mathbb{R} - \{r\}$, $f(X) \subset \mathbb{R} - \{r\} = (\infty, r) \cup (r, \infty)$. Da vil $f^{-1}(\mathbb{R}) \subset X$. Punktet r er i midten av disse intervallene, og er ikke med i definisjonsmengden. Undermengdene $U, V \in$ X må danne hvert sitt intervall, $U, V \in X$ slik at $U = f^{-1}((-\infty, r))$ og $V = f^{-1}((r, \infty))$. Begge disse er åpne.



Figur 12

Veisammenhengende rom

Definisjon 26 *$f : \mathbb{R} \rightarrow X$. $x, y \in X$, og $[a, b] \in \mathbb{R}$. Punktene $x, y \in X$ har en vei fra x til y gitt ved avbildningen $f : [a, b] \rightarrow X$ der $f(a) = x$ og $f(b) = y$.*

Som leder til lemmaet:

Lemma 17 *Et veisammenhengende rom er sammenhengende.*

Bevis:
Hvis rommet X ikke var sammenhengende så ville det vært separert slik at omegnene $U, V \in X$ der $x \in U$ og $y \in$V. Avbildningen tar elementene $a, b \in \mathbb{R}$ og lager bilde i X, slik at:
$f : [a, b] \rightarrow X$. Da vil $f(a) = x$ og $f(b) = y$. Rommet er separert så det ville eksistert et punkt i intervallet $f^{-1}(x, y)$, noe det ikke gjør da $f^{-1}(x, y) = [a, b]$ et sammenhengende intervall.

Inversbildet og bildet kontinuerlig. Det gir et nytt lemma:

Lemma 18 *Bildet av et veisammehengende rom under en kontinuerlig avbildning er sammenhengende.*

Bevis:
Fra forrige bevis er funksjonen f gitt ved. $f : \mathbb{R} \rightarrow X$. En ny avbildning, $g : X \rightarrow Y$, slik at $g(f([a, b])) = g \circ f$. Samme begrunnelse som forrige bevis gir et sammenhengende intervall uttrykt ved $f^{-1}(Y)$, og lemmaet følger.

Eksempel 26 *En konveks mengde har alle sine punkter innenfor en undermengde U, og man vil ved alle elementene i U ved avbildning til et annet rom få en bijeksjon. Alle konvekse undermengder er dermed veisammenhengende.*

4.3.4 Kompakte rom

Kompakte rom kommer inn på begrepet *overdekninger* (som også dukker opp i delkapittelet atlas5.1).

Definisjon 27 *En samling av undermengder $C = \{U_\alpha\} \subset X$ dekker hele X slik at unionen av elementene for C er lik X. C kalles en åpen overdekning av X.*

Hvis disse overdekningene er endelige, slik at man kan telle antall overdekninger på rommet X, så sier man at rommet er *kompakt*.

Definisjon 28 *Et rom X er kompakt hvis det for hver åpne overdekning C av X eksisterer en endelig undersamling $F = \{U_{\alpha 1}, ..., U_{\alpha n}\}$ som også dekker X. Med andre ord er X kompakt hvis hver åpne overdekning inneholder et endelig antall underoverdekninger.*

For at et rom skal sies å være kompakt må den inkludere sine endepunkter, og den kan ikke ha noen punkter som er en "*punktering*" for rommet og dens definisjon.

Eksempel 27 *Den reelle linjen $\mathbb{R}$ er ikke kompakt siden denne går fra (-∞ , ∞). Uendeligheten er ikke definert, og dermed ikke en del av definisjonsmengden.*
Hadde disse derimot vært definert, og sagt at skulle være en del av mengden, så hadde den reelle linjen vært kompakt.

Eksempel 28 *Hvert lukket interval* $[a, b] \in \mathbb{R}$ *er kompakt*

For undermengder av et kompakt rom følger definisjonen:

Definisjon 29 *Hvis A er en undermengde av X, så finnes den en samling $\mathcal{D} \in X$ av undermengder som dekker A. Union av elementene i $\mathcal{D}$ inneholder A.*

Lemma 19 *A er en undermengde av X, $A \subset X$. A er kompakt hvis og bare hvis hver overdekning av A, som er åpne undermengder i X, inneholder en endelig undersamling som er inneholdt i A.*

Bevis:
Den kompakte undermengden $A \subset$ X trenger per definisjon en overdekning $\mathcal{D}$ for A som består av åpne undermengder i X. $\mathcal{D} = \{U_\alpha\}$.
For å begrense denne til kun overdekning for A får man (***fra definisjon 28)*** $C = \{A \cap U_\alpha\}$, som er en endelig, åpen overdekning. Den vil per definisjon ha en undersamling $F = \{A \cap U_{\alpha 1} \bigcap ... \bigcap A \cap U_{\alpha n}\}$

Hausdorff rom og kompakte undermengder

Hausdorff rom og kompakte undermengder gir følgende:

Teorem 12 *Hver lukkede undermengde av et kompakt rom er kompakt.*

Bevis:
A er en lukket undermengde i det kompakte rom, $A \in$ X. Elementene i A fremstilles ved $\mathcal{D} = \{U_\alpha\}$ som er overdekninger av A, åpne i X. Komplementet av dette X$-A$ vil utgjøre åpne elementer, siden A er lukket. X har en åpen overdekning $C = \mathcal{D} \cup \{X - A\}.C \subset$ X har en endelig undersamling $\mathcal{F} \in C$, med elementene $\mathcal{F} = \{U_{\alpha 1}, ..., U_{\alpha n}, X - A\}.\{U_{\alpha 1}, ..., U_{\alpha n}\}$ er de åpne overdekningene i A.
$\mathcal{D}$ får en ny undersamling $\mathcal{G} = \{U_{\alpha 1}, ..., U_{\alpha n}\}$, som også dekker $A.A$ er dermed endelig og kompakt.

Teorem 13 *Hver kompakte undermengde av et hausdorff rom er lukket.*

Bevis:
I et hausdorff rom X må to punkter $p, q \in$ X med omegn $U, V \in$ X slik at $p \in U, q \in V$ og $U \cap V = \emptyset$. Hvis $q \in A \subset V$, der $A \in$ X er kompakt, så er $p \in X - A$. I dette tilfellet er $A = \overline{A}$, lik sin egen tillukning.
A inneholder åpne overdekninger: $\{V_q | q \in A\}$, for alle punkter $q \in A$. $A = \overline{A}$:
$A \subset \bigcup_{q \in A} V_q$, der V_q er en endelig undersamling med elementene $\{V_{q1}, ..., V_{qn}\}$ som dekker A. Punktet $p \in$U er samlingen av alle omegn U gitt ved U=$\{U_{p1}, ..., U_{pn}\}$ slik at
$U = \{U_{p1} \cup ... \cup U_{pn}\}$. $U \cap V = \emptyset \Rightarrow U \cap A = \emptyset$, blir den kompakte undermengden $\overline{A} = A$ endelig, og dermed lukket.

Det gir følgende lemma:

Lemma 20 *Hvis X er et hausdorff rom, med kompakt undermengde $A \subset X$ slik at $p \in X - A$, så eksisterer omegnene $U, V \in X$ slik at $p \in U$ og $A \subset V$.*

Eksempel 29 *Fra eksempel 27 er den reelle linjen ikke kompakt da den ikke inneholder sine endepunkter. Det samme gjelder for intervallene $(a, b], [a, b)$ og (a, b), da deres endepunkter heller ikke er med i intervallet.*

Fra lemma18 følger et teorem for kompakte hausdorff rom:

Teorem 14 *Den kontinuerlige avbildningen av et kompakt rom er kompakt.*

Bevis:
Det kompakte rommet X har den kontinuerlige funksjonen $f : X \to Y$. $f(X) \in Y$ vil være et kompakt underrom av Y. Undermengden $C \subset Y = \{U_\alpha\}$ dekker $f(X)$ med åpne undermengder i Y. C har en undersamling $\mathcal{F} = \{U_{\alpha_1}, ..., U_{\alpha n}\}$, $\mathcal{F} \in C$.
Alle element i X gir en avbildning $f(X) \in Y$, og da vil det for alle elementer i $f(X) \in Y$ gi en avbildning i X, som dekker X: $\{f^{-1}(U_\alpha)\}$ med elementene $\{f^{-1}(U_{\alpha 1}), ..., f^{-1}(U_{\alpha n})\}$. Overdekningen er endelig, og den kontinuerlige avbildningen er kompakt.

Eksempel 30 *Selv om den kontinuerlige avbildningen av et kompakt rom er kompakt, trenger ikke inversbilde å være kompakt. Ved $\mathbb{R} \to \{0\}$ har vi en avbildning, der $\mathbb{R}$ ikke er kompakt, men $\{0\}$ er et kompakt rom.*

Lokal kompakthet

Begrepene *lokal euklidsk og kompakthet* forekommer i kapittelet om mangfoldigheter.

Teorem 15 *Et rom X er lokalt kompakt for x hvis det finnes et kompakt underrom C av X med omegn V av x slik at*

$$x \in V \subset C \subset X$$

Hvis den er lokalt kompakt for hvert av punktene, så er rommet X lokalt kompakt.

Eksempel 31 *Hvert kompakte rom er lokalt kompakt.*
Hvis et rom er kompakt så kan det deles i mindre underrom, som igjen kan deles i undermengder, som igjen kan deles i omegn for et punkt som går igjen i alle delingene.

Eksempel 32 *Et lokalt kompakt rom trenger ikke nødvendigvis være kompakt.*
For den reelle linja $\mathbb{R}$, som ikke er et kompakt rom har vi for hvert punkt $x \in \mathbb{R}$ en undermengde $C = [x-1, x+1]$, som igjen har et omegn $V = (x-1, x+1)$.

$$x \in V \subset C \subset \mathbb{R}$$

Eksempel 33 *Det samme gjelder det Euklidske n-rommet $\mathbb{R}^n$. For hver $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}$ finnes det et underrom*

$$C = [x_1 - 1, x_1 + 1] \times ... \times [x_n - 1, x_n + 1]$$

med omegn

$$V = (x_1 - 1, x_1 + 1) \times ... \times (x_n - 1, x_n + 1)$$

hausdorff følger proposisjonen:

Proposisjon 3 *La $X \subset Y$ være et underrom av et kompakt hausdorff rom, slik at $Y - X$ inneholder kun ett punkt. Da er X lokalt kompakt.*

Bevis:
Rommet Y er kompakt og hausdorff følger at rommet X er kompakt og hausdorff. De åpne omegnene U, V har punktene $x \in U \subset X$ og $y \in V \subset Y$ og $U \cap V = \emptyset$. Underrommet $C = Y - V$ sier at U er lukket. Punktet $x \in U$ gir at U er lokalt kompakt, og

$$x \in U \subset C \subset \mathrm{X}.$$

Korollar - *La X være et lokalt kompakt hausdorff rom. Hvis $A \in X$ er et åpent eller lukket underrom, så er A lokalt kompakt.*

Bevis:
Hvis A er åpen i X, finnes det en $x \in A$ med en omegn V slik at $x \in V$. Denne omegnen har en tillukning, $\overline{V}$, som er kompakt, og inneholdt i A.

$$x \in C \subset A \subset \mathrm{X}.$$

Kapittel 5

Mangfoldighet

5.1 Chart, atlas og overgangsavbildning

I matematikken er *chart* fremstilt i flere forskjellige former og det brukes for å kunne modellere noe matematisk. I mangfoldigheter vil systemet være et koordinatsystem med en parametrisering av den gjeldende mengden, gitt ved M. Koordinatsystemet skal uttrykke de små punktene på en liten omegn på en mangfoldighet M **(Rowland, Todd., (u.å.))**[13]. Det gir:

$$x \in U \subset M$$

der koordinatsystemet uttrykker alle $x \in U$ som er en undermengde av mangfoldigheten M. Mangfoldigheten trenger en homeomorfi, ϕ, uttrykt ved:

$$\phi \colon U \to V,$$

slik at U er åpen i M og V er åpen i $\mathbb{R}^n$, med $n-$dimensjon av mangfoldigheten.

$\mathbb{R}$ er i dette tilfellet det euklidske rommet som avbildningen treffer, altså kodomenet. ϕ er en homeomorfi, så avbildningen må være en bijeksjon.

To omegner U_1 og U_2 har homeomorfiene ϕ_1 og ϕ_2, slik at *overgangsavbildningen* er definert ved $\phi_2 \circ \phi_1^{-1}$ Dette er vist i figur 13.

Flere kart/koordinatsystem og homeomorfier vil gi et *altas* **(Rowland, Todd., (u.å.))**[14]. Et atlas er en samling av kontinuerlige koordinatsystemer på en mangfoldighet. Det vil si at overgangsfunksjonene er *glatte*. Atlas korresponderer til en samling av avbildninger, der hver avbildning viser en del av en mangfoldighet. Delene vil se ut som et flatt euklidisk rom.
Definisjonen for atlas er gitt ved:

Definisjon 30 *Et atlas på en mengde M er en indeksert samling* $\{U_\alpha, \phi_\alpha | a \in I\}$,
på systemer på M slik at $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha = M$

I følge definisjonen til Antoni Kosinski **(Kosinski, 1993, s.1)**[15] blir atlas og koordinatsystem framstilt slik:

Definisjon 31 *La M være et topologisk rom. Et koordinatsystem i M inneholder en åpen undermengde $U \subset M$ og en homeomorfi ϕ fra U til en åpen undermengde på det euklidske rommet $\mathbb{R}^m$, $\phi : U \to \mathbb{R}^m$. C^r er et atlas på M og er en samling $\{U_\alpha, \phi_\alpha\}$ av koordinatsystemer slik at U dekker M. $\phi_1 \circ \phi_2^{-1}$ er overgangsavbildningen for de gjeldende systemene.*

r som en eksponent av C^r forteller oss hvor mange ganger man kan derivere overgangsavbildningene, også kalt r-kontinuerlige-glatte derivasjoner.

En annen definisjon:

Definisjon 32 *Et n-dimensjonalt atlas på M er samlingen av koordinatsystemer $\{U_\alpha, \phi_\alpha\}_{\alpha \in I}$ slik at:*
$\cdot M$ er tildekket av $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$
$\cdot$ For hver $\alpha, \beta \in I$, så er $\phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ åpen i $\mathbb{R}^n$
$\cdot$ Avbildningen $\phi_\beta \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ er C^∞ med C^∞ invers.

Overgangsavbildningen på et atlas får fram en begrensning ved sammenligning av to eller flere systemer, siden et atlas gjerne består av flere systemer. Her er et eksempel:

Eksempel 34 *Verden i seg selv er mengde, og alle kontinenter kan sees på som atlas. Samlingen av alle kontinenter som utgjør altså verden. Disse kontinentene har undermengder, som kan er land. Ved å finne begrensningen til Russland i Europa, som over Asia og Europa så kan man få en overgangsavbildning mellom hver av systemene i atlaset og sammenligne disse. Det blir seende slik ut:*

$$\begin{gathered} \textit{Verden} = V\textit{, vårt rom} \\ \textit{Atlas} = \{\textit{Europa, Afrika, Nord-Amerika, Sør-} \\ \textit{Amerika, Antarktis, Australia}\} \end{gathered}$$

I dette tilfellet er hver mengde i atlas et system. Begrensningen til Russland i Europa uttrykkes slik:

$$\begin{gathered} \textit{Europa} \subset V\textit{, Europa som} \\ \textit{undermengde av verden } V \\ \textit{Russland} \cap \textit{Europa} = \textit{Nord-Russland} \end{gathered}$$

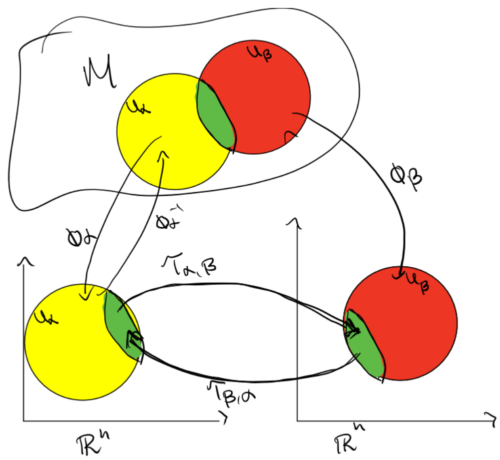
Begrensningen til Russland i Europa utgjør kun Nord-Russland. Snittet til Russland og Europa gir en klar begrensning om hva som er hvor.

Man ser hvordan man kan ta i bruk en overgangsavbildning, og hva den er nyttig for.
En *overgangsavbildning* er sammenligningen mellom homeomorfiene i to separate, overlappende systemer. Mangfoldigheter gir to separate, overlappende koordinatsystem **(Rowland,T., (u.å.))**[16]. Beskrivelsen av mengdene blir endret i hvert koordinat. Avbildningen beskriver også hvordan man kan gå fra et koordinatsystem α til et annet koordinatsystem β. Hvordan man får denne overgangsfunksjonen/avbildningen, kan visualiseres:

Eksempel 35 *La et atlas gå over mengden M, som innebærer forskjellige systemer. To av disse systemene er U_α og U_β. Sammenligning av U_α og U_β gir en avbildning fra det ene systemet sammen med inversavbildningen til det andre systemet.* ***Definisjon 32*** *følger og overgangavbildningen vil bli:*

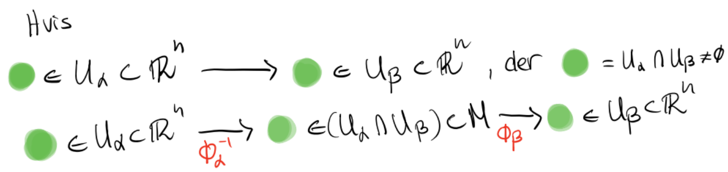
$$\tau_{\alpha,\beta} = \phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}$$

Ved bruk av figur og illustrasjon ser det slik ut:



Figur 13

Hvis ϕ er en homeomorfi så må alle punktene i domenet treffe alle punkt i kodomenet ved avbildning. Dette er tilfellet i **figur 13 (5.1)**.
En overgangsavbildning krever at systemene er overlappende, slik overgangsavbildningen sammenligner homeomorfien i disse. Det trengs et krav om at $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ som er markert med grønn i figuren.
Enda et formål for overgangsavbildning er at man skal kunne gå fra et punkt i et koordinatsystem α til et annet punkt i et annet koordinatsystem β via en funksjon. Ved å gå fra grønn merket i U_α til grønn merket i U_β, må man ta veien ved å først ta ϕ_α^{-1}, som går fra $\mathbb{R}^n \to U_\alpha \subset M$. For å komme videre til det grønne merket i U_β må man gå gjennom enda en avbildning, ϕ_β, som går fra $U_\beta \to \mathbb{R}^n$. Ved illustrasjon ser det slik ut:



Figur 14

Ved første avbildning må man sammenlignet med figur 13 (5.1), ta avbildningen som er ϕ_α^{-1}, og videre ta avbildningen ϕ_β. Dette er en sammensatt avbildning som kan skrives som:

$$\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}$$

Denne overgangsavbildningen kan skrives, som i **definisjon 30**: $\phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$, der $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$

Noen få kommentarer til **figur 13**: Det er viktig å påpeke at denne avbildningen skal vise hvordan mangfoldigheten kan framstilles i form av $\mathbb{R}^n$, og ikke som to mengder inneholdt i $\mathbb{R}^n$. Homeomorfien skal altså for U_α framstilles som: $\phi_\alpha : U_\alpha \to \phi_\alpha(U_\alpha)$, der $\phi_\alpha(U_\alpha) \subseteq \mathbb{R}^n$.

Figuren er en framstilling på hvordan denne avbildningen skjer, og for å vise at både U_α og U_β havner i $\mathbb{R}^n$, og at de to sammen er hele $\mathbb{R}^n$, der overgangsavbildningen skjer ved snittet av de to: $U_\alpha \cap U_\beta$.

For atlas finnes tilfeller der to atlaser sies å være *kompatible*. Kompatible atlas blir gitt ved definisjonen:

Definisjon 33 *To atlaser $A = \{U_a,\phi_a\}$ og atlas $B = \{U_b,\phi_b\}$ er kompatible hvis unionen av disse to også er et atlas.*

Begrepet *maksimal atlas* kan introduseres: **(Kosinski, 1993, s.2)**[15].

Definisjon 34 *Et maksimalt altas C^r på M er også kalt en C^r-struktur, og det er unionen av alle atlas som er kompatibel med seg selv.*

Et atlas $A = \{U_a, \phi_a\}$ og atlas $B = \{U_b, \phi_b\}$ er kompatible hvis $A \cup B$ er et atlas. Da må enten $A \subseteq B$, eller $B \subseteq A$. I første tilfellet ville ikke A vært et maksimalt atlas, og i det andre tilfellet ville ikke B vært et maksimalt atlas.

Eksempel 36 $A = \{U_a, \phi_a\}$
$B = \{U_b, \phi_b\}$ er kompatibel hvis $A \cup B = \{U_c, \phi_c\}$. A er maksimalt hvis $A \cup B = \{U_a, \phi_a\}$. Det vil si at alle element som er i B også er i A, og $B \subseteq A$.

Følgende proposisjon sier dette om en homeomorfi **(Hitchin,(2014), s.10)**[20] :

Proposisjon 4 *$\phi_\alpha : U_\alpha \to \phi_\alpha(U_\alpha)$ er en homeomorfi*

Bevis:
Definisjon 32 og følgende fra kapittelet om chart:

$$x \in U \subset M$$

$U_\alpha \subset M$, med undermengden $V \subseteq U_\alpha$. Siden U_α er åpen er V åpen. $V = U_\alpha \cap V \Rightarrow \phi(V) = \phi(U_\alpha \cap V)$. ϕ er en homeomorfi, så $\phi^{-1}(V)$ er kontinuerlig.

$W \subset \phi_\alpha$ er åpent i kodomenet. Da må $\phi^{-1}(W) \subseteq U_\alpha$ for at det skal være en bijeksjon åpen i M. Bruk av definisjon 32 gir:

$$\phi_\beta\phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$
$$\phi^{-1}(W) \subseteq U_\alpha \implies \phi_\beta(\phi^{-1}(W) \cap U_\beta) = \phi_\beta\phi_\alpha^{-1}(W \cap \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

at overgangsavbildningene er åpen, og kontinuerlige.

5.1.1 Mangfoldighet

En mangfoldighet er et topologisk rom M som i sitt område ligner på $\mathbb{R}^n$. Det blir enklere å snakke om koordinatakser rundt M **(Planetmath,(2013))**[17]. Rundt hvert punkt i rommet eksisterer en omegn som topologisk sett er en åpen enhetsball i $\mathbb{R}^n$ **(Rowland, T., (u.å.))**[18]. M er en topologisk mangfoldighet av dimensjon n for hver $x \in M$, med en omegn U slik at $x \in U$, homeomorf til en åpen mengde av $\mathbb{R}^n$. **(Encyclopedia of mathematics, (2021))**[19]. Definisjonen for mangfoldighet er:

Definisjon 35 *En n-dimensjonal topologisk mangfoldighet, M er et andre tellbart (på engelsk: second countable), hausdorff rom som er lokalt homeomorf til åpne undermengder av* $\mathbb{R}^n$.

For at et rom skal være andre-tellbart så må det oppfylle denne definisjonen:

Definisjon 36 *Et rom M har en tellbar basis hvis det er en tellbar samling* $\mathcal{B}$ *av undermengder på M som er en basis for topologien på X.*
Hvis dette er tilfellet så er M andre-tellbar ***(Planetmath, (2013))****[17].*

Definisjonen tellbar kan være uendelig, men hvis man kan ta en homeomorfi fra mangfoldigheten (noe man kan) slik at det havner i mengden med naturlige tall $\mathbb{N}, U \in M \to \mathbb{N} \in \mathbb{R}^n$. Et annet ord å beskrive tellbar er hvis kardinaliteten for mengden M ikke er høyere enn mengden naturlige tall, $\mathbb{N}$.

I topologien er en mangfoldighet enten kompakt eller ikke-kompakt og sammenhengende eller ikke-sammenhengende (definisjon for disse står i topologikapittelet) **(Rowland,T., (u.å.))**[18]. En mangfoldighet i generell tale så menes det en lukket mangfoldighet med grenser. Et eksempel er en lukket enhetsball i $\mathbb{R}^n$, som er mangfoldighet med grensepunkter, der grensa er enhetssfæren.
Begrepet åpen mangfoldighet, vil være en ikke-kompakt mangfoldighet uten grenser.

Definisjon 33 og definisjon 34 nevner begrepent *kompatibel*. Siden atlasene er kompatible med en homeomorfi så må de være *glatte*, eller deriverbare på sine områder. Siden A og B er kompatible, så kan man si at disse har en ekvivalensrelasjon **(Hitchin,(2014), s.9)**[20], og dermed en differensiabel struktur på M som følger definisjonen:

Definisjon 37 *En differensiabel struktur på M er en ekvivalensklasse av atlaser.*

Dette gir nok en definisjon om mangfoldighet **(Hitchin,(2014), s.9)**[20]

Definisjon 38 *En n-dimensjonal, differensierbar mangfoldighet er et rom M som har en deriverbar struktur*

En mangfoldighet er bestående av atlas, og for å bevise en mangfoldighet trenger man å finne et atlas. Man kan bruke kun atlas til å vise at et rom er en mangfoldighet. (*Her er det greit å påpeke at ikke alle topologiske rom er en mangfoldighet, men alle mangfoldigheter er et topologisk rom*).

Mangfoldigheten M kan vise at dens undergrupper U_α der $\alpha \in I$, oppfyller kravene for topologi:

M er en mangfoldighet. Kapittelet om *charts* sier at punktene x i en undermengde $U \subset M$ er uttrykt i en omegn, og ved homeomorfi. Undermengdene U_α er åpent i M.
La $V \in$ M, hvis den for hvert element med homeomorfi, $\phi_\alpha(U_\alpha \cap V)$ så fins en åpen mengde i $\mathbb{R}^n$ (Tatt fra kapittelet om chart). Figur 13(5.1) med homeomorfiene, viser at det finnes en homeomorfi som gir en åpen mengde i $\mathbb{R}^n$. Definisjon 32, viser at V er åpen i $\mathbb{R}^n$ hvis den oppfyller kravene som er for en topologi (Som står i topologikapittelet).

Aller først kan det være greit å sjekke at **krav 1** om at $\emptyset$ og M er åpne stemmer. En homeomorfi for alle $x \in U \subset M : \phi_\alpha$ er åpen i $\mathbb{R}^n$. Det impliserer at alle $x \in U_\alpha$ er åpen.

Den tomme mengde: $\phi(\emptyset) = \emptyset$ er åpen.
Mangfoldigheten $M : \phi(M \cap U_\alpha) = U_\alpha$, som er åpen. Tredje kravet for topologi sier at snittet av to mengder i topologien skal bli en mengde i topologien noe som er tilfellet, da U_α er en åpen undermengde, og er med i topologien.

Krav 2 og krav 3 setter argumentasjonen slik:
Ved en homeomorfi, så fins det for hver $x \in U_\alpha$ en avbildning ϕ som er i en åpen undermengde i $\mathbb{R}^n$.

Hvis det finnes en åpen undermengde $V_i \subset M$, så vil det også finnes en homeomorfi $\phi_\alpha : (V_i \cap U_\alpha)$, som er åpen i $\mathbb{R}^n$. For å vise at V_i er åpen: V_i er en samling av åpne mengder i M. ϕ_α er bijektiv i M. Unionen av alle elemententer i $V = \bigcup V_i . V \cap U_\alpha$ gir $(\bigcup V_i \cap U_\alpha) = (V_1 \cap U_1) \bigcap ... \bigcap (V_i \cap U_\alpha)$ en samling av åpne snitt. Homeomorfien $\phi_\alpha(\bigcup V_i \cap U_\alpha) = \cup \phi_\alpha(V_i \cap U_\alpha)$, gir unionen av snittet til U_α og V.

$\bigcap V_i$ undermengdene til V og snittet deres. $(\bigcap V_i \cap U_\alpha)$ gir snittet til U_α og $\bigcap V_i$
Homeomorfien $\phi_\alpha(\bigcap V_i \cap U_\alpha)$ gir avbildningen til felleselementene slik at:
$\phi_\alpha(\bigcap V_i \cap U_\alpha) = \cap \phi_\alpha(V_i \cap U_\alpha)$ er snittet av alle homeomorfier i $\mathbb{R}^n$

For $\cap \phi_\alpha(V_i \cap U_\alpha)$ og $\cup \phi_\alpha(V_i \cap U_\alpha)$ har høyresiden snitt og union av to åpne mengder, som kan tas på homeomorfi på, og dermed også er en åpen mengde i $\mathbb{R}^n$. Krav 2 og krav 3 er oppfylt, og M er bevist et topologisk rom.

Siden avbildningen skal gå fra $U_\alpha \subset M \to \mathbb{R}^n$, så er begrepet *metrikk* relevant, da det er dette som gjerne blir framstilt i et koordinatsystem. En mangfoldighet må derfor ha disse kravene: **(Hitchin,(2014), s.10)**[20](*som for øvring er nevnt i definisjon 35 og definisjon 36*):
· *Mangfoldighettopologien er hausdorff.*
· *I denne topologien har vi tellbare basiser av åpne mengder.*

5.1.2 Grense - boundary

En åpen mangfoldighet er en ikke-kompakt mangfoldighet uten grense, og en lukket mangfoldighet mer en kompakt mangfoldighet med grense **(Rowland,T., (u.å.))**[18].

Begrepet *grense* går litt inn på kompakthet. En mangfoldighet M er kompakt hvis atlaset (U_α, ϕ_α) har et endelig underatlas som også dekker til hele M. Rommet stopper et sted, siden undermengdene av U_α dekker M

Et eksempel er en lukket enhetsball i $\mathbb{R}^n$. Dens radius er lik 1, og tillukningen er randen. Randen vil forme en sfære, med radius lik 1 - enhetssfære. **(Rowland,T., (u.å.))**[18]. Punktene på mangfoldigheten $p \in M$ har en omegn med en homeomorfi ϕ til en åpen ball i $\mathbb{R}$, slik at det er en *grense/boundary*. Grense og mangfoldighet med grense gir definisjonen for mangfoldighet, men med en liten vri:

Definisjon 39 *En topologisk mangfoldighet M med grense er en andre tellbar hausdorff rom som er lokal homeomorf til H^n. Dens grense ∂, er $(n-1)$ mangfoldigheten som innebærer alle punkt avbildet til x_n=0 av et kart, og dets interiør Int M er mengden med punkt som er avbildet til $x_n > 0$ ved et kart.*

H^n kalles et halvrom, som er halvparten av rommet til $\mathbb{R}^n$ gitt ved positive x-verdier. Definisjonen sier at noen av punktene er avbildet til x_n som impliserer at halvrommet, H^n starter ved $x = 0$. For to dimensjoner, $\mathbb{R}^2$, så er H^n begrenset til å være $x \geq 0$, og $-\infty < y < \infty$. Dens mengde uttrykkes ved: $\mathrm{H}^n : \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n | x_n \geq 0\}$

En annen definisjon er :

Definisjon 40 *En n-dimensjonal mangfoldighet med grense er en mengde M med samling undermengder U_α og avbildningen*

$$\phi_\alpha : U_\alpha \to H^n = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n | x_n \geq 0\}$$

slik at
$\cdot M = \cup_\alpha U_\alpha$
$\cdot\ \phi_\alpha : U_\alpha \to \phi_\alpha(U_\alpha)$ *er en bijeksjon på en åpen mengde av* H^n *og* $\phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ *er åpen for alle* α, β
$\cdot \phi_\beta \phi_\alpha : \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ *er en restriksjon av en* C^∞ *avbildning fra en omegn av* $\phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \subseteq H^n \subset \mathbb{R}$ *til* $\mathbb{R}$.

Grensen ∂M av M er definert ved :

$$\partial M = \{x \in M | \phi_\alpha(x) \in \{(x_1, ..., x_{n-1}, 0) \in \mathbb{R}^n\}$$

der kartene strukturerer en $(n-1)$-mangfoldighet på ∂M.

$(n-1)$-mangfoldigheten og dens struktur kommer som følge av at det først og fremst finnes et halvrom, men også å finne en grense der man tar bort den ene dimensjonen, for å se hvor punktet vil treffe aksen i ene tilfellet **(Hitchin,(2014), s.64)**[20].

Eksempel 37 *1) Ved halvrommet, eller halvplanet H^n, så er dens grense for $x_n = 0$, der H^n er mangfoldigheten.*
2) Ved enhetsballen $S^n : \{x \in \mathbb{R}$ slik at $||x|| \leq 1\}$, en mangfoldighet, som har grense S^{n-1}

Definisjon 40 sier at grensen er en (n−1) -mangfoldighet som innebærer punkt avbildet til $x_n = 0$ der interiøret er mengden punkt som er avbildet til $x_n \geq 0$.
En enhetsball, som ved første dimensjon har form som en enhetssirkel gitt ved formelen $x^2 + y^2 = 1$ og radius 1 har i første dimensjon avdekket både x og y-verdier som kan indikere at en flat sirkel må være i dimensjon 2 for det euklidske rom.

Eksempel 38 *En disk, $x^2+y^2 \leq r^2 \subset \mathbb{R}^2$ med radius r har dens grense gitt ved kun randen: $x^2 + y^2 \leq r^2$. Ekskludering av nordpolen på disken, $(0, 1)$, vil vi gi et linjestykke gitt ved $l = \pi * r \subset \mathbb{R}$. Randen er gitt ved en dimensjon lavere enn disken.*
Vi tar et punkt (0,1), der vi tenker at vi trekker den ned til x-aksen$\subset \mathbb{R}$, som da vil gå over radiusen som er satt for disken, og disken vil da være homeomorf med $\mathbb{R}$.

$$x^2 + y^2 = r^2 \simeq \mathbb{R}$$

Eksempel 39 *Sylinderen $I \times S^2$ er en 2-dimensjonal mangfoldighet der grensa er unionen av to sirkler, og en union med to komponenter.*
Det kan hjelpe å visualisere to like store sirkler der randen deres er radiusen, r. For en 1-dimensjonal mangfoldighet, sier forrige eksempel at har dimensjon to i det euklidske planet, $\mathbb{R}^2$, og oppfattes som en flat overflate. I en 2-dimensjonal mangfoldighet vil en eventuell sirkel bli til en kule, eller en sylinder. Dette skjer ved at vi har:
$C_1 : \{x_1, y_1 | x_1^2 + y_1^2 = r\}$ *der r er randen.*
$C_2 : \{x_2, y_2 | x_2^2 + y_2^2 = r\}$ *der r er randen.*
$C_1 \times C_2 \subset \mathbb{R}^2$*, og fra kapittelet om sammenhengende rom sier at unionen av to mengder i et separert rom vil bli et sammenhengede rom hvis snittet av de er ulikt det tomme rom. Her vil* $C_1 \cap C_2 = \{r\}$*, grensepunktet for sirklene, og det vil bli et sammenhengende rom, som former sylinderen. Hvis intervallet for sylinderen er på det reelle plan,* $I \in \mathbb{R}$*, så er* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^3$.

Kapittel 6

Differensierbare mangfoldigheter

6.1 Deriverte av glatte funksjoner

En reell funksjon $f(x_1, \ldots, x_n)$, er differensierbar hvis den partiellderiverte av alle orden eksisterer. Da er funksjonen kontinuerlig. Avbildningen er deriverbar hvis dens koordinatfunksjoner er deriverbar. Hvis alle $x \in U$ og alle $f(x) \in V$ er deriverbare, for $f : U \to V$, så er avbildningen deriverbar og kontinuerlig. **(Princeton University,(1958) s.2)**[21].

Hvis det i dette tilfellet finnes en funksjon som har alle disse partiell differensierbare avbildninger og er uendelig deriverbar, C^∞, så kalles funksjonen eller avbildningen *glatt* **(Weisstein,E.W., (u.å))**[22]. Dette følger av at domenet har et område der alle element er definert, og at alle bilder i kodomenet gjennom en avbildning er definert. Det gjelder intervaller som $[a, b]$ eller (a, b).

Ved derivasjon går avbildningen som skal til for å gi et definert bilde i kodomenet til en lavere dimensjon.

Eksempel 40 *Derivasjon av f(x)=2x $\in \mathbb{R}^2$, vil vi være f'(x)=2, der 2 kun er på tallinja, altså $f'(x) \in \mathbb{R}$:*
$f'(x)$ gis ved en funksjon $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Dette gjelder for alle deriverte funksjoner, avbildningen i den åpne undermengden $A \in \mathbb{R}^2$, og $f : A \to \mathbb{R}$ viser dens verdi, eller kodomene $f(x) = f(x_1,\ldots,x_n)$ for alle $x = (x_1, \ldots, x_n) \in A$. **(Boothby,(1975) s.21)**[23]

Hvis avbildningen skal ha en definisjon så må en åpen undermengde $U \in \mathbb{R}^n$, og for hver punkt $a \in U$ eksistere en partiell derivativ, $(\partial f/\partial x_j)_a$, av f med hensyn på x_j. Tatt fra definisjon om partiell derivasjon generelt, vil gi denne definisjonen:

$$(\partial f/\partial x_j)_a = \lim_{h\to 0} \frac{f(a^1,\ldots,a_j+h,\ldots,a_n)+f(a_1,\ldots a_j,\ldots,a_n)}{h}$$

For å få denne definert så må denne avbildningen for hvert punkt $a \in U$ for $1 \leq j \leq n$ få en grenseverdi, der n er antall funksjoner på U. Hvis punktene er kontinuerlig for dette kravet så er f kontinuerlig deriverbar på U, og blir notert som $f \in C^\infty(U)$

Det vil også være tilfeller med en funksjon som går an å derivere, men som ikke er kontinuerlige i alle punkt:

Eksempel 41 $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$*, for* $(0,0)$
Er ikke definert i punktet $(0,0)$*, men går an å derivere.*

Det er nødvendig med en mer utfyllende definisjon for differensierbar funksjon, tatt utgangspunkt i den deriverte, eller partiell deriverte. Når man deriverer finner man vekstfart i et punkt gitt ved et stigningstall b. Denne vekstfarten kan ligge i et punkt i kartet, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ for et todimensjonalt euklidsk plan. Vekstfarten som en tangent med stigningstall b kan uttrykkes ved *ettpunktsformelen*:

$$y - y_1 = b(x - x_1), \text{ eller}$$
$$f(x) - f(a) = b(x - a)$$

der a er inneliggende i domenet eller x-verdien i (x,y). $f(a)$ blir avbildningen og b er stigningstallet.

Mer generelt er b et uttrykk for den partiell deriverte, som er med på å gi det lineære uttrykket **(Boothby,(1975) s.21)**[23]:

$$\sum_{i=1}^{n} b(x^i - a^i)$$
$$\Rightarrow$$
$$f(x) - f(a) = \sum_{i=1}^{n} b_i(x^i - a^i)$$
$$\Rightarrow$$
$$f(x) - f(a) - \sum_{i=1}^{n} b_i(x^i - a^i) = 0$$

Ettpunktsformelen med fokus på å uttrykke stigningstall b vil gi:

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = b$$

subtraksjon av b på begge sider og innføring av fellesnevner gir:

$$\frac{f(x)-f(a)-\sum_{i=1}^{n} b(x-a)}{(x-a)} = 0$$

$(x-a)$ er avstanden mellom x og a og uttrykkes som:

$$\frac{f(x)-f(a)-\sum_{i=1}^{n} b^i(x^i-a^i)}{||x-a||} = 0$$

Siden tangenten må eksistere for at en funksjon skal være deriverbar og kontinuerlig, så må det eksistere et punkt som $f(x)$ tilnærmer seg, som i dette tilfellet er a. Et generelt uttrykk for en kontinuerlig, deriverbar funksjon gis ved:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)-\sum_{i=1}^{n} b_i(x^i-a^i)}{||x-a||} = 0$$

Dette er en modellering av en grenseverdi der x går mot a og $f(x)$ går mot $f(a)$. I startverdien, x, vil $f(x)$ være definert ved:

$$f(x) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x^i - a^i)$$

Det trengs en verdimengde som kan være med på å avgjøre verdimengden til $f(x)$ avhengig av avstanden mellom x og a. For $f(x)$ må man addere selve avstanden for x-aksen, $||x-a||$, men også multiplisere dette med hvert parvise (x, a) som eksisterer. Satt i en funksjon som framstiller dette ved en omegn V med $a \in U$ vil gi:

$$f(x) = f(a) + \textstyle\sum_{i=1}^{n} b_i(x^i - a^i) + ||x-a||r(x,a)$$

der $r(x, a)$ slik at x er et punkt med radius a,

$$\lim_{x \to a} r(x, a) = 0$$

Hvis disse kravene eller grenseverdien blir oppfylt så er f er differensierbar for alle $a \in U$ på U.

Stigningstall b har fått sitt uttrykk, $b = \frac{\partial f}{\partial x^i}^{a}$, og proposisjonen følger:

Proposisjon 5 *Hvis $\partial f/\partial x_1, ..., \partial f/\partial x_i$ er definert i en omegn av a og er kontinuerlig på a, så er også f differensierbar i a.*

C^{∞} (som er forklart i glatt mangfoldighet-kapittelet) gir en uendelig mange ganger deriverbar funksjon. Ved for eksempel C^r så vil funksjonen være deriverbar r-antall ganger. I dette tilfellet vil funksjonen være deriverbar på et lite avgrenset område for avbildningen til en mangfoldighet.

Eksempel 42 *For eksempel mellom et intervall $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$ med $f : (a, b) \to \mathbb{R}^n$, og $f(t) = \{x_1(t), ..., x_n(t)\}$ der koordinatfunksjonene $\{x_1(t), ..., x_n(t)\}$ er C^r differensierbar.*

Hvis f gir en differensierbar kurve med avbildning til $U \in \mathbb{R}^n$, kan man denne måten bli introdusert for en sammensatt funksjon og den deriverte av dette:

Et eksempel på dette kan være:

$$\begin{gathered}\text{For } (a, b) \in \mathbb{R},\ f\text{:}(a, b) \to U \in \mathbb{R}^n \\ \text{med funksjonen } g \in \mathbb{R}^n \text{ får vi} \\ g \circ f, \text{ for verdiene i intervallet } (a, b)\end{gathered}$$

Den deriverte for dette vil først være en partiell differensiert av g, men også dette multiplisert med derivert av $f, f'(x)$. Skrevet som **(Boothby,(1975) s.23)**[23]:

$$\begin{gathered}\text{For } a < t_0 < b, \text{ vil } g \circ f : \\ \tfrac{d}{dt}(g \circ f)_{t_0} = \textstyle\sum_{i=0}^{n} (\tfrac{\partial g}{\partial x_i})^{f(t_0)} (\tfrac{dx_i}{dt})^{t_0}\end{gathered}$$

Dette er *kjerneregelen* for deriverte av en sammensatt funksjon.

6.2 Derivativ av en glatt avbildning og undermangfoldighet

I forrige kapittel var den deriverte for en avbildning gitt ved $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.
En Jacobimatrise har deres elementer framstilt ved partiell deriverte $\frac{\partial f^m}{\partial x^n}$, der $x \in \mathbb{R}^n$ og $f(x) \in \mathbb{R}^m$ ved avbildningen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.Videre når man går fra den deriverte av en funksjon til en avbildning vil man ha framstilt ved en Jacobimatrise. Alle disse partielt deriverte kan framstilles i en Jacobi matrise **(Boothby,(1975) s.26-s.28)**[23]:

$$\mathrm{J}f(x) = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$$

Matrisen framstiller alle de partiell deriverte for en funksjon f på punkt $x \in U$. Forrige delkapittel gir at en funksjon ikke nødvendigvis er kontinuerlig selv om den er differensierbar, men hvis f er i klasse C^∞ så er den kontinuerlig. Avbildninger har følgende definisjon::

Definisjon 41 *En avbildning f: $U \to \mathbb{R}^m$, for en åpen undermengde $U \in \mathbb{R}^n$, er differensierbar på $a \in U$ hvis og bare hvis det eksisterer en $m \times n$- matrise A av konstanter eller funksjoner på U, og en m-tuple $R(x,a) = (r^1(x,a), r^2(x,a), ..., r^m(x,a))$ av funksjoner definert på U slik at $||R(x,a)|| \to 0$ når $x \to a$, og for hver $x \in U$ er har man*

$$f(x) = f(a) + A(x-a) + ||x-a||R(x,a)$$

Hvis $R(x,a)$ og A eksisterer, så er A unik og A er jacobimatrisen.

Begrepet *stjernelik* blir introdusert. Når et domene, U, eller en undermengde er stjernelik med respekt til et punkt $a \in U$ og det finnes et annet punkt $x \in U$, så danner det et linjesegment $l = \overline{ax}$ der hele segmentet er inneholdt i $U, l \in U$.
Videre bygging på stjernelik gir følgende teorem for differensierbare avbildninger:

Teorem 16 *La $a \in U$ være en åpen undermengde i $\mathbb{R}^n$ som er stjernelik med respekt til a, og la $F : U \to \mathbb{R}^m$ være differensierbar på U med $|\frac{\partial f^i}{\partial x^j}| \le K$,
$1 \le i, j \le k$ for hvert punkt i U. Vi får følgende ulikhet for alle $x \in U$:*

$$||F(x) - F(a)|| \le (nm)^{1/2}K||x-a||$$

Ved å bruke DF som jacobimatrisen, og DF(x) for et element i matrisen, der F er differensierbar ved x, så vil man få:

$$F(x) = F(a) + DF(a)(x-a) + ||x-a||R(x,a)$$

F er kontinuerlig differensierbar, C^∞ hvis og bare hvis DF(x) varierer kontinuerlig med x, og $x \to DF(x)$ er en kontinuerlig avbildning av U på rommet $M(m,n)$ av $m \times n$- matriser, $\mathbb{R}^{mn}$

Kjerneregel har en sammenheng til en sammensatt funksjon. Dette gjelder også for avbildninger, da en avbildning er styrt av funksjoner.
For $U \in \mathbb{R}^n$ og $V \in \mathbb{R}^m$, der U og V er åpne mengder og en funksjon $F : U \to V \in \mathbb{R}^m$. Da vil $F(x) \in V$ for $x \in U$. For $\mathbb{R}^m$ har vi enda en avbildning, $\mathrm{H} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$, og H vil da være $H = G \circ F$ for $x \in U$. H har flere koordinatfunksjoner som er derfinert ved :

$$h^i(x) = g^i(f^1(x), ..., f^m(x)) = g^i \circ F$$
$$i = 1, ..., p$$

For sammensatt avbildning og *kjerneregelen* følger teoremet:

Teorem 17 *La F,G,H være som forklart ovenfor. F er differensierbar i $a \in U$ og G er differensierbar i $g = F(a)$. Da er $H = G \circ F$, differensierbar på $x = a$ som følger*

$$DH(a) = DG(F(a)) \cdot DF(a)$$

der $\cdot$ er en matrisemultiplikasjon. Hvis F er differensierbar i U og G er differensierbar i V så holder dette for hver $a \in U$.

Ved de sammensatte funksjonene vil $H = G(F(a))$, og hvis de er differensierbare, så det eksistere en tangent i grensepunktet der $x \to a$:
Ettpunktsformelen gir :

$$H(x) - H(a) = DG(F(a)) \cdot DF(a) \cdot (x - a) + ||x - a||R_H(x, a)$$

der $H = G(F(a)), a \in U$.

$$G(F(x)) - G(F(a)) = DG(F(a)) \cdot DF(a) \cdot (x - a) + ||x - a||R_G(F(x), F(a))$$

Korollaret følger:

Korollar:
Hvis F og G er av klasse C^r (eller glatt) på U og V, så er $H = G \circ F$ av klasse C^r (eller glatt) på U.

6.3 Glatte mangfoldigheter

Begrepet glatt gir at en mangfoldighet er differensierbar uendelig mange ganger, C^∞.

Eksempel 43 *$f : x \in U_\alpha \to \mathbb{R}^n$ der $f(x) = e^{2x} \in \mathbb{R}$, med verdimengde,$V_f = (0, \infty)$. Atlaset $C^\infty \subseteq M$ og dens kodomene $f(x)$ er glatt i $\mathbb{R}^n$, da $f^n(x) = 2n \cdot e^{2x}$. Funksjonens invers har definisjonsmengde, $D_f = (0, \infty)$ og er definert ved:*
$f^{-1}(x) = \frac{ln(y)}{2}$, som også er glatt. Siden $f(x) = f^{-1}(x)$, så er f en homeomorfi, og området vi ser på er en glatt mangfoldighet, også kalt en differensierbar mangfoldighet med C^∞-struktur.

Det er egentlig ikke nødvendig å gi $f(x)$ og $f^{-1}(x)$ en definisjon- og verdimengde her, siden e er en positiv konstant og aldri vil bli 0 eller lavere for e^x. $ln(y)$ er dens inversfunksjon og vil aldri ha en avbildning for negative y eller for 0.

Glatte avbildninger

Avbildningen mellom euklidske rom gjør det mulig å avgjøre om en mangfoldighet er glatt eller ikke. **(John M. Lee,(2000) s.11**)[24]

Definisjon 42 *En diffeomorfisme $F : M \to N$ er en glatt avbildning med en glatt invers.*

Det er ikke nødvendigvis en avbildning mellom to mangfoldigheter (som blir presentert litt lenger ned), men det kan også være en glatt avbildning som har en glatt inversavbildning innenfor atlas.

Undermengdene $U \subset \mathbb{R}^n$ og $V \subset \mathbb{R}^m$, har en avbildning $F : U \to V$, som er glatt hvis funksjonen er uendelig deriverbar. Hvis F er en homeomorfi, og har en inversavbildning, vil den være en *diffeomorfisme*. I dette tilfellet har vi også en glatt mangfoldighet.**(Hitchin,(2014), s.21)**[20].

Litt tilbake om begrepet og definisjonen for *kompatibilitet*, sammen med definisjon 31 for *overgangsavbildning*, så kan man si at kartene (U_α, ϕ_α) og (U_β, ϕ_β) er kompatible hvis $U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$ eller hvis overgangsavbildningen $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}$ er en diffeomorfisme. Hvis disse kravene blir oppfylt, eller et av kravene blir oppfylt så sier man at kartene (U_α, ϕ_α) og (U_β, ϕ_β) er *glatt kompatible*. Dette oppfyller definisjon 34, som sier at et atlas A er et maksimalt, glatt atlas. I mangfoldigheter, og videre glatte mangfoldigheter er det en selvfølge at atlas er avgjørende for å definere hva en glatt avbildning er. Begrepene maksimal atlas, begrepet glatt og kompatible atlas skal brukes videre for å definere en *glatt struktur*: **(Lee, 2000, s.14)**[24]

Glatte strukturer

Den deriverte av en mangfoldighet endres ikke ved homeomorfiavbildningen. En mangfoldighet har et atlas med en homeomorf avbildning til det reelle plan. $U, V \in \mathbb{R}^m$ er åpne og har en avbildning $F : U \to V$ som er glatt hvis hver sammensatte funksjon har en kontinuerlig partiell derivativ av alle orden.

Mangfoldigheten M med homeomorfien ϕ til det reelle plan, har notasjonen $\phi : U \to V \in \mathbb{R}^n$, der definisjonen for at en mangfoldighet er glatt er gitt ved:
$f : M \to \mathbb{R}$ er glatt hvis og bare hvis $f \circ \phi^{-1} : V \to \mathbb{R}$ er glatt.

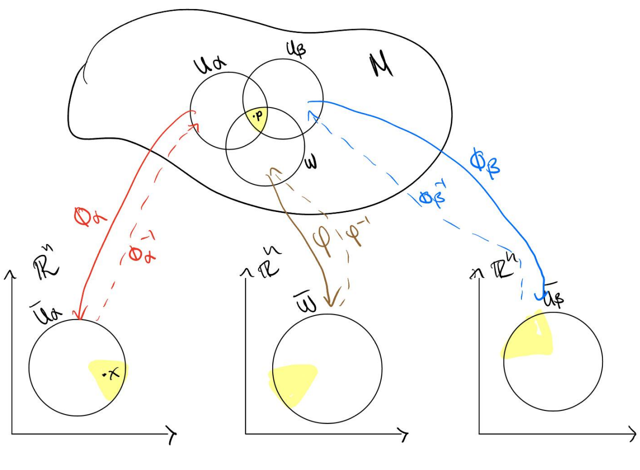
En mangfoldighet M er et topologisk n-mangfoldighet med kartene $(U_\alpha, \phi_\alpha), (U_\beta, \phi_\beta)$ og de sammensatte funksjonene utgjør overgangsavbildningene. Disse kartene er *glatt kompatibel* hvis $U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$, eller hvis overgangsavbildningen $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}$ er en diffeomorfisme.

For å kunne få en glatt struktur så må overgangsavbildningen være glatt, og i tillegg må det for to atlaser eksistere kompatible kart eller et snitt som ikke er det tomme rom. Maksimal atlas blir også vesentlig her, da et atlas er maksimalt hvis det ikke er en proper undermengde av et annet glatt atlas, og hvert kart som er i A er glatt kompatibel med et kart som allerede er i A.
Dette derfinerer en glatt struktur, der M har en glatt struktur hvis atlaset som dekker M er maksimalt og glatt.

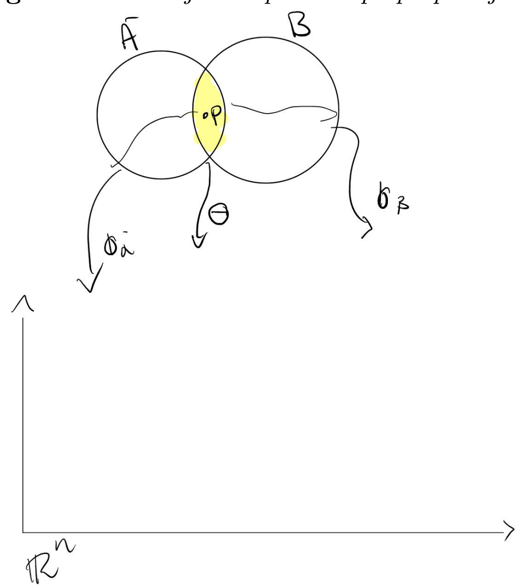
For atlaser i glatte mangfoldigheter har vi proposisjonen:

Proposisjon 6 *La M være en topologisk mangfoldighet*

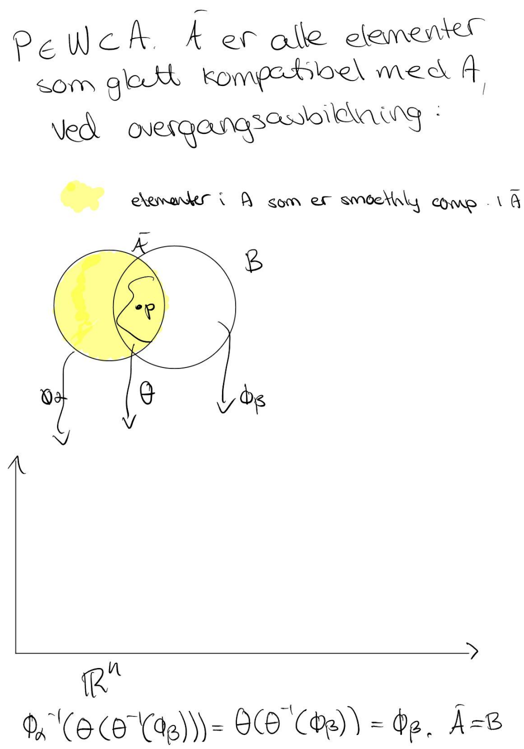
· Hver glatte atlas, A for M er inneholdt i et unikt, glatt, maksimalt atlas, også kalt den glatte strukturen bestemt av A.
· To glatte atlaser for M avgjør den samme, glatte strukturen hvis og bare hvis deres union er et glatt atlas.



Figur 15 *Illustrasjon til punkt 1 på proposisjon 2*



Figur 16 *Illustrasjon til punkt 2 på proposisjon 2*



Figur 17*Illustrasjon til punkt 2 på proposisjon 2*

Bevis:
· Første punkt kan bevises ved å ta utgangspunkt i hva en glatt struktur er. Et atlas $A \subset M$ har et annet atlas $\overline{A}$ der mengdene er glatt kompatibel med hvert kart i A. Det vil si at alle kart i A også skal være glatt kompatibel, og dermed glatt hvis det er kart i $\overline{A}$.

Hvis dette er tilfellet skal $\overline{A}$ ha to vilkårlige kart: (U_α, ϕ_α) og $(U_\beta, \phi_\beta) \in \overline{A}$. Siden de er glatt kompatible er overgangsavbildningen, $\phi_\beta \circ \phi_\alpha$ glatt.
La $(U_\alpha, \phi_\alpha) \cap (U_\beta, \phi_\beta) = (U_\alpha, \phi_\alpha) \cap (U_\beta, \phi_\beta) = p$ slik at $\phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) = \phi_\alpha(p) = x$
A er det gitte atlaset og vil gi et tredje kart i $A, (W, \theta) \in A$, med
$p \in W \implies p \in U_\alpha \cap U_\beta \cap W$.
Hvert kart i $\overline{A}$ er glatt kompatibel med alle i A, og gir dermed tre sammensatte avbildninger for overgangsavbildningen. **Se figur 13**. Disse avbildningene vil være

$$\phi_\alpha^{-1}(\theta(\theta^{-1}(\phi_\beta))) = \phi_\alpha^{-1}(\phi_\beta) = \phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}$$

På grunn av p er det for hver omegn av $x \in \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ en glatt avbildning som er glatt kompatibel. $\overline{A}$ er dermed et maksimalt atlas.

· Andre punkt tar utgangspunkt i at $\overline{A}$ er et maksimalt atlas, men at det også eksisterer et atlas B. $p \in W \subset \overline{A} \cap B$. I dette snittet og $\overline{A}$ er hvert element glatt kompatibel med alle elementene i A. Siden $\overline{A}$ er maksimal, vil alle $p \in \overline{A}$ utgjøre hele $\overline{A}$, og den sammensatte funksjon $\theta \circ \phi_\alpha = \theta$
Overgangsavbildningen, fra tidligere gir $\phi_\alpha^{-1}(\theta(\theta^{-1}(\phi_\beta))) = \theta(\theta^{-1}(\phi_\beta))) = \phi_\beta$. Ved å kjøre

denne overgangsavbildningen står ϕ_β igjen, man kan si at man kan få hele denne overgangsavbildningen ved å bare ta ϕ_β, for B som følger at B også er et maksimalt atlas. $B = \overline{A}$. **Se figur 15 og figur 16**

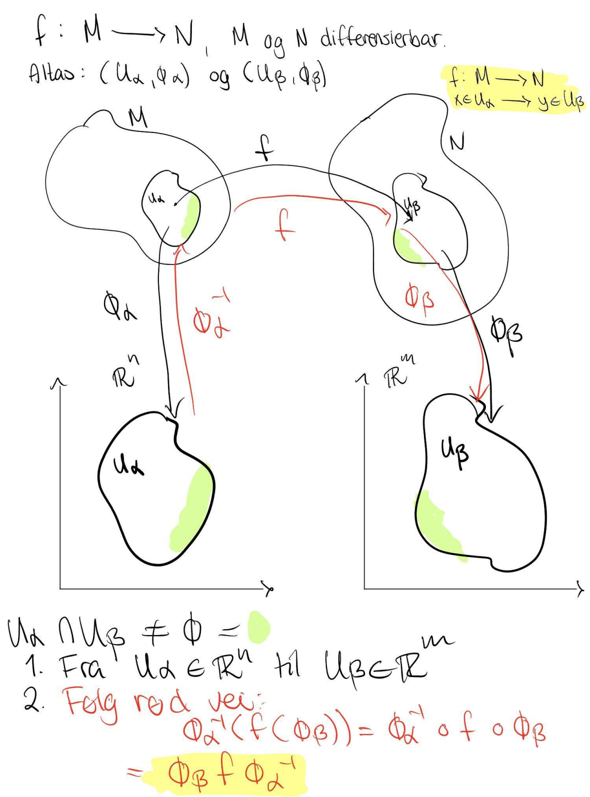
Avbildning mellom to mangfoldigheter

En annen definisjon innenfor glatte mangfoldigheter er ved to forskjellige mangfoldigheter.

Definisjon 43 *La $f : M \to N$ der M og N er differensierbare mangfoldigheter. f er glatt hvis det er atlaser (U_α, ϕ_α) på M og (U_β, ϕ_β) slik at avbildningen $\phi_\beta f \phi_\alpha^{-1}$ er glatt uansett hvor den er definert. Da er f en diffeomorfisme, og den har en glatt avbildning og en glatt invers.*

Definisjon 44 *En avbildning F: $M \to N$ av mangfoldigheter er en glatt avbildning hvis det for hver $x \in U_\alpha \subset M$ med kart (U_α, ϕ_α) i M, og kart (U_β, ϕ_β) av N med $F(x) \in U_\beta$, har den åpne mengden $F^{-1}(U_\beta)$ og sammensatte funksjonen $\phi_\beta \circ \phi_\alpha$ på $\phi_\alpha(F^{-1}(U_\beta \cap U_\alpha)$, er en C^∞-funksjon.*

Vist ved illustrasjon:



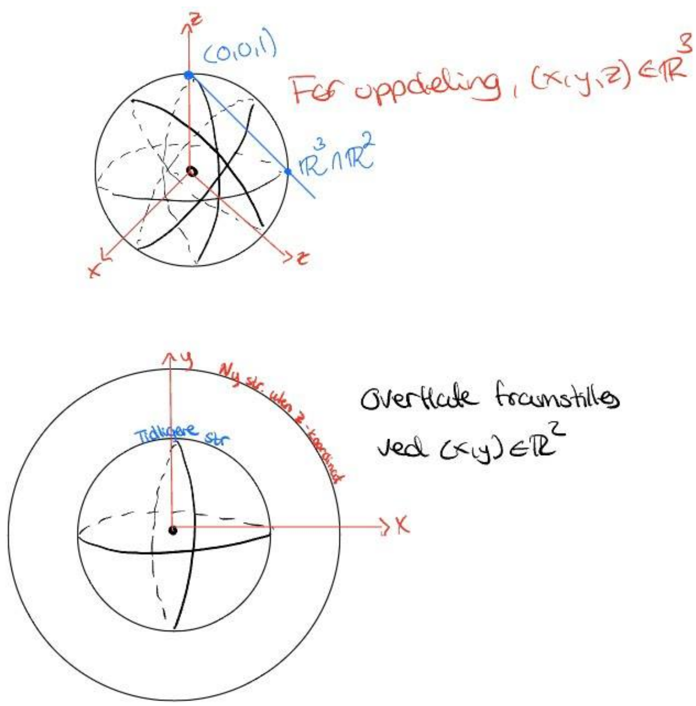
Figur 18

Overgangsavbildningen går fra $\mathbb{R}^n$ til $\mathbb{R}^m$ framstilt fra to mangfoldigheter M og N der avbildningen f er avbildningen mellom M og N.

For å kunne studere glatte mangfoldigheter er det en god idé å studere mangfoldigheten delt opp i deler, men i første omgang blir det delt opp i en mangfoldighet med en grense, og ikke en glatt mangfoldighet. Overgangsavbildningen er en avbildning av åpne undermengder i $\mathbb{R}^n$. Denne avbildningen er *glatt* hvis den er en lokal restriksjon av en glatt avbildning definert på en åpen undermengde av $\mathbb{R}^n$.

6.3.1 Mangfoldighet av dimensjon 2

Når det kommer til glatte mangfoldigheter av dimensjon 2 så viser tidligere eksempler at det er snakk om overflater på tredimensjonale figurer. Et eksempel kan være en sfære. Den ville utenifra sett ut som en tredimensjonal figur, og måtte dermed vært framstilt i (x, y, z)-koordinater. Men siden det omhandler overflater, så kan man tenke seg at man må finne et punkt som "brettes ut", altså tar et punkt og trekker ned gjennom et annet punkt på $\mathbb{R}^2$, slik at man får overflaten brettet ut, og ser bort i fra det inni selve sfæren. Ved framstilling uten projeksjon (som kommer i eksempel-delkapittelet) ville det sett slik ut:



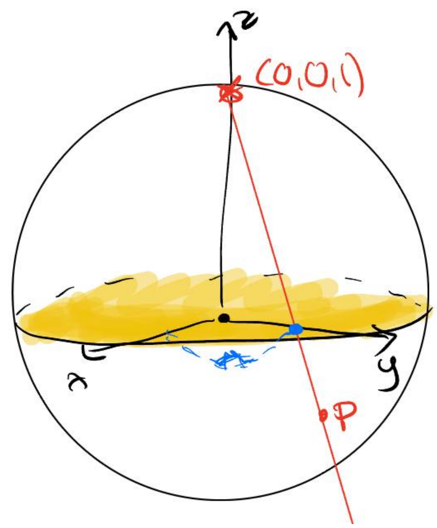
Figur 19

Definisjon 45 *En 2-dimensjonal mangfoldighet uten grense er et topologisk rom i M der alle punktene har en åpen ball som omegn. Hvis hver åpne undermengde som dekker M har en undermengde der igjen, så er mangfoldigheten kompakt.* ***(Edelsbrunner, H., Harer,J. (2010)., s.32)****[25]*

Med projeksjoner følger:

Eksempel 44 *Mangfoldigheten $M = S^2$ er enhetssfæren i $\mathbb{R}^3$, $S^2 \subset \mathbb{R}^3$.*

Bevis:
En sfære er en mangfoldighet, $M = S^2 \subset \mathbb{R}^3$, uttrykt i det euklidkse plan, $\mathbb{R}^3$, slik at $S^2 = \{(x, y, z)|x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$. Det må bevises at mangfoldigheten er lokalt euklidsk, altså at man får en avbildning i $\mathbb{R}^2$-planet ved projeksjon. Enhetssfæren er gitt ved $x^2+y^2+z^2 = 1$, med et punkt $N = (0, 0, 1)$ som kalles nordpolen. Ved snitt av sfæren med $\mathbb{R}^2$-planet, så får man ekvatoren på sfæren. For hvert punkt $P \in M$ eksisterer det en unik linje gjennom N og P, som snitter med $\mathbb{R}^2$ i $z = 0$ i nøyaktig ett punkt, P'(*markert med blått på figur 20 6.3.1*).



Figur 20
Den blå markeringen framstiller P'. Projeksjon gir et punkt i $\mathbb{R}^2$-planet, som viser at sfæren er en mangfoldighet. Jorda som en slik sfære.

Hvis mangfoldigheten i tillegg er kompakt vil den ha en grense på det Euklidske plan slik at den ikke har punkter der den er udefinert eller mangler et punkt. Eksempler på kompakte og ikke-kompakte mangfoldigheter kan være en sfære med *genus* 0 for kompakt mangfoldighet og den reelle linjen. Intervallet $(1, 2)$ er et eksempel for ikke-kompakte rom.

2-dimensjonale mangfoldigheter og mangfoldigheter generelt nevner begrepet *genus*. Kort og enkelt forklart er dette:

Definisjon 46 *En topologisk invariant-område av en overflate definert som det høyeste tallet av ikke-snittbare, enkle, lukkede kurver som kan bli tegnet på overflaten uten å separere det. Genus er antall hull på overflaten.* ***(Gray, A., (u.å.))****[26]*
Genus har for en orienterbar flate et forhold som ser slik ut:

$$\chi = 2 - 2g$$

og for en ikke-orienterbar flate et forhold seende slik ut:

$$\chi = 2 - g$$

der χ er relatert til Euler karakteristikk, og definert ved:

$$\chi(g) = V - E + F$$
$$\textit{der } V = \textit{antall hjørner}$$
$$E = \textit{antall kanter/linjesegmenter}$$
$$F = \textit{antall overflater}$$

Eksempel 45 *For en kube vil genus $\chi(g)$ være $V - E + F$*
Altså : $\chi(g) = 8 - 12 + 6$,
en kube er en orientert flate, og gir
$2g - 2 = 2 \Rightarrow g = 0$,
noe som stemmer siden en kube ikke har noen hull.

Kompakte orienterbare mangfoldigheter

Begrepene *orienterbare og ikke-orienterbare flater* blir nevnt. For orientering og orienterbarhet av mangfoldighet har man for to basiser $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ av et endelig dimensjonalt vektorrom er orientert:

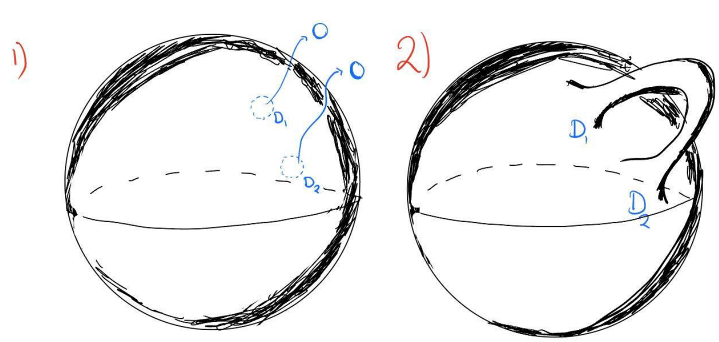
Definisjon 47 *$\mathcal{B}_1$ og $\mathcal{B}_2$ har samme orientering hvis overgangsmatrisen M_{21} fra $\mathcal{B}_1$ til $\mathcal{B}_2$ har en positiv determinant.*

Orienterbar har definisjonen:

Definisjon 48 *En sammenhengende mangfoldighet er orienterbar hvis og bare hvis dens orienteringsoverdekning O_M er ikke-sammehengende.*

Begrep som *med og mot klokka* kan bli aktuelle her. Ved flere avbildninger kan man si at en mangfoldighet eller flate er ikke-orienterbar hvis den er gått fra å være "med klokka" til å være "mot klokka". Med andre ord går en flate eller mengde fra å være "seg selv" ved startpunkt, til være "speilbilde" ved endepunkt av et intervall.

Det finnes flere klasser for mangfoldigheter av dimensjon 2 **(Encyclopedia of mathematics, (2020))**[27], der den viktigste og "enkleste" er sfæren, S^2, som er en overflate med genus 0. Begrepet *"håndtak"* blir introdusert, og skal gjøre at sfæren får en genus 1. Da må man fjerne disker av det dobbelte av genusen vi skal ha, og snittet av diskene må være tomt : $D_1 \cap D_2 = \emptyset$. Man får to grensesirkler på overflaten tilsvarende D_1 og D_2, der man identifiserer dette med et bøyd sylinder, med grense.



Figur 21

Et annet eksempel på en litt mer avansert mangfoldighet av dimensjon to er utgjort av en kompakt, orienterbar to dimensjonal mangfoldighet, eller en overflate med en grense. Disse kan komme fra en hvilken som helst overflate, og hvis man tar bort et endelig antall interiørpunkter/disker som ikke snitter hverandre, som i eksempelet over.
Å ta bort disse diskene som nå former en grense for den eksisterende overflaten, vil gi en ny grense overflate generert av grensene som tas vekk. Genusen for en slik mangfoldighet er den samme som genusen vi hadde for utgangspunktet. En mangfoldighet der genusen er 0, men som likevel har en grense anses på overflaten som punktert eller en disk.

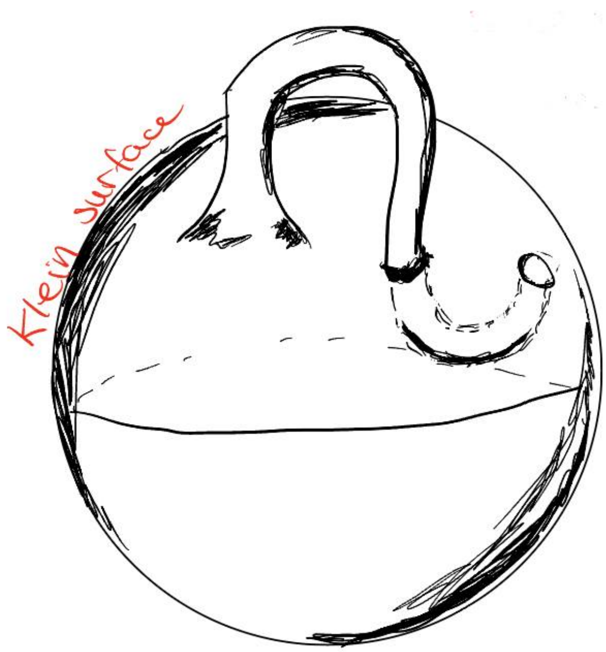
Kompakte ikke-orienterbare mangfoldigheter

Det finnes en klasse av mangfoldigheter som er kompakte, men ikke-orienterbare. Disse kan fortsatt være lukket og ha grenser.

Generelt sett kan en kompakt ikke-orienterbar todimensjonal mangfoldighet komme fra lukkede overflate ved å eliminere dens interiørpunkter/disker som er ikke-snittede, og istedenfor for å lage håndtak av sylinder med grense, bruke Möbius strip. I noen tilfeller får man det som kalles *Klein overflate.*

Definisjon 49 *En Klein-overflate er en lukket, ensidet overflate med genus 1. Den har kun en overflate, som er det samme på utsiden.*

Her kan man da istedenfor å lime med Möbius strip som håndtak, heller lime med et håndtak som er ikke orienterbar:



Figur 22

Mangfoldigheter av dimensjon 2

En to-dimensjonal mangfoldighet kan refereres til som *to-dimensjonale mangfoldigheter som overflate-topologi.*

Definisjonen for begrepet og definisjonen for *skillevegg* **(Edelsbrunner, H., Harer,J. (2010)., s.3)**[25], eller en oppdeling blir gitt. *Partition på engelsk:*

Definisjon 50 *En skillevegg for en mengde er er dekomponering av mengder til undermengder slik at hvert element i mengden er i en og bare en av undermengdene.*

Å gjøre dette vil gi flere mangfoldigheter delt opp hvorvidt de er sammenhengende. Hver oppdeling har ekvivalensrelasjoner.

Definisjon 51 *La S være en ikke-tom mengde, og $\sim$ en relasjon mellom elementene i mengden S, som oppfyller følgende områder for $a, b, c \in S$:*
1) Refleksivitet: $a \sim a$
2) Symmetri: Hvis $a \sim b$, så er $b \sim a$.
3) Transitivitet: Hvis $a \sim b$ og $b \sim c$, så er $a \sim c$

Ekvivalensrelasjoner gir en oppdeling fra dette teoremet:

Teorem 18 *Hvis S er en ikke-tom mengde og $\sim$ er en ekvivalensrelasjon på S, slik at $\sim$ utgjør en naturlig oppdeling av S, der $\overline{a} = \{x \in S | x \sim a\}$, der $\overline{a}$ representerer undermengden a hører til. Hver undermengde $\overline{a}$ er en ekvivalensklasse.*

Todimensjonale overflater oppfattes som sfære, kube, sylinder også videre. Det trenger ikke nødvendigvis å bare være dette, da en todimensjonal mangfoldighet enten er glatt (uendelig deriverbar) eller deriverbar kun et visst antall ganger.

En ball med senter i origo, har dette uttrykket:

$$B = \{x \in \mathbb{R}^2 \text{ slik at } ||x|| < 1\}$$

Ballen er homeomorf til $\mathbb{R}^2$ med funksjon f gitt ved:

$$f : B \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

der f er definert ved

$$f(x) = \frac{x}{1-||x||}$$

og hver undermengde av et topologisk rom som er homeomorf til B for en åpen ball.
Hvis det et tilfelle der det ikke er en rand eller grense for det topologiske rommet som er homeomorf til $\mathbb{R}^2$, så kan det topologiske rommet bli visualisert som hele $\mathbb{R}^2$-planet**(Edelsbrunner, H., Harer,J. (2010)., s.32)**[25].

Fra kompakthet må alle punktene være med. For en mangfoldighet og kompakthet finnes denne definisjonen:

Definisjon 52 *En mangfoldighet M er kompakt hvis det for hver åpne overdekning på M finnes et antall av hver åpne overdekning. Den åpne overdekningen har da en undermengde som er en åpen overdekning.*

Visualisering av en kompakt mangfoldighet som er orienterbar (eksempler er som sagt på eksempelkapittelet), så kan framstilles som en *mangfoldighet med grense* hvis vi fjerner hver undermengde som ikke har grense, altså hvert punkt som har en omegn. Randen for mangfoldigheten vil stå igjen og kalles *en kompakt, orienterbar mangfoldighet med grense.* En kompakt mangfoldighet består av små undergrupper formet som sirkler.

Klassifisering

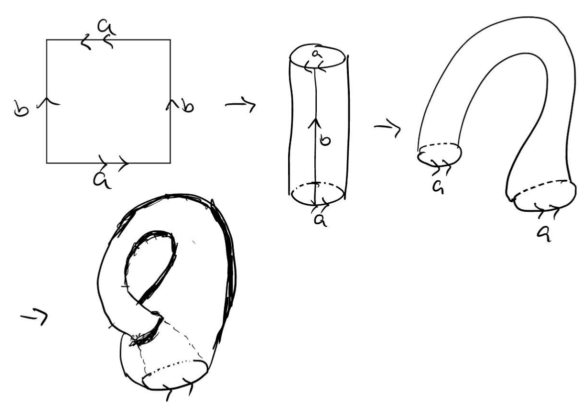
Det som er kjent ved overflater og objekter i matematikken kalles for *klassifisering.* Siden 2-mangfoldigheter er en såpass lav dimensjon så det brukes geometriske verktøy for å kunne klassifisere en mangfoldighet.
Ved klassifisering følger man visse kriterier eller egenskaper til en mangfoldighet, for så å organisere figurer og objekter basert på disse egenskapene **(Cuemath, (u.å.))**[28]. Ved lavdimensjonale mangfoldigheter bruker man det som blir kalt konvekse polygoner, triangulering eller ulike former for firkanter. Dette kan også innebære å skape assosiasjoner.

Eksempel 46 *Man kan for en notatbok assosiere dette med en blyant, slik at disse får en relasjon. Relasjonen til blyanten vil være et tre, siden det er laget av tre. For dette treet kan man lage en assosiasjon til et balltre, og videre assosiasjon til en ball.*

Ved enkel klassifisering kan man se på:
· Identifisering av like områder for objektene i en gitt mengde gitt fra betingelser eller andre egenskaper, for så å luke ut de som ikke fyller betingelsene.
· Se og forstå forholdet mellom mengdene og elementene for så å kategorisere dem.
· Bruke dette for å finne deler som mangler, og identifisere dette fra en annen gitt mengde eller innad i samme mengde.

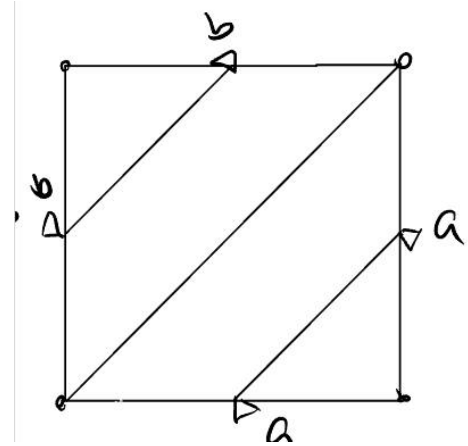
For klassifisering brukes det som kalles en *konveks polygon*, som er et polygon - grensen til et konveks mengde. Linjesegmentet mellom to punkter i polygonet er inneholdt i unionen av interiøret og grensen til polygonet. Kantene på et polygon er rette, og formen er lukket **(Mathisfun, (2020))**[29].

Ved polygonet og klassifiseringen så limer man parvise sider slik at hver side kommer i nøyaktig ett par. Her bruker man for endepunktene til polygonet, og limer disse sammen slik at de i $\mathbb{R}^2$-planet danner et bilde. For en Klein flaske ville algoritmen sett slik ut:



Figur 23

Innføring av kovekse polygoner, og introduksjon klassifiseringer vil vise at en sfære ser slik ut:



Figur 24

Kompakte familier uten grense gir dette teoremet for klassifisering:

Teorem 19 ***Klassifiseringsteoremet****- De uendelige familiene* $\mathbb{S}^2, \mathbb{T}^2$ *og* $\mathbb{P}^2$ *utgjør en familie av kompakte 2-mangfoldigheter uten grense.*

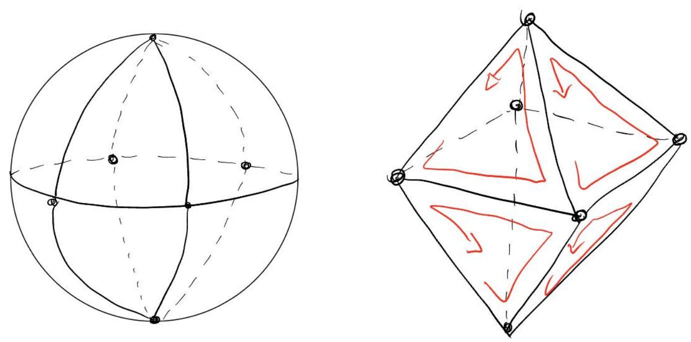
En kompakt mangfoldighet uten grense fjernes h hull ved å fjerne samme antall åpne disker, der alle får en kompakt 2-mangfoldighet, og hver $h \geq 1$ som gir en forskjellig overflate, og alle dens muligheter. **(Edelsbrunner, H., Harer,J. (2010)., s.36)**[25]

Triangluering

Triangulering deler overflaten opp til flere trekanter. Hvis det er tellbar antall trekanter på en overflate, så sier man at overflaten er kompakt **(Weisstein Eric W., u.å.)**[30]. For triangulering må kantene for trianglene i en mangfoldighet dele maks en av sidene, og de må være ved siden av hverandre**(Encyclopedia, (2020))**[31]. For triangluering har vi

Definisjon 53 *En triangulering av en overflate S er en homeomorfi $S \to K$ til et rom som kommer fra at man har en disjunkt union av triangler, og en mengde par av kanter som limes sammen. Bildet av hjørnene, kantene og trianglene har det samme navnet i K. Trianguleringen har følgende kriterier:*
· Hver kant i K har to distinkte endepunkter og for hver to hjørner som finnes er det på det meste kun en kant mellom dem.
· Hver triangel har tre distinkte kanter og for hver tre hjørner er det på det meste en triangel spent av dem.

I dette tilfellet har man det som kalles et *forenklet kompleks.***(Meier, (u.å.), s.3)**[32]
Ved å gjøre dette går man fra å ha overflater som ikke nødvendigvis er rette, til å faktisk gjøre de rette. For en sfære (som er homeomorf til et oktahedron) ville det se slikt ut **(Edelsbrunner, H., Harer,J. (2010)., s.36)**[25]:



Figur 25

Hvis hvert par ved siden av hverandre er konsist orienterte, så er mangfoldigheten orienterbar. I dette tilfellet er triangler ved siden av hverandre orientert motsatt vei.

6.3.2 Eksempel - jordkloden

Jordklodens overflate er et eksempel på en todimensjonal, glatt mangfoldighet. Den er uttrykt som en sfære med radius r, med senter i origo, som et snitt av tillukning og interiør, homeomorf til $\mathbb{R}^2$
Interiøret og tillukningen blir gitt ved $x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2$ homeomorf til $\mathbb{R}^3$.
For nordpolen brukes projeksjoner, z^2, slik at overdelen av kulen vil bli snittet med $\mathbb{R}^2$ og sfærens overflate er homeomorf med $\mathbb{R}^2$. Overflaten blir uttrykt ved (x, y), der $\{z^2\}$ er "eliminert":

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2,\ z^2 = \text{nordpolen.}$$
$$\{x^2 + y^2 + z^2 = r^2\} \cap (x, y) = x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \backslash \{z^2\} \simeq \mathbb{R}^2$$
$$\text{Randen} \in \mathbb{R}^2 \text{ vil ha større radius enn jordkloden.}$$

Jordklodens overflate kan nå fremtilles slik:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Sirkelformer i $\mathbb{R}^2$ gir at x og y kan uttrykkes som polarkoordinater:

$$x = rcos(\theta)$$
$$y = rsin(\theta)$$

Originalformelen gir ved substitusjon av x og y:

$$x^2 + y^2 = r^2$$
$$\Longrightarrow$$
$$r^2cos(\theta) + r^2sin(\theta) = r^2$$
$$\Longrightarrow$$
$$cos^2(\theta) + sin^2(\theta) = 1$$

Alle leddene i dette uttrykket kan deriveres uendelig mange ganger og strukturen for mangfoldigheten er dermed uendelig, C$^\infty$. Mangfoldigheten er glatt.

Jordklodens overflate blir den største "fysiske" størrelsen. I og med at den har er en grense er den er kompakt. Jordklodens overflate er dermed et maksimalt atlas, der alle under-overdekninger også er kompakte og glatte. Disse kan avbildes til euklidsk lokalt, på samme måte som jordkloden.

Det er mulig å ta atlas på jordkloden, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ og gjøre dette om til sirkler i $\mathbb{R}^2$ ved projeksjoner og snitt med $\mathbb{R}^2$. Det minste mulige atlaset vil være alle $(x, y) < r^2$ for $\{(x, y)|x^2 + y^2 < r^2\}$, der r er randen for ballen rundt x og y med sentrum i ett av punktene.

La oss si:

$$\text{Det isolerte punktet } \{1\} \in \mathbb{R} \text{ er lukket.}$$
$$f : \mathbb{R}^2 \Longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \mapsto x^2 + y^2$$
$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2|x^2 + y^2 = 1\} \implies x^2 + y^2 \text{ er lukket.}$$
$$f^{-1}(\{1\}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2|x^2 + y^2 = 1\} \text{ er lukket.}$$
$$\text{Fra tidligere utregninger:}$$
$$x^2 + y^2 = r^2 \Longleftrightarrow cos^2(\theta) + sin^2(\theta) = 1 \implies r^2 = x^2 + y^2 = 1$$

Siste linje sier at uansett radius, også ulik 1, blir $x^2 + y^2 = r^2$ en overdekning i hvilket som helst punkt i $\mathbb{R}^2$. Så hvilken som helst sirkel vil bli avbildet til $\{1\} \in \mathbb{R}$ som vil si at det er inneholdt i $\{1\}$ og dermed kompakt.

Kapittel 7

Konklusjon

Besvarelsen representerer på starten en framstilling av teoretisk matematikk ved bruk av eksempeloppgaver fra eksamen. Kort sammenlignet med LK20 vil slike oppgavene fokusere på begrepene argumentasjon, utforskning, dybdelæring og dermed forståelse. Eksamensoppgavene i faget burde gjenspeile disse begrepene gjennom oppgavene, noe resten av besvarelsen skal prøve å danne et blikk på.
Hoveddelen av besvarelsen representerer områdene topologi og mangfoldighet, med grunnleggende kunnskap som logikk, avbildninger og mengdelære for å vise deres relevanse. Områdene belager seg på blant algebra og geometri og matematikken uttrykkes gjennom definisjoner, teoremer og lemma ved bruk av forståelse og skissering av geometriske områder, eksempelvis overflater, og elementer i både $\mathbb{R}^2$- og $\mathbb{R}^3$-planet.

En god forståelse for matematikk på videregående skole er viktig for at man skal kunne utføre beregninger, bevis og utledninger basert på forståelse når det kommer til universitetsmatematikk. Det innebærer at man må gi elever på videregående oppgaver som gir en mestringsfølelse og generelt en følelse om at matematikk er nødvendig og gir dem noe, gjerne ved å fremme anvendelser av teori i virkelighetsnære situasjoner. Oppgaver som anvender kun teori er bra for dem som husker disse formlene og har pugget disse, men i det det går over til å *faktisk* anvende dem i en situasjon der det krever algoritmisk tankegang og oversikt er det kanskje ikke tilfelle at oppgavene på videregående gjenspeiler dette.

Eksamensoppgavene og eksempeloppgavene i avhandlingen har to forskjellige typer og innfallsvinkler. I hoveddelen av avhandlingen vil eksempeloppgavene gjenspeile et hverdagsliv i større grad enn hva eksamensoppgavene for R1 og R2 gjør, selv om mye av den samme teorien ligger bak begge disse. Oppgavene i hoveddelen får fram praktiske situasjoner, der eksempel 4 og eksempel 34 er to situasjoner man kan ta i bruk mengdelære og atlas for å fremme forståelse om hva det innebærer i en slik oppbygning for teori.
Siste delkapittel med jordkloden (kapittel 6.3.2) er en oppsummerende oppgave som belyser all tidligere teori i avhandlingen for å vise at man først og fremst kan se på jordkloden gjennom matematisk oppfatning, men også bruke matematiske forståelse tatt fra erfaringer og oppfatninger til å bekrefte at man *faktisk kan* se på jordkloden gjennom en matematisk oppfatning.

Hoveddelen i avhandlingen er generelt mye abstrakt teori, men viser som sagt hvordan

matematikk på universitetsnivå vil bli bygget opp etter at man har gått igjennom kurs som kun belager seg på abstrakt regning. Disse kursene er nødvendig for å kunne kjenne til formler og regler. Ved forståelse fra disse kursene vil automatisk fag som topologi, geometri, algebra og tallteori bli mer forståelig da man gjerne kan se sammenhenger i teoremer, definisjoner og lemma på en enklere måte.
Hoveddelen viser også hvordan oppfatninger og framstillinger fra verden kan framstilles i form av topologi og mangfoldigheter. Den skal framstille at uansett hvor lite et objekt er, så kan dens overflate bli framstilt i et koordinatsystem av n-dimensjoner. Selv noe så hverdagslig som jordkloden kan bli framstilt i det Euklidske plan som kontinuerlig.

Mangfoldigheter omhandler både geometri og algebra, og bygger videre på dette. Man kan få objekter framstilt som kompakte og orienterbare, og ikke-kompakte og orienterbare, i tillegg til at to forskjellige, helt ulike objekter kan ende opp med å ha samme avbildning i det Euklidkse plan, og dermed kalles homeomorfe.

Drøftingen i konklusjonsen skal være med på å svare på oppgavens problemstilling som er **"Hvor forberedt vil en elev som har fullført videregående teoretisk matematikk være på universitetsmatematikk?"**. Belsyninger på teori og eksamensoppgaver fra videregående skal forhåpentligvis danne et innblikk og refleksjon for leseren på hvorvidt eksamensoppgavene først og fremst treffer elementene i LK20, men også hvorvidt eleven vil være forberedt på matematikken som venter på et matematisk universitetsstudie.

Referanser

[1] Utdanningsdirektoratet. (2020). Kompetansemål og vurdering. https://www.udir.no/lk20/mat03-02/kompetansemaal-og-vurdering/kv293?lang=nob

[2] Wiley Online Library. (22.desember 2020). Washback in Language Assessment. *Abstract.* https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/9781405198431.wbeal1274.pub2

[3] Utdanningsnytt. (28.mars 2019). -Matte må forstås; pugging alene gir ikke forståelse. https://www.utdanningsnytt.no/fagartikkel-matematikk/matte-ma-forstas-pugging-alene-gir-ikke-forstaelse/171189

[4] Utdanningsdirektoratet. (2022). Matematikk R(MAT03-02). *Kjerneelementer.* https://www.udir.no/lk20/mat03-02/om-faget/kjerneelementer?lang=nob

[5] Utdanningsdirektoratet. (13.09.2021). Eksempelsett. *REA3056 Matematikk R1*

[6] Utdanningsdirektoratet. (2023). Eksempelsett. *REA3058 Matematikk R2*

[7] John Rognes. (17.november 2021). *Lecture notes on topology for MAT3500/4500 following J.R Munkres Textbook.* s.1-12., s.13-50., s.55-59., s.65-68.

[8] James Munkres. (2014). *Topology* (2.utgave). Pearson Education Limited.

[9] Encyclopedia. (07.02.2011). Continous function. https://encyclopediaofmath.org/wiki/Continuous_function

[10] Store norske leksikon. (23.06.2022). Projeksjon(matematikk). https://snl.no/projeksjon_-_matematikk

[11] Khan Academy. 21.desember 2012. *Triangle inquality theorem* [*video*]. Youtube. https://www.youtube.com/watch?v=KlKYvbigBqs

[12] E-academy. 31. august 2017. *basis of topology* [video]. Youtube. https://www.youtube.com/watch?v=f9lzFujA288

[13] Rowland, Todd.,Wolfram Mathworld. (u.å.). Coordinate chart. *hentet 18.01.2023 fra*https://mathworld.wolfram.com/CoordinateChart.html

[14] Rowland, Todd. Wolfram Mathworld. (u.å.) Atlas. *Hentet 18.01.2023 fra* https://mathworld.wolfram.com/Atlas.html

[15] Kosinski, A. (1993). *Differential Manifolds.* Academic Press.

[16] Rowland, Todd. Wolfram Mathworld. (u.å.) *Hentet 18.01.2023 fra*https://mathworld.wolfram.com/TransitionFunction.html

[17] Planet Math. (22.03.2013). *Manifold*. https://www.planetmath.org/Manifold

[18] Rowland, Todd. (u.å.) Manifold. https://mathworld.wolfram.com/Manifold.html

[19] Encyclopedia of mathematics. (30.12.2021). Differential manifold. https://encyclopediaofmath.org/wiki/Differentiable_manifold

[20] Nigel Hitchin. (2014). Differentiable Manifolds. *Course C3.3b*https://people.maths.ox.ac.uk/~joyce/Nairobi2019/Hitchin-DifferentiableManifolds.pdf

[21] Princeton University. (1958). s.2. Differential Topology. . *Lectures by John Milnor, Princeton University, Fall term 1958*https://www.maths.ed.ac.uk/~v1ranick/papers/difftop.pdf.

[22] Eric W. Weisstein. Wolfram Mathworld. (u.å). *Hentet 07.03.2022 fra*https://mathworld.wolfram.com/SmoothFunction.html

[23] William M. Boothby. (1975). *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemann Geometry*

[24] John M. Lee. (2000). *An introduction to Smooth Manifolds. Smooth Structure (3.utgave)*. University of Washington.

[25] Herbert Edelsbrunner., John Harer., (Januar 2010). Computional Topology: An Introduction. *Two Dimensional Manifolds*

[26] Gray, A. Wolfram Mathworld. (u.å.). Genus. *Hentet 07.02.2023 fra*https://mathworld.wolfram.com/Genus.html

[27] Encyclopedia of Mathematics. (2020). Two-dimensional Manifolds. https://encyclopediaofmath.org/wiki/Two-dimensional_manifold

[28] Cuemath. (u.å.). Classification. *Hentet 14.02.2023 fra*https://www.cuemath.com/numbers/classification/

[29] Mathisfun. (2020). Polygons. https://www.mathsisfun.com/geometry/polygons.html

[30] Eric W. Weisstein. Wolfram Mathworld. (u.å.). Compact Space. *Hentet 15.02.2023 fra*https://mathworld.wolfram.com/CompactSpace.html

[31] Encyclopedia. (2020). Triangulation. https://encyclopediaofmath.org/wiki/Triangulation

[32] Lennart Meier. (u.å.). The Classification of Surfaces. *Triangulations.Hentet 07.02.2023 fra*https://webspace.science.uu.nl/~meier007/ClassificationSurfaces